UNIVERSITÉ DU BURUNDI
GRENIER DU SAVOIR DU BURUNDI
Dépôt institutionnel officiel
https://repository.ub.edu.bi

# R ealisations canoniques des groupesde Poincar e versus Para-Poincar e

**NIYONSENGA, David**

**2020-05**
UB
https://repository.ub.edu.bi/handle/123456789/110

Document téléchargé depuis le **Grenier du Savoir du Burundi** — https://repository.ub.edu.bi

**UNIVERSITÉ DU BURUNDI**



**FACULTÉ DES SCIENCES**
**Département de Mathématiques**

---

# Réalisations canoniques des groupes de Poincaré versus Para-Poincaré

**David NIYONSENGA**

**MÉMOIRE**
présenté et défendu publiquement en vue d'obtenir le
**Diplôme de Mastère en Mathématiques Fondamentales et Appliquées**

---

Sous la direction de : **Prof. Joachim NZOTUNGICIMPAYE (Directeur)**
**Pr. Jean NDIMUBANDI (Co-directeur)**

Bujumbura, mai 2020

---

# Dédicaces

A mes chers parents,

A mes chers frères et sœurs,

A mes camarades étudiants.

# Remerciements

Au terme de ce travail, j'adresse mes sincères remerciements au Professeur Joachim NZOTUNGICIMPAYE, promoteur du présent sujet de mémoire de Mastère qui a accepté de diriger ce mémoire. Il s'est donné corps et âme lors de ce travail pour m'orienter en cas de difficulté. J'adresse aussi mes remerciements au Professeur Jean NDIMUBANDI, co-directeur de ce mémoire, pour ses contributions depuis le début du travail.

Je tiens à remercier tous les enseignants de la Faculté de Sciences, en particulier ceux du département de Mathématiques pour la formation de qualité qu'ils m'ont donnée surtout au cycle de Mastère.

Je remercie mes parents, mes frères et soeurs pour leur soutien moral et matériel tout au long de ma formation depuis l'école primaire jusqu'à présent.

Je remercie la famille du Docteur Domitien NDAYIRUKIYE et toute autre personne qui m'a soutenu matériellement et moralement.

Enfin, que tous ceux qui, de loin ou de près, ont contribué à l'aboutissement de ce travail reçoivent mes sincères remerciements.

# Résumé

Nous avons étudié les réalisations symplectiques (canoniques) des groupes de Poincaré $P(n+1)$ versus les groupes Para-Poincaré $P_{\pm}(n+1), \quad n = 1, 2$. Cette étude est faite pour la première fois dans la littérature. NGENDAKUMANA et ses coauteurs [15] ont étudié les réalisations symplectiques des groupes de Galilée versus Para-Galilée. En dimension deux d'espace ($n = 2$),nous sommes arrivés aux mêmes structures symplectiques non-commutatives $\sigma = d\pi \wedge dq^i - e^* B^* d\pi_1 \wedge d\pi_2$ pour Poincaré ( Galilée pour [15])et
$\sigma = dp_i \wedge dq^i \pm eBdq^1 \wedge dq^2$ pour Para-Poincaré (Para-Galilée pour [15])

# Abstract

We have studied the symplectic (canonical) realizations of the Poincaré group $P(n+1)$ versus Para-Poincaré groups $P_{\pm}(n+1), \quad n = 1, 2$. This study is done for the first time in the literature. NGENDAKUMANA and her coauthors [15] studied the symplectic realizations of Galileo versus Para-Galileo groups. In dimension two of space ($n = 2$), we arrived at the same non-commutative symplectic structures $\sigma = d\pi \wedge dq^i - e^* B^* d\pi_1 \wedge d\pi_2$ for Poincaré (Galilei for [15]) and $\sigma = dp_i \wedge dq^i \pm eBdq^1 \wedge dq^2$ for Para-Poincaré (Para-Galilei for [15])

# Table des matières

**Dédicaces** **i**

**Remerciements** **ii**

**Résumé** **iii**

**Abstract** **iii**

**Table des matières** **iv**

**Introduction générale** **1**

**1 Actions symplectiques de groupes de Lie** **3**
1.1 Espaces vectoriels symplectiques . . . . . 3
1.2 Variétés symplectiques . . . . . 3
1.3 Dérivée de Lie et produit intérieur . . . . . 4
1.4 Algèbre de Lie $(C^\infty(M,\mathbb{R}),\{.,.\})$ . . . . . 5
1.5 Algèbre de Lie des champs de vecteurs $(\mathcal{F}(M),[.,.])$ . . . . . 5
1.6 Actions symplectiques d'un groupe de Lie . . . . . 6
1.7 Réalisations symplectiques de groupes de Lie . . . . . 7
1.7.1 Structure de Lie-Poisson . . . . . 7
1.7.2 Forme de Kirillov . . . . . 8
1.7.3 Orbite coadjointe . . . . . 8
1.7.4 Réalisation symplectique sur l'orbite coadjointe . . . . . 10
1.7.5 Application comoment et moment . . . . . 11

**2 Groupes de Poincaré $P(n+1)$ et Para-Poincaré $P_\pm(n+1)$** **14**
2.1 Algèbres de Lie cinématiques . . . . . 15
2.2 Groupes de Lie cinématiques . . . . . 17
2.3 Groupes de Poincaré et Para-Poincaré . . . . . 18
2.3.1 Groupe de Poincaré $P(1+1)$ . . . . . 18
2.3.2 Groupes Para-Poincaré $P_\pm(1+1)$ . . . . . 19
2.3.3 Groupe de Poincaré $P(2+1)$ . . . . . 20
2.3.4 Groupes Para-Poincaré $P_\pm(2+1)$ . . . . . 23

**3 Réalisations symplectiques des groupes de Poincaré $P(1+1)$ et Para-Poincaré $P_{\pm}(1+1)$ 28**
3.1 Réalisations symplectiques du groupe $P(1+1)$ . . . . . 28
3.1.1 Groupe étendu . . . . . 28
3.1.2 Action adjointe . . . . . 29
3.1.3 Action coadjointe . . . . . 30
3.1.4 Orbite coadjointe . . . . . 30
3.1.5 Réalisation symplectique . . . . . 31
3.2 Réalisations symplectiques des groupes $P_{\pm}(1+1)$ . . . . . 32
3.2.1 Groupes étendus . . . . . 32
3.2.2 Action adjointe . . . . . 34
3.2.3 Action coadjointe . . . . . 34
3.2.4 Orbite coadjointe . . . . . 35
3.2.5 Réalisation symplectique . . . . . 36

**4 Réalisations symplectiques des groupes de Poincaré $P(2+1)$ et Para-Poincaré $P_{\pm}(2+1)$ 38**
4.1 Réalisation symplectique du groupe $P(2+1)$ . . . . . 38
4.1.1 Action adjointe . . . . . 38
4.1.2 Action coadjointe . . . . . 39
4.1.3 Orbite coadjointe . . . . . 42
4.1.4 Réalisation symplectique . . . . . 44
4.1.5 Structure noncommutative de l'orbite . . . . . 46
4.2 Réalisations symplectiques des groupes $P_{\pm}(2+1)$ . . . . . 46
4.2.1 Action adjointe . . . . . 46
4.2.2 Action coadjointe . . . . . 48
4.2.3 Orbite coadjointe . . . . . 52
4.2.4 Réalisation symplectique . . . . . 54
4.2.5 Structure noncommutative de l'orbite . . . . . 56

**Conclusion 57**

**Bibliographie 58**

# Introduction générale

La théorie des groupes et algèbres de Lie commence à la fin du 19ème siècle avec les travaux du mathématicien norvégien Sophus Lie (originellement comme une version pour les équations différentielles). Elle a connu de nombreuses ramifications (géométries non euclidiennes, espaces homogènes, analyse harmonique, théorie des représentations, groupes algébriques, groupes quantiques,...) et reste encore très active.
Par ailleurs, ces résultats interviennent aussi dans des branches a priori plus éloignées des mathématiques : en théorie des nombres, par le truchement des "formes automorphes" et en physique théorique, notamment dans la physique des particules ou la relativité générale où les exemples de groupes de Lie abondent et sont fondamentaux.
Les groupes de Lie sont en correspondance avec les algèbres de Lie, une notion plus algébrique, très utile pour classifier les groupes de Lie et leurs représentations, mais qui a aussi son propre intérêt et applications que ce soit en mathématique ou physique.
Un groupe de Lie (complexe) est une variété différentiable munie d'une structure de groupe telles que les applications produit et inverse soient analytiques(ou différentiables).

La géométrie symplectique a été découverte par Joseph Louis Lagrange (1736-1813) vers 1780, lorsqu'il a eu l'idée de considérer les éléments orbitaux des planètes du système solaire non plus comme des constantes, mais comme des variables, et qu'il a défini le crochet de deux éléments orbitaux. Son développement a été, pendant près de deux siècles, étroitement lié à ceux de la Mécanique analytique et de la Mécanique céleste, avec des contributions majeures de William Rowan Hamilton (1805-1865), Siméon Denis Poisson (1781-1840), Carl Jacobi (1804-1851), Gaston Darboux (1842-1917), Sophus Lie (1842-1899), Henri Poincaré (1854-1912), Élie Cartan (1869-1951), Constantin Carathéodory (1873-1950), Carl Ludwig Siegel (1896-1912), Andrei Kolmogorov (1903-1987), André Lichnerowicz (1915-1998),....

Depuis 1970, Jean Marie Souriau a introduit la mécanique symplectique. Depuis ses disciples ont construit des variétés symplectiques à partir de groupes de Lie, les orbites de l'action coadjointe. Une action d'un groupe de Lie sur une variété symplectique conservant la forme symplectique est dite réalisation symplectique ou action canonique. Les réalisations symplectiques de groupes de Lie, des groupes cinématiques en particulier, ont été étudiées par plusieurs auteurs. C'est le cas des groupe de de Sitter, de Newton-Hooke, de Galilée, de Poincaré, de Carroll, de Para-Galilée. C'est dans ce cadre que se situe notre travail.

Notre objectif principal est d'établir les réalisations symplectiques (canoniques) des groupes de Poincaré et Para-Poincaré en dimension une et deux d'espace qui n'ont pas encore été étudiés.

Ainsi, ce travail est subdivisé en quatre chapitres. Le premier chapitre introduit les réalisations (actions) symplectiques (canoniques) de groupes de Lie, notamment sur les orbites coadjointes de groupes de Lie. Le deuxième chapitre introduit les groupes de Poincaré et Para-Poincaré qui sont des groupes cinématiques. Le troisième chapitre et le quatrième chapitre étudient les réalisations symplectiques des groupes de Poincaré et Para-Poincaré en une dimension et en deux dimensions d'espace.

# Chapitre 1

# Actions symplectiques de groupes de Lie

## 1.1 Espaces vectoriels symplectiques

Un espace vectoriel symplectique $(M, \sigma)$ [4, 9, 10, 12] est un espace vectoriel $M$ muni d'une forme bilinéaire antisymétrique non dégénérée $\sigma$. On vérifie facilement qu'un espace vectoriel symplectique est donc de dimension paire notée $2n$.

Si $(e_1, \ldots, e_{2n})$ une base de $M$ et $(e^1, \ldots, e^{2n})$ est la base duale correspondante, alors $\sigma_{ij} = \sigma(e_i, e_j)$ sont les éléments matriciels de la matrice $\Omega$ représentant $\sigma$. Notons que son inverse a pour composantes $\sigma^{ij}$ tel que $\sigma_{ij}\sigma^{jk} = \delta_i^k$.
Une base $(e_1, \ldots, e_n; f^1, \ldots, f^n)$ de $M$ est dite canonique si $\sigma(e_i, e_j) = \sigma(f^i, f^j) = 0, \sigma(e_i, f^j) = \delta_i^j$. Dans une telle base, la structure symplectique identifie $(f^1, \ldots, f^n)$ à la base duale de $(e_1, \ldots, e_n)$ et les coordonnées $(q^1, \ldots, q^n, p_1, \ldots, p_n)$ telles que $M \ni x = e_i q^i + p_i f^i$ sont dites canoniques.

L'exemple standard d'un espace vectoriel symplectique est $\mathbb{R}^{2n}$ muni de la forme symplectique $\sigma$ représentée par la matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$$

## 1.2 Variétés symplectiques

Une variété symplectique $(M, \sigma)$ [4, 9, 10, 12] est une variété différentiable $M$ munie d'une 2-forme différentielle $\sigma$ telle que

- pour tout $x \in M$, la forme $\sigma_x$ telle que $\sigma_x(y) = \sigma(x, y)$, est non-dégénérée (c'est-à-dire partout de rang égal à la dimension de $M$) ;
- $\sigma$ est fermée (c'est-à-dire $d\sigma = 0$)

Soient $(M_1, \sigma_1)$ et $(M_2, \sigma_2)$ deux variétés symplectiques. Une application $\varphi : M_1 \to M_2$ est dite symplectique si $\varphi^* \sigma_2 = \sigma_1$. Une application symplectique inversible est appelée un symplectomorphisme. S'il existe un symplectomorphisme $\varphi : M_1 \to M_2$, on dit que $(M_1, \sigma_1)$ et $(M_2, \sigma_2)$ sont symplectomorphes.

L'espace $\mathbb{R}^{2n}$ muni de la 2-forme différentielle $\sigma = dq^i \wedge dp_i$ où $q^1, \ldots, q^n, p_1, \ldots, p_n$ sont les coordonnées usuelles de $\mathbb{R}^{2n}$ est un exemple de variété symplectique.
Un théorème de Darboux dit que si $M$ est une variété symplectique munie d'une 2-forme différentielle $\sigma$, alors il existe autour de chaque point de $M$ des coordonnées locales $q^1, \ldots, q^n, p_1, \ldots, p_n$ telle que $\sigma = dp_i \wedge dq^i$.

Une variété symplectique $(M, \sigma)$ est dite exacte si la classe de cohomologie de $\sigma$ est triviale, c'est-à-dire s'il existe globalement une 1-forme différentielle $\lambda$ telle que $\sigma = d\lambda$. On dit que $\lambda$ est un potentiel de $\sigma$.

## 1.3 Dérivée de Lie et produit intérieur

La dérivée de Lie d'une $k$-forme différentielle $\sigma$ par rapport à $X$ est la $k$-forme différentielle définie par

$$\begin{aligned} L_X \sigma &= \frac{d}{dt} \Phi_t^* \sigma \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{\Phi_t^*(\sigma(\Phi_t(p))) - \sigma(p)}{t}, \qquad p \in M \end{aligned} \tag{1.1}$$

où $\Phi_t(x))$ la position de $x$ après un déplacement d'une durée $t \in \mathbb{R}$.

Le produit intérieur d'une $k$-forme différentielle $\sigma$ par un champ de vecteurs $X$ sur une variété différentiable $M$ est une $(k-1)$-forme différentielle, notée $i_X \sigma$ , définie par

$$(i_X \sigma)(X_1, \ldots, X_{k-1}) = \sigma(X, X_1, \ldots, X_{k-1}), \tag{1.2}$$

où $X_1, \ldots, X_{k-1}$ sont des champs de vecteurs.

Soit $\sigma$ une 2-forme différentielle. La régularité de $\sigma$ (c'est-à-dire $det(\sigma_{ab}) \neq 0, dim(M) = 2n$) permet de définir l'isomorphisme $\alpha_p : T_p M \longrightarrow T_p^* M$ entre l'espace tangent en $p$ à $M$ et l'espace cotangent en $p$ à $M$ tel que $\alpha_p(X) = X \lrcorner \sigma = i_X \sigma$ et que $\langle \alpha_p(X), Y \rangle = \sigma_p(X, Y)$.
La 1-forme $i_X \sigma$ est dite contraction de $\sigma$ par $X$ ou produit intérieur de $X$ et $\sigma$.
Notons que si $X = X^a \dfrac{\partial}{\partial x^a}$ et $\sigma = \dfrac{1}{2} \sigma_{bc} dx^b \wedge dx^c$, alors $(X \lrcorner \sigma)_c = X^a \sigma_{ac}$.

## 1.4 Algèbre de Lie $(C^\infty(M,\mathbb{R}),\{.,.\})$

En coordonnées de Darboux , on a $\sigma = dp_i \wedge dq^i$ et $dH = \dfrac{\partial H}{\partial p_i}dp_i + \dfrac{\partial H}{\partial q^i}dq^i$. Le champ de vecteur hamiltonien $X_H$ associé à une fonction hamiltonienne $H \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ tel que $X_H \lrcorner \sigma = -dH$ est

$$X_H = \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial H}{\partial q^i}\frac{\partial}{\partial p_i}$$

et partant

$$X_H(f) = \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial f}{\partial q^i} - \frac{\partial H}{\partial q^i}\frac{\partial f}{\partial p_i} \equiv \{H,f\}$$

où $\{H,f\}$ est appelé le crochet de Poisson de $H$ et $f$.
On vérifie que le crochet de Poisson

1) est bilinéaire :

$$\{\alpha f + \beta g, ah + bk\} = \alpha a\{f,h\} + \alpha b\{f,k\} + \beta a\{g,h\} + \beta b\{g,k\}$$

2) est antisymétrique :

$$\{f,g\} = -\{g,f\}$$

3) satisfait l'identité de Jacobi :

$$\{f,\{g,h\}\} + \{g,\{h,f\}\} + \{h,\{f,g\}\} = 0$$

4) satisfait l'identité de Leibniz

$$\{f,gh\} = \{f,g\}h + g\{f,h\}$$

$$\forall \alpha,\beta,a,b \in \mathbb{R}, f,g,h,k \in C^\infty(M,\mathbb{R})$$

Les trois premières font de $(C^\infty(M,\mathbb{R}),\{.,.\})$ une algèbre de Lie. Si en plus la quatrième est satisfaite, on obtient une algèbre de Poisson.

## 1.5 Algèbre de Lie des champs de vecteurs $(\mathcal{F}(M),[.,.])$

Nous distinguons les champs de vecteurs [9] en champs de vecteurs localement hamiltoniens et globalement hamiltoniens sur une variété symplectique $(M,\sigma)$. Notons par $\mathcal{F}(M)$ l'espace des champs de vecteurs définis sur $(M,\sigma)$. On vérifie que $\mathcal{F}(M)$ muni du commutateur $[X,Y] = X \circ Y - Y \circ X$ est une algèbre de Lie.

Un champ de vecteurs $X \in \mathcal{F}(M)$ est dit localement hamiltonien si $X \lrcorner \sigma$ est fermée (c'est-à-dire $d(X \lrcorner \sigma) = 0$). Leur ensemble est noté $Ham_0(M)$.
Un champ de vecteurs $X \in \mathcal{F}(M)$ est dit globalement hamiltonien ou tout simplement hamiltonien si $X \lrcorner \sigma$ est exacte (c'est-à-dire $X \lrcorner \sigma = -df$). Leur ensemble est noté $Ham(M)$.

On a donc que $Ham_0(M) = \{X \in \mathcal{F}(M) : d(X \lrcorner \sigma) = 0\}$ et $Ham(M) = \{X \in \mathcal{F}(M) : X \lrcorner \sigma = -df\}$.

Comme toute forme exacte est fermée, on a que $Ham(M) \subset Ham_0(M)$, ainsi un champ de vecteurs hamiltoniens est automatiquement localement hamiltoniens et on a que $[Ham_0(M), Ham_0(M)] = Ham(M)$.
En effet supposons que $X, Y \in Ham_0(M)$. Comme on sait que $\forall \beta \in \Lambda^p M, X, Y \in \mathcal{F}(M)$,

$$X \lrcorner L_Y \beta - L_Y(X \lrcorner \beta) = [X, Y] \lrcorner \beta$$

on a que

$$X \lrcorner L_Y \sigma - L_Y(X \lrcorner \sigma) = [X, Y] \lrcorner \sigma$$

Mais on sait aussi que (identité d'homotopie de Cartan)

$$L_Y \sigma = Y \lrcorner d\sigma + d(Y \lrcorner \sigma)$$

Le fait que $Y \in Ham_0(M)$ et que $\sigma$ est fermée entrainent alors que

$$-L_Y(X \lrcorner \sigma) = [X, Y] \lrcorner \sigma$$

L' identité d'homotopie de cartan implique que

$$[X, Y] \lrcorner \sigma = -Y \lrcorner d(X \lrcorner \sigma) - d(Y \lrcorner (X \lrcorner \sigma)) = -d\sigma(X, Y)$$

et le fait que $X \in Ham_0(M)$ entraine alors que

$$[X, Y] \lrcorner \sigma = -d\sigma(X, Y)$$

et partant

$$[X, Y] \in Ham(M)$$

Finalement,

$$[Ham_0(M), Ham_0(M)] \subset Ham(M)$$

La sous-algèbre des champs de vecteurs hamiltoniens est donc l'algèbre dérivée de celle des champs de vecteurs localement hamiltoniens.

## 1.6 Actions symplectiques d'un groupe de Lie

Soit $(M, \sigma)$ est une variété symplectique et soit $G$ un groupe de Lie. L'application

$$\phi : G \to Aut(M)$$

qui associe à tout $g \in G$ un automorphisme $\phi_g$ de $M$ est appelé un symplectomorphisme si [16]

$$\phi_g^* \sigma = \sigma, \forall g \in G$$

Cette application est aussi appelée réalisation symplectique de $G$ sur $(M, \sigma)$.

Si $X \in \mathcal{G}$ et si $\phi_{exp(tX)}$ est un symplectomorphisme de $(M, \sigma)$, alors $X$ est un champ de vecteur localement hamiltonien, élément de $Ham_0(M)$. En effet, le fait que $\phi_{exp(tX)}$ est un symplectomorphisme de $(M, \sigma)$ signifie que $\phi^*_{exp(tX)}\sigma = \sigma$. Il suit que $L_X\sigma = 0$. Donc $i_X\sigma$ est fermée, qui signifie que $X$ est localement hamiltonien. Comme un champ de vecteur hamiltonien est localement hamiltonien, nous pouvons conclure qu'à un champ de vecteur hamiltonien correspond une réalisation symplectique.

Les orbites coadjointes que nous introduisons ci-dessous sont des exemples de variétés symplectiques naturellement construites sur un groupe de Lie et sur lesquelles un groupe de Lie agit naturellement canoniquement.
Un champ vectoriel $X$ hamiltonien est également appelé symplectique car il définit un automorphisme infinitésimal de $(M, \sigma)$. En d'autres termes, le flux généré sur $M$ par un champ vectoriel symplectique est constitué de transformations canoniques de $M$.
De manière équivalente $X_f(g) = \{f, g\}$ et les équations d'évolution sous le flux $\Phi_{exp(sX_f)}$ sur $M$ généré par $X_f$ sont

$$\frac{dz^a}{ds} = X_f(z^a)$$

qui sont exactement les équations de Hamilton habituelles lorsque $f$ est l'énergie et $s$ est le temps.

## 1.7 Réalisations symplectiques de groupes de Lie

### 1.7.1 Structure de Lie-Poisson

Soient $G$ un groupe de Lie et $\mathcal{G}$ son algèbre de Lie définie par les constantes de structures $C^k_{ij}$ à partir du crochet

$$[X_i, X_j] = X_k C^k_{ij} \tag{1.3}$$

où $i, j, k = 1, 2, \ldots, dim(G)$ et $(X_i)$ est la base de $\mathcal{G}$ [16].
Ces constantes de structures satisfont les propriétés suivantes :

• l'antisymétrie :

$$C^k_{ij} = -C^k_{ji} \tag{1.4}$$

• l'identité de Jacobi :

$$C^l_{ir}C^r_{jk} + C^l_{jr}C^r_{ki} + C^l_{kr}C^r_{ij} = 0 \tag{1.5}$$

### 1.7.2 Forme de Kirillov

L'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ et son dual $\mathcal{G}^*$ sont des espaces vectoriels naturellement associés au groupe de Lie $G$ et de même dimension que $G$, on prend $\mathcal{G}^*$ pour $M$ (un espace vectoriel) et dans ce cas $K_{ij}(a) = -a_k C_{ij}^k$ sont les éléments matriciels d'une forme appelée forme de Kirillov ou forme de Kirillov-Konstant-Souriau(KKS) [16].

Soit $M$ un espace vectoriel de même dimension que $G$. Si $(a_i)$ est une base de $M$, nous associons à chaque $a \in M$ la matrice définie par :

$$K_{ij}(a) = -a_k C_{ij}^k \tag{1.6}$$

Comme $C_{ij}^k = -C_{ji}^k$,il suit que

$$K_{ij}(a) = -K_{ji}(a) \tag{1.7}$$

Nous définissons une application

$$\{.,.\} : C^\infty(M,\mathbb{R}) \times C^\infty(M,\mathbb{R}) \to C^\infty(M,\mathbb{R})$$
$$(f,g) \rightsquigarrow \{f,g\}$$

par

$$\{f,g\} = K_{ij}(a)\frac{\partial f}{\partial a_i}\frac{\partial g}{\partial a_j} \tag{1.8}$$

On vérifie que c'est un crochet de Poisson.
Comme le crochet de Poisson ci-haut est défini par les constantes de structures de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$, nous l'appelons crochet de Lie-Poisson encore connu comme le crochet de Kirillov-Konstant-Souriau (KKS).
Ainsi, $(C^\infty(M,\mathbb{R}),\{.,.\})$ est une algèbre de Lie dite algèbre de Lie-Poisson.

### 1.7.3 Orbite coadjointe

Soit $G$ un groupe de Lie et $\mathcal{G}$ son algèbre de Lie. Soit $Ad : G \to Aut(\mathcal{G})$ la représentation adjointe de $G$ sur son algèbre de Lie $\mathcal{G}$ tel l'automorphisme $Ad_g$ associé à $g \in G$ est défini par [16]

$$Ad_g(X) = gXg^{-1}, X \in \mathcal{G}$$

Si $\mathcal{G}^*$ est le dual de $\mathcal{G}$, il est bien connu que l'action coadjointe de $G$ sur $\mathcal{G}^*$
$Ad^* : \mathcal{G}^* \times \mathcal{G} \to \Re$ est défini comme le dual de l'application $Ad$ :

$$\langle Ad_g^*\alpha, X\rangle = \langle \alpha, Ad_{g^{-1}}X\rangle, \alpha \in \mathcal{G}^*$$

où nous avons noté l'appariement entre $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}^*$ comme $\langle .,. \rangle$.

Alors pour un élément donné $\alpha \in \mathcal{G}^*$, les orbites coadjointes à travers $\alpha$ sont obtenues comme les images de l'application :

$$g \to Ad_g^*$$

où la notation usuelle est

$$\mathcal{O}_\alpha = \{Ad_g^*(\alpha), \alpha \in \mathcal{G}^*, g \in G\}$$

Considérons maintenant une dérivée(push-forward) de $Ad^*$. Celle-ci peut être définie comme le dual de la dérivée de $Ad$. Elle est normalement notée $ad$ et elle définit une application :

$$(Ad_g)_* \equiv ad_X : \mathcal{G} \to \mathcal{G}$$

telle que

$$ad_X Y = [X, Y]$$

où par $X$ nous avons noté l'élément de l'algèbre de Lie correspondant à $g \in G$.
Similairement, nous définissons $ad^*$ comme la dérivée de l'application $Ad^*$ c'est-à-dire :

$$(Ad_g^*)_* = ad_X^*$$

tel que

$$\langle ad_X^*(\alpha), Y\rangle = \langle \alpha, [X, Y]\rangle$$

Si $\alpha = \alpha_i \epsilon^i \in \mathcal{G}^*, X = e_i X^i, Y = e_i Y^i \in \mathcal{G}^*$ alors

$$\langle ad_X^*(\alpha), Y\rangle = K_{ij}(\alpha) X^i Y^j$$

où $K_{ij}(\alpha)$ est la 2-forme sur $\mathcal{G}^*$.
La représentation $\rho : \mathcal{G} \to \mathcal{F}(\mathcal{G}^*)$ de $\mathcal{G}$ sur l'espace des champs de vecteurs sur $\mathcal{G}^*$ définie par :

$$\rho(X_i) = K_{ij}(\alpha)\frac{\partial}{\partial \alpha_j}$$

est un homomorphisme d'algèbre de Lie tel que

$$Ker(K(\alpha)) = \{f \in C^\infty(\mathcal{G}^*, \mathbb{R}) : \rho(X) f = 0, X \in \mathcal{G}\}$$

Ceci signifie que $Ker(K(\alpha))$ est l'ensemble de tous les invariants $f$ de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{G}^*$ satisfaisant la relation suivante

$$K_{ij}(\alpha)\frac{\partial f}{\partial \alpha_j} = 0 \tag{1.9}$$

L'espace quotient

$$\mathcal{O}_\alpha = \mathcal{G}^*/Ker(K(\alpha)),$$

appelé l'orbite coadjointe de $G$ dans $\mathcal{G}^*$, est une variété symplectique dont la forme symplectique $\sigma^{ij}$ est obtenue à partir de :

$$\Omega_{ij}\sigma^{jk} = \delta_i^k$$

où $\Omega_{ij} = K_{ij}|\mathcal{O}_\alpha$ est la restriction de la forme de Kirillov à l'orbite. Explicitement, la 2-forme symplectique est donnée par la relation suivante

$$\sigma = (\Omega^{-1})^{ab} dx_b \wedge dx_a$$

qui prend la forme $\sigma = dp_i \wedge dq^i$ dans les coordonnées canoniques. Le fait que $\alpha$ soit arbitraire signifie que l'on peut choisir les invariants de l'action de $G$ pour caractériser l'orbite.
Si $(p_i, q^i)$ sont collectivement notées par $x_a$, le crochet de Poisson impliqué par la structure symplectique de Kirillov

$$\{H, f\} = -(\Omega)_{ab} \frac{\partial H}{\partial x_a} \frac{\partial f}{\partial x_b}$$

$$\{p_k, p_i\} = 0, \qquad \{p_k, q^i\} = \delta^i_k, \qquad \{q^k, q^i\} = 0 \tag{1.10}$$

où $p_i, q^i$ représentent les coordonnées canoniques généralisées et moments du système.

### 1.7.4 Réalisation symplectique sur l'orbite coadjointe

Soit $G$ un groupe de Lie et associons à chaque $g \in G$ une application $A_g : G \to G$ tel que $A_g(h) = ghg^{-1}$. L'application $A$ est une représentation de $G$ sur lui-même appelée représentation adjointe de $G$ sur lui-même. Si maintenant $h = exp(tX)$ où $X \in \mathcal{G} = T_eG$ et si $Ad_g = A_{g^*}$ alors $Ad_g(X) = gXg^{-1}$. L'application $Ad : G \to Aut(\mathcal{G}))$ qui associe à chaque $g \in G$ le automorphisme $Ad_g$ de $\mathcal{G}$ est une représentation de $G$ sur son algèbre de Lie. On l'appelle la représentation adjointe de $G$ sur son algèbre de Lie. Comme $\mathcal{G}$ est un espace vectoriel, il admet un espace vectoriel duale $\mathcal{G}^*$ et à chaque $g \in G$ est associé un automorphisme $Coad_g$ de $\mathcal{G}^*$ défini par [18]

$$\langle Coad_g(\alpha), Ad_g(X)\rangle = \langle \alpha, X\rangle \tag{1.11}$$

L'application $Coad : G \to Aut(\mathcal{G}^*)$ qui associe à chaque $g \in G$ l'automorphisme $Coad_g$ de $\mathcal{G}^*$ est une représentation de $G$ sur le dual de son algèbre de Lie appelée la représentation coadjointe de $G$.

Une orbite $\mathcal{O}_\alpha$ de $\alpha \in \mathcal{G}^*$ est définie par $\mathcal{O}_\alpha = \{Coad_g(\alpha), g \in G\}$. Comment déterminons-nous orbites coadjointes ? Soit d'abord $\mathcal{F}(\mathcal{G}^*)$ l'ensemble des champs de vecteurs définis sur $\mathcal{G}^*$, puis l'application $\rho : G \to \mathcal{F}(\mathcal{G}^*)$ définie par $\rho(X_i) = K_{ij}(\alpha)\dfrac{\partial}{\partial \alpha_j}$ est une représentation de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{F}(\mathcal{G}^*)$.

Les invariants coadjoints de $G$ forment un ensemble

$$\begin{aligned} Inv(\mathcal{G}^*) &= \{f \in C^\infty(\mathcal{G}^*, \mathbb{R}) : f(Coad_g(\alpha)) = f(\alpha)\} \\ &\equiv \{f \in C^\infty(\mathcal{G}^*, \mathbb{R}) : K_{ij}(\alpha)\frac{\partial f}{\partial \alpha_j} = 0\}. \end{aligned} \tag{1.12}$$

Il s'ensuit que $Inv(\mathcal{G}^*) = Ker(K(\alpha))$ et que $\mathcal{O}_\alpha = \mathcal{G}^*/Inv(\mathcal{G}^*)$. La restriction $\Omega$ de la matrice de Kirillov n'est pas dégénérée. Son inverse définit une forme symplectique $\sigma = (\Omega^{-1})^{ab} dq_a dq_b$ où $(q_a)$ sont des coordonnées sur l'orbite. De plus, la restriction $L_g$ de $Coad_g$ sur l'orbite est une **réalisation symplectique** de $G$ sur $\mathcal{O}_\alpha$.
Rappelons alors que $\rho(X) \in Ham(\mathcal{O}_\alpha)$. Nous avons ensuite à cette étape que

$$\begin{array}{ccc} C^\infty(\mathcal{O},\mathbb{R}) & \longrightarrow & Ham(\mathcal{O}) \subset Ham_0(\mathcal{O}) \\ & & \uparrow \\ & & Coad_{*e} \\ & & \uparrow \\ & & \mathcal{G} \end{array}$$

Notez que chaque variété symplectique est une coadjointe d'un certain groupe de Lie.

### 1.7.5 Application comoment et moment

Soit une application $P : \mathcal{G} \to C^\infty(\mathcal{O},\mathbb{R})$ tel que $\alpha(P(X)) = \rho(X)$, signifiant que le diagramme suivant [18]

$$\begin{array}{ccc} C^\infty(\mathcal{O},\mathbb{R}) & \xrightarrow{\quad\alpha\quad} & Ham(\mathcal{O}) \\ & \nwarrow^{P} & \uparrow \rho \\ & & \mathcal{G} \end{array}$$

commute.

L'application $P$ est appelée comoment. Nous voulons que $P$ soit un homomorphisme d'algèbres de Lie

$$P([X,Y]) = \{P(X), P(Y)\}, \forall X, Y \in \mathcal{G} \tag{1.13}$$

et soit unique.
Dans ces conditions, l'action de $G$ sur $(M,\sigma)$ est dite hamiltonienne et $(M,\sigma)$ est un espace $G$-hamiltonien.

L'obstruction à P pour être un homomorphisme est mesurée par

$$c(X,Y) = \{P(X), P(Y)\} - P([X,Y]) \tag{1.14}$$

où $c : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \to C^\infty(\mathcal{O}, \mathbb{R})$
Les faits que $\alpha : C^\infty(\mathcal{O}, \mathbb{R}) \to Ham(\mathcal{O})$ est un homomorphisme et que $\alpha \circ P = \rho$ impliquent alors que $\alpha(c(X,Y)) = 0$. Cela signifie que $c(X,Y)$ est constant, un élément de $\mathbb{R}$. Ainsi, $c : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \to \mathbb{R}$.
L'obstruction à $P$ pour être un homomorphisme est donc mesurée par un 2-cocycle défini sur $\mathcal{G}$.

Supposons que $P$ n'est pas unique. Il existe $b : \mathcal{G} \to \mathbb{R}$ tel que $P' = P + b$ est un autre comoment. Supposons également que $c' : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \to \mathbb{R}$ soit la mesure de $P'$ pour être un homomorphisme.
Nous vérifions que

$$c'(X,Y) = c(X,Y) - b([X,Y]) \equiv c(X,Y) + \delta b(X,Y) \tag{1.15}$$

Cela signifie que $c' = c + \delta b$. Les deux cocycles diffèrent alors par un 2-cocycle exact $\delta b$. Le comoment sera unique si $\delta b(X,Y) = 0$ signifiant que $b \in H^1(\mathcal{G}, \mathbb{R})$.
Nous savons aussi que

$$\delta c(X,Y,Z) = -c([X,Y],Z) + p.c. \tag{1.16}$$

c'est-à-dire

$$\delta c(X,Y,Z) = -[\{P([X,Y]), P(Z)\} + p.c.] + P([[X,Y],Z]) + p.c. \tag{1.17}$$

La linéarité de $P$ implique que

$$\delta c(X,Y,Z) = -[\{P([X,Y]), P(Z)\} + p.c.] + P([[X,Y],Z]) + p.c. \tag{1.18}$$

ce qui donne alors

$$\delta c(X,Y,Z) = -\{P([X,Y]), P(Z)\} - \{P([Y,Z]), P(X)\} - \{P([Z,X]), P(Y)\} \tag{1.19}$$

par l'identité Jacobi dans $(\mathcal{G}, [.,.])$.
En utilisant (1.14) et le fait que $c(X,Y)$ est constant $\forall X, Y$, nous obtenons

$$\delta c(X,Y,Z) = -\{P\{P(X), P(Y)\}, P(Z)\} + p.c. \tag{1.20}$$

et enfin $\delta c(X,Y,Z) = 0$ car $(C^\infty(\mathcal{G}, \mathbb{R}), \{.,\})$ est une algèbre de Lie.

L'obstruction à $P$ pour être un homomorphisme est ensuite mesurée par un 2-cocycle, élément du deuxième groupe de cohomologie $H^2(\mathcal{G}, \mathbb{R})$ de $G$.

Ainsi, partant d'une algèbre de Lie $G$, on vérifie s'il existe une extension centrale ($H^2(\mathcal{G},\mathbb{R}) \neq \{0\}$). Si on travaille avec l'algèbre de Lie étendue $\hat{\mathcal{G}} = \mathbb{R}^k \otimes \mathcal{G}, k = dim(H^2(\mathcal{G},\mathbb{R}))$. On passe au groupe de Lie étendu $\hat{G}$ via l'application exponentielle. Ceci rend $H^1(\hat{\mathcal{G}},\mathbb{R}) = \{0\}$, c'est-à-dire que $\hat{G}$ est simplement connexe.
Le moment de $G$ est alors défini comme l'application $\mu : \mathcal{O} \to \mathcal{G}^*$ tel que

$$\langle \mu(q), X \rangle = [P(X)](q) \tag{1.21}$$

Elle est équivariante en ce sens que $Coad_g(\mu(q)) = \mu(L_g(q))$.

Dans le chapitre deux, nous introduisons en résumé toutes les algèbres de Lie cinématiques étudiées en 1968 par LEVY-LEBLOND [2] et réétudiées en 2019 par NZOTUNGICIM-PAYE [17]. Nous introduisons explicitement les groupes de Poincaré et Para-Poincaré. Dans le troisième et quatrième chapitres, nous étudions les réalisations symplectiques de deux groupes cinématiques, le groupe de Poincaré $P(n+1)$ et les groupes Para-Poincaré $P_{\pm}(n+1)$ et ce dans le même esprit que NGENDAKUMANA & al. [15] ont fait. Nous nous limitons aux cas où $n = 1$ et $n = 2$. Ceux-ci n'ayant pas été considérés dans la littérature symplectique.

# Chapitre 2

# Groupes de Poincaré $P(n+1)$ et Para-Poincaré $P_{\pm}(n+1)$

Les groupes de Poincaré et Para-Poincaré que nous allons étudier dans ce mémoire font partie des groupes cinématiques comme nous allons le voir au cours de ce chapitre.
Nous supposons les notions de variétés différentiables, groupes et algèbres de Lie connues. Considérons une variété $M$ sur laquelle un groupe de transformation $G$ agit transitivement. Lorsque $M$ est l'espace-temps, $G$ est appelé groupe cinématique de $M$. Tous les espaces-temps $d$-dimensionnels avec courbure constante ont un groupe cinématique qui est un groupe de Lie de dimension $\frac{1}{2}d(d+1)$ [15, 16].
L'espace-temps cinématique est défini comme l'espace quotient de tout groupe cinématique par le sous-groupe formé des rotations et des vitesses.
Si $\mathcal{G}$ est l'algèbre de Lie du groupe cinématique $G$, ses générateurs infinitésimaux de rotations, ceux des vitesses, ceux des translations spatiales et celui de la translation temporelle sont respectivement notés par $J_a, K_i, P_i$ et$H$ où $a = 1, 2, \ldots, \frac{(d-2)(d-1)}{2}$ et $i = 1, 2, \ldots, d-1$.

Notons que si un élément général d'un groupe de Lie à un paramètre généré par X prend la forme $exp(sX)$, cela signifie que la quantité $sX$ est sans dimension et que la dimension physique du générateur $X$ est l'inverse de celle du paramètre $s$. Pour cette raison, les paramètres $x^i$,$t$ et $v^i$ auront la longueur $(L)$, le temps $(T)$ et la vitesse $(LT^{-1})$ pour dimensions. Leurs duaux (dans l'algèbre de Lie duale) sont respectivement les moments linéaires $p_i$ $(MLT^{-1})$, l'énergie $E$ $(ML^2T^{-2})$ et les moments statiques $k_i$ $(ML)$. De plus étant donné que les angles sont supposés sans dimension, leurs duaux $j_i$ (les moments angulaires) ont l'action $(ML^2T^{-1})$ comme dimension.
Nous introduisons dans la section suivante les algèbres de Lie cinématiques.

## 2.1 Algèbres de Lie cinématiques

D'après BACRY & LÉVY-LEBLOND[2], NGENDAKUMANA , NZOTUNGICIMPAYE et TODJIHOUNDE [16], les algèbres de Lie des groupes de Lie cinématiques possibles sont définis par les crochets de Lie communs

$$[J_j, J_k] = J_l\epsilon^l_{jk}, [J_j, K_k] = K_l\epsilon^l_{jk}, [J_j, P_k] = P_l\epsilon^l_{jk}, [J_j, H] = 0 \tag{2.1}$$

et ceux donnés par la table

**Table 2.1** – Crochets de Lie pour les algèbres de Lie cinématiques possibles

| Algèbres de Lie | $[K_i, H]$ | $[K_i, K_j]$ | $[K_i, P_j]$ | $[P_i, P_j]$ | $[P_i, H]$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $d\mathcal{S}_+$ | $P_i$ | $-\frac{1}{c^2}J_k\epsilon^k_{ij}$ | $\frac{1}{c^2}H\delta_{ij}$ | $\kappa^2 J_k\epsilon^k_{ij}$ | $\omega^2 K_i$ |
| $\mathcal{P}$ | $P_i$ | $-\frac{1}{c^2}J_k\epsilon^k_{ij}$ | $\frac{1}{c^2}H\delta_{ij}$ | 0 | 0 |
| $d\mathcal{S}_-$ | $P_i$ | $-\frac{1}{c^2}J_k\epsilon^k_{ij}$ | $\frac{1}{c^2}H\delta_{ij}$ | $-\kappa^2 J_k\epsilon^k_{ij}$ | $-\omega^2 K_i$ |
| $\mathcal{NH}_+$ | $P_i$ | 0 | 0 | 0 | $\omega^2 K_i$ |
| $\mathcal{G}$ | $P_i$ | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $\mathcal{NH}_-$ | $P_i$ | 0 | 0 | 0 | $-\omega^2 K_i$ |
| $\mathcal{P}_+$ | 0 | 0 | $\frac{1}{c^2}H\delta_{ij}$ | $\kappa^2 J_k\epsilon^k_{ij}$ | $\omega^2 K_i$ |
| $\mathcal{C}$ | 0 | 0 | $\frac{1}{c^2}H\delta_{ij}$ | 0 | 0 |
| $\mathcal{P}_-$ | 0 | 0 | $\frac{1}{c^2}H\delta_{ij}$ | $-\kappa^2 J_k\epsilon^k_{ij}$ | $-\omega^2 K_i$ |
| $\mathcal{G}_+$ | 0 | 0 | 0 | 0 | $\omega^2 K_i$ |
| $\mathcal{G}_-$ | 0 | 0 | 0 | 0 | $-\omega^2 K_i$ |
| $\mathcal{S}$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

où $\omega$ est une fréquence, $\kappa$ est une courbure alors que $c$ est une vitesse. On reconnaît les deux algèbres de deSitter $d\mathcal{S}_\pm$, celle de Poincaré $\mathcal{P}$, les deux de Newton-Hooke $\mathcal{NH}_\pm$, celle de Galilée $\mathcal{G}$,les deux Para-Poincaré $\mathcal{P}_\pm$, celle de Carroll $\mathcal{C}$, les deux Para-Galilée $\mathcal{G}_\pm$ et la statique $\mathcal{S}$ . Elles sont reliées par un processus dite de contraction d'algèbres de Lie (visualisé par le cube ci-dessous) définie pour la première fois par INONU & WIGNER [8] en 1953. La table ci-dessus a été établie par BACRY et LÉVY-LEBLOND [2] en 1968, retravaillée ensuite par NGENDAKUMANA & al. [16] en 2013.

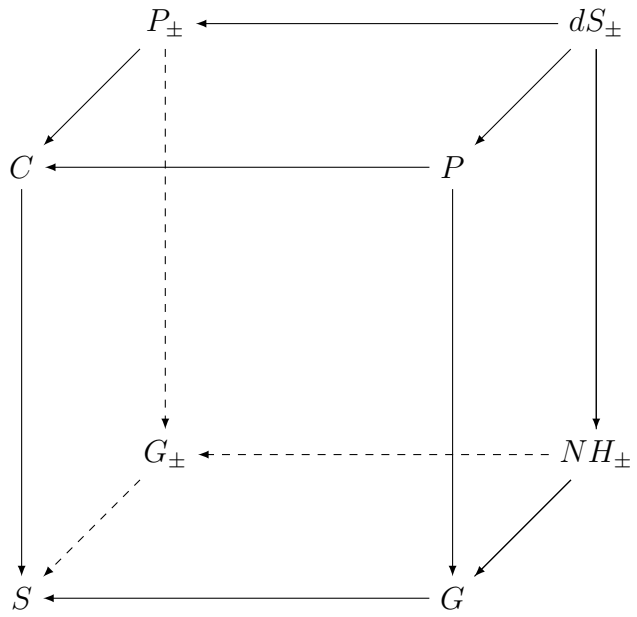



**Figure 2.1** – Flèches verticales,horizontales et obliques indiquant respectivement la contraction espace-vitesse,espace-temps et vitesse-temps

Les arrêtes parallèles de ce cube correspondent à un type de contraction : les contractions de haut en bas sont des contractions espace-vitesse, les contractions droite vers gauche sont des contractions espace-temps et les contractions de l'arrière vers l'avant sont des contractions vitesse-temps.

NZOTUNGICIMPAYE [17], trouvant que ces processus de contractions de BACRY et LEVY-LEBLOND [2] ne sont pas limpides, a proposé de travailler non pas avec $K_i$ mais avec $Q_i = \frac{1}{m}K_i$, $m$ étant un paramètre dynamique dont la dimension physique est une masse. Ce faisant il a remplacé les paramètres cinématiques $c$, $\kappa$ et $\omega$ par les paramètres dynamiques masse $m$, énergie $E_0 = mc^2$, compliance $C = \frac{1}{m\omega^2}$. Il a alors obtenu

$$[J_j, J_k] = J_l\epsilon^l_{jk}, [J_j, Q_k] = Q_l\epsilon^l_{jk}, [J_j, P_k] = P_l\epsilon^l_{jk}, [J_j, H] = 0 \tag{2.2}$$

et la table devient

**Table 2.2** – Les groupes cinématiques en fonction de la masse $m$,de la compliance $C$ et de l'énergie $E_0$

| Algèbres de Lie | $[Q_i, H]$ | $[Q_i, Q_j]$ | $[Q_i, P_j]$ | $[P_i, P_j]$ | $[P_i, H]$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $d\mathcal{S}_+$ | $\frac{1}{m}P_i$ | $-\frac{1}{mE_0}J_k\epsilon_{ij}^k$ | $\frac{1}{E_0}H\delta_{ij}$ | $\frac{1}{CE_0}J_k\epsilon_{ij}^k$ | $\frac{1}{C}Q_i$ |
| $\mathcal{P}$ | $\frac{1}{m}P_i$ | $-\frac{1}{mE_0}J_k\epsilon_{ij}^k$ | $\frac{1}{E_0}H\delta_{ij}$ | 0 | 0 |
| $d\mathcal{S}_-$ | $\frac{1}{m}P_i$ | $-\frac{1}{mE_0}J_k\epsilon_{ij}^k$ | $\frac{1}{E_0}H\delta_{ij}$ | $-\frac{1}{CE_0}J_k\epsilon_{ij}^k$ | $-\frac{1}{C}Q_i$ |
| $\mathcal{NH}_+$ | $\frac{1}{m}P_i$ | 0 | 0 | 0 | $\frac{1}{C}Q_i$ |
| $\mathcal{G}$ | $\frac{1}{m}P_i$ | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $\mathcal{NH}_-$ | $\frac{1}{m}P_i$ | 0 | 0 | 0 | $-\frac{1}{C}Q_i$ |
| $\mathcal{P}_+$ | 0 | 0 | $\frac{1}{E_0}H\delta_{ij}$ | $\frac{1}{CE_0}J_k\epsilon_{ij}^k$ | $\frac{1}{C}Q_i$ |
| $\mathcal{C}$ | 0 | 0 | $\frac{1}{E_0}H\delta_{ij}$ | 0 | 0 |
| $\mathcal{P}_-$ | 0 | 0 | $\frac{1}{E_0}H\delta_{ij}$ | $-\frac{1}{CE_0}J_k\epsilon_{ij}^k$ | $-\frac{1}{C}Q_i$ |
| $\mathcal{G}_+$ | 0 | 0 | 0 | 0 | $\frac{1}{C}Q_i$ |
| $\mathcal{G}_-$ | 0 | 0 | 0 | 0 | $-\frac{1}{C}Q_i$ |
| $\mathcal{S}$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Pour NZOTUNGICIMPAYE [17], les contractions de haut en bas (les contractions espace-vitesse) correspondent à $E_0$ tendant vers l'infini, les contractions de droite à gauche (les contractions espace-temps) correspondent à $m$ tendant vers l'infini tandis que les contractions de l'arrière vers l'avant (les contractions vitesse-temps) correspondent à $C$ tendant à l'infini.

## 2.2 Groupes de Lie cinématiques

La section précédente a introduit toutes les algèbres de Lie cinématique possibles.
Pour passer aux groupes de Lie cinématiques correspondants, du moins ceux simplement connexes, on utilise l'application exponentielle $exp : \mathcal{G} \to G$ définie par [3]

$$exp(X) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{X^m}{m!} \tag{2.3}$$

Deux formules de Baker-Campbell-Hausdorff sont alors utiles pour établir la loi de groupe correspondante pour $G$. Elles sont données par [1, 11]

$$exp(X)exp(Y) = exp(X + Y + \frac{1}{2}[X, Y] + \frac{1}{12}[X, [X, Y]] - \frac{1}{12}[Y, [Y, X]] + \ldots) \tag{2.4}$$

et

$$exp(X)exp(Y)exp(-X) = exp(Y + [X, Y] + \frac{1}{2!}[X, [X, Y]] + \frac{1}{3!}[X, [X, [X, Y]]] + \ldots) \tag{2.5}$$

## 2.3 Groupes de Poincaré et Para-Poincaré

### 2.3.1 Groupe de Poincaré $P(1+1)$

L'élément général $g$ du groupe de Poincaré $P(1+1)$ [16] en une dimension spatiale est paramétré par les translations spatio-temporelles $(x,t)$ et la vitesse $v$. On le note par le triplet $g=(v,x,t)$. C'est un groupe de Lie résoluble de dimension 3.
La structure de l'algèbre Lie $\mathcal{P}(1+1)$ est définie par les crochets de Lie

$$[K,P]=\frac{1}{c^2}H,\quad [K,H]=P,\ [P,H]=0 \tag{2.6}$$

où $K$ génère les vitesses, $P$ génère les translations spatiales tandis que $H$ génère les translations temporelles.
L'élément général du groupe s'écrit alors :

$$g=exp(tH+xP)exp(vK) \tag{2.7}$$

En utilisant la formule de Baker-Campbell-Hausdorff(B-C-H) définie par :

$$exp(X)exp(Y)exp(-X)=exp(Y+[X,Y]+\frac{1}{2!}[X,[X,Y]]+\frac{1}{3!}[X,[X,[X,Y]]]+\ldots) \tag{2.8}$$

on vérifie que la loi de groupe est donnée par :

$$(x,t,v)(x',t',v')=(x+x'\cosh\frac{v}{c}+t'c\sinh\frac{v}{c},t+t'\cosh\frac{v}{c}+\frac{x'}{c}\sinh\frac{v}{c},v+v') \tag{2.9}$$

Le groupe $P(1+1)$ peut donc être réalisé matriciellement par la matrice

$$D(v,x,t)=\begin{pmatrix}\cosh\frac{v}{c} & c\sinh\frac{v}{c} & x\\ \frac{1}{c}\sinh\frac{v}{c} & \cosh\frac{v}{c} & t\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

de façon que $D(v,x,t)=D(v,0,0)D(0,x,t)$.

On vérifie aussi de (2.9) que l'algèbre Lie $\mathcal{P}(1+1)$ est réalisée par les champs de vecteurs invariants à gauche

$$P=\cosh\frac{v}{c}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{1}{c}\sinh\frac{v}{c}\frac{\partial}{\partial t},\quad H=c\sinh\frac{v}{c}\frac{\partial}{\partial x}+\cosh\frac{v}{c}\frac{\partial}{\partial t},\quad K=\frac{\partial}{\partial v} \tag{2.10}$$

On voit bien que $P,H,K$ ont respectivement la dimension d'une courbure($L^{-1}$), d'une fréquence($T^{-1}$) et d'une lenteur ($L^{-1}T$).

### 2.3.2 Groupes Para-Poincaré $P_{\pm}(1+1)$

Les groupes Para-Poincaré $P_{\pm}(1+1)$ [16] en une dimension spatiale sont comme le groupe de Poincaré, des groupes de Lie de dimension trois paramétrés aussi par une vitesse $v$ des translations spatio-temporelles $(x,t)$. L'élément général est le triplet $g=(v,x,t)$.
L'algèbre de Lie des groupes Para-Poincaré $\mathcal{P}_{\pm}(1+1)$ est définie par :

$$[K,P]=\frac{1}{c^2}H,\quad [K,H]=0,\quad [P,H]=\pm\omega^2 K \tag{2.11}$$

L'élément général du groupe $P_{\pm}(1+1)$ s'écrit

$$g=exp(vK+tH)exp(xP) \tag{2.12}$$

En utilisant la formule de Baker-Campbell-Hausdorff (2.8),on vérifie que la loi de groupe $P_{+}(1+1)$ est donnée par :

$$(v,t,x)(v',t',x')=(v+v'\cos\frac{\omega x}{c}+t'c\omega\sin\frac{\omega x}{c},t+t'\cos\frac{\omega x}{c}-\frac{v'}{c\omega}\sin\frac{\omega x}{c},x+x') \tag{2.13}$$

tandis que celle du groupe pour $P_{-}(1+1)$ est

$$(v,t,x)(v',t',x')=(v+v'\cosh\frac{\omega x}{c}-t'c\omega\sinh\frac{\omega x}{c},t+t'\cosh\frac{\omega x}{c}-\frac{v'}{c\omega}\sinh\frac{\omega x}{c},x+x') \tag{2.14}$$

La loi de multiplication définie en (2.13) implique que l'élément général $g$ de $P_{+}(1+1)$ peut être représenté matriciellement par

$$D(v,x,t)=\begin{pmatrix}\cos\frac{\omega x}{c} & c\omega\sin\frac{\omega x}{c} & v\\ -\frac{1}{c\omega}\sin\frac{\omega t}{c} & \cos\frac{\omega x}{c} & t\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

qui est équivalente à

$$D(v,x,t)=\begin{pmatrix}1 & 0 & v\\ 0 & 1 & t\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\frac{\omega x}{c} & c\omega\sin\frac{\omega x}{c} & 0\\ -\frac{1}{c\omega}\sin\frac{\omega x}{c} & \cos\frac{\omega x}{c} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

De même la loi (2.14) du groupe $P_-(1+1)$ permet de représenter l'élément général par la matrice

$$D(v,x,t) = \begin{pmatrix} \cosh\frac{\omega x}{c} & -c\omega\sinh\frac{\omega x}{c} & v \\ -\frac{1}{c\omega}\sinh\frac{\omega x}{c} & \cosh\frac{\omega x}{c} & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

qui est équivalente à

$$D(v,x,t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & v \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh\frac{\omega x}{c} & -c\omega\sin\frac{\omega x}{c} & 0 \\ -\frac{1}{c\omega}\sinh\frac{\omega x}{c} & \cosh\frac{\omega x}{c} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On vérifie que les champs de vecteurs invariants à gauche sur $P_+(1+1)$ sont donnés par :

$$K = \cos\frac{\omega x}{c}\frac{\partial}{\partial v} - \frac{1}{c\omega}\sin\frac{\omega x}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \quad H = c\omega\sin\frac{\omega x}{c}\frac{\partial}{\partial v} + \cos\frac{\omega x}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \quad P = \frac{\partial}{\partial x} \tag{2.15}$$

tandis que ceux pour $P_-(1+1)$ sont

$$K = \cosh\frac{\omega x}{c}\frac{\partial}{\partial v} - \frac{1}{c\omega}\sinh\frac{\omega x}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \quad H = -c\omega\sinh\frac{\omega x}{c}\frac{\partial}{\partial v} + \cosh\frac{\omega x}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \quad P = \frac{\partial}{\partial x} \tag{2.16}$$

### 2.3.3 Groupe de Poincaré $P(2+1)$

Le groupe de Poincaré $P(2+1)$ [7, 13]est un groupe de Lie de dimension 6 des transformations de $(2+1)-D$ espace-temps de Minkowski muni d'une métrique $g_{ij} = diag(-1,-1,1)$.Deux axes cartésiens spatiaux pourront être notés par $X_1$ et $X_2$.
Chaque élément de $P(2+1)$ est paramétré par le couple $(\Lambda, a)$ où $a = {}^t(x_1, x_2, t)$ représente la translation spatio-temporelle tandis que $\Lambda$ représente la transformation de Lorentz.
L'algèbre de Lie $\mathcal{P}(2+1)$ du groupe de Poincaré $P(2+1)$ est engendrée par la base $(J, K_i, P_i, H),\ i = 1, 2.$ $J$ génère les rotations dans le plan, $K_i$ génère les vitesses dans la direction $i$ d'espace, $P_i$ génère les translations dans la direction $i$ d'espace et enfin $H$ génère les translations temporelles.
La structure de l'algèbre de Lie est définie par crochets de Lie

$$\begin{aligned} &[J, K_j] = K_i\epsilon^i_j, \qquad [K_i, K_j] = -\frac{1}{c^2}J\epsilon_{ij} \\ &[J, P_j] = P_i\epsilon^i_j, \qquad [K_i, P_j] = \frac{1}{c^2}H\delta_{ij}, \qquad [P_i, P_j] = 0 \\ &[J, H] = 0, \qquad [K_i, H] = P_i, \qquad [P_i, H] = 0 \end{aligned} \tag{2.17}$$

où $\epsilon^i_j$ est le tenseur antisymétrique d'ordre 2 tandis que $\delta_{ij}$ sont les symboles de Kronecker. Nous remarquons que l'algèbre $\mathcal{P}(2+1) = so(2,1) \oplus \mathbb{R}^{2,1}$ où $so(2,1)$ est engendrée par $(J, K_1, K_2)$ tandis que $\mathbb{R}^{2,1}$ est engendrée $(P_1, P_2, H)$. L'action adjointe de $\mathbf{so}(2,1)$ sur $\mathbb{R}^{2,1}$ est représentée dans la base $\{P_1, P_2, H\}$ par les matrices suivantes :

$$\rho(J) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \rho(K_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{c^2} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \rho(K_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{c^2} & 0 \end{pmatrix} \tag{2.18}$$

Il suit que l'on peut écrire

$$\Lambda = exp(v^2\rho(K_2))exp(v^1\rho(K_1))exp(\theta\rho(J)) \tag{2.19}$$

Comme

$$exp(v^1\rho(K_1)) = \begin{pmatrix} \cosh\frac{v^1}{c} & 0 & c\sinh\frac{v^1}{c} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{c}\sinh\frac{v^1}{c} & 0 & \cosh\frac{v^1}{c} \end{pmatrix} = L(v^1)$$

$$exp(v^2\rho(K_2)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh\frac{v^2}{c} & c\sinh\frac{v^2}{c} \\ 0 & \frac{1}{c}\sinh\frac{v^2}{c} & \cosh\frac{v^2}{c} \end{pmatrix} = L(v^2) \tag{2.20}$$

$$exp(\theta\rho(J)) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = R(\theta) \tag{2.21}$$

on obtient que

$$\Lambda = (\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3) \tag{2.22}$$

où les colonnes $\Lambda_i$ sont

$$\Lambda_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta \cosh \dfrac{v^1}{c} \\ \cos\theta \sinh \dfrac{v^1}{c} \sinh \dfrac{v^2}{c} + \sin\theta \cosh \dfrac{v^2}{c} \\ \dfrac{1}{c}(\cos\theta \sinh \dfrac{v^1}{c} \cosh \dfrac{v^2}{c} + \sin\theta \sinh \dfrac{v^2}{c}) \end{pmatrix} \tag{2.23}$$

$$\Lambda_2 = \begin{pmatrix} -\sin\theta \cosh \dfrac{v^1}{c} \\ \cos\theta \cosh \dfrac{v^2}{c} - \sin\theta \sinh \dfrac{v^1}{c} \sinh \dfrac{v^2}{c} \\ \dfrac{1}{c}(\cos\theta \sinh \dfrac{v^2}{c} - \sin\theta \sinh \dfrac{v^1}{c} \cos \dfrac{v^2}{c}) \end{pmatrix} \tag{2.24}$$

$$\Lambda_3 = \begin{pmatrix} c \sinh \dfrac{v^1}{c} \\ c \cosh \dfrac{v^1}{c} \sinh \dfrac{v^2}{c} \\ \cosh \dfrac{v^1}{c} \cosh \dfrac{v^2}{c} \end{pmatrix} \tag{2.25}$$

L'élément général du groupe de $P(2+1)$ s'écrit comme

$$g = exp(x^1 P_1 + x^2 P_2 + tH) exp(v^1 K_1) exp(v^2 K_2) exp(\theta J) \tag{2.26}$$

qui s'écrit matriciellement comme

$$g = \begin{pmatrix} \Lambda & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.27}$$

où $a$ est colonne ${}^t(x^1, x^2, t)$.
La loi de groupe pour $P(2+1)$ est donc

$$(\Lambda, a)(\Lambda', a') = (\Lambda\Lambda', \Lambda a' + a) \tag{2.28}$$

On vérifie que l'élément inverse pour la loi de groupe est

$$g^{-1} = \begin{pmatrix} \Lambda^{-1} & -\Lambda^{-1} a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.29}$$

L'approximation de $\Lambda$ au premier ordre est $\Lambda = I + j(\delta\alpha)$ où

$$j(\delta\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & -\delta\theta & \delta v^1 \\ \delta\theta & 0 & \delta v^2 \\ \frac{1}{c^2}\delta v^1 & \frac{1}{c^2}\delta v^2 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.30}$$

représente l'algèbre de Lie de Lorentz.

### 2.3.4 Groupes Para-Poincaré $P_{\pm}(2+1)$

Les groupes Para-Poincaré $P_{\pm}(2+1)$ [7, 13] sont des groupes de Lie 6-dimensionnels des transformations de (2+1)-D espace-temps de Minkowski muni d'un tenseur métrique $g_{ij} = diag(-1,-1,1)$. Chaque élément de $P_{\pm}(2+1)$ est paramétré par le couple$(\Lambda, b)$ c'est-à-dire $g = (\Lambda, b)$ où $b = {}^t(\vec{v}, t)$, $\vec{v}$ étant la vitesse,$t$ le temps et $\Lambda$ représente la transformation de Lorentz.
L'algèbre de Lie $\mathcal{P}_{\pm}(2+1)$ est engendrée par la base $(J, P_i, K_i, H), i = 1, 2$ qui sont les générateurs infinitésimaux des rotations dans le plan, des translations spatiales, des vitesses et la translation temporelle respectivement.
La structure de l'algèbre de Lie $\mathcal{P}_{\pm}(2+1)$ est définie par

$$\begin{aligned} &[J, P_j] = P_i\epsilon^i_j, \qquad [P_i, P_j] = \pm\kappa^2 J \\ &[J, K_j] = K_i\epsilon^i_j, \qquad [P_i, K_j] = -\frac{1}{c^2}H\delta_{ij}, \qquad [K_i, K_j] = 0 \\ &[J, H] = 0, \qquad [P_i, H] = \pm\omega^2 K_i, \qquad [K_i, H] = 0 \end{aligned} \tag{2.31}$$

où $i, j = 1, 2$ et $\epsilon^i_j$ est le tenseur antisymétrique d'ordre 2 tandisque $\delta_{ij}$ sont les symboles de Kronecker.
Nous remarquons que l'algèbre de Lie $\mathcal{P}_+(2+1)$ est isomorphe au groupe Euclidien $E(3)$ où $so(3)$ est engendrée par $(J, P_i)$ et $\mathbb{R}^3$ est engendré par $(K_i, H)$. Similairement, $\mathcal{P}_-(2+1)$ est isomorphe au groupe pseudo-Euclidien $E(2,1)$ où $so(2,1)$ est engendrée par $(J, P_i)$ et $\mathbb{R}^{2,1}$ est engendré par $(K_i, H)$.
Nous noterons $so(3)$ par $so_+(3)$ et $so(2,1)$ par $so_-(3)$. Ainsi les génrateurs de $\mathbf{so}_{\pm}(2,1)$ sur la base de la sous-algèbre abélienne engendrée par $(K_i, H)$ est représentée par les matrices :

$$\rho(J) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \rho(P_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \pm\omega^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{c^2} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \rho(P_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pm\omega^2 \\ 0 & -\frac{1}{c^2} & 0 \end{pmatrix} \tag{2.32}$$

L'élément général de la composante connexe de $SO_{\pm}(3)$ s'écrit alors

$$\Lambda = exp(x^2\rho(P_2))exp(x^1\rho(P_1))exp(\theta\rho(J)) \tag{2.33}$$

Dans le cas de $SO_+(3) = SO(3)$ ,on a

$$exp(x^1\rho(P_1)) = \begin{pmatrix} \cos\dfrac{\omega x^1}{c} & 0 & c\omega\sin\dfrac{\omega x^1}{c} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\dfrac{1}{\omega c}\sin\dfrac{\omega x^1}{c} & 0 & \cos\dfrac{\omega x^1}{c} \end{pmatrix} = R(x^1)$$

$$exp(x^2\rho(P_2)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\dfrac{\omega x^2}{c} & c\omega\sin\dfrac{\omega x^2}{c} \\ 0 & -\dfrac{1}{\omega c}\sin\dfrac{\omega x^2}{c} & \cos\dfrac{\omega x^2}{c} \end{pmatrix} = R(x^2) \tag{2.34}$$

$$exp(\theta\rho(J)) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = R(\theta)$$

alors que l'on a

$$exp(x^1\rho(P_1)) = \begin{pmatrix} \cosh\dfrac{\omega x^1}{c} & 0 & -c\omega\sinh\dfrac{\omega x^1}{c} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\dfrac{1}{c\omega}\sinh\dfrac{\omega x^1}{c} & 0 & \cosh\dfrac{\omega x^1}{c} \end{pmatrix} = L(x^1)$$

$$exp(x^2\rho(P_2)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh\dfrac{\omega x^2}{c} & -c\omega\sinh\dfrac{\omega x^2}{c} \\ 0 & -\dfrac{1}{c\omega}\sinh\dfrac{\omega x^2}{c} & \cosh\dfrac{\omega x^2}{c} \end{pmatrix} = L(x^2) \tag{2.35}$$

$$exp(\theta\rho(J)) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = R(\theta) \tag{2.36}$$

dans le cas de $SO_-(3) = SO(2,1)$.
La matrice représentant $SO_\pm(3)$ est donc la matrice

$$\Lambda = (\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3) \tag{2.37}$$

où les colonnes $\Lambda_i$ pour $SO(3)$ sont

$$\Lambda_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\dfrac{\omega x^1}{c} \\ -(\cos\theta\sin\dfrac{\omega x^1}{c}\sin\dfrac{\omega x^2}{c} - \sin\theta\cos\dfrac{\omega x^2}{c}) \\ -\dfrac{1}{c\omega}(\cos\theta\sin\dfrac{\omega x^1}{c}\cos\dfrac{\omega x^2}{c} + \sin\theta\sin\dfrac{\omega x^2}{c}) \end{pmatrix} \tag{2.38}$$

$$\Lambda_2 = \begin{pmatrix} -\sin\theta\cos\dfrac{\omega x^1}{c} \\ \cos\theta\cos\dfrac{\omega x^2}{c} + \sin\theta\sin\dfrac{\omega x^1}{c}\sin\dfrac{\omega x^2}{c} \\ -\dfrac{1}{c\omega}(\cos\theta\sin\dfrac{\omega x^2}{c} - \sin\theta\sin\dfrac{\omega x^1}{c}\cos\dfrac{\omega x^2}{c}) \end{pmatrix} \tag{2.39}$$

$$\Lambda_3 = \begin{pmatrix} c\omega\sin\dfrac{\omega x^1}{c} \\ c\omega\cos\dfrac{\omega x^1}{c}\sin\dfrac{\omega x^2}{c} \\ \cos\dfrac{\omega x^1}{c}\cos\dfrac{\omega x^2}{c} \end{pmatrix} \tag{2.40}$$

alors qu'elles sont

$$\Lambda_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta \cosh \dfrac{\omega x^1}{c} \\ \cos\theta \sinh \dfrac{\omega x^1}{c} \sinh \dfrac{\omega x^2}{c} + \sin\theta \cosh \dfrac{\omega x^2}{c} \\ -\dfrac{1}{c}(\cos\theta \sinh \dfrac{\omega x^1}{c} \cosh \dfrac{\omega x^2}{c} + \sin\theta \sinh \dfrac{\omega x^2}{c}) \end{pmatrix} \tag{2.41}$$

$$\Lambda_2 = \begin{pmatrix} -\sin\theta \cosh \dfrac{\omega x^1}{c} \\ \cos\theta \cosh \dfrac{\omega x^2}{c} - \sin\theta \sinh \dfrac{\omega x^1}{c} \sinh \dfrac{\omega x^2}{c} \\ -\dfrac{1}{c}(\cos\theta \sinh \dfrac{\omega x^2}{c} - \sin\theta \sinh \dfrac{\omega x^1}{c} \cos \dfrac{\omega x^2}{c}) \end{pmatrix} \tag{2.42}$$

$$\Lambda_3 = \begin{pmatrix} -c\omega \sinh \dfrac{\omega x^1}{c} \\ -c\omega \cosh \dfrac{\omega x^1}{c} \sinh \dfrac{\omega x^2}{c} \\ \cosh \dfrac{\omega x^1}{c} \cosh \dfrac{\omega x^2}{c} \end{pmatrix} \tag{2.43}$$

dans le cas de $SO(2,1)$.
L'élément général $g = exp(v^1K_1 + v^2K_2 + tH)exp(x^1P_1)exp(x^2P_2)exp(\theta J)$ de $P_\pm(2+1)$ est représenté par la matrice

$$D(g) = \begin{pmatrix} \Lambda & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.44}$$

où $b$ est la colonne ${}^t(v^1, v^2, t)$. La loi du groupe est alors

$$(\Lambda, b)(\Lambda', b') = (\Lambda\Lambda', \Lambda b' + b) \tag{2.45}$$

On vérifie que l'élément inverse pour la loi de groupe est

$$g^{-1} = \begin{pmatrix} \Lambda^{-1} & -\Lambda^{-1}b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.46}$$

L'algèbre de Lie $\mathcal{P}_{\pm}(2+1)$ est alors représentée par la matrice

$$D(\delta g) = \begin{pmatrix} 0 & -\delta\theta & \pm\omega^2\delta x^1 & \delta v^1 \\ \delta\theta & 0 & \pm\omega^2\delta x^2 & \delta v^2 \\ -\dfrac{\delta x^1}{c^2} & -\dfrac{\delta x^2}{c^2} & 0 & \delta t \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j(\delta\alpha) & \delta a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.47}$$

est une matrice représentant l'algèbre de Lie $so_{\pm}(3)$.

Dans les deux chapitres suivants nous étudions les réalisations symplectiques (canoniques) des groupes cinématiques qui n'ont pas encore été considérés dans la littérature. Ce sont les groupes de Poincaré $P(n+1)$ et Para-Poincaré $P_{\pm}(n+1)$ en une dimension et en deux dimensions d'espace ($n = 1, 2$). Nous étudions les réalisations symplectiques de ces groupes dans le même esprit que NGENDAKUMANA & al. ont fait dans [15]

# Chapitre 3

# Réalisations symplectiques des groupes de Poincaré $P(1+1)$ et Para-Poincaré $P_{\pm}(1+1)$

Ce chapitre est consacré à la détermination des réalisations symplectiques des groupes de Lie de Poincaré $P(1+1)$ et Para-Poincaré $P_{\pm}(1+1)$ en suivant le schéma établi dans les chapitres précédents.

## 3.1 Réalisations symplectiques du groupe $P(1+1)$

### 3.1.1 Groupe étendu

On vérifie que l'algèbre de Lie étendue de celle de Poincaré $\mathcal{P}(1+1)$ est définie par

$$[K,P]=\frac{1}{c^2}H,\quad [K,H]=P,\quad [P,H]=F \tag{3.1}$$

où la dimension de $F$ est $(L^{-1}T^{-1})$.
L'élément général correspondant au groupe de Poincaré étendu peut s'écrire

$$\hat{g}=exp(\varphi F)exp(tH+xP)exp(vK)=exp(\varphi F)g \tag{3.2}$$

En utilisant les formules de Baker-Campbell-Hausdorff, on vérifie que la loi de groupe est définie par

$$(\varphi,g)(\varphi',g')=(\varphi+\varphi'+c(g,g'),gg')$$

où

$$c((v,x,t),(v',x',t'))=-\frac{1}{2}(t\cosh\frac{v}{c}-\frac{x}{c}\sinh\frac{v}{c})x'+\frac{1}{2}(x\cosh\frac{v}{c}-ct\sinh\frac{v}{c})t' \tag{3.3}$$

est un 2− cocycle [16].
Le groupe de Poincaré étendu admet donc la représentation matricielle

$$D(\varphi,v,x,t)=\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2}(t\cosh\frac{v}{c}-\frac{x}{c}\sinh\frac{v}{c}) & \frac{1}{2}(x\cosh\frac{v}{c}-ct\sinh\frac{v}{c}) & \varphi \\ 0 & \cosh\frac{v}{c} & c\sinh\frac{v}{c} & x \\ 0 & \frac{1}{c}\sinh\frac{v}{c} & \cosh\frac{v}{c} & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

que l'on écrit de façon équivalente comme :

$$D(\varphi,v,x,t)=\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2}t & \frac{1}{2}x & \varphi \\ 0 & 1 & 0 & x \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh\frac{v}{c} & c\sinh\frac{v}{c} & 0 \\ 0 & \frac{1}{c}\sinh\frac{v}{c} & \cosh\frac{v}{c} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Son approximation à l'ordre un est donnée par $D(\hat{g})=I+D(X)$ avec

$$D(X)=\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2}\delta t & \frac{1}{2}\delta x & \delta\varphi \\ 0 & 0 & \delta v & \delta x \\ 0 & \frac{\delta v}{c^2} & 0 & \delta t \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

### 3.1.2 Action adjointe

L'action adjointe $Ad_g(\delta\hat{g})=g(\delta\hat{g})g^{-1}$ de $P(1+1)$ sur son algèbre de Lie étendue est

$$Ad_{(x,t,v)}(\delta\varphi,\delta x,\delta t,\delta v)=(\delta\varphi',\delta x',\delta t',\delta v')$$

avec

$$\begin{aligned}
\delta\varphi' &= \delta\varphi + (t\cosh\frac{v}{c} - \frac{x}{c}\sinh\frac{v}{c})\delta x - (x\cosh\frac{v}{c} - ct\sinh\frac{v}{c})\delta t + \frac{1}{2}(\frac{x^2}{c^2} - t^2)\delta v \\
\delta x' &= \cosh\frac{v}{c}\delta x + c\sinh\frac{v}{c}\delta t - t\delta v \\
\delta t' &= \frac{1}{c}\sinh\frac{v}{c}\delta x + \cosh\frac{v}{c}\delta t - \frac{x}{c^2}\delta v \\
\delta v' &= \delta v
\end{aligned} \tag{3.4}$$

### 3.1.3 Action coadjointe

Si la dualité entre l'algèbre de Lie étendue $\hat{\mathcal{P}}(1+1)$ et son dual $\hat{\mathcal{P}}^*(1+1)$ est donnée par l'action :

$$\langle (f,p,E,k),(\delta\varphi,\delta x,\delta E,\delta k)\rangle = f\delta\varphi + p\delta x + E\delta t + k\delta v \tag{3.5}$$

où les composantes de l'élément du dual sont la force $f$, le moment statique $k$, le moment linéaire $p$,l'énergie $E$ alors l'action coadjointe du groupe $P(1+1)$ sur le dual de son algèbre de Lie étendue est $Ad^*_{(x,t,v)}(f,p,E,k) = (f',p',E',k')$ avec

$$\begin{aligned}
f' &= f \\
k' &= k - \frac{1}{2}f(\frac{x^2}{c^2} - t^2) + p(t\cosh\frac{v}{c} - \frac{x}{c}\sinh\frac{v}{c}) + \frac{E}{c^2}(x\cosh\frac{v}{c} - ct\sinh\frac{v}{c}) \\
p' &= p\cosh\frac{v}{c} - \frac{E}{c}\sinh\frac{v}{c} + ft \\
E' &= -pc\sinh\frac{v}{c} + E\cosh\frac{v}{c} - fx
\end{aligned} \tag{3.6}$$

On tire de (3.6) que $f$ est $Ad^*$-invariant). C'est un invariant trivial (immédiat) de l'action coadjointe du groupe $P(1+1)$ sur le dual de son algèbre de Lie étendue.

### 3.1.4 Orbite coadjointe

De la relation 3.1,on vérifie que la forme de Kirillov dans la base $(K,P,H)$ est :

$$(K_{ij}(k,p,E)) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{E}{c^2} & -p \\ -\frac{E}{c^2} & 0 & f \\ p & -f & 0 \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

Comme la matrice de Kirillov est d'ordre trois, il nous faut un autre invariant $I$. Il est solution du système d'équations différentielles

$$K_{ij}(a)\frac{\partial I}{\partial a_j} = 0 \tag{3.8}$$

c'est-à-dire explicitement

$$\begin{cases} f\frac{\partial I}{\partial E} - \frac{E}{c^2}\frac{\partial I}{\partial k} = 0 \\ -f\frac{\partial I}{\partial p} - p\frac{\partial I}{\partial k} = 0 \\ \frac{E}{c^2}\frac{\partial I}{\partial p} + p\frac{\partial I}{\partial E} = 0 \end{cases} \tag{3.9}$$

Cet invariant est

$$k_0 = k - \frac{p^2}{2f} + \frac{E^2}{2c^2 f} \tag{3.10}$$

et a la dimension d'un moment statique $(ML)$. On note l'orbite coadjointe correspondante par $\mathcal{O}_{(f,k_0)}$.
La restriction de la forme de Kirillov à l'orbite coadjointe est :

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & f \\ -f & 0 \end{pmatrix} \tag{3.11}$$

L'inverse de la restriction de la forme de Kirillov est alors :

$$\Omega^{-1} = \frac{1}{f}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.12}$$

L'orbite $\mathcal{O}_{(f,k_0)}$ est alors une variété symplectique munie de la forme symplectique

$$\sigma = dE \wedge d\tau \tag{3.13}$$

où $\tau = \frac{p}{f}$ est un temps et $E$ est une énergie qui lui est conjuguée. L'orbite est un espace de phase énergie-temps.

### 3.1.5 Réalisation symplectique

La réalisation du groupe de Poincaré est la restriction $L = Ad^*|_{O_{(f,k_0)}}$ à l'orbite de son action coadjointe sur le dual de son algèbre de Lie étendue. On a donc

$$L_{(v,x,t)}(E,\tau) = (E\cosh\frac{v}{c} - c\tau f\sinh\frac{v}{c} - fx, \tau\cosh\frac{v}{c} - \frac{E}{cf}\sinh\frac{v}{c} + t) \tag{3.14}$$

On en tire que les champs de vecteurs définis sur l'orbite sont donnés par

$$\rho(K) = -f\tau\frac{\partial}{\partial E} - \frac{E}{c^2 f}\frac{\partial}{\partial \tau}, \quad \rho(P) = -f\frac{\partial}{\partial E}, \quad \rho(H) = \frac{\partial}{\partial \tau} \tag{3.15}$$

Comme le moment $\mu(X)$ associé au champ $X$ est donné par

$$\rho(X)\lrcorner\sigma = -dP(\rho(X))$$

. On vérifie que les composantes du moment sont

$$\mu(\rho(K)) = \frac{f\tau^2}{2} - \frac{E^2}{2fc^2}, \quad \mu(\rho(P)) = f\tau, \quad \mu(\rho(H)) = E \tag{3.16}$$

Le crochet de Poisson deux fonctions $F, G \in C^\infty(\mathcal{O}_{(f,k_0)}, \mathbb{R})$ étant

$$\{F, G\} = \frac{\partial F}{\partial \tau}\frac{\partial G}{\partial E} - \frac{\partial F}{\partial E}\frac{\partial G}{\partial \tau} \tag{3.17}$$

on vérifie que

$$\{\mu(\rho(K)), \mu(\rho(P))\} = \frac{1}{c^2}\mu(\rho(H)),\ \{\mu(\rho(K)), \mu(\rho(H))\} = \mu(\rho(P)),\ \{\mu(\rho(P)), \mu(\rho(H))\} = f$$

qui veut dire que les trois moments réalisent l'algèbre de Lie étendue $\mathcal{P}(1+1)$.

## 3.2 Réalisations symplectiques des groupes $P_\pm(1+1)$

### 3.2.1 Groupes étendus

L'extension centrale de l'algèbre de Lie $\mathcal{P}_\pm(1+1)$ est définie par

$$[K, P] = \frac{1}{c^2}H, \quad [K, H] = \Pi,\ [P, H] = \pm\omega^2 K \tag{3.18}$$

où $\Pi$ génère le centre.
On vérifie de plus que l'élément général du groupe de Lie étendu s'écrit $\hat{g} = exp(\varphi\Pi)g$ que l'on écrit $\hat{g} = (\varphi, g)$.
En utilisant les formules de Baker-Campbell-Hausdorff, on vérifie que la loi du groupe de l'extension centrale du groupe $P_+(1+1)$ est

$$(\varphi, g)(\varphi', g') = (\varphi + \varphi' + c(g, g'), gg') \tag{3.19}$$

où le cocycle $c(g, g')$ [16] est

$$c(g, g') = -\frac{1}{2}(t\cos\frac{\omega x}{c} + \frac{v}{c\omega}\sin\frac{\omega x}{c})v' + \frac{1}{2}(v\cos\frac{\omega x}{c} - tc\omega\sin\frac{\omega x}{c})t') \tag{3.20}$$

De même la loi de groupe de l'extension centrale du groupe $P_-(1+1)$ est (3.19) où le cocycle $c(g, g')$ est

$$c(g, g') = -\frac{1}{2}(t\cosh\frac{\omega x}{c} + \frac{v}{c\omega}\sinh\frac{\omega x}{c})v' + \frac{1}{2}(v\cosh\frac{\omega x}{c} + tc\omega\sinh\frac{\omega x}{c})t') \tag{3.21}$$

La loi de multiplication des groupes Para-Poincaré étendus $P_+(1+1)$ donne lieu à la représentation matricielle

$$D(\varphi,v,x,t)=\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{2}t & \frac{1}{2}v & \varphi\\ 0 & 1 & 0 & v\\ 0 & 0 & 1 & t\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \cos\frac{\omega x}{c} & c\omega\sin\frac{\omega x}{c} & 0\\ 0 & -\frac{1}{c\omega}\sin\frac{\omega x}{c} & \cos\frac{\omega x}{c} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

tandis que celle de l'extension centrale de $P_-(1+1)$ donne lieu à la représentation matricielle

$$D(\varphi,v,x,t)=\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{2}t & \frac{1}{2}v & \varphi\\ 0 & 1 & 0 & v\\ 0 & 0 & 1 & t\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \cosh\frac{\omega x}{c} & -c\omega\sinh\frac{\omega x}{c} & 0\\ 0 & -\frac{1}{c\omega}\sinh\frac{\omega x}{c} & \cosh\frac{\omega x}{c} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

L'approximation à l'ordre un de $\hat{g}$ est donnée par $\hat{g}=I+D(X)$ et

$$D(X)=\begin{pmatrix}0 & -\frac{1}{2}\delta t & \frac{1}{2}\delta v & \delta\varphi\\ 0 & 0 & \pm\omega^2\delta x & \delta v\\ 0 & -\frac{\delta x}{c^2} & 0 & \delta t\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

est une représentation matricielle de l'algèbre de Lie étendue de l'algèbre de Lie de Para-Poincaré $P_\pm(1+1)$.

### 3.2.2 Action adjointe

Les action adjointes $Ad_{(v,t,x)}(\delta\varphi, \delta v, \delta t, \delta x) = (\delta\varphi', \delta v', \delta t', \delta v')$ de $P_{\pm}(1+1)$ sur les algèbres de Lie $\mathcal{P}_{\pm}(1+1)$ étendues sont données pour $P_{+}(1+1)$ par

$$\begin{aligned}
\delta\varphi' &= \delta\varphi - (t\cos\frac{\omega x}{c} + \frac{v}{c\omega}\sin\frac{\omega x}{c})\delta v + (v\cos\frac{\omega x}{c} - tc\omega\sin\frac{\omega x}{c})\delta t + \frac{1}{2}(t^2\omega^2 + \frac{v^2}{c^2})\delta x \\
\delta v' &= \cos\frac{\omega x}{c}\delta v + c\omega\sin\frac{\omega x}{c}\delta t - t\omega^2\delta x \\
\delta t' &= -\frac{1}{c\omega}\sin\frac{\omega x}{c}\delta v + \cos\frac{\omega x}{c}\delta t + \frac{v}{c^2}\delta x \\
\delta x' &= \delta x
\end{aligned} \tag{3.22}$$

tandis que l'on a pour $P_{-}(1+1)$

$$\begin{aligned}
\delta\varphi' &= \delta\varphi - (t\cosh\frac{\omega x}{c} + \frac{v}{c\omega}\sinh\frac{\omega x}{c})\delta v + (v\cosh\frac{\omega x}{c} + tc\omega\sinh\frac{\omega x}{c})\delta t - \frac{1}{2}(t^2\omega^2 - \frac{v^2}{c^2})\delta x \\
\delta v' &= \cosh\frac{\omega x}{c}\delta v - c\omega\sinh\frac{\omega x}{c}\delta t + t\omega^2\delta x \\
\delta t' &= -\frac{1}{c\omega}\sinh\frac{\omega x}{c}\delta v + \cosh\frac{\omega x}{c}\delta t + \frac{v}{c^2}\delta x \\
\delta x' &= \delta x
\end{aligned} \tag{3.23}$$

### 3.2.3 Action coadjointe

Si la dualité entre les algèbres de Lie étendues et leurs duaux est donnée par l'action :

$$\langle(\pi, k, p, E), (\delta\varphi, \delta v, \delta x, \delta t)\rangle = \pi\delta\varphi + k\delta v + p\delta x + E\delta t$$

où $p$ est un moment linéaire, $k$ est un moment statique, $\pi$ est un moment linéaire tandis que $E$ est une énergie (dans les algèbres de Lie duales), alors les actions coadjointes $Ad^{*}_{(v,x,t)}(\pi, k, p, E) = (\pi', k', p', E')$ du groupe $P_{\pm}(1)$ sur le dual de son algèbre de Lie

étendue est, dans le cas du groupe $P_+(1+1)$, donnée par

$$\begin{aligned}
\pi' &= \pi \\
k' &= k\cos\frac{\omega x}{c} + \frac{E}{c\omega}\sin\frac{\omega x}{c} + \pi t \\
p' &= p - k\omega^2(t\cos\frac{\omega x}{c} + \frac{v}{c\omega}\sin\frac{\omega x}{c}) + \frac{E}{c^2}(-tc\omega\sin\frac{\omega x}{c} + v\cos\frac{\omega x}{c}) - \frac{1}{2}\pi(t^2\omega^2 + \frac{v^2}{c^2}) \\
E' &= -kc\omega\sin\frac{\omega x}{c} + E\cos\frac{\omega x}{c} - \pi v
\end{aligned} \tag{3.24}$$

tandis qu'elle est donnée par

$$\begin{aligned}
\pi' &= \pi \\
k' &= k\cosh\frac{\omega x}{c} + \frac{E}{c\omega}\sinh\frac{\omega x}{c} + \pi t \\
p' &= p - k\omega^2(t\cosh\frac{\omega x}{c} + \frac{v}{c\omega}\sinh\frac{\omega x}{c}) - \frac{E}{c^2}(tc\omega\sinh\frac{\omega x}{c} + v\cosh\frac{\omega x}{c}) - \frac{1}{2}\pi(t^2\omega^2 - \frac{v^2}{c^2}) \\
E' &= kc\omega\sinh\frac{\omega x}{c} + E\cosh\frac{\omega x}{c} - \pi v
\end{aligned} \tag{3.25}$$

dans le cas du groupe $P_-(1+1)$.

### 3.2.4 Orbite coadjointe

De (3.24) et (3.25) découle que $\pi$ est un invariant immédiat dans les deux cas. Comme les groupes étendus sont de dimension quatre, il nous faut trouver un second invariant. De plus, la forme de Kirillov est donnée dans la base $(K, P, H)$ par

$$(K_{ij}(k,p,E)) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{E}{c^2} & \pi \\ -\frac{E}{c^2} & 0 & \pm\omega^2 k \\ -\pi & \mp\omega^2 k & 0 \end{pmatrix} \tag{3.26}$$

L'invariant non trivial $I$ est solution du système

$$\begin{cases} \frac{E}{c^2}\frac{\partial I}{\partial p} + \pi\frac{\partial I}{\partial E} = 0 \\ \\ \frac{E}{c^2}\frac{\partial I}{\partial k} \pm \omega^2 k\frac{\partial I}{\partial E} = 0 \\ \\ \pi\frac{\partial I}{\partial k} + \mp\omega^2 k\frac{\partial I}{\partial p} = 0 \end{cases} \tag{3.27}$$

On vérifie que cet invariant est

$$p_0^2 = p\pi \pm \frac{\omega^2 k^2}{2} - \frac{E^2}{2c^2} \tag{3.28}$$

qui est un moment linéaire au carré. On notera donc l'orbite correspondante par $\mathcal{O}_{(\pi,p_0)}$.
La restriction de la forme de Kirillov à l'orbite coadjointe dans les deux cas est :

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \pi \\ -\pi & 0 \end{pmatrix} \tag{3.29}$$

L'inverse de la restriction de la forme de Kirillov est alors :

$$\Omega^{-1} = \frac{1}{\pi}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.30}$$

L'orbite coadjointe $\mathcal{O}_{(\pi,p_0)}$ est alors munie de la forme symplectique

$$\sigma = dE \wedge d\tau \tag{3.31}$$

avec $\tau = \dfrac{k}{\pi}$ est un temps. L'orbite coadjointe est un espace de phase énergie-temps

### 3.2.5 Réalisation symplectique

Comme la restriction de l'action coadjointe sur cette orbite est la réalisation symplectique des groupes $P_\pm(1+1)$, on aura que la réalisation symplectique du groupe Para-Poincaré $P_+(1+1)$ sur l'orbite coadjointe est donnée par

$$L_{(v,x,t)}(E,\tau) = (E\cos\frac{\omega x}{c} - \tau\pi c\omega\sin\frac{\omega x}{c} - \pi v, \quad \frac{E}{\pi c\omega}\sin\frac{\omega x}{c} + \tau\cos\frac{\omega x}{c} + t) \tag{3.32}$$

alors qu'elle est donnée par

$$L_{(v,t,x)}(E,\tau) = (E\cosh\frac{\omega x}{c} + \pi\tau c\omega\sinh\frac{\omega x}{c} - \pi v, \quad \frac{E}{\pi c\omega}\sinh\frac{\omega x}{c} + \tau\cosh\frac{\omega x}{c} + t) \tag{3.33}$$

dans le cas du groupe Para-Poincaré $P_-(1+1)$ .
Il suit que l'algèbre de Lie des groupes Para-Poincaré $\mathcal{P}_\pm(1+1)$ est réalisée sur l'orbite $\mathcal{O}_{(\pi,p_0)}$ par les champs de vecteurs hamiltoniens

$$\rho(K) = -\pi\frac{\partial}{\partial E}, \quad \rho(P) = \frac{E}{c^2\pi}\frac{\partial}{\partial\tau} \mp \pi\omega^2\tau\frac{\partial}{\partial E}, \quad \rho(H) = \frac{\partial}{\partial\tau} \tag{3.34}$$

et que les composantes du moment sont

$$\mu(\rho(K)) = \pi\tau, \quad \mu(\rho(P)) = \frac{E^2}{2\pi c^2} \pm \frac{\pi\omega^2\tau^2}{2}, \quad \mu(\rho(H)) = E \tag{3.35}$$

Le crochet de Poisson deux fonctions $F, G \in C^\infty(\mathcal{O}_{(\pi,p_0)}, \mathbb{R})$ étant

$$\{F, G\} = \frac{\partial F}{\partial \tau}\frac{\partial G}{\partial E} - \frac{\partial F}{\partial E}\frac{\partial G}{\partial \tau} \tag{3.36}$$

on vérifie que

$$\begin{aligned}
\{\mu(\rho(K)), \mu(\rho(P))\} &= \frac{1}{c^2}\mu(\rho(H)), \\
\{\mu(\rho(K)), \mu(\rho(H))\} &= \pi, \\
\{\mu(\rho(P)), \mu(\rho(H))\} &= \pm\omega^2\mu(\rho(K))
\end{aligned}$$

qui veut dire que les trois moments réalisent l'algèbre de Lie étendue $P_\pm(1+1)$.

# Chapitre 4

# Réalisations symplectiques des groupes de Poincaré $P(2+1)$ et Para-Poincaré $P_{\pm}(2+1)$

Dans ce chapitre,nous étudions les réalisations symplectiques des groupes de Lie de Poincaré $P(2+1)$ et Para-Poincaré $P_{\pm}(2+1)$ en deux dimensions spatiales. Nous déterminons l'action adjointe et coadjointe, la forme de Kirillov, les invariants de l'action coadjointe, l'orbite coadjointe, la restriction de la forme forme de Kirillov à l'orbite coadjointe, la forme symplectique, l'action du groupe sur l'orbite coadjointe et enfin la structure non commutative de l'orbite.

## 4.1 Réalisation symplectique du groupe $P(2+1)$

On vérifie que l'algèbre de Lie du groupe de Poincaré $P(2+1)$ n'admet pas d'extension centrale.On passe immédiatement à l'action adjointe

### 4.1.1 Action adjointe

L'action adjointe du groupe $P(2+1)$ sur son algèbre de Lie $\mathcal{P}(2+1)$ est donnée par la formule :

$$Ad_g(\delta g) = g(\delta g)g^{-1} \tag{4.1}$$

où

$$\delta g = \begin{pmatrix} j(\delta\alpha) & \delta a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

On vérifie que

$$\begin{cases} j(\delta\alpha') = \Lambda j(\delta\alpha)\Lambda^{-1} \\ \\ \delta a' = \Lambda\delta a - \Lambda j(\delta\alpha)\Lambda^{-1}a \end{cases} \tag{4.3}$$

où la matrice $\Lambda$ est définie en (2.22) et la matrice $j(\delta\alpha)$ est définie en (2.30).
Matriciellement, l'action adjointe de $P(2+1)$ sur son algèbre de Lie $\mathcal{P}(2+1)$ est donnée par

$$\begin{pmatrix} \delta\alpha' \\ \delta a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ C_1(x,t) & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1(v^2) & 0 \\ 0 & L(v^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1(v^1) & 0 \\ 0 & L(v^1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R(\theta) & 0 \\ 0 & R(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta\alpha \\ \delta a \end{pmatrix} \tag{4.4}$$

ce qui donne lieu à

$$\begin{aligned} \delta\alpha' &= [B_1(v^2)A_1(v^1)R(\theta)]\delta\alpha \\ \delta a' &= [C_1(x,t)B_1(v^2)A_1(v^1)R(\theta)]\delta\alpha + [L(v^2)L(v^1)R(\theta)]\delta a \end{aligned} \tag{4.5}$$

où

$$\delta\alpha = \begin{pmatrix} \delta v^1 \\ \delta v^2 \\ \delta\theta \end{pmatrix}, \delta a = \begin{pmatrix} \delta x^1 \\ \delta x^2 \\ \delta t \end{pmatrix}$$

$$C_1(x,t) = \begin{pmatrix} -t & 0 & x^2 \\ 0 & -t & -x^1 \\ -\dfrac{x^1}{c^2} & -\dfrac{x^2}{c^2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$B_1(v^2) = \begin{pmatrix} \cosh\dfrac{v^2}{c} & 0 & c\sinh\dfrac{v^2}{c} \\ 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{1}{c}\sinh\dfrac{v^2}{c} & 0 & \cosh\dfrac{v^2}{c} \end{pmatrix} \tag{4.6}$$

$$A_1(v^2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh\dfrac{v^2}{c} & -c\sinh\dfrac{v^2}{c} \\ 0 & -\dfrac{1}{c}\sinh\dfrac{v^2}{c} & \cosh\dfrac{v^2}{c} \end{pmatrix}$$

### 4.1.2 Action coadjointe

Si la dualité entre l'algèbre de Lie $\mathcal{P}(2+1)$ sur son dual $\mathcal{P}^*(2+1)$ de son algèbre de Lie par l'action

$$\langle (j, k_1, k_2, p_1, p_2, E), (\delta\theta, \delta v^1, \delta v^2, \delta x^1, \delta x^2, \delta t)\rangle = j\delta\theta + k_1\delta v^1 + k_2\delta v^2 + p_1\delta x^1 + p_2\delta x^2 + E\delta t$$

alors l'action coajointe

$$Ad_g^* : \mathcal{P}^*(2+1) \to \mathcal{P}^*(2+1)$$

est définie par

$$Ad^*_{(\theta,v^1,v^2,x^1,x^2,t)}(j,k_1,k_2,p_1,p_2,E) = (j',k_1',k_2',p_1',p_2',E') \tag{4.7}$$

Si nous posons

$$l = \begin{pmatrix} k^1 \\ k^2 \\ j \end{pmatrix}, p = \begin{pmatrix} p^1 \\ p^2 \\ E \end{pmatrix}, \; C(x,t) = \begin{pmatrix} -t & 0 & \dfrac{x^1}{c^2} \\ 0 & -t & \dfrac{x^2}{c^2} \\ -x^2 & x^1 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.8}$$

et

$$B(v^2) = \begin{pmatrix} \cosh\dfrac{v^2}{c} & 0 & -\dfrac{1}{c}\sinh\dfrac{v^2}{c} \\ 0 & 1 & 0 \\ -c\sinh\dfrac{v^2}{c} & 0 & \cosh\dfrac{v^2}{c} \end{pmatrix}, \quad A(v^1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh\dfrac{v^1}{c} & \dfrac{1}{c}\sinh\dfrac{v^1}{c} \\ 0 & c\sinh\dfrac{v^1}{c} & \cosh\dfrac{v^1}{c} \end{pmatrix} \tag{4.9}$$

alors l'action coadjointe s'écrit

$$\begin{pmatrix} l' \\ p' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & C(x,t) \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B(v^2) & 0 \\ 0 & {}^tL^{-1}(v^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A(v^1) & 0 \\ 0 & {}^tL^{-1}(v^1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R(\theta) & 0 \\ 0 & R(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l \\ p \end{pmatrix} \tag{4.10}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} l' &= [B(v^2)A(v^1)R(\theta)]l + [C(x,t)^tL^{-1}(v^2)^tL^{-1}(v^1)R(\theta)]p \\ p' &= [{}^tL^{-1}(v^2)^tL^{-1}(v^1)R(\theta)]p \end{aligned} \tag{4.11}$$

Explicitement,l'action coadjointe donne lieu à

$$\begin{aligned} j' = {} & j\cosh\frac{v^1}{c}\cosh\frac{v^2}{c} - k_1c(\cos\theta\sinh\frac{v^2}{c} - \sin\theta\sinh\frac{v^1}{c}\cosh\frac{v^2}{c}) \\ & + k_2c(\cos\theta\sinh\frac{v^1}{c}\cosh\frac{v^2}{c} + \sinh\theta\sinh\frac{v^2}{c}) \\ & + p_1[x^1(\cos\theta\sinh\frac{v^1}{c}\sinh\frac{v^2}{c} + \cos\theta\cosh\frac{v^2}{c}) - x^2\sin\theta\cosh\frac{v^1}{c}] \\ & + p_2[x^1(\cos\theta\cosh\frac{v^2}{c} - \sin\theta\sinh\frac{v^1}{c}\sinh\frac{v^2}{c}) + x^2\cos\theta\cosh\frac{v^2}{c}] \\ & - \frac{E}{c}(x^1\sinh\frac{v^1}{c}\cosh\frac{v^2}{c} - x^2\sinh\frac{v^1}{c}) \end{aligned} \tag{4.12}$$

$$
\begin{aligned}
k_1' = & -\frac{j}{c}\cosh\frac{v^1}{c}\sinh\frac{v^2}{c} + k_1(\cos\theta\cosh\frac{v^2}{c} - \sin\theta\sinh\frac{v^1}{c}\sinh\frac{v^2}{c}) \\
& - k_2(\cos\theta\sinh\frac{v^1}{c}\sinh\frac{v^2}{c} + \sin\theta\cosh\frac{v^2}{c}) \\
& - p_1[\frac{x^1}{c}(\cos\theta\sinh\frac{v^1}{c}\cosh\frac{v^2}{c} + \sin\theta\sinh\frac{v^2}{c}) - t\cos\theta\cosh\frac{v^1}{c}] \\
& - p_2[\frac{x^1}{c}(\cos\theta\sinh\frac{v^2}{c} - \sin\theta\sinh\frac{v^1}{c}\cosh\frac{v^2}{c}) + t\sin\theta\cosh\frac{v^2}{c}] \\
& + \frac{E}{c^2}(x^1\cosh\frac{v^1}{c}\cosh\frac{v^2}{c} - ct\sinh\frac{v^1}{c})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
k_2' = & \frac{j}{c}\sinh\frac{v^1}{c} + k_1\sin\theta\cosh\frac{v^1}{c} + k_2\cos\theta\cosh\frac{v^1}{c} \\
& - p_1[\frac{x^2}{c}(\cos\theta\sinh\frac{v^1}{c}\cosh\frac{v^2}{c} + \sin\theta\sinh\frac{v^2}{c}) \\
& - t(\cos\theta\sinh\frac{v^1}{c}\sinh\frac{v^2}{c} + \sin\theta\cosh\frac{v^2}{c})] \\
& - p_2[\frac{x^2}{c}(\cos\theta\sinh\frac{v^2}{c} - \sin\theta\sinh\frac{v^1}{c}\cosh\frac{v^2}{c}) \\
& - t(\cos\theta\cosh\frac{v^2}{c} - \sin\theta\sinh\frac{v^1}{c}\sinh\frac{v^2}{c})] \\
& + \frac{E}{c^2}(x^2\cosh\frac{v^1}{c}\cosh\frac{v^2}{c} - ct\cosh\frac{v^1}{c}\sinh\frac{v^2}{c})
\end{aligned}
\tag{4.13}
$$

$$
p_1' = p_1\cos\theta\cosh\frac{v^1}{c} + p_2\sin\theta\cosh\frac{v^1}{c} - \frac{E}{c}\sinh\frac{v^1}{c}
$$

$$
\begin{aligned}
p_2' = & p_1(\cos\theta\sinh\frac{v^1}{c}\sinh\frac{v^2}{c} - \sin\theta\cosh\frac{v^2}{c}) \\
& + p_2(\cos\theta\cosh\frac{v^1}{c} - \sin\theta\sinh\frac{v^1}{c}\sinh\frac{v^2}{c}) \\
& - \frac{E}{c}\cosh\frac{v^1}{c}\sinh\frac{v^2}{c}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E' = & p_1c(\cos\theta\sinh\frac{v^1}{c}\cosh\frac{v^2}{c} + \sin\theta\sinh\frac{v^2}{c}) \\
& - p_2c(\cos\theta\sinh\frac{v^2}{c} - \sin\theta\sinh\frac{v^1}{c}\cosh\frac{v^2}{c}) \\
& + E\cosh\frac{v^1}{c}\cosh\frac{v^2}{c}
\end{aligned}
$$

### 4.1.3 Orbite coadjointe

De la relation (4.13),on vérifie que

$$I_1 = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 \tag{4.14}$$

où $\vec{p} =^t (p_1, p_2)$, est un invariant de l'action coadjointe.
Comme $I_1$ a la dimension d'une impulsion au carré, on peut poser $I_1 = m^2c^2$, $m$ étant une masse. On obtient que

$$E = mc^2\sqrt{1 + \frac{\vec{p}^2}{m^2c^2}} \tag{4.15}$$

relation bien connue en relativité restreinte.
Des crochets de Lie définissant l'algèbre de Lie de Poincaré , on vérifie que la matrice de Kirillov dans la base $(J, K_1, K_2, P_1, P_2, H)$ est

$$K(j, k_i, p_i, E) = \begin{pmatrix} 0 & k_2 & -k_1 & p_2 & -p_1 & 0 \\ -k_2 & 0 & -\frac{j}{c^2} & \frac{E}{c^2} & 0 & p_1 \\ k_1 & \frac{j}{c^2} & 0 & 0 & \frac{E}{c^2} & p_2 \\ -p_2 & -\frac{E}{c^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p_1 & 0 & -\frac{E}{c^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p_1 & -p_2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.16}$$

Les invariants sont solution du système

$$\begin{cases} k_2\frac{\partial I}{\partial k_1} - k_1\frac{\partial I}{\partial k_2} + p_2\frac{\partial I}{\partial p_1} - p_1\frac{\partial I}{\partial p_2} = 0 \\ k_2\frac{\partial I}{\partial j} + j\frac{\partial I}{\partial k_2} - \frac{E}{c^2}\frac{\partial I}{\partial p_1} - p_1\frac{\partial I}{\partial E} = 0 \\ k_1\frac{\partial I}{\partial j} + j\frac{\partial I}{\partial k_1} + \frac{E}{c^2}\frac{\partial I}{\partial p_2} + p_2\frac{\partial I}{\partial E} = 0 \\ p_2\frac{\partial I}{\partial j} + \frac{E}{c^2}\frac{\partial I}{\partial k_1} = 0 \\ p_1\frac{\partial I}{\partial j} - \frac{E}{c^2}\frac{\partial I}{\partial k_2} = 0 \\ p_1\frac{\partial I}{\partial k_1} + p_2\frac{\partial I}{\partial k_2} = 0 \end{cases} \tag{4.17}$$

On vérifie que le second invariant est

$$I_2\vec{n} = \frac{E}{c^2}j\vec{n} + (\vec{p} \times \vec{k}) \tag{4.18}$$

dont la dimension est celle d'une masse multipliée par une action. Notons que $\vec{n}$ est le vecteur unité orthogonal à $\vec{p}$ et $\vec{k}$ On peut donc poser $I_2 = ms\vec{n}$ et partant

$$\vec{s} = \frac{E}{mc^2}\vec{j} + \frac{(\vec{p} \times \vec{k})}{m} \tag{4.19}$$

que l'on écrit aussi selon

$$\vec{s} = \sqrt{1 + \frac{\vec{p}^2}{m^2c^2}}\vec{j} + \frac{(\vec{p} \times \vec{k})}{m} \tag{4.20}$$

si $\vec{s} = s\vec{n}, \vec{j} = j\vec{n}$.
L'orbite coadjointe est donc caractérisée par une masse $m$ et une action $s$. On la note $\mathcal{O}_{(m,s)}$.
La restriction de la forme de Kirillov à l'orbite coadjointe est donnée par

$$\Omega = K_{ij}(a)|\mathcal{O}_{(m,s)} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{j}{c^2} & \frac{E}{c^2} & 0 \\ \frac{j}{c^2} & 0 & 0 & \frac{E}{c^2} \\ -\frac{E}{c^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{E}{c^2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.21}$$

et son inverse est donc

$$\Omega^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{c^2}{E} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{c^2}{E} \\ \frac{c^2}{E} & 0 & 0 & -\frac{jc^2}{E^2} \\ 0 & \frac{c^2}{E} & \frac{jc^2}{E^2} & 0 \end{pmatrix} \tag{4.22}$$

La forme symplectique est alors

$$\sigma = \frac{c^2}{E}(dp_1 \wedge dk_1 + dp_2 \wedge dk_2) - \frac{jc^2}{E^2}dp_1 \wedge dp_2 \tag{4.23}$$

En posant

$$q^i = \frac{k_i}{m},\ \pi_i = \frac{p_i}{\sqrt{1+\frac{\vec{p}^2}{m^2c^2}}},\ e^*B^* = \frac{j}{m^2c^2},\quad i=1,2 \tag{4.24}$$

on écrit

$$\vec{j} = \frac{\vec{s}-\vec{p}\times\vec{q}}{\sqrt{1+\frac{\vec{p}^2}{m^2c^2}}} \tag{4.25}$$

et la la forme symplectique selon

$$\sigma = d\pi_i \wedge dq^i - e^*B^* d\pi_1 \wedge d\pi_2 \tag{4.26}$$

Nous trouvons la 2-forme symplectique modifiée $\sigma = \sigma_0 - e^*B^* d\pi_1 \wedge d\pi_2$ où $\sigma_0 = d\pi_i \wedge dq^i$ est la forme symplectique canonique tandis que $e^*$ est la charge duale de la particule et $B^*$ le champ magnétique duale.

### 4.1.4 Réalisation symplectique

La réalisation symplectique de $P(2+1)$ sur l'orbite $\mathcal{O}_{(m,s)}$ étant la restriction de l'action coadjointe sur l'orbite, elle est donnée par

$$L_{(\theta,v^1,v^2,x^1,x^2,t)}(q^1,q^2,p_1,p_2) = (q'^1,q'^2,p'_1,p'_2)$$

avec

$$\begin{aligned}
q'^1 = &-\frac{E}{c}e^*B^*\cosh\frac{v^1}{c}\sinh\frac{v^2}{c} + q^1(\cos\theta\cosh\frac{v^2}{c} - \sin\theta\sinh\frac{v^1}{c}\sinh\frac{v^2}{c})\\
&- q^2(\cos\theta\sinh\frac{v^1}{c}\sinh\frac{v^2}{c} + \sin\theta\cosh\frac{v^2}{c})\\
&- p_1\frac{c}{E}[x^1(\cos\theta\sinh\frac{v^1}{c}\cosh\frac{v^2}{c} + \sin\theta\sinh\frac{v^2}{c}) - ct\cos\theta\cosh\frac{v^1}{c}]\\
&- p_2\frac{c}{E}[x^1(\cos\theta\sinh\frac{v^2}{c} - \sin\theta\sinh\frac{v^1}{c}\cosh\frac{v^2}{c}) + ct\sin\theta\cosh\frac{v^2}{c}]\\
&+ x^1\cosh\frac{v^1}{c}\cosh\frac{v^2}{c} - ct\sinh\frac{v^1}{c}
\end{aligned} \tag{4.27}$$

$$
\begin{aligned}
q'^2 = {} & \frac{E}{c}e^*B^* \sinh\frac{v^1}{c} + q^1 \sin\theta \cosh\frac{v^1}{c} + q^2 \cos\theta \cosh\frac{v^1}{c} \\
& - p_1\frac{c}{E}[x^2(\cos\theta \sinh\frac{v^1}{c}\cosh\frac{v^2}{c} + \sin\theta\sinh\frac{v^2}{c}) \\
& - ct(\cos\theta\sinh\frac{v^1}{c}\sinh\frac{v^2}{c} + \sin\theta\cosh\frac{v^2}{c})] \\
& - p_2\frac{c}{E}[x^2(\cos\theta\sinh\frac{v^2}{c} - \sin\theta\sinh\frac{v^1}{c}\cosh\frac{v^2}{c}) \\
& - ct(\cos\theta\cosh\frac{v^2}{c} - \sin\theta\sinh\frac{v^1}{c}\sinh\frac{v^2}{c})] \\
& + x^2\cosh\frac{v^1}{c}\cosh\frac{v^2}{c} - ct\cosh\frac{v^1}{c}\sinh\frac{v^2}{c}
\end{aligned}
\tag{4.28}
$$

$$
p'_1 = p_1\cos\theta\cosh\frac{v^1}{c} + p_2\sin\theta\cosh\frac{v^1}{c} - \frac{E}{c}\sinh\frac{v^1}{c}
$$

$$
\begin{aligned}
p'_2 = {} & p_1(\cos\theta\sinh\frac{v^1}{c}\sinh\frac{v^2}{c} - \sin\theta\cosh\frac{v^2}{c}) \\
& + p_2(\cos\theta\cosh\frac{v^1}{c} - \sin\theta\sinh\frac{v^1}{c}\sinh\frac{v^2}{c}) - \frac{E}{c}\cosh\frac{v^1}{c}\sinh\frac{v^2}{c}
\end{aligned}
$$

Il s'ensuit que l'algèbre de Lie de Poincaré $\mathcal{P}(2+1)$ est réalisée par les champs de vecteurs hamiltoniens

$$
\rho(J) = \epsilon^j_i q^i\frac{\partial}{\partial q^j} + \epsilon^i_j\pi_i\frac{\partial}{\partial\pi_j}, \quad \rho(K_i) = -m\frac{\partial}{\partial\pi_i}, \quad \rho(P_i) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\vec{\pi}^2}{m^2c^2}}}\frac{\partial}{\partial q^i},
$$

$$
\rho(H) = \frac{\pi_i}{m\sqrt{1-\frac{\vec{\pi}^2}{m^2c^2}}}\frac{\partial}{\partial q^i}
$$

Les composantes du moment sont alors

$$
\mu(J) = \vec{\pi}\times\vec{q} + e^*B^*\vec{\pi}^2\vec{n}, \ \mu(K_i) = m(q^i + e^*B^*\epsilon^j_i\pi_j), \quad \mu(P_i) = \frac{\pi_i}{\sqrt{1-\frac{\overrightarrow{\pi}^2}{m^2c^2}}},
$$

$$
\mu(H) = \frac{\vec{\pi}^2}{2m\sqrt{1-\frac{\overrightarrow{\pi}^2}{m^2c^2}}}
$$

### 4.1.5 Structure noncommutative de l'orbite

Le crochet de Poisson de deux fonctions $f$ et $g$ définies sur l'orbite $\mathcal{O}_{(m,s)}$ est

$$\{f,g\} = \Omega_{ij}\frac{\partial f}{\partial \alpha_i}\frac{\partial g}{\partial \alpha_j} \tag{4.29}$$

On vérifie que

$$\{f,g\} = -e^*B^*(\frac{\partial f}{\partial q^1}\frac{\partial g}{\partial q^2} - \frac{\partial f}{\partial q^2}\frac{\partial g}{\partial q^1}) + (\frac{\partial f}{\partial q^1}\frac{\partial g}{\partial \pi_1} - \frac{\partial f}{\partial \pi_1}\frac{\partial g}{\partial q^1}) + (\frac{\partial f}{\partial q^2}\frac{\partial g}{\partial \pi_2} - \frac{\partial f}{\partial \pi_2}\frac{\partial g}{\partial q^2}) \tag{4.30}$$

et partant

$$\begin{aligned} \{q^1,q^2\} &= -e^*B^* \\ \{p_1,p_2\} &= 0 \\ \{q^i,p_j\} &= \delta^i_j \end{aligned} \tag{4.31}$$

Nous remarquons que les moments commutent tandis que les positions ne commutent pas. Cette non-commutativité est due à la présence du champ $B^*$.
Ces résultats de commutativité des moments et de la non-commutativité des positions s'observent également au groupe de Galilée [15] qui est un groupe résultant par contraction (espace-vitesse) au groupe de Poincaré [17].

On a de plus que

$$e^*B^*\vec{n} = \frac{\vec{s} + \vec{q}\times\vec{p}}{m^2c^2\sqrt{1+\dfrac{\vec{p}^2}{m^2c^2}}} \tag{4.32}$$

## 4.2 Réalisations symplectiques des groupes $P_\pm(2+1)$

Notons que l'algèbre de Lie $\mathcal{P}_\pm(2+1)$ n'admet pas d'extension centrale. On passe immédiatement à l'action adjointe

### 4.2.1 Action adjointe

L'action adjointe du groupe $P_\pm(2+1)$ sur son algèbre de Lie $\mathcal{P}_\pm(2+1)$ est donnée par

$$Ad_g(D(\delta g)) = D(g)D(\delta g)D(g^{-1}) \tag{4.33}$$

On vérifie que

$$\begin{cases} j(\delta\alpha') = \Lambda j(\delta\alpha)\Lambda^{-1} \\ \\ \delta b' = \Lambda\delta b - \Lambda j(\delta\alpha)\Lambda^{-1}b \end{cases} \tag{4.34}$$

où la matrice $\Lambda$ est définie en (2.37) et la matrice $j(\delta\alpha)$ est définie en (2.47).
La représentation adjointe de $P_+(2+1)$ est

$$\begin{pmatrix}\delta\beta'\\ \delta b'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I & 0\\ C(v,t) & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B(x^2) & 0\\ 0 & R(x^2)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A(x^1) & 0\\ 0 & R(x^1)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}R(\theta) & 0\\ 0 & R(\theta)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\delta\beta\\ \delta b\end{pmatrix} \tag{4.35}$$

qui donne lieu à

$$\begin{aligned}\delta\beta' &= [B(x^2)A(x^1)R(\theta)]\delta\beta\\ \delta b' &= [C(v,t)B(x^2)A(x^1)R(\theta)]\delta\beta+[R(x^2)R(x^1)R(\theta)]\delta b\end{aligned} \tag{4.36}$$

où

$$\delta\beta=\begin{pmatrix}\delta x^1\\ \delta x^2\\ \delta\theta\end{pmatrix},\delta b=\begin{pmatrix}\delta v^1\\ \delta v^2\\ \delta t\end{pmatrix},C(v,t)=\begin{pmatrix}-\omega^2 t & 0 & v^2\\ 0 & -\omega^2 t & v^1\\ \dfrac{v^1}{c^2} & \dfrac{v^2}{c^2} & 0\end{pmatrix} \tag{4.37}$$

$$B(x^2)=\begin{pmatrix}\cos\dfrac{\omega x^2}{c} & 0 & \dfrac{c}{\omega}\sin\dfrac{\omega x^2}{c}\\ 0 & 1 & 0\\ -\dfrac{\omega}{c}\sin\dfrac{\omega x^2}{c} & 0 & \cos\dfrac{\omega x^2}{c}\end{pmatrix},A(x^1)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\dfrac{\omega x^1}{c} & -\dfrac{c}{\omega}\sin\dfrac{\omega x^1}{c}\\ 0 & \dfrac{\omega}{c}\sin\dfrac{\omega x^1}{c} & \cos\dfrac{\omega x^1}{c}\end{pmatrix} \tag{4.38}$$

et celle de $P_-(2+1)$ est

$$\begin{pmatrix}\delta\beta'\\ \delta b'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I & 0\\ C_h(v,t) & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B_h(x^2) & 0\\ 0 & L(x^2)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_h(x^1) & 0\\ 0 & L(x^1)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}R(\theta) & 0\\ 0 & R(\theta)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\delta\beta\\ \delta b\end{pmatrix} \tag{4.39}$$

qui donne lieu à

$$\begin{aligned}\delta\beta' &= [B_h(x^2)A_h(x^1)R(\theta)]\delta\beta\\ \delta b' &= [C_h(v,t)B_h(x^2)A_h(x^1)R(\theta)]\delta\beta+[L(x^2)L(x^1)R(\theta)]\delta b\end{aligned} \tag{4.40}$$

où

$$\delta\beta=\begin{pmatrix}\delta x^1\\ \delta x^2\\ \delta\theta\end{pmatrix},\delta b=\begin{pmatrix}\delta v^1\\ \delta v^2\\ \delta t\end{pmatrix},C_h(v,t)=\begin{pmatrix}\omega^2 t & 0 & v^2\\ 0 & \omega^2 t & -v^1\\ \dfrac{v^1}{c^2} & \dfrac{v^2}{c^2} & 0\end{pmatrix} \tag{4.41}$$

$$B_h(x^2)=\begin{pmatrix}\cosh\dfrac{\omega x^2}{c} & 0 & \dfrac{c}{\omega}\sinh\dfrac{\omega x^2}{c}\\ 0 & 1 & 0\\ \dfrac{\omega}{c}\sinh\dfrac{\omega x^2}{c} & 0 & \cosh\dfrac{\omega x^2}{c}\end{pmatrix},A_h(x^1)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cosh\dfrac{\omega x^1}{c} & -\dfrac{c}{\omega}\sinh\dfrac{\omega x^1}{c}\\ 0 & -\dfrac{\omega}{c}\sinh\dfrac{\omega x^1}{c} & \cosh\dfrac{\omega x^1}{c}\end{pmatrix} \tag{4.42}$$

### 4.2.2 Action coadjointe

Si la dualité entre de l'algèbre de Lie $\mathcal{P}_{\pm}(2+1)$ avec sa duale $\mathcal{P}^{*}{}_{\pm}(2+1)$ est définie par

$\langle (j, p_1, p_2, k_1, k_2, E), (\delta\theta, \delta x^1, \delta x^2, \delta v^1, \delta v^2, \delta t)\rangle = j.\delta\theta + p_1.\delta x^1 + p_2.\delta x^2 + k_1.\delta x^1 + k_2.\delta v^2 + E.\delta t$

alors l'action coajointe

$$Ad_g^* : \mathcal{P}_{\pm}(2+1) \to \mathcal{P}^{*}{}_{\pm}(2+1)$$

est donnée par

$$Ad^*_{(\theta,x^1,x^2,v^1,v^2,t)}(j, p_1, p_2, k_1, k_2, E) = (j', p_1', p_2', k_1', k_2', E') \tag{4.43}$$

Nous posons

$$l = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ j \end{pmatrix}, k = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ E \end{pmatrix} \tag{4.44}$$

Dans le cas du groupe $P_+(2+1)$ l'action coadjointe est telle que

$$\begin{pmatrix} l' \\ k' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & C'(v,t) \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B'(x^2) & 0 \\ 0 & R'(x^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A'(x^1) & 0 \\ 0 & R'(x^1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R(\theta) & 0 \\ 0 & R(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l \\ k \end{pmatrix} \tag{4.45}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} l' &= [B'(x^2)A'(x^1)R(\theta)]l + [C'(v,t)R'(x^2)R'(x^1)R(\theta)]k \\ k' &= [R'(x^2)R'(x^1)R(\theta)]k \end{aligned} \tag{4.46}$$

où $A'(x^1) = SA(x^1)S^{-1}$, $\quad R'(x^2) = S^{-1}R(x^2)S$, $\quad R'(x^1) = S^{-1}R(x^1)S$,
$B'(x^1) = TB(x^2)T^{-1}$ et $C'(v,t) = UC(v,t)U^{-1}$ avec

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix} \tag{4.47}$$

Nous avons explicitement

$$\begin{aligned} j' = {} & j \cos\frac{\omega x^1}{c}\cos\frac{\omega x^2}{c} - p_1\frac{c}{\omega}(\cos\theta\sin\frac{\omega x^2}{c} - \sin\theta\sin\frac{\omega x^1}{c}\cos\frac{\omega x^2}{c}) \\ & + p_2\frac{c}{\omega}(\cos\theta\sin\frac{\omega x^1}{c}\cos\frac{\omega x^2}{c} + \sin\theta\sin\frac{\omega x^2}{c}) \\ & + k_1[v^1(\cos\theta\sin\frac{\omega x^1}{c}\sin\frac{\omega x^2}{c} - \sin\theta\cos\frac{\omega x^2}{c}) + v^2\cos\theta\cos\frac{\omega x^1}{c}] \\ & + k_2[v^1(\cos\theta\cos\frac{\omega x^2}{c} + \sin\theta\sin\frac{\omega x^1}{c}\sin\frac{\omega x^2}{c}) + v^2\cos\theta\cos\frac{\omega x^2}{c}] \\ & + \frac{E}{c\omega}(v^1\sin\frac{\omega x^1}{c}\cos\frac{\omega x^2}{c} - v^2\sin\frac{\omega x^1}{c}) \end{aligned} \tag{4.48}$$

$$
\begin{aligned}
p_1' = {} & j\frac{\omega}{c}\cos\frac{\omega x^1}{c}\sin\frac{\omega x^2}{c} + p_1(\cos\theta\cos\frac{\omega x^2}{c} + \sin\theta\sin\frac{\omega x^1}{c}\sin\frac{\omega x^2}{c}) \\
& + p_2(\cos\theta\sin\frac{\omega x^1}{c}\sin\frac{\omega x^2}{c} - \sin\theta\cos\frac{\omega x^2}{c}) \\
& + k_1[v^1\frac{\omega}{c}(\cos\theta\sin\frac{\omega x^1}{c}\cos\frac{\omega x^2}{c} + \sin\theta\sin\frac{\omega x^2}{c}) + \omega^2 t\cos\theta\cos\frac{\omega x^1}{c}] \\
& + k_2[v^1\frac{\omega}{c}(\cos\theta\sin\frac{\omega x^2}{c} - \sin\theta\sin\frac{\omega x^1}{c}\cos\frac{\omega x^2}{c}) - \omega^2 t\sin\theta\cos\frac{\omega x^1}{c}] \\
& - \frac{E}{c^2}(v^1\cos\frac{\omega x^1}{c}\cos\frac{\omega x^2}{c} - c\omega t\sin\frac{\omega x^1}{c})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p_2' = {} & -j\frac{\omega}{c}\sin\frac{\omega x^1}{c} + p_1\sin\theta\cos\frac{\omega x^1}{c} + p_2\cos\theta\cos\frac{\omega x^1}{c} \\
& + k_1[v^2\frac{\omega}{c}(\cos\theta\sin\frac{\omega x^1}{c}\cos\frac{\omega x^2}{c} + \sin\theta\sin\frac{\omega x^2}{c}) \\
& - \omega^2 t(\cos\theta\sin\frac{\omega x^1}{c}\sin\frac{\omega x^2}{c} - \sin\theta\cos\frac{\omega x^2}{c})] \\
& + k_2[v^2\frac{\omega}{c}(\cos\theta\sin\frac{\omega x^2}{c} - \sin\theta\sin\frac{\omega x^1}{c}\cos\frac{\omega x^2}{c}) \\
& + \omega^2 t(\cos\theta\cos\frac{\omega x^2}{c} - \sin\theta\sin\frac{\omega x^1}{c}\sin\frac{\omega x^2}{c})] \\
& - \frac{E}{c^2}(v^2\cos\frac{\omega x^1}{c}\cos\frac{\omega x^2}{c} - c\omega t\cos\frac{\omega x^1}{c}\sin\frac{\omega x^2}{c})
\end{aligned}
\tag{4.49}
$$

$$
k_1' = k_1\cos\theta\cos\frac{\omega x^1}{c} - k_2\sin\theta\cos\frac{\omega x^1}{c} + \frac{E}{c\omega}\sin\frac{\omega x^1}{c}
$$

$$
\begin{aligned}
k_2' = {} & -k_1(\cos\theta\sin\frac{\omega x^1}{c}\sin\frac{\omega x^2}{c} - \sin\theta\cos\frac{\omega x^2}{c}) \\
& + k_2(\cos\theta\cos\frac{\omega x^2}{c} + \sin\theta\sin\frac{\omega x^1}{c}\sin\frac{\omega x^2}{c}) \\
& + \frac{E}{c\omega}\cos\frac{\omega x^1}{c}\sin\frac{\omega x^2}{c}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E' = {} & k_1 c\omega(\cos\theta\sin\frac{\omega x^1}{c}\cos\frac{\omega x^2}{c} - \sin\theta\sin\frac{\omega x^2}{c}) \\
& - k_2 c\omega(\cos\theta\sin\frac{\omega x^2}{c} - \sin\theta\sin\frac{\omega x^1}{c}\cos\frac{\omega x^2}{c}) \\
& + E\cos\frac{\omega x^1}{c}\cos\frac{\omega x^2}{c}
\end{aligned}
$$

Similairement, l'action coadjointe de $P_-(2+1)$ est

$$\begin{pmatrix} l' \\ k' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & C'_h(v,t) \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B'_h(x^2) & 0 \\ 0 & L'(x^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A'_h(x^1) & 0 \\ 0 & L'(x^1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R(\theta) & 0 \\ 0 & R(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l \\ k \end{pmatrix} \quad (4.50)$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} l' &= [B'_h(x^2)A'_h(x^1)R(\theta)]l + [C'_h(v,t)L'(x^2)L'(x^1)R(\theta)]k \\ k' &= [L'(x^2)L'(x^1)R(\theta)]k \end{aligned} \quad (4.51)$$

où $A'_h(x^1) = SA_h(x^1)S^{-1}$, $\quad L'(x^2) = S^{-1}L(x^2)S$, $\quad L'(x^1) = S^{-1}L(x^1)S$,
$B'_h(x^1) = TB_h(x^2)T^{-1}$ et $C'_h(v,t) = UC_h(v,t)U^{-1}$ avec $S, T$ et $U$ données par (4.47).

Nous avons alors explicitement que

$$\begin{aligned} j' = {} & j\cosh\frac{\omega x^1}{c}\cosh\frac{\omega x^2}{c} - p_1\frac{c}{\omega}(\cos\theta\sinh\frac{\omega x^2}{c} - \sin\theta\sinh\frac{\omega x^1}{c}\cos\frac{\omega x^2}{c}) \\ & + p_2\frac{c}{\omega}(\cos\theta\sinh\frac{\omega x^1}{c}\cosh\frac{\omega x^2}{c} + \sin\theta\sinh\frac{\omega x^2}{c}) \\ & + k_1[v^1(\cos\theta\sinh\frac{\omega x^1}{c}\sinh\frac{\omega x^2}{c} + \sin\theta\cosh\frac{\omega x^2}{c}) - v^2\cos\theta\cosh\frac{\omega x^1}{c}] \\ & + k_2[v^1(\cos\theta\cosh\frac{\omega x^2}{c} - \sin\theta\sinh\frac{\omega x^1}{c}\sinh\frac{\omega x^2}{c}) + v^2\cos\theta\cosh\frac{\omega x^2}{c}] \\ & + \frac{E}{c\omega}(v^1\sinh\frac{\omega x^1}{c}\cosh\frac{\omega x^2}{c} - v^2\sinh\frac{\omega x^1}{c}) \end{aligned} \quad (4.52)$$

$$\begin{aligned} p'_1 = {} & -j\frac{\omega}{c}\cosh\frac{\omega x^1}{c}\sinh\frac{\omega x^2}{c} + p_1(\cos\theta\cosh\frac{\omega x^2}{c} - \sin\theta\sinh\frac{\omega x^1}{c}\sinh\frac{\omega x^2}{c}) \\ & - p_2(\cos\theta\sinh\frac{\omega x^1}{c}\sinh\frac{\omega x^2}{c} + \sin\theta\cosh\frac{\omega x^2}{c}) \\ & - k_1[v^1\frac{\omega}{c}(\cos\theta\sinh\frac{\omega x^1}{c}\cosh\frac{\omega x^2}{c} + \sin\theta\sinh\frac{\omega x^2}{c}) + \omega^2 t\cos\theta\cosh\frac{\omega x^1}{c}] \\ & - k_2[v^1\frac{\omega}{c}(\cos\theta\sinh\frac{\omega x^2}{c} - \sin\theta\sinh\frac{\omega x^1}{c}\cosh\frac{\omega x^2}{c}) - \omega^2 t\sin\theta\cosh\frac{\omega x^1}{c}] \\ & - \frac{E}{c^2}(v^1\cosh\frac{\omega x^1}{c}\cosh\frac{\omega x^2}{c} + c\omega t\sinh\frac{\omega x^1}{c}) \end{aligned} \quad (4.53)$$

$$
\begin{aligned}
p_2' = {} & j\frac{\omega}{c}\sinh\frac{\omega x^1}{c} + p_1\sin\theta\cosh\frac{\omega x^1}{c} + p_2\cos\theta\cosh\frac{\omega x^1}{c} \\
& - k_1[v^2\frac{\omega}{c}(\cos\theta\sinh\frac{\omega x^1}{c}\cosh\frac{\omega x^2}{c} + \sin\theta\sinh\frac{\omega x^2}{c}) \\
& + \omega^2 t(\cos\theta\sinh\frac{\omega x^1}{c}\sinh\frac{\omega x^2}{c} + \sin\theta\cosh\frac{\omega x^2}{c})] \\
& - k_2[v^2\frac{\omega}{c}(\cos\theta\sinh\frac{\omega x^2}{c} - \sin\theta\sinh\frac{\omega x^1}{c}\cosh\frac{\omega x^2}{c}) \\
& + \omega^2 t(\cos\theta\cosh\frac{\omega x^2}{c} - \sin\theta\sinh\frac{\omega x^1}{c}\sinh\frac{\omega x^2}{c})] \\
& - \frac{E}{c^2}(v^2\cosh\frac{\omega x^1}{c}\cosh\frac{\omega x^2}{c} + c\omega t\cosh\frac{\omega x^1}{c}\sinh\frac{\omega x^2}{c})
\end{aligned}
$$

$$
k_1' = k_1\cos\theta\cosh\frac{\omega x^1}{c} - k_2\sin\theta\cosh\frac{\omega x^1}{c} + \frac{E}{c\omega}\sinh\frac{\omega x^1}{c} \tag{4.54}
$$

$$
\begin{aligned}
k_2' = {} & k_1(\cos\theta\sinh\frac{\omega x^1}{c}\sinh\frac{\omega x^2}{c} + \sin\theta\cosh\frac{\omega x^2}{c}) \\
& + k_2(\cos\theta\cosh\frac{\omega x^2}{c} - \sin\theta\sinh\frac{\omega x^1}{c}\sinh\frac{\omega x^2}{c}) \\
& + \frac{E}{c\omega}\cosh\frac{\omega x^1}{c}\sinh\frac{\omega x^2}{c}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E' = {} & k_1 c\omega(\cos\theta\sinh\frac{\omega x^1}{c}\cosh\frac{\omega x^2}{c} + \sin\theta\sinh\frac{\omega x^2}{c}) \\
& + k_2 c\omega(\cos\theta\sinh\frac{\omega x^2}{c} - \sin\theta\sinh\frac{\omega x^1}{c}\cosh\frac{\omega x^2}{c}) \\
& + E\cosh\frac{\omega x^1}{c}\cosh\frac{\omega x^2}{c}
\end{aligned}
$$

### 4.2.3 Orbite coadjointe

Des crochets définissant l'algèbre de Lie $\mathcal{P}_{\pm}(2+1)$, on vérifie que la matrice de Kirillov dans la base $(J, P_i, K_i, H)$ de est

$$K(j,p_i,k_i,E) = \begin{pmatrix} 0 & p_2 & -p_1 & k_2 & -k_1 & 0 \\ -p_2 & 0 & \pm\kappa^2 j & -\dfrac{E}{c^2} & 0 & \pm\omega^2 k_1 \\ p_1 & \mp\kappa^2 j & 0 & 0 & -\dfrac{E}{c^2} & \pm\omega^2 k_2 \\ -k_2 & \dfrac{E}{c^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_1 & 0 & \dfrac{E}{c^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mp\omega^2 k_1 & \mp\omega^2 k_2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.55}$$

Tout invariant de l'action coadjointe est solution du système

$$K_{\alpha\beta}\frac{\partial I}{\partial a_\beta} = 0 \tag{4.56}$$

Si on pose

$$\vec{k} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$$

on vérifie des relations (4.49,4.53, 4.54)que

$$I_1 = \frac{E^2}{c^2} \pm \omega^2 \vec{k}^2 \quad , \quad \vec{I_2} = \frac{E}{c^2}\vec{j} + (\vec{p} \times \vec{k}) \tag{4.57}$$

sont deux invariants de l'action coadjointe de $\mathcal{P}_{\pm}(2+1)$, $I_1$ a la dimension physique d'un moment linéaire au carré tandis que $I_2$ a la dimension d'une action multipliée par une masse. Nous pouvons donc poser $I_1 = m^2c^2$ et $\vec{I_2} = m\vec{s}$ où $m$ est une masse et $s$ est une action. On réecrit alors (4.57) selon

$$\frac{E^2}{c^2} \pm \omega^2 \vec{k}^2 = m^2c^2 \quad , \quad \vec{s} = \frac{E}{mc^2}\vec{j} + \frac{(\vec{p} \times \vec{k})}{m} \tag{4.58}$$

On note l'orbite selon $\mathcal{O}_{(m,s)}$. La restriction de la forme de Kirillov à l'orbite coadjointe est donnée par

$$\Omega = K_{ij}(a)|\mathcal{O}_{(m,s)} = \begin{pmatrix} 0 & \pm\kappa^2 j & -\frac{E}{c^2} & 0 \\ \mp\kappa^2 j & 0 & 0 & -\frac{E}{c^2} \\ \frac{E}{c^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{E}{c^2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.59}$$

Son inverse étant

$$\Omega^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{c^2}{E} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{c^2}{E} \\ -\frac{c^2}{E} & 0 & 0 & \pm\kappa^2\frac{c^4}{E^2}j \\ 0 & -\frac{c^2}{E} & \mp\kappa^2\frac{c^4}{E}j & 0 \end{pmatrix} \tag{4.60}$$

la forme symplectique alors donnée par

$$\sigma = \frac{c^2}{E}(dp_1 \wedge dk_1 + dp_2 \wedge dk_2) \pm \kappa^2\frac{c^4}{E^2}j dk_1 \wedge dk_2 \tag{4.61}$$

Si on pose $q^i = \frac{c^2}{E}k_i, \quad eB = \kappa^2 j$, la forme symplectique s'écrit

$$\sigma = dp_i \wedge dq^i \pm eB dq^1 \wedge dq^2 \tag{4.62}$$

L'expression de $E$ est alors

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 \mp \kappa^2\vec{q}^2}} \tag{4.63}$$

avec $\kappa^2\vec{q}^2 < 1$ c'est-à-dire $1 - \kappa^2\vec{q}^2$ positif dans le cas $P_+(2+1)$.

### 4.2.4 Réalisation symplectique

La réalisation symplectique, restriction de l'action coadjointe à l'orbite est alors

$$L_{(\theta,x^1,x^2,v^1,v^2,t)}(p_1,p_2,q^1,q^2) = (p'_1,p'_2,q'^1,q'^2) \tag{4.64}$$

avec

$$\begin{aligned}
p'_1 &= eB\frac{\omega}{\kappa^2 c}\cos\frac{\omega x^1}{c}\sin\frac{\omega x^2}{c} + p_1(\cos\theta\cos\frac{\omega x^2}{c} + \sin\theta\sin\frac{\omega x^1}{c}\sin\frac{\omega x^2}{c}) \\
&+ p_2(\cos\theta\sin\frac{\omega x^1}{c}\sin\frac{\omega x^2}{c} - \sin\theta\cos\frac{\omega x^2}{c}) \\
&+ q^1E\frac{\omega}{c^3}[v^1(\cos\theta\sin\frac{\omega x^1}{c}\cos\frac{\omega x^2}{c} + \sin\theta\sin\frac{\omega x^2}{c}) + c\omega t\cos\theta\cos\frac{\omega x^1}{c}] \\
&+ q^2E\frac{\omega}{c^3}[v^1(\cos\theta\sin\frac{\omega x^2}{c} - \sin\theta\sin\frac{\omega x^1}{c}\cos\frac{\omega x^2}{c}) - c\omega t\sin\theta\cos\frac{\omega x^1}{c}] \\
&- \frac{E}{c^2}(v^1\cos\frac{\omega x^1}{c}\cos\frac{\omega x^2}{c} - c\omega t\sin\frac{\omega x^1}{c})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p'_2 &= -eB\frac{\omega}{\kappa^2 c}\sin\frac{\omega x^1}{c} + p_1\sin\theta\cos\frac{\omega x^1}{c} + p_2\cos\theta\cos\frac{\omega x^1}{c} \\
&+ q^1E\frac{\omega}{c^3}[v^2(\cos\theta\sin\frac{\omega x^1}{c}\cos\frac{\omega x^2}{c} + \sin\theta\sin\frac{\omega x^2}{c}) \\
&- c\omega t(\cos\theta\sin\frac{\omega x^1}{c}\sin\frac{\omega x^2}{c} - \sin\theta\cos\frac{\omega x^2}{c})] \\
&+ q^2E\frac{\omega}{c^3}[v^2(\cos\theta\sin\frac{\omega x^2}{c} - \sin\theta\sin\frac{\omega x^1}{c}\cos\frac{\omega x^2}{c}) \\
&+ c\omega t(\cos\theta\cos\frac{\omega x^2}{c} - \sin\theta\sin\frac{\omega x^1}{c}\sin\frac{\omega x^2}{c})] \\
&- \frac{E}{c^2}(v^2\cos\frac{\omega x^1}{c}\cos\frac{\omega x^2}{c} - c\omega t\cos\frac{\omega x^1}{c}\sin\frac{\omega x^2}{c})
\end{aligned} \tag{4.65}$$

$$q'^1 = q^1\cos\theta\cos\frac{\omega x^1}{c} - q^2\sin\theta\cos\frac{\omega x^1}{c} + \frac{c}{\omega}\sin\frac{\omega x^1}{c}$$

$$\begin{aligned}
q'^2 &= -q^1(\cos\theta\sin\frac{\omega x^1}{c}\sin\frac{\omega x^2}{c} - \sin\theta\cos\frac{\omega x^2}{c}) \\
&+ q^2(\cos\theta\cos\frac{\omega x^1}{c} + \sin\theta\sin\frac{\omega x^1}{c}\sin\frac{\omega x^2}{c}) \\
&+ \frac{c}{\omega}\cos\frac{\omega x^1}{c}\sin\frac{\omega x^2}{c}
\end{aligned}$$

dans le cas du groupe $P_+(2+1)$ alors qu'elle est

$$\begin{aligned}
p'_1 &= -eB\frac{\omega}{\kappa^2 c}\cosh\frac{\omega x^1}{c}\sinh\frac{\omega x^2}{c} + p_1(\cos\theta\cosh\frac{\omega x^2}{c} - \sin\theta\sinh\frac{\omega x^1}{c}\sinh\frac{\omega x^2}{c})\\
&- p_2(\cos\theta\sinh\frac{\omega x^1}{c}\sinh\frac{\omega x^2}{c} + \sin\theta\cosh\frac{\omega x^2}{c})\\
&- q^1E\frac{\omega}{c^3}[v^1(\cos\theta\sinh\frac{\omega x^1}{c}\cosh\frac{\omega x^2}{c} + \sin\theta\sinh\frac{\omega x^2}{c}) + c\omega t\cos\theta\cosh\frac{\omega x^1}{c}]\\
&- q^2E\frac{\omega}{c^3}[v^1(\cos\theta\sinh\frac{\omega x^2}{c} - \sin\theta\sinh\frac{\omega x^1}{c}\cosh\frac{\omega x^2}{c}) - c\omega t\sin\theta\cosh\frac{\omega x^1}{c}]\\
&- \frac{E}{c^2}(v^1\cosh\frac{\omega x^1}{c}\cosh\frac{\omega x^2}{c} + c\omega t\sinh\frac{\omega x^1}{c})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p'_2 &= eB\frac{\omega}{\kappa^2 c}\sinh\frac{\omega x^1}{c} + p_1\sin\theta\cosh\frac{\omega x^1}{c} + p_2\cos\theta\cosh\frac{\omega x^1}{c}\\
&- q^1E\frac{\omega}{c^3}[v^2(\cos\theta\sinh\frac{\omega x^1}{c}\cosh\frac{\omega x^2}{c} + \sin\theta\sinh\frac{\omega x^2}{c})\\
&+ c\omega t(\cos\theta\sinh\frac{\omega x^1}{c}\sinh\frac{\omega x^2}{c} + \sin\theta\cosh\frac{\omega x^2}{c})]\\
&- q^2E\frac{\omega}{c^3}[v^2(\cos\theta\sinh\frac{\omega x^2}{c} - \sin\theta\sinh\frac{\omega x^1}{c}\cosh\frac{\omega x^2}{c})\\
&+ c\omega t(\cos\theta\cosh\frac{\omega x^2}{c} - \sin\theta\sinh\frac{\omega x^1}{c}\sinh\frac{\omega x^2}{c})]\\
&- \frac{E}{c^2}(v^2\cosh\frac{\omega x^1}{c}\cosh\frac{\omega x^2}{c} + c\omega t\cosh\frac{\omega x^1}{c}\sinh\frac{\omega x^2}{c})
\end{aligned} \tag{4.66}$$

$$q'1 = q^1\cos\theta\cosh\frac{\omega x^1}{c} - q^2\sin\theta\cosh\frac{\omega x^1}{c} + \frac{c}{\omega}\sinh\frac{\omega x^1}{c}$$

$$\begin{aligned}
q'^2 &= q^1(\cos\theta\sinh\frac{\omega x^1}{c}\sinh\frac{\omega x^2}{c} + \sin\theta\cosh\frac{\omega x^2}{c})\\
&+ q^2(\cos\theta\cosh\frac{\omega x^1}{c} - \sin\theta\sinh\frac{\omega x^1}{c}\sinh\frac{\omega x^2}{c})\\
&+ \frac{c}{\omega}\cosh\frac{\omega x^1}{c}\sinh\frac{\omega x^2}{c}
\end{aligned}$$

dans le cas du groupe $P_-(2+1)$.
L'algèbre de Lie $P_\pm(2+1)$ est alors réalisée par les champs de vecteurs hamiltoniens

$$\rho(J) = \epsilon^i_j p_i\frac{\partial}{\partial p_j} + \epsilon^j_i q^j\frac{\partial}{\partial q^i},\ \rho(P_i) = \frac{\partial}{\partial q^i}, \tag{4.67}$$

$$\rho(K_i) = -\frac{m}{\sqrt{1\mp\kappa^2\vec{q}^2}}\frac{\partial}{\partial p_i},\ \rho(H) = \pm\frac{m\omega^2}{\sqrt{1\mp\kappa^2\vec{q}^2}}q^i\frac{\partial}{\partial p_j}\delta_{ij} \tag{4.68}$$

Le composantes du moment sont alors

$$\mu(\rho(J)) = \vec{q} \times \vec{p} \pm eB\frac{\vec{q}^2}{2},\ \mu(\rho(P_i)) = p_i \pm eB\epsilon_{ij}q^j, \tag{4.69}$$

$$\mu(\rho(K_i)) = \frac{m}{\sqrt{1 \mp \kappa^2\vec{q}^2}}q^i,\ \mu(\rho(H)) = \mp\frac{m\omega^2}{\sqrt{1 \mp \kappa^2\vec{q}^2}}\vec{q}^2 \tag{4.70}$$

### 4.2.5 Structure noncommutative de l'orbite

Le crochet de Poisson

$$\{f, g\} = \Omega_{ij}\frac{\partial f}{\partial \alpha_i}\frac{\partial g}{\partial \alpha_j} \tag{4.71}$$

de deux fonctions $f$ et $g$ définies sur l'orbite $\mathcal{O}_{(m,s)}$ est explicitement donné par

$$\begin{aligned}\{f, g\} = \pm eB(&\frac{\partial f}{\partial p_1}\frac{\partial g}{\partial p_2} - \frac{\partial f}{\partial p_2}\frac{\partial g}{\partial p_1}) \\ &- (\frac{\partial f}{\partial p_1}\frac{\partial g}{\partial q^1} - \frac{\partial f}{\partial p_1}\frac{\partial g}{\partial q^1}) + (\frac{\partial f}{\partial p_2}\frac{\partial g}{\partial q^2} - \frac{\partial f}{\partial q^2}\frac{\partial g}{\partial p_2})]\end{aligned} \tag{4.72}$$

Il suit alors que

$$\begin{aligned}\{p_1, p_2\} &= \pm eB \\ \{q^1, q^2\} &= 0 \\ \{q^i, p_j\} &= \delta^i_j\end{aligned} \tag{4.73}$$

qui dit que $(p_i, q^i)$ sont des coordonées canoniques et que les moments ne commutent pas à cause du terme $eB$. L'orbite $\mathcal{O}_{(m,s)}$ est un espace de phase non commutative.
Ces résultats de la commutativité des positions et de la non-commutativité des moments s'observent également aux groupes Para-Galilée [15] résultant par contraction (espace-vitesse) aux groupes Para-Poincaré [17]

# Conclusion

Ce mémoire a porté sur les réalisations canoniques (symplectiques) des groupes de Poincaré et Para-Poincaré. Notre objectif était d'établir les réalialisations canoniques de ces deux groupes en une (deux) dimension(s) d'espace.
En une dimension d'espace, l'orbite coadjointe est un espace de phase énergie-temps pour les deux cas de groupes.
En deux dimensions d'espace, nous avons trouvé que l'orbite coadjointe est caractérisée par deux invariants : une masse $m$ et une action $s$ pour les deux cas de groupes et elle est notée $\mathcal{O}_{(m,s)}$. Cette orbite est munie d'une forme symplectique modifiée par rapport à la forme canonique.
L'orbite coadjointe est alors une variété symplectique non-commutative où les positions $q^i$ ne commutent pas pour le cas du groupe de Poincaré et les moments $p_i$ ne commutent pas pour le cas des groupes Para-Poincaré. Cette non-commutativité des positions et des moments s'observe également aux groupes de Galilée et Para-Galilée qui sont des groupes résultant par le processus de contraction (espace-vitesse) aux groupes de Poincaré et Para-Poincaré respectivement.

Pour la recherche future, nous comptons extraire et soumettre un article à partir des résultats de ce mémoire. Comme les groupes étudiés dans ce mémoire ne possèdent pas d'extension centrale en dimension deux d'espace, nous étendrons la dimension : faire les réalisations canoniques en dimension trois et vérifier si l'extension centrale existe. De plus, nous exploiterons le cube et nous ferons des analyses comparatives pour les différents cas de groupes cinématiques.

# Bibliographie


[1] ALEXANDER V-B. *Simplifying the Reinsch algorithm for the Baker-Campbell Hausdorff series.*, arXiv :150.05034v3 [math-ph] 28 November 2017

[2] BACRY H.,LÉVY-LEBLOND J.M. Possible kinematics, J.Math. Phys. V 9(1968)1605

[3] BRIAN C-H. *An elementary introduction to groups and representations* ., arXiv :math-ph/0005032v1 31 May 2000

[4] CANNAS DA SILVA A. *Lectures on symplectic geometry* . Published by Springer-Verlag asnumber 1764 of the series Lecture Notes in Mathematics (2006)

[5] GWYN B. *Lie groups, Lie algebras and their representations* . (September 16, 2016)

[6] HADDA H. *Application moment en géométrie.* Mémoire, Université Kasdi Merbeh Ouargla (18 mai 2016)

[7] HUDON V.,TWAREQUE ALI S. *Coadjoint orbit of the Poincaré Group in 2+1 Dimensions and their Coherent states.*, arXiv :1011.6620v1[math-ph] 30 Nov 2010

[8] INONU E.,WIGNER E.P. *On the contraction of groups and their representation.*,Proc.Nat.Acad.Sci.V39(1953)510-524

[9] LAURENT L. *Introduction à la géométrie symplectique.*, Le journal de maths des élèves,Volume 1(1998) No.4

[10] LIBERMANN P., MARLE C-M., *Symplectic Geometry and Analytical Mechanics*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht (1987).

[11] LORING W-T. *Une courte démonstration de la formule de Campbell-Hausdorff.*, Journal of theory,Volume 14(2004) 501-508 © 2004 Heldermann Verlag

[12] MCDUFF D., SALOMON D. *Introduction to symplectic topology*, 2e éd., Oxford Mathematical Monographs, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1998.

[13] NEGRÔ J.,del OLMO M.A.,TOSIEK J. *Anyons,group theory and planar physics*, arXiv :math-ph/05127007v1 2 Dec 2005

[14] NGENDAKUMANA A.,NZOTUNGICIMPAYE J., TODJIHOUNDE L. *Noncommutative Phase Spaces by Coadjoint Orbit Method*, Sym. Integrability Geom. Meth. Appl. 7(2011) 116, arXiv : 1102.0718V4[math-ph], 12pp

[15] NGENDAKUMANA A.,NZOTUNGICIMPAYE J., TODJIHOUNDE L. *Para-Galilean versus Galilean NonCommutative Phase Spaces.*, Int. J. of Geom. Meth. in Modern Phy., V 10 (2013), 1350049, 13pp, doi :10.1142/S0219887813500497

[16] NGENDAKUMANA A. *Group Theoretical of Planar NonCommutative Systems* . Thesis,IMSP (2013.)

[17] NZOTUNGICIMPAYE J. *Kinematical versus dynamical contractions of the deSitter Lie algebras.*, J.Phys.Commun.3(2019)105003

[18] NZOTUNGICIMPAYE J. *Symplectic Geometry and (Non)Commutative Lie-Poisson Structures.*, Notes de Cours, IMSP (February-March 2020)

[19] THOMAS.D, WACHEUX C. *Actions hamiltoniennes.* Université de Strasbourg (2009)