UNIVERSITÉ DU BURUNDI
GRENIER DU SAVOIR DU BURUNDI
Dépôt institutionnel officiel
https://repository.ub.edu.bi

Les opérateurs tensoriels irréductibleset leurs applications en PhysiqueNucléaire Théorique

BIZIMANA, Prime

2020-04
UB
https://repository.ub.edu.bi/handle/123456789/225

Document téléchargé depuis le **Grenier du Savoir du Burundi** — https://repository.ub.edu.bi

UNIVERSITE DU BURUNDI



FACULTE DES SCIENCES
Département de Mathématiques

Les opérateurs tensoriels irréductibles et leurs applications en Physique Nucléaire Théorique

Prime BIZIMANA

MEMOIRE
présenté et défendu publiquement en vue d'obtenir le
Diplôme de Mastère en Mathématiques Fondamentales et Appliquées

Sous la direction de : **Pr. Jos ODEURS (Directeur)**
Pr. Jean NDIMUBANDI (Co-directeur)

Bujumbura, avril 2020

Dédicace

A Dieu tout puissant,

A mes chers Parents,

A mes chers frères et sœurs,

A mes camarades étudiants.

Remerciements

Pour l'aboutissement de ce travail, de sincères remerciements s'adressent au Professeur Jos ODEURS, Directeur (KU-Leuven, Belgique), qui a accepté de diriger ce mémoire et dont les orientations et remarques y ont été d'importance capitale, et au Professeur Jean NDIMUBANDI, co-Directeur (Université du Burundi, Burundi), qui s'est donné corps et âme et dont les interventions ont été d'une grande nécessité.

Je saisis aussi cette occasion pour remercier tous les enseignants qui m'ont formé depuis l'école primaire jusqu'à l'université en passant par l'école secondaire tout en remerciant de façon particulière tous les professeurs de l'Université du Burundi et ses partenaires pour leur dévouement à donner tout le potentiel nécessaire pour cet accomplissement, chacun dans son domaine.

Qu'ils reçoivent mes remerciements tous les administratifs de l'Université du Burundi en particulier le Doyen de la Faculté des Sciences et les membres du Comité Scientifique au Département de Mathématiques, sans oublier le bibliothécaire de la section Polytechnique, Faculté des Sciences.

Pour finir, je remercie mes camarades étudiants pour le soutien qu'ils m'ont témoigné durant tout le cursus ensemble.

Résumé

Le mémoire présente la théorie générale des opérateurs tensoriels irréductibles ; le groupe qui intervient est le groupe des rotations. Leurs propriétés essentielles sont dégagées et surtout, le Théorème de Wigner-Eckart, est formulé. Des cas concrets de ces opérateurs sont mis en évidence, en Physique nucléaire théorique.

Mots clés : opérateur tensoriel irréductible, théorème de Wigner-Eckart, moment multipolaire.

Abstract

The dissertation presents the general theory of irreducible tensor operators ; the group which intervenes is the group of rotations. Their essential properties are released and above all, the Wigner-Eckart Theorem is formulated. Concrete cases of these operators are highlighted in Theoretical Nuclear Physics.

Keywords : irreducible tensor operator, Wigner-Eckart theorem, multipolar moment.

Table des matières

Dédicace i
Remerciements ii
Résumé iii
Abstract iii

Introduction **1**

1 THÉORIE GÉNÉRALE DU MOMENT CINÉTIQUE **3**
1.1 Définition d'un Moment Cinétique 3
1.2 Opérateurs J_+ et J_- 4
1.3 Valeurs propres de J^2 et J_z 4
1.4 Valeurs possibles de j et m 5
1.5 Représentation standard 5
1.6 Harmoniques sphériques 8
1.6.1 Expressions explicites des harmoniques sphériques 10
1.7 Composition de deux moments cinétiques quelconques 14
1.7.1 Relations de récurrence des coefficients de Clebsch-Gordan 16
1.7.2 Relations d'orthogonalité entre les coefficients de Clebsch-Gordan . 17
1.8 Fonction δ de Dirac 18

2 OPÉRATEURS TENSORIELS IRRÉDUCTIBLES **19**
2.1 Introduction 19
2.2 Moment Cinétique et Rotation : Opérateurs de rotation 20
2.3 Définition générale des opérateurs tensoriels irréductibles 23
2.3.1 Opérateurs scalaires 23
2.3.2 Opérateurs vectoriels 24
2.3.3 Opérateurs tensoriels 26
2.4 Théorème de Wigner-Eckart 27
2.4.1 Opérateurs scalaires 27
2.4.2 Opérateurs vectoriels 28
2.4.3 Opérateurs tensoriels irréductibles d'ordre K 31

3 APPLICATIONS EN PHYSIQUE NUCLÉAIRE THÉORIQUE 35
3.1 Moments multipolaires électriques 35
3.1.1 Opérateur Q_0^0, le moment monopolaire électrique 39
3.1.2 Opérateur Q_1^m, le moment dipolaire électrique 39
3.1.3 Opérateur Q_2^m, le moment quadripolaire électrique 42
3.1.4 Théorème de Wigner-Eckart relatif aux moments multipolaires électriques 46
3.2 Moments multipolaires magnétiques 51

Conclusion 57

Perspectives 58

Bibliographie 59

Introduction

L'importance des rotations en Physique est essentiellement liée au fait que les lois physiques sont invariantes par rotation [3]. Cette propriété n'est pas du tout évidente a priori : il existe des transformations, par exemple les homothéties, par rapport auxquelles les lois physiques ne sont pas invariantes. Il convient donc de considérer l'invariance par rotation comme un postulat justifié par la vérification expérimentale de ses conséquences. Cela implique que, sous rotation, l'état d'un système physique considéré à un instant donné et l'observable associée restent inchangés.

L'invariance des lois physiques dans les rotations se traduit par des propriétés de symétrie des équations qui expriment mathématiquement ces lois. Ce qui restreint considérablement les formes possibles pour ces équations [3].

De façon générale, nous pouvons dire que sous l'action d'un groupe de symétrie, les lois physiques d'un système isolé considéré restent inchangées [3].

Quant au système non isolé, toute rotation qui n'affecte pas les sources du potentiel extérieur induit en général une évolution ultérieure qui est modifiée, sauf dans le cas où le potentiel extérieur présente certaines symétries permettant d'effectuer certaines rotations sur le système physique sans modifier son comportement (c'est le cas du potentiel central par exemple ne dépendant que de la distance à un point O fixe : les rotations qui conservent les lois physiques sont alors toutes les rotations qui conservent le point O.) [3].

Dans notre travail, nous allons nous intéresser aux transformations des observables par rotation ; et parmi toutes ces observables, nous nous focaliserons sur les opérateurs tensoriels irréductibles.

Mais comment se définissent-elles ? Quel est leur comportement sous rotation ? Quelles sont leurs propriétés essentielles ? Auraient-elles des applications concrètes ?

Pour répondre à cette problématique, nous subdiviserons notre travail en trois chapitres :

- Le premier chapitre concerne la théorie générale du moment cinétique et donne les notions de base sur le moment cinétique.
- Le deuxième chapitre aborde la théorie des opérateurs tensoriels irréductibles, en donne la définition et en établit les propriétés fondamentales. Nous définissons ici, avant tout, les opérateurs de rotation.
- Le troisième et dernier chapitre mène des investigations sur les applications de ces opérateurs surtout en Physique Nucléaire Théorique.

L'objectif de notre travail est ainsi de donner la théorie générale des opérateurs tensoriels irréductibles et d'en dégager quelques cas concrets surtout en Physique nucléaire théorique (moments multipolaires électriques et magnétiques) tout en formulant leurs propriétés essentielles notamment le théorème de Wigner-Eckart.

Ce travail est particulièrement important en Physique nucléaire expérimentale car il constitue un texte qui résume beaucoup d'éléments relatifs aux propriétés des noyaux qui, autrement, sont éparpillés à travers des ouvrages différents.

Chapitre 1

THÉORIE GÉNÉRALE DU MOMENT CINÉTIQUE

1.1 Définition d'un Moment Cinétique

On appelle moment cinétique $\vec{J}$ tout ensemble de trois observables $\{J_x, J_y, J_z\}$ appelées composantes du moment cinétique, vérifiant [3] :

$$[J_x, J_y] = i\hbar J_z, \tag{1.1}$$

$$[J_y, J_z] = i\hbar J_x, \tag{1.2}$$

$$[J_z, J_x] = i\hbar J_y. \tag{1.3}$$

Considérons l'opérateur carré scalaire du moment cinétique $\vec{J}$ défini par :

$$J^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2. \tag{1.4}$$

On a les relations de commutation suivantes :

$$[J^2, \vec{J}] = 0. \tag{1.5}$$

Ainsi, d'après les relations (1.1) ,(1.2) et (1.3), on constate qu'il est impossible de mesurer simultanément les 3 composantes du moment cinétique. Par contre, d'après la relation (1.5), J^2 et une composante quelconque de $\vec{J}$ sont simultanément mesurables ; dans la suite, nous allons désigner cette composante par J_z.
Définissons maintenant les opérateurs J_+ et J_-.

1.2 Opérateurs J_+ et J_-

Ces opérateurs sont constitués par des combinaisons linéaires des opérateurs J_x et J_y [3] . Ils sont définis par :

$$J_\pm = J_x \pm iJ_y. \tag{1.6}$$

Considérons maintenant les opérateurs J_+, J_-, J_z et J^2 qui vérifient les relations de commutation suivantes :

$$[J_z, J_\pm] = \pm\hbar J_\pm, \tag{1.7}$$

$$[J_+, J_-] = 2\hbar J_z, \tag{1.7a}$$

$$[J^2, J_+] = [J^2, J_-] = [J^2, J_z] = 0. \tag{1.7b}$$

Calculons à présent les produits J_+J_- et J_-J_+, on obtient :

$$\begin{aligned} J_+J_- &= J_x^2 + J_y^2 - i[J_x, J_y] \\ &= J^2 - J_z^2 + \hbar J_z. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Par le même raisonnement, on a :

$$J_-J_+ = J^2 - J_z^2 - \hbar J_z. \tag{1.9}$$

En additionnant membre à membre les égalités (1.8)et(1.9), on a :

$$J_+J_- + J_-J_+ = 2(J^2 - J_z^2),$$

$$J^2 = \frac{1}{2}(J_+J_- + J_-J_+) + J_z^2. \tag{1.10}$$

1.3 Valeurs propres de J^2 et J_z

L'élément de matrice $\langle\psi|J^2|\psi\rangle$ où $|\psi\rangle$ est un état quantique quelconque, est positif ou nul [3] . En effet :

$$\begin{aligned} \langle\psi|J^2|\psi\rangle &= \langle\psi|J_x^2|\psi\rangle + \langle\psi|J_y^2|\psi\rangle + \langle\psi|J_z^2|\psi\rangle \\ &= \|J_x|\psi\rangle\|^2 + \|J_y|\psi\rangle\|^2 + \|J_z|\psi\rangle\|^2 \geq 0. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Nous en déduisons ainsi que toutes les valeurs propres de J^2 sont positives ou nulles . Par convention, les valeurs propres de J^2 sont de la forme $j(j+1)\hbar^2$ avec $j \geq 0$.

Quant aux valeurs propres de J_z, qui ont les mêmes dimensions que $\hbar$, elles sont traditionnellement notées $m\hbar$, où m est un nombre sans dimension. Dans la suite, nous repérerons les vecteurs propres communs à J^2 et J_z par les indices j et m qui caractérisent les valeurs

propres associées. Toutefois, J^2 et J_z ne constituent pas en général un E.CO.C (ensemble complet d'observables qui commutent) et il est nécessaire d'introduire un $3^{ème}$ indice permettant de distinguer les différents vecteurs propres correspondants aux mêmes valeurs propres $j(j+1)\hbar^2$ et $m\hbar$ de J^2 et J_z ; nous notons cet indice k.

D'où les équations aux valeurs propres :

$$\begin{aligned} J^2|k,j,m\rangle &= j(j+1)\hbar^2|k,j,m\rangle \\ J_z|k,j,m\rangle &= m\hbar|k,j,m\rangle \end{aligned}$$

avec :

$$-j \leqslant m \leqslant j \tag{1.12}$$

En effet, soient les vecteurs $J_+|k,j,m\rangle$ et $J_-|k,j,m\rangle$; comme le carré de la norme est positif ou nul ; de (1.9), on a :

$$\|J_+|k,j,m\rangle\|^2 = [j(j+1) - m(m+1)\hbar^2] \geqslant 0 \tag{1.13}$$

De même, de (1.8), on a aussi :

$$\|J_-|k,j,m\rangle\|^2 = [j(j+1) - m(m-1)\hbar^2] \geqslant 0 \tag{1.14}$$

Les inégalités (1.13) et (1.14) constituent un système d'inéquations à une inconnue m, qui, après résolution donne la relation (1.12) pour un j fixé.

1.4 Valeurs possibles de j et m

Soit $|k,j,m\rangle$, un vecteur propre de J^2 et de J_z avec les valeurs propres $j(j+1)\hbar^2$ et $m\hbar$ avec $-j \leq m \leq j$. Alors, j est nécessairement entier ou demi-entier (entier impair divisé par 2) [3]. Ainsi, les seules valeurs possibles pour j sont les nombres entiers ou demi-entiers positifs ou nuls : 0, $\frac{1}{2}$, 1, $\frac{3}{2}$, 2... et pour une valeur de j fixée, les seules valeurs possibles pour m sont les $(2j+1)$ nombres : $-j$, $-j+1$,..., $j-2$, $j-1$,j ; m est donc entier si j est entier, demi-entier si j est demi-entier. Remarquons que toutes les valeurs précédentes de m sont réalisées pour un j fixé.

1.5 Représentation standard

Nous étudions ici les vecteurs propres communs [3] à J^2 et J_z dont l'ensemble forme une base de l'espace des états ε. L'ensemble des vecteurs propres associés au couple de valeurs propres $j(j+1)\hbar^2$ et $m\hbar$ forme un sous-espace vectoriel de ε que nous désignons par $\varepsilon(j,m)$ dont la dimension est notée : $g(j,m)$.

Choisissons dans $\varepsilon(j,m)$, une base orthonormée quelconque : $\{|k,j,m\rangle\,;k=1,2,...,g(j,m)\}$. Si $m \neq j$, il existe un autre sous espace $\varepsilon(j,m+1)$ de ε constitué de vecteurs propres de J^2 et J_z associés aux valeurs propres : $j(j+1)\hbar^2$ et $(m+1)\hbar$. De même, si $m \neq -j$, il existe un autre sous espace $\varepsilon(j,m-1)$ de ε constitué de vecteurs propres de J^2 et J_z associés aux valeurs propres : $j(j+1)\hbar^2$ et $(m-1)\hbar$. Il est possible de construire dans le cas où $m \neq j$ et $m \neq -j$ une base orthonormée dans $\varepsilon(j,m+1)$ et $\varepsilon(j,m-1)$ à partir de celle choisie dans $\varepsilon(j,m)$. Si $k_1 \neq k_2$, $J_+|k_1,j,m\rangle$ et $J_+|k_2,j,m\rangle$ sont orthogonaux ; et $J_-|k_1,j,m\rangle$ et $J_-|k_2,j,m\rangle$ le sont aussi car :

$$\begin{aligned}\langle k_1,j,m|J_-J_+|k_2,j,m\rangle &= [j(j+1)-m(m+1)]\hbar^2\langle k_1,j,m|k_2,j,m\rangle \\ &= 0 \text{ si } k_1 \neq k_2\end{aligned}$$

Le carré de la norme, si $k_1 = k_2$ pour $J_+|k_1,j,m\rangle$ vaut : $[j(j+1)-m(m+1)]\hbar^2$. Ainsi, les vecteurs :

$$\frac{J_+|k,j,m\rangle}{\hbar\sqrt{j(j+1)-m(m+1)}} = |k,j,m+1\rangle \tag{1.15}$$

sont orthonormés et constituent une base dans $\varepsilon(j,m+1)$.

De la même manière,

$$\begin{aligned}\langle k_1,j,m|J_+J_-|k_2,j,m\rangle &= [j(j+1)-m(m-1)]\hbar^2\langle k_1,j,m|k_2,j,m\rangle \\ &= 0 \text{ si } k_1 \neq k_2\end{aligned}$$

Le carré de la norme, si $k_1 = k_2$ pour $J_-|k_1,j,m\rangle$ vaut : $[j(j+1)-m(m-1)]\hbar^2$. Ainsi, les vecteurs :

$$\frac{J_-|k,j,m\rangle}{\hbar\sqrt{j(j+1)-m(m-1)}} = |k,j,m-1\rangle \tag{1.16}$$

sont aussi orthonormés et constituent une base dans $\varepsilon(j,m-1)$.

Remarquons que la dimension de $\varepsilon(j,m+1)$ et $\varepsilon(j,m-1)$ est égale à celle de $\varepsilon(j,m)$. Ainsi, la dimension est indépendante de m et on écrit : $g(j,m) = g(j,m-1) = g(j)$.
Pour chaque valeur de j effectivement réalisée dans le problème étudié, on prend un des sous-espaces associés à cette valeur j, par exemple $\varepsilon(j,j)$ correspondant à $m=j$. On choisit dans ce sous-espace, une base orthonormée quelconque $\{|k,j,j\rangle; k=1,2,...,g(j)\}$. On construit ensuite de proche en proche grâce à la formule (1.16), la base à laquelle sera rapportée chacun des $2j$ autres sous-espaces $\varepsilon(j,m)$.

En traitant ainsi toutes les valeurs de j réalisées dans le problème, nous aboutissons à ce qu'on appelle $\ll$ *base standard* $\gg$ de l'espace des états .

Les relations d'orthonormalisation et de fermeture dans cette base s'écrivent :

$$\langle k,j,m|k^{'},j^{'},m^{'}\rangle = \delta_{kk'}\delta_{jj'}\delta_{mm'} \tag{1.17}$$

$$\sum_{j}\sum_{m=-j}^{j}\sum_{k=1}^{g(j)}|k,j,m\rangle\langle k,j,m| = \mathbb{I} \tag{1.18}$$

Ainsi, une base orthonormée $\{|k,j,m\rangle\}$ de l'espace des états, constituée de vecteurs propres de J^2 et J_z avec les valeurs propres $j(j+1)\hbar^2$ et $m\hbar$ est dite $\ll$ *standard* $\gg$ si l'action des opérateurs J_+ et J_- sur les vecteurs de base est donnée, (d'après les relations (1.15) et (1.16)), par :

$$\begin{aligned} J_+|k,j,m\rangle &= \hbar\sqrt{j(j+1)-m(m+1)}|k,j,m+1\rangle \\ J_-|k,j,m\rangle &= \hbar\sqrt{j(j+1)-m(m-1)}|k,j,m-1\rangle \end{aligned}$$

D'où, les éléments de matrice des opérateurs sont :

$$\begin{aligned} \langle k,j,m|J_z|k^{'},j^{'},m^{'}\rangle &= m\hbar\delta_{kk'}\delta_{jj'}\delta_{mm'}, \\ \langle k,j,m|J_+|k^{'},j^{'},m^{'}\rangle &= \hbar\sqrt{j(j+1)-m'(m'+1)}\delta_{kk'}\delta_{jj'}\delta_{mm'+1}, \\ \langle k,j,m|J_-|k^{'},j^{'},m^{'}\rangle &= \hbar\sqrt{j(j+1)-m'(m'-1)}\delta_{kk'}\delta_{jj'}\delta_{m'm'-1}. \end{aligned}$$

Or, d'après les relations (1.6), on a :

$$\frac{J_+ + J_-}{2} = J_x,$$

$$\frac{J_+ - J_-}{2i} = J_y.$$

Donc,

$$\begin{aligned} \langle k,j,m|J_x|k^{'},j^{'},m^{'}\rangle &= \langle k,j,m|\frac{J_+ + J_-}{2}|k^{'},j^{'},m^{'}\rangle \\ &= \frac{\hbar}{2}\sqrt{j(j+1)-m'(m'+1)}\delta_{kk'}\delta_{jj'}\delta_{mm'+1} \\ &\quad +\frac{\hbar}{2}\sqrt{j(j+1)-m'(m'-1)}\delta_{kk'}\delta_{jj'}\delta_{mm'-1} \\ &= \frac{\hbar}{2}\delta_{kk'}\delta_{jj'}\times\Bigg[\sqrt{j(j+1)-m'(m'+1)}\delta_{mm'+1} \\ &\quad +\sqrt{j(j+1)-m'(m'-1)}\delta_{mm'-1}\Bigg]. \end{aligned}$$

De la même manière, on a :

$$\begin{aligned}\langle k,j,m|J_y|k^{'},j^{'},m^{'}\rangle &= \langle k,j,m|\frac{J_+ - J_-}{2i}|k^{'},j^{'},m^{'}\rangle \\ &= \frac{\hbar}{2i}\sqrt{j(j+1)-m^{'}(m^{'}+1)}\delta_{kk'}\delta_{jj'}\delta_{mm'+1} \\ &\quad -\frac{\hbar}{2i}\sqrt{j(j+1)-m^{'}(m^{'}-1)}\delta_{kk'}\delta_{jj'}\delta_{mm'-1} \\ &= \frac{\hbar}{2i}\delta_{kk'}\delta_{jj'}\times\Bigg[\sqrt{j(j+1)-m^{'}(m^{'}+1)}\delta_{mm'+1} \\ &\quad -\sqrt{j(j+1)-m^{'}(m^{'}-1)}\delta_{mm'-1}\Bigg].\end{aligned}$$

Ainsi, la matrice $(J_z)^{(j)}$ est donc diagonale et ses éléments sont les $(2j+1)$ valeurs de $m\hbar$; les matrices $(J_x)^{(j)}$ et $(J_y)^{(j)}$ n'ont d'éléments non nuls qu'immédiatement, respectivement, au dessus et au dessous de la diagonale principale : $(J_z)^{(j)}$ est symétrique et réelle, $(J_x)^{(j)}$ symétrique et réelle et $(J_y)^{(j)}$ est antisymétrique et imaginaire pure.
De plus,

$$\langle k,j,m|J^2|k^{'},j^{'},m^{'}\rangle = j(j+1)\hbar^2\delta_{kk'}\delta_{jj'}\delta_{mm'}.$$

La matrice $(J^2)^{(j)}$ est donc proportionnelle à la matrice unité, ses éléments diagonaux valent :

$$j(j+1)\hbar^2.$$

Appliquons maintenant la théorie générale du moment cinétique au cas particulier du moment cinétique orbital noté $\vec{L}$ tout en indiquant les fonctions propres communes à L^2 et L_z appelées : les **harmoniques sphériques** [3].

1.6 Harmoniques sphériques

Le moment cinétique orbital est défini par : $\vec{L} = \vec{R}\times\vec{P}$ où $\vec{R}$ et $\vec{P}$ sont des opérateurs correspondant respectivement à la multiplication par $\vec{r}$ et l'opérateur différentiel $\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}$ en représentation $\{|\vec{r}\rangle\}$. Ainsi, les 3 composantes du moment cinétique orbital $\vec{L}$ s'écrivent alors :

$$\begin{aligned}L_x &= YP_z - ZP_y \\ &= \frac{\hbar}{i}\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right),\end{aligned} \tag{1.19}$$

$$\begin{aligned}L_y &= ZP_x - XP_z \\ &= \frac{\hbar}{i}\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right)\end{aligned} \tag{1.19a}$$

et

$$\begin{aligned} L_z &= XP_y - YP_x \\ &= \frac{\hbar}{i}\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right). \end{aligned} \tag{1.19b}$$

En coordonnées sphériques, ces composantes s'écrivent :

$$L_x = i\hbar\left(\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\cos\varphi}{\tan\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right), \tag{1.19c}$$

$$L_y = i\hbar\left(-\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\sin\varphi}{\tan\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right), \tag{1.19d}$$

$$L_z = -i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\right). \tag{1.19e}$$

D'où l'on tire :

$$L^2 = -\hbar^2\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{1}{\tan\theta}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right) \tag{1.20}$$

$$L_+ = \hbar e^{i\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) \tag{1.21}$$

$$L_- = \hbar e^{-i\varphi}\left(-\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) \tag{1.22}$$

$$\text{avec } \begin{cases} r \geq 0 \\ 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq \varphi < 2\pi \end{cases}$$

En représentation $\{|\vec{r}\rangle\}$, les fonctions propres associées aux valeurs propres $l(l+1)\hbar^2$ de L^2 et $m\hbar$ de L_z sont solution des équations aux dérivées partielles :

$$\begin{cases} -(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{1}{\tan\theta}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2})\psi(r,\theta,\varphi) = l(l+1)\psi(r,\theta,\varphi) \\ -i\frac{\partial}{\partial\varphi}\psi(r,\theta,\varphi) = m\psi(r,\theta,\varphi) \end{cases}$$

$$\text{avec } -l \leqslant m \leqslant l\,;\ l \text{ étant entier.}$$

Nous constatons que r n'apparaît dans aucun opérateur différentiel ; on le considère ainsi comme un paramètre et on tient seulement compte de la dépendance en θ et en φ de ψ. Désignons alors par $Y_l^m(\theta,\varphi)$ une fonction propre de L^2 et de L_z correspondant aux valeurs propres $l(l+1)\hbar^2$ et $m\hbar$.
Ainsi,

$$L_+ Y_l^l(\theta,\varphi) = 0,$$
$$L_z Y_l^l(\theta,\varphi) = l\hbar Y_l^l(\theta,\varphi).$$

Par action répétée de L_- sur $Y_l^l(\theta,\varphi)$, on construit Y_l^{l-1}, ..., Y_l^m, ..., Y_l^{-l} ; ce qui montre qu'au couple de valeurs $l(l+1)\hbar^2$ et $m\hbar$ (avec $-l \leqslant m \leqslant l$ et l un entier positif ou nul quelconque), correspond une fonction propre : $Y_l^m(\theta,\varphi)$.
Ces fonctions sont appelées des *Harmoniques sphériques*.
D'après ce qui précède, ces fonctions satisfont aux relations de récurrence suivantes :

$$L_+ Y_l^m(\theta,\varphi) = \hbar\sqrt{l(l+1) - m(m+1)}\, Y_l^{m+1}(\theta,\varphi), \tag{1.23}$$
$$L_- Y_l^m(\theta,\varphi) = \hbar\sqrt{l(l+1) - m(m-1)}\, Y_l^{m-1}(\theta,\varphi). \tag{1.24}$$

Ce qui donne :

$$e^{i\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)Y_l^m = \sqrt{l(l+1) - m(m+1)}\, Y_l^{m+1}(\theta,\varphi), \tag{1.25}$$
$$e^{-i\varphi}\left(-\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)Y_l^m = \sqrt{l(l+1) - m(m-1)}\, Y_l^{m-1}(\theta,\varphi). \tag{1.26}$$

Elles satisfont à la relation d'orthonormalisation suivante :

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta Y_{l'}^{m'^*}(\theta,\varphi) Y_l^m(\theta,\varphi) = \delta_{l'l}\delta_{m'm}. \tag{1.27}$$

Or, une fonction quelconque de θ et de φ, $f(\theta,\varphi)$ peut être développée sur les harmoniques sphériques sous la forme :

$$f(\theta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} c_{l,m} Y_l^m(\theta,\varphi) \tag{1.28}$$

avec

$$c_{l,m} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta Y_l^{m^*}(\theta,\varphi) f(\theta,\varphi). \tag{1.29}$$

Donc, les harmoniques sphériques constituent une base orthonormée dans l'espace ε_Ω de fonctions de θ et de φ.

1.6.1 Expressions explicites des harmoniques sphériques

Pour calculer les différentes harmoniques sphériques, nous partons de l'expression de $Y_l^l(\theta,\varphi)$ et nous lui appliquons l'opérateur L_- compte tenu des relations (1.20) et (1.21) [3].

Or,

$$L_z Y_l^l(\theta,\varphi) = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\phi} Y_l^l(\theta,\varphi) = m\hbar Y_l^l(\theta,\varphi) \tag{1.30}$$

Comme $L_+Y_l^l(\theta,\varphi)=0$, et par (1.30), $Y_l^l(\theta,\varphi)=F_l^l(\theta)e^{il\varphi}$, d'après la relation (1.21), on a [3] :

$$\begin{aligned} L_+Y_l^l(\theta,\varphi) &= i\hbar e^{i(l+1)\varphi}\left[\frac{d}{d\theta}F_l^l(\theta)-lF_l^l(\theta)\cot\theta\right] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ce qui donne $F_l^l(\theta)=c_l(\sin\theta)^l$
Ainsi,

$$Y_l^l(\theta,\varphi)=c_l(\sin\theta)^l e^{il\varphi}. \tag{1.31}$$

Déterminons c_l en imposant que $Y_l^l(\theta,\varphi)$ soit normée ; d'après la relation (1.27), on a :

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta|Y_l^l(\theta,\varphi)|^2 &= |c_l|^2\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta(\sin\theta)^{2l} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Ce qui implique que :

$$|c_l|^2=\frac{1}{2\pi\int_0^{\pi}(\sin\theta)^{2l}\sin\theta d\theta}$$

Ecrivons :

$$|c_l|^2=\frac{1}{2\pi I_l}\ \text{où}\ I_l=\int_0^{\pi}(\sin\theta)^{2l}\sin\theta d\theta.$$

Par une intégration par substitution $t=\cos\theta$, on obtient, après changement de bornes :

$$\begin{aligned} I_l &= -\int_1^{-1}(1-t^2)^l dt \\ &= I_{l-1}-\int_{-1}^{1}t^2(1-t^2)^{l-1}dt. \end{aligned}$$

Une intégration par parties de la seconde intégrale donne :

$$\int_{-1}^{1}t^2(1-t^2)^{l-1}dt=\frac{1}{2l}I_l.$$

Ainsi,

$$I_l=\frac{2l}{2l+1}I_{l-1}.$$

Par récurrence, nous avons :

$$\begin{aligned} I_0 &= 2 \\ I_l &= \frac{(2l)!!}{(2l+1)!!}I_0 \\ &= \frac{2^{2l+1}(l!)^2}{(2l+1)!} \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} |c_l| &= \sqrt{\frac{1}{2\pi}\frac{(2l+1)!}{2^{2l+1}(l!)^2}} \\ &= \frac{1}{2^l(l!)}\sqrt{\frac{(2l+1)!}{4\pi}}. \end{aligned}$$

La convention habituelle prend la forme suivante [3] :

$$c_l = \frac{(-1)^l}{2^l(l)!}\sqrt{\frac{(2l+1)!}{4\pi}}. \tag{1.32}$$

La relation (1.31) devient :

$$Y_l^l(\theta,\varphi) = \frac{(-1)^l}{2^l(l)!}\sqrt{\frac{(2l+1)!}{4\pi}}(\sin\theta)^l e^{il\varphi}. \tag{1.33}$$

Calculons maintenant $Y_l^m(\theta,\varphi)$, à partir de $Y_l^l(\theta,\varphi)$: pour passer de $Y_l^l(\theta,\varphi)$ à $Y_l^m(\theta,\varphi)$, on doit appliquer $(l-m)$ fois l'opérateur (L_-), compte tenu des relations (1.23) et (1.24). Ainsi, on obtient :

$$\begin{aligned} (L_-)Y_l^l(\theta,\varphi) &= \hbar\sqrt{2l}Y_l^{l-1}(\theta,\varphi), \\ (L_-)^2Y_l^l(\theta,\varphi) &= \hbar\sqrt{2l}(L_-)Y_l^{l-1}(\theta,\varphi) \\ &= (\hbar)^2\sqrt{2l}\sqrt{(2l-1)(2)}Y_l^{l-2}(\theta,\varphi). \end{aligned}$$

Par analogie :

$$\begin{aligned} (L_-)^{(l-m)}Y_l^l(\theta,\varphi) &= \hbar^{(l-m)}\sqrt{(2l)(1)(2l-1)(2)...\left[2l-(l-m-1)\right](l-m)}Y_l^{l-(l-m)}(\theta,\varphi) \\ &= \hbar^{(l-m)}\sqrt{\frac{(2l)!(l-m)!}{(l+m)!}}Y_l^m(\theta,\varphi). \end{aligned}$$

Ainsi :

$$Y_l^m(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{(l+m)!}{(2l)!(l-m)!}}\left(\frac{L_-}{\hbar}\right)^{(l-m)}Y_l^l(\theta,\varphi). \tag{1.34}$$

En remplaçant dans (1.34) la relation (1.33), on a :

$$Y_l^m(\theta,\varphi) = \frac{(-1)^l}{2^l(l)!}\sqrt{\frac{(2l+1)!}{4\pi}}\frac{(l+m)}{(2l)!(l-m)!}\left(\frac{L_-}{\hbar}\right)^{(l-m)}\left[(\sin\theta)^l e^{il\varphi}\right].$$

Et,finalement,

$$Y_l^m(\theta,\varphi) = \frac{(-1)^l}{2^l(l)!}\sqrt{\frac{(2l+1)(l+m)!}{4\pi(l-m)!}}e^{im\varphi}(\sin\theta)^{-m}\frac{d^{l-m}}{d(\cos\theta)^{l-m}}(\sin\theta)^{2l}. \tag{1.35}$$

On peut aussi calculer $Y_l^m(\theta,\varphi)$ à partir de $Y_l^{-l}(\theta,\varphi)$.
Calculons d'abord $Y_l^{-l}(\theta,\varphi)$ à partir de la relation (1.35) :

$$\begin{aligned} Y_l^{-l}(\theta,\varphi) &= \frac{(-1)^l}{2^l(l)!}\sqrt{\frac{(2l+1)(2l)!}{4\pi(2l)!}}e^{-il\varphi}(\sin\theta)^l\frac{d^{2l}}{d(\cos\theta)^{2l}}(\sin\theta)^{2l} \\ &= \frac{1}{2^l l!}\sqrt{\frac{(2l+1)!}{4\pi}}e^{-il\varphi}(\sin\theta)^l. \end{aligned}$$

Ainsi, $Y_l^m(\theta,\varphi)$ est obtenu en appliquant $(l+m)$ fois l'opérateur (L_+) sur $Y_l^{-l}(\theta,\varphi)$:

$$\begin{aligned} (L_+)Y_l^{-l}(\theta,\varphi) &= \hbar\sqrt{2l}Y_l^{-l+1}(\theta,\varphi), \\ (L_+)^2Y_l^{-l}(\theta,\varphi) &= \hbar\sqrt{2l}(L_+)Y_l^{l-1}(\theta,\varphi) \\ &= (\hbar)^2\sqrt{(2l)(2l-1)(2)}Y_l^{-l+2}(\theta,\varphi). \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned} (L_+)^{l+m}Y_l^{-l}(\theta,\varphi) &= \hbar^{l+m}\sqrt{(2l)(1)(2l-1)(2)...\left[2l-(l-m+1)\right](l+m)}Y_l^m(\theta,\varphi) \\ &= \hbar^{l+m}\sqrt{\frac{(2l)!(l+m)!}{(l-m)!}}Y_l^m(\theta,\varphi). \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} Y_l^m(\theta,\varphi) &= \sqrt{\frac{(l-m)!}{(2l)!(l+m)!}}\left(\frac{L_+}{\hbar}\right)^{l+m}Y_l^{-l}(\theta,\varphi) \\ &= \frac{(1)^l}{2^l(l)!}\sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}}\left(\frac{L_+}{\hbar}\right)^{l+m}\left[e^{-il\varphi}(\sin\theta)^l\right] \\ &= \frac{(-1)^{l+m}}{2^l(l)!}\sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}}e^{im\varphi}(\sin\theta)^m\frac{d^{l+m}}{d(\cos\theta)^{l+m}}(\sin\theta)^{2l}. \quad (1.36) \end{aligned}$$

Les relations (1.35) pour $m>0$ et (1.36) pour $m<0$ donnent, pour $l=0,1$ et 2, les différentes harmoniques sphériques :

$$Y_0^0 = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \quad (1.37)$$

$$\begin{aligned} Y_1^0 &= -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\frac{d}{d(\cos\theta)}(1-\cos^2\theta) \\ &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta \quad (1.38) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_1^{\pm 1} &= \mp\frac{1}{2}\sqrt{\frac{6}{4\pi}}e^{\pm i\varphi}(\sin\theta) \\ &= \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{\pm i\varphi} \end{aligned} \tag{1.39}$$

$$\begin{aligned} Y_2^0 &= \frac{1}{8}\sqrt{\frac{5}{4\pi}}\frac{d^2}{d(\cos\theta)^2}(1-\cos^2\theta)^2 \\ &= \sqrt{\frac{5}{16\pi}}(3\cos^2\theta - 1) \end{aligned} \tag{1.40}$$

$$\begin{aligned} Y_2^1 &= \frac{1}{8}\sqrt{\frac{30}{4\pi}}e^{i\varphi}(\sin\theta)^{-1}\frac{d}{d(\cos\theta)}(\sin\theta)^4 \\ &= -\sqrt{\frac{15}{8\pi}}e^{i\varphi}(\sin\theta\cos\theta) \end{aligned} \tag{1.40a}$$

$$\begin{aligned} Y_2^{-1} &= -\frac{1}{8}\sqrt{\frac{30}{4\pi}}e^{-i\varphi}(\sin\theta)^{-1}\frac{d}{d(\cos\theta)}(\sin\theta)^4 \\ &= \sqrt{\frac{15}{8\pi}}e^{-i\varphi}(\sin\theta\cos\theta) \end{aligned} \tag{1.40b}$$

$$\begin{aligned} Y_2^2 &= \frac{1}{8}\sqrt{\frac{120}{4\pi}}e^{2i\varphi}(\sin\theta)^{-2}(\sin\theta)^4 \\ &= \sqrt{\frac{15}{32\pi}}e^{2i\varphi}(\sin\theta)^2 \end{aligned} \tag{1.40c}$$

$$\begin{aligned} Y_2^{-2} &= \frac{1}{8}\sqrt{\frac{120}{4\pi}}e^{-2i\varphi}(\sin\theta)^{-2}(\sin\theta)^4 \\ &= \sqrt{\frac{15}{32\pi}}e^{-2i\varphi}(\sin\theta)^2 \end{aligned} \tag{1.40d}$$

1.7 Composition de deux moments cinétiques quelconques

Considérons un système physique formé par la réunion de 2 sous-systèmes (par exemple un système de deux particules) [4] . Nous affecterons d'indices 1 et 2 respectivement les grandeurs relatives aux deux sous-systèmes. Nous supposons connue, dans l'espace ε_1 du sous-système (1) une base standard $|k_1, j_1, m_1\rangle$ constituée de vecteurs propres communs à J_1^2 et J_{1z}, où J_1 est l'opérateur moment cinétique du sous-système (1). De même, l'espace des états ε_2 du sous-système (2) est rapporté à une base standard $\{|k_2, j_2, m_2\rangle\}$. L'espace

des états du système global est le produit tensoriel : $\varepsilon = \varepsilon_1 \otimes \varepsilon_2$.
Nous noterons $|k_1, k_2; j_1, j_2; m_1, m_2\rangle$ les vecteurs de base formée par ce produit tensoriel :
$|k_1, k_2; j_1, j_2; m_1, m_2\rangle = |k_1, j_1, m_1\rangle \otimes |k_2, j_2, m_2\rangle$
Comme

$$\varepsilon_1 = \sum_{\oplus} \varepsilon_1(k_1, j_1)$$

et

$$\varepsilon_2 = \sum_{\oplus} \varepsilon_2(k_2, j_2)$$

alors,

$$\varepsilon = \sum_{\oplus} \varepsilon(k_1, k_2, j_1, j_2)$$

avec :

$$\varepsilon(k_1, k_2, j_1, j_2) = \varepsilon_1(k_1, j_1) \otimes \varepsilon_2(k_2, j_2)$$

Le sous-espace $\varepsilon(k_1, k_2, j_1, j_2)$ a pour dimension $(2j_1 + 1)(2j_2 + 1)$. Le moment cinétique total du système considéré est défini par :

$$\vec{J} = \vec{J_1} + \vec{J_2}$$

et vérifient les relations de commutation suivantes :

$$[J_z, J_1^2] = [J_z, J_2^2] = 0.$$

Un vecteur de la base produit tensoriel est simultanément état propre des observables :
$J_1^2,\ J_2^2,\ J_{1z},\ J_{2z}$ avec les valeurs propres relatives : $j_1(j_1 + 1)\hbar^2,\ j_2(j_2 + 1)\hbar^2,\ m_1\hbar, m_2\hbar$.
Cette base est bien adaptée à l'étude des moments cinétiques individuels $\vec{J_1}$ et $\vec{J_2}$.
D'après les relations de commutation ci-dessus, les observables J_1^2 , J_2^2 ,J_{1z} , J_{2z} commutent entre elles. Il est possible ainsi de construire un système orthonormé de vecteurs propres communs à ces dernières observables. Cette nouvelle base sera bien adaptée à l'étude du moment cinétique total du système. Notons que cette base sera bien différente de la précédente, puisque J^2 ne commute pas avec J_{1z} et J_{2z} . Dans chaque espace $\varepsilon(j_1, j_2)$, les vecteurs propres de J^2 et de J_z notés $|J, M\rangle$ sont des combinaisons linéaires des vecteurs de la base initiale $\{|j_1, j_2; m_1, m_2\}$:

$$|J, M\rangle = \sum_{m_1=-j_1}^{j_1} \sum_{m_2=-j_2}^{j_2} |j_1, j_2; m_1, m_2\rangle\langle j_1, j_2; m_1, m_2|J, M\rangle \tag{1.41}$$

o*ù* les coefficients du développement sont appelés **coefficients de Clebsch-Gordan**.

Ils sont différents de zéro si [4] :

$$M = m_1 + m_2 \tag{1.42}$$

et

$$|j_1 - j_2| \leq J \leq j_1 + j_2. \tag{1.43}$$

On peut aussi écrire :

$$|j_1, j_2; m_1, m_2\rangle = \sum_{J=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} \sum_{M=-J}^{J} |J, M\rangle\langle J, M|j_1, j_2; m_1, m_2\rangle \tag{1.44}$$

Ce sont donc les coefficients de Clebsch-Gordan qui permettent d'exprimer les vecteurs de la nouvelle base en fonction de ceux de l'ancienne et vice-versa.

Ils satisfont aussi aux relations de récurrence et d'orthogonalité.

1.7.1 Relations de récurrence des coefficients de Clebsch-Gordan

Comme $\{|j_1, j_2; m_1, m_2\rangle\}$ forment une base standard, alors $\{|J, M\rangle\}$ forment une base standard aussi.

En appliquant J_- à la relation (1.41), et multipliant la relation trouvée par $\langle j_1, j_2; m_1, m_2|$, on a :

$$\begin{aligned}\sqrt{J(J+1) - M(M-1)}\langle j_1, j_2; m_1, m_2|J, M-1\rangle &= \sum_{m_1^{'}=-j_1}^{j_1} \sum_{m_2^{'}=-j_2}^{j_2} \langle j_1, j_2; m_1^{'}, m_2^{'}|J, M\rangle \\ &\times \Bigg[\sqrt{j_1(j_1+1) - m_1^{'}(m_1^{'}-1)} \\ &\langle j_1, j_2; m_1, m_2|j_1, j_2; m_1^{'} - 1, m_2^{'}\rangle \\ &+\sqrt{j_2(j_2+1) - m_2^{'}(m_2^{'}-1)} \\ &\langle j_1, j_2; m_1, m_2|j_1, j_2; m_1^{'}, m_2^{'} - 1\rangle\Bigg].\end{aligned}$$

Si $m_1^{'} = m_1 + 1$ et $m_2^{'} = m_2 + 1$, on aboutit :

$$\begin{aligned}\sqrt{J(J+1) - M(M-1)}\langle j_1, j_2; m_1, m_2|J, M-1\rangle &= \sqrt{j_1(j_1+1) - m_1(m_1+1)} \\ &\langle j_1, j_2; m_1 + 1, m_2|J, M\rangle \\ &+\sqrt{j_2(j_2+1) - m_2(m_2+1)} \\ &\langle j_1, j_2; m_1, m_2 + 1|J, M\rangle. \end{aligned} \tag{1.45}$$

De façon analogue, l'application de J_+ à la relation (1.41), et multipliant la relation trouvée

par $\langle j_1, j_2; m_1, m_2|$, donne :

$$\begin{aligned}\sqrt{J(J+1)-M(M+1)}\langle j_1,j_2;m_1,m_2|J,M+1\rangle &= \sum_{m_1'=-j_1}^{j_1}\sum_{m_2'=-j_2}^{j_2}\langle j_1,j_2;m_1',m_2'|J,M\rangle \\ &\times\Bigg[\sqrt{j_1(j_1+1)-m_1'(m_1'+1)} \\ &\langle j_1,j_2;m_1,m_2|j_1,j_2;m_1'+1,m_2'\rangle \\ &+\sqrt{j_2(j_2+1)-\acute{m}_2(m_2'+1)} \\ &\langle j_1,j_2;m_1,m_2|j_1,j_2;m_1',m_2'+1\rangle\Bigg].\end{aligned}$$

Pour $m_1' = m_1 - 1$ et $m_2' = m_2 - 1$, on a :

$$\begin{aligned}\sqrt{J(J+1)-M(M+1)}\langle j_1,j_2;m_1,m_2|J,M+1\rangle &= \sqrt{j_1(j_1+1)-m_1(m_1-1)} \\ &\langle j_1,j_2;m_1-1,m_2|J,M\rangle \\ &+\sqrt{j_2(j_2+1)-m_2(m_2-1)} \\ &\langle j_1,j_2;m_1,m_2-1|J,M\rangle. \quad (1.46)\end{aligned}$$

1.7.2 Relations d'orthogonalité entre les coefficients de Clebsch-Gordan

Considérons les relations suivantes :

$$\sum_{m_1=-j_1}^{j_1}\sum_{m_2=-j_2}^{j_2}|j_1,j_2;m_1,m_2\rangle\langle j_1,j_2;m_1,m_2| = \mathbb{I} \quad (1.47)$$

$$\langle J,M|J',M'\rangle = \delta_{JJ'}\delta_{MM'} \quad (1.48)$$

Insérant la relation (1.47) dans la relation (1.48), on obtient :

$$\sum_{m_1=-j_1}^{j_1}\sum_{m_2=-j_2}^{j_2}\langle J,M|j_1,j_2;m_1,m_2\rangle\langle j_1,j_2;m_1,m_2|J',M'\rangle = \delta_{JJ'}\delta_{MM'} \quad (1.49)$$

Encore, on a :

$$\sum_{J=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2}\sum_{M=-J}^{J}|J,M\rangle\langle J,M| = \mathbb{I} \quad (1.50)$$

$$\langle j_1,j_2;m_1,m_2|j_1,j_2;m_1',m_2'\rangle = \delta_{m_1m_1'}\delta_{m_2m_2'}. \quad (1.51)$$

Insérant la relation (1.50) dans la relation (1.51), on obtient :

$$\sum_{J=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} \sum_{M=-J}^{J} \langle j_1, j_2; m_1, m_2|J, M\rangle\langle J, M|j_1, j_2; m_1^{'}, m_2^{'}\rangle = \delta_{m_1 m_1^{'}}\delta_{m_2 m_2^{'}}. \tag{1.52}$$

Parlons maintenant de la fonction delta de Dirac .

1.8 Fonction δ de Dirac

La fonction delta de Dirac ([5] , [4]) est définie par :

$$\iiint_{\text{tout l'espace}} d^3\vec{r}\delta(\vec{r} - \vec{r_0})f(\vec{r}) = f(\vec{r_0}) \tag{1.53}$$

En réalité cette notation intégrale n'est pas justifiée mathématiquement ; et l'on définit δ non comme une fonction mais comme une distribution. Cependant, cette distinction n'est pas essentielle d'un point de vue physique.

Les éléments traités dans ce premier chapitre seront utilisés les uns dans le chapitres 2, les autres , dans le chapitre 3.

Chapitre 2

OPÉRATEURS TENSORIELS IRRÉDUCTIBLES

2.1 Introduction

Une forme p-linéaire définie sur $E \times E \times E \times ... \times E$, où E est un espace vectoriel quelconque, est un tenseur d'ordre p, p fois covariant [10].

Considérons un espace vectoriel ε_n n-dimensionnel tel que, par rotation, ses vecteurs se transforment linéairement dans les vecteurs de ε_n : ce qui signifie que chaque rotation est associée à un opérateur linéaire de ε_n qui est irréductible par rotation. Par définition, les vecteurs de ε_n sont les tenseurs de n-composantes.

Par exemple, les vecteurs de l'espace ordinaire sont des tenseurs de 3 composantes, tout comme les vecteurs du sous-espace $\varepsilon(k, j)$ sont des tenseurs de $(2j + 1)$ composantes, etc.

Si nous choisissons dans ε_n , un ensemble de vecteurs de base, chacun des tenseurs ci-haut cités est représenté par ses n-composantes et la rotation est représentée par l'action d'une matrice $n \times n$ des n-composantes. Par exemple, $v_i w_j (i, j = 1, 2, 3)$ sont les 9 composantes d'un tenseur noté $v \otimes w$ obtenues par multiplication de chaque composante du vecteur $\overrightarrow{V}$ par chaque composante du vecteur $\overrightarrow{W}$. Notons R, la matrice de rotation. La transformation des composantes est donnée par [1] :

$$[V \otimes W]'_{ij} \equiv V'_i W'_j = R_{ik} R_{jl} V_k W_l = R_{ik} R_{jl} [V \otimes W]_{kl}$$

Par définition, un tenseur est irréductible, si l'espace ε_n dans lequel il est défini est irréductible par rapport aux rotations c'est-à-dire si il n'existe d'autres sous-espaces invariants par rotation que l'ensemble vide et lui-même. Par exemple, les vecteurs de l'espace ordinaire ainsi que les vecteurs de l'espace $\varepsilon(k, j)$ sont des tenseurs irréductibles. Dans le cas où n opérateurs se transforment linéairement par rotation dans d'autres n vecteurs linéairement indépendants de l'espace ε_n, alors ils constituent n composantes d'un opérateur tensoriel

n-dimensionnel. Si l'espace ε_n est irréductible, l'opérateur tensoriel est dit aussi irréductible.

Remarquons que si V et W sont 2 opérateurs vectoriels, les 9 opérateurs $v_i w_j (i, j = 1, 2, 3)$ sont les composantes d'un opérateur tensoriel qui est somme directe de 3 opérateurs tensoriels irréductibles : l'opérateur scalaire $\vec{v}.\vec{w}$, l'opérateur vectoriel $\vec{v} \times \vec{w}$, et l'opérateur tensoriel.

Avant de décrire ces opérateurs, décrivons d'abord les opérateurs de rotation.

2.2 Moment Cinétique et Rotation : Opérateurs de rotation

Considérons R, un opérateur de rotation, $|\psi\rangle$ l'état initial d'un système quantique et $|\psi'\rangle$ l'état du système après rotation [3]. On a $|\psi'\rangle = R|\psi\rangle$ où R est un opérateur linéaire et unitaire. On appelle rotation infinitésimale, toute rotation infiniment voisine de l'identité c'est-à-dire une rotation $R_{\vec{u}}(d\alpha)$ d'angle infinitésimal $d\alpha$ autour d'un axe quelconque $\vec{u}$.

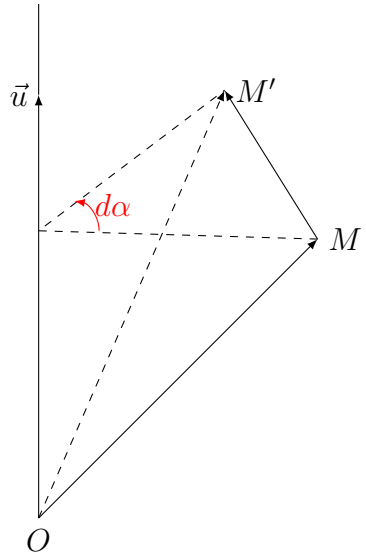


Figure 2.1 – rotation infinitésimale

Ainsi, une rotation infinitésimale $R_{\vec{u}}(d\alpha)$ d'un vecteur $\overrightarrow{OM}$ s'écrit :

$$\begin{aligned} R_{\overrightarrow{u}}(d\alpha)(\overrightarrow{OM}) &= \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MM'} \\ &= \overrightarrow{OM} + d\alpha\,\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{OM}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Toute rotation finie peut être décomposée en une infinité de rotations infinitésimales puisque l'angle de rotation peut varier de façon continue et ainsi, les angles s'additionnent.

$$\begin{aligned} R_{\vec{u}}(\alpha + d\alpha) &= R_{\vec{u}}(\alpha) R_{\vec{u}}(d\alpha) \\ &= R_{\vec{u}}(d\alpha) R_{\vec{u}}(\alpha). \end{aligned} \tag{2.2}$$

On peut de cette manière ramener l'étude du groupe des rotations à celle du groupe des rotations infinitésimales.

Considérons ainsi une rotation infinitésimale autour de l'axe Oz, $R_{\vec{e_z}}(d\alpha)$. Si nous l'appliquons à une particule dont l'état est décrit par la fonction d'onde $\psi(\vec{r})$, on a :

$$\psi^{'}(\vec{r}) = R\psi(\vec{r}). \tag{2.3}$$

Et

$$\vec{r^{'}} = R\vec{r}.$$

Il est naturel de supposer que la valeur de la fonction d'onde initiale $\psi(\vec{r})$ au point $\vec{r}_0$ se retrouve, après rotation, comme valeur de la fonction d'onde finale $\psi^{'}(\vec{r})$ au point $\vec{r^{'}_0}$ donné par :

$$\begin{aligned} \psi^{'}(\vec{r^{'}_0}) &= \psi(\vec{r_0}) \\ &= \psi(R^{-1}\vec{r^{'}_0}). \end{aligned}$$

Cette équation étant valable pour n'importe quel point $\vec{r^{'}_0}$ de l'espace, on peut l'écrire sous la forme :

$$\psi^{'}(\vec{r}) = \psi(R^{-1}\vec{r}). \tag{2.4}$$

Posons :

$$\vec{r}(x, y, z) = x\vec{e_x} + y\vec{e_y} + z\vec{e_z},$$

Nous avons :

$$\begin{aligned} R^{-1}_{\vec{e_z}}(d\alpha)\vec{r} &= R_{-\vec{e}_z}(d\alpha)\vec{r} \\ &= \vec{r} - d\alpha\vec{e_z} \times \vec{r} \\ &= (x + yd\alpha)\vec{e_x} + (y - xd\alpha)\vec{e_y} + z\vec{e_z}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \psi^{'}(\vec{r}) &= \psi^{'}(x, y, z) \\ &= \psi(x + yd\alpha, y - xd\alpha, z). \end{aligned} \tag{2.6}$$

Ce qui donne au premier ordre en $d\alpha$:

$$\begin{aligned} \psi^{'}(x, y, z) &= \psi(x, y, z) + d\alpha \left[y\frac{\partial\psi(x, y, z)}{\partial x} - x\frac{\partial\psi(x, y, z)}{\partial y} \right] \\ &= \left\{ 1 - d\alpha \left[x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x} \right] \right\} \psi(x, y, z). \end{aligned} \tag{2.7}$$

Dans la relation (2.7), nous reconnaissons la composante suivant l'axe oz du moment cinétique orbital L_z à une constante près.

Donc :

$$\psi^{'}(x,y,z) = \left\{1 - \frac{i}{\hbar} d\alpha L_z\right\}\psi(x,y,z).$$

Nous concluons alors que :

$$R_{\vec{e}_z} = 1 - \frac{i}{\hbar} d\alpha L_z. \tag{2.8}$$

Par le même raisonnement, nous généralisons la rotation infinitésimale autour d'un axe quelconque $\vec{u}$ en écrivant :

$$R_{\vec{u}} = 1 - \frac{i}{\hbar} d\alpha \vec{L}.\vec{u}; \tag{2.9}$$

Sous forme finie, on écrit [3] :

$$R_{\vec{u}} = e^{-\frac{i}{\hbar}\alpha \vec{L}.\vec{u}}. \tag{2.10}$$

Enfin, nous généralisons ces résultats pour un système physique caractérisé par un moment cinétique quelconque $\vec{J}$ par :

$$R_{\vec{e}_z}(d\alpha) = 1 - \frac{i}{\hbar} d\alpha J_z \tag{2.11}$$

$$R_{\vec{u}}(d\alpha) = 1 - \frac{i}{\hbar} d\alpha \vec{J}.\vec{u} \tag{2.12}$$

$$R_{\vec{u}}(\alpha) = e^{-\frac{i}{\hbar}\alpha \vec{J}.\vec{u}} \tag{2.13}$$

où $\vec{J}$ est l'opérateur moment cinétique du système.

Un système physique qui subit une rotation change d'état, c'est-à-dire que les vecteurs d'état sont transformés par cette rotation.

Comme les vecteurs d'état, les opérateurs qui agissent dans l'espace des états du système physique sont également transformés sous rotation. Certains opérateurs se transforment de façon simple. Ce sont les opérateurs : **scalaires, vectoriels, tensoriels.**

2.3 Définition générale des opérateurs tensoriels irréductibles

Considérons une observable A qui se transforme en $A^{'}$ après rotation.

Comme la rotation conserve les grandeurs des mesures (les valeurs propres de l'observable concernée), nous écrivons [3] :

$$A^{'}|u_n^{'}\rangle = a_n|u_n^{'}\rangle$$

et

$$|u_n^{'}\rangle = R|u_n\rangle.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} A^{'}R|u_n\rangle &= a_n|u_n^{'}\rangle \\ &= a_nR|u_n\rangle. \end{aligned}$$

Ce qui implique que :

$$\begin{aligned} R^{+}A^{'}R|u_n\rangle &= a_n|u_n\rangle \\ &= A|u_n\rangle \end{aligned}$$

D'où,

$$R^{+}A^{'}R = A$$
$$A^{'} = RAR^{+}$$

Pour être concret, nous écrivons, au premier ordre en $d\alpha$, pour le cas particulier d'une rotation infinitésimale autour d'axe $\vec{u}$:

$$\begin{aligned} A^{'} &= e^{-\frac{i}{\hbar}d\alpha\vec{J}.\vec{u}}Ae^{\frac{i}{\hbar}d\alpha\vec{J}.\vec{u}} \\ &= A - \frac{i}{\hbar}d\alpha\Big[\vec{J}.\vec{u}, A\Big]. \end{aligned} \tag{2.14}$$

La relation (2.14) nous permet de bien définir les 3 types d'opérateurs tensoriels irréductibles à partir de leurs relations de commutation avec le moment cinétique $\vec{J}$ du système [3] .

2.3.1 Opérateurs scalaires

Ce sont des opérateurs qui, par définition, prennent la même valeur avant et après la rotation[3].

De la relation (2.14), nous obtenons :

$$A^{'} = A;$$

ce qui implique que :

$$\left[\vec{J}.\vec{u}, A\right] = 0,$$

quel que soit $\vec{u}$; nous en déduisons alors les relations suivantes :

$$\left[A, \vec{J}\right] = \vec{0}. \tag{2.15}$$

Ainsi un opérateur scalaire commute avec les 3 composantes du moment cinétique total du système :

$$\left[A, J_x\right] = \left[A, J_y\right] = \left[A, J_z\right] = 0. \tag{2.16}$$

Nous pouvons citer comme exemple : J^2, l'Hamiltonien d'un système physique isolé, etc.

2.3.2 Opérateurs vectoriels

Un opérateur vectoriel est un ensemble de 3 observables V_x, V_y, V_z, qui sont ses composantes cartésiennes et qui se transforment par rotation selon la loi caractéristique des grandeurs vectorielles ; c'est-à-dire, la transformée, dans une rotation R de la composante $V_{\vec{u}} = \overrightarrow{V}.\vec{u}$ suivant un axe $\vec{u}$ de vecteur unitaire $\vec{u}$, doit être la composante $V_{\vec{u}'} = \overrightarrow{V}.\vec{u}'$ de $\overrightarrow{V}$ suivant l'axe $\vec{u}'$ tel que : $\vec{u}' = R\vec{u}$ [3] .

Considérons par exemple la composante V_x d'une telle observable : elle est inchangée par une rotation autour de ox. On écrit ainsi :

$$\left[J_x, V_x\right] = 0.$$

Si l'on effectue une rotation autour de Oy, on obtient :

$$(V_x)' = V_x - \frac{i}{\hbar} d\alpha \left[J_y, V_x\right].$$

Or,

$$\begin{aligned} (\vec{e}_x)' &= \vec{e}_x + d\alpha \vec{e}_y \times \vec{e}_x \\ &= \vec{e}_x - d\alpha \vec{e}_z \end{aligned}$$

Par conséquent, si $\overrightarrow{V}$ est une observable vectorielle, $(V_x)'$ doit coïncider avec $\overrightarrow{V}.\vec{e}_x'$:

$$\begin{aligned} (V_x)' &= \vec{V}.\vec{e}_x - d\alpha \vec{V}.\vec{e}_z \\ &= V_x - d\alpha V_z. \end{aligned}$$

On conclut donc que :

$$\left[V_x, J_y\right] = i\hbar V_z.$$

Par un raisonnement analogue, dans le cas d'une rotation infinitésimale autour de l'axe Oz, on écrit :

$$\left[J_z, V_x\right] = i\hbar V_y.$$

Donc, en général, pour tout opérateur vectoriel, nous écrivons :

$$\left[J_i, V_j\right] = i\hbar\epsilon_{ijk}V_k \tag{2.17}$$

où ϵ_{ijk} est le tenseur de Lévi-civita.

Quelques exemples d'opérateurs vectoriels sont : opérateur position $\overrightarrow{R}$, opérateur quantité de mouvement $\overrightarrow{P}$, opérateur moment cinétique orbital $\overrightarrow{L}$, opérateur moment cinétique de spin $\overrightarrow{S}$, etc.

Cette relation 2.17, montre que les relations de commutation d'un opérateur vectoriel avec le moment cinétique se déduisent les unes des autres par permutation cyclique. De plus, elle implique que, lors d'une rotation infinitésimale, $\overrightarrow{V}.\vec{u}$ se transforme en $\overrightarrow{V}.\vec{u}'$, où $\vec{u}'$ est le transformé de $\vec{u}$ par la rotation considérée.

Notons que les observables vectorielles sont des cas particuliers des observables tensorielles dont les composantes standard et les relations de commutation avec le moment cinétique seront définies à partir de celles des observables vectorielles.

Les composantes standard d'un opérateur vectoriel $\overrightarrow{V}$ sont [4] :

$$V_1^{(1)} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(V_x + iV_y), \tag{2.18}$$

$$V_0^{(1)} = V_z, \tag{2.19}$$

$$V_{-1}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(V_x - iV_y). \tag{2.20}$$

A partir de la relation (2.17), nous montrons les relations de commutation suivantes entre $J_\pm, J_z$ et $V_m^{(1)}$, $m = -1, 0, 1$.

$$\begin{aligned}\left[J_z, V_{-1}^{(1)}\right] &= \left[J_z, \frac{1}{\sqrt{2}}(V_x - iV_y)\right] \\ &= -\hbar V_{-1}^{(1)}\end{aligned} \tag{2.21}$$

De la même manière, nous obtenons :

$$\left[J_z, V_0^{(1)}\right] = 0, \tag{2.22}$$

$$\left[J_z, V_1^{(1)}\right] = \hbar V_1^{(1)}. \tag{2.23}$$

Encore,

$$\begin{aligned}\left[J_+, V_{-1}^{(1)}\right] &= \frac{2\hbar}{\sqrt{2}} V_z \\ &= \sqrt{2}\hbar V_0^{(1)}. \qquad (2.24)\end{aligned}$$

(2.25)

De même :

$$\left[J_+, V_0^{(1)}\right] = \sqrt{2}\hbar V_1^{(1)}, \tag{2.26}$$

$$\left[J_+, V_1^{(1)}\right] = 0. \tag{2.27}$$

De plus :

$$\left[J_-, V_{-1}^{(1)}\right] = 0. \tag{2.28}$$

De même :

$$\left[J_-, V_0^{(1)}\right] = \sqrt{2}\hbar V_{-1}^{(1)}, \tag{2.29}$$

$$\left[J_-, V_1^{(1)}\right] = \sqrt{2}\hbar V_0^{(1)}. \tag{2.30}$$

De façon générale, nous obtenons, à partir des relations (2.21)-(2.30) :

$$\left[J_z, V_m^{(1)}\right] = m\hbar V_m^{(1)}, \tag{2.31}$$

$$\left[J_\pm, V_m^{(1)}\right] = \sqrt{2 - m(m \pm 1)}\hbar V_{m\pm 1}^{(1)}. \tag{2.32}$$

Ainsi, trois opérateurs qui vérifient les relations de commutation (2.31) et (2.32) sont les composantes standard d'un opérateur tensoriel d'ordre 1 (ou autrement dit un opérateur vectoriel).

2.3.3 Opérateurs tensoriels

Par généralisation des relations (2.31) et (2.32) à l'ordre élevé, les $(2K+1)$ opérateurs $\{T_Q^{(K)}$, K entier≥ 0 et $Q = -K, -K+1, ..., 0, ..., K-1, K\}$ sont les composantes standard d'un opérateur tensoriel irréductible d'ordre K s'ils vérifient trois relations de commutation suivantes avec le moment cinétique total $\vec{J}$ d'un système physique [4] :

$$\left[J_z, T_Q^{(K)}\right] = \hbar Q T_Q^{(K)}, \tag{2.33}$$

$$\left[J_{\pm}, T_Q^{(K)}\right] = \hbar\sqrt{K(K+1) - Q(Q\pm 1)}\, T_{Q\pm 1}^{(K)}. \tag{2.34}$$

Ainsi, les opérateurs scalaires sont les opérateurs tensoriels irréductibles d'ordre $K = 0$ et les opérateurs vectoriels sont les opérateurs tensoriels irréductibles d'ordre $K = 1$.

2.4 Théorème de Wigner-Eckart

Considérons un opérateur tensoriel $T_Q^{(K)}$ de composantes T_Q, $Q = -K, -K+1, ..., 0, ..., K-1, K$.
Soit $\{|k, J, M\rangle\}$ une base standard d'états propres communs à J^2 et J_z. Le théorème de Wigner-Eckart donne une relation des différents éléments de matrice de $T_Q^{(K)}$ dans cette base. En effet, il permet de factoriser ces éléments de matrice en deux facteurs : le premier facteur est l'élément de matrice réduit et le second est le coefficient de Clebsch–Gordan.

2.4.1 Opérateurs scalaires

Un opérateur tensoriel irréductible d'ordre $K = 0$ vérifie les relations de commutation suivantes avec le moment cinétique $\vec{J}$ du système physique :

$$\left[J_z, T_0^{(0)}\right] = 0,$$

$$\left[J_{\pm}, T_0^{(0)}\right] = 0.$$

Dans une base standard $\{|k, J, M\rangle\}$, les éléments de matrice d'un opérateur scalaire sont donnés par :

$$\langle k, J, M|T_0^{(0)}|k', J', M'\rangle = (T_0^{(0)})_{kk'}^{(J)} \delta_{JJ'}\delta_{MM'}, \tag{2.35}$$

où $(T_0^{(0)})_{kk'}^{(J)}$ est une quantité dépendant de K, K' et J seulement. De plus, ils ne dépendent pas de M. En effet, compte tenu des relations (2.34)pour $K = 0$ (cas d'un opérateur scalaire), nous avons :

$$\langle k, J, M|J_+ T_0^{(0)}|k', J', M'\rangle = \langle k, J, M|T_0^{(0)} J_+|k', J', M'\rangle.$$

Après simplification et tenant compte du fait que la base est orthonormée, nous obtenons :

$$\langle k, J, M-1|T_0^{(0)}|k', J, M-1\rangle = \langle k, J, M|T_0^{(0)}|k, J, M\rangle. \tag{2.36}$$

Ainsi la relation (2.35) peut s'écrire sous la forme :

$$\langle k, J, M|T_0^{(0)}|k', J', M'\rangle = a_J(k, k')\delta_{JJ'}\delta_{MM'}, \tag{2.37}$$

où $a_J(k, k')$ est une quantité qui dépend seulement de k , k' et J.

2.4.2 Opérateurs vectoriels

Introduisons les opérateurs V_+ et V_- :

$$V_\pm = V_x \pm iV_y$$

avec les relations de commutation suivantes [4] :

$$\begin{cases} [J_+, V_+] = 0 \\ [J_-, V_+] = -2\hbar V_z \\ [J_-, V_-] = 0 \\ [J_+, V_-] = 2\hbar V_z \\ [J_x, V_\pm] = \mp\hbar V_z \\ [J_y, V_\pm] = -\hbar V_z \\ [J_z, V_\pm] = \pm\hbar V_\pm \end{cases} \tag{2.38}$$

Considérons les opérateurs $T_Q^{(1)}(Q = -1, 0, 1)$ les composantes standard d'un opérateur vectoriel $\vec{V}$ formées par les combinaisons linéaires de ses composantes cartésiennesV_x, V_y, V_z. On écrit :

$$\begin{aligned} \langle k, J, M|V_z|k^{'}, J^{'}, M^{'}\rangle &= \frac{1}{M^{'}\hbar}\langle k, J, M|V_z J_z|k^{'}, J^{'}, M^{'}\rangle \\ &= \frac{1}{M\hbar}\langle k, J, M|J_z V_z|k^{'}, J^{'}, M^{'}\rangle. \end{aligned} \tag{2.39}$$

La relation (2.39) montre que les éléments de matrice $\langle k, J, M|V_z|k^{'}, J^{'}, M^{'}\rangle$ sont nécessairement nuls chaque fois que :

$$M \neq M^{'}. \tag{2.40}$$

De plus, des relations (2.38), pour une base standard$\{|k, J, M\rangle\}$, on déduit :

$$J_z(V_\pm|k^{'}, J^{'}, M^{'}\rangle) = (M^{'} \pm 1)\hbar V_\pm|k^{'}, J^{'}, M^{'}\rangle. \tag{2.41}$$

Multipliant à gauche de la relation (2.41) par $\langle k, J, M|$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \langle k, J, M|J_z V_\pm|k^{'}, J^{'}, M^{'}\rangle &= M\hbar\langle k, J, M|V_\pm|k^{'}, J^{'}, M^{'}\rangle \\ &= (M^{'} \pm 1)\hbar\langle k, J, M|V_\pm|k^{'}, J^{'}, M^{'}\rangle. \end{aligned}$$

Ce qui implique que :

$$M = M^{'} \pm 1. \tag{2.42}$$

Ainsi les opérateurs vectoriels V_z, V_+ et V_- vérifient des règles de sélection définies par les relations (2.40) et (2.42).
A partir des relations (2.38) , on a :

$$[J_+, V_+] = 0;$$

ce qui donne :

$$\langle k, J, M+2|J_+V_+|k, J, M\rangle = \langle k, J, M+2|V_+J_+|k, J, M\rangle.$$

En insérant dans cette relation entre J_+ et V_+ la relation de fermeture

$$\sum_{k',J',M'} |k^{'}, J^{'}, M^{'}\rangle\langle k^{'}, J^{'}, M^{'}| = \mathbb{I}$$

et en utilisant la seconde règle de sélection, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\langle k, J, M+2|J_+|k, J, M+1\rangle\langle k, J, M+1|V_+|k, J, M\rangle &= \langle k, J, M+2|V_+|k, J, M+1\rangle \\ &\quad \langle k, J, M+1|J_+|k, J, M\rangle.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\frac{\langle k, J, M+1|V_+|k, J, M\rangle}{\langle k, J, M+1|J_+|k, J, M\rangle} &= \frac{\langle k, J, M+2|V_+|k, J, M+1\rangle}{\langle k, J, M+2|J_+|k, J, M+1\rangle} \\ &= \alpha_+(k, J).\end{aligned}$$

où $\alpha_+(k, J)$ est une quantité qui dépend de k et de J, mais pas de M.
D'*où* :

$$\langle k, J, M+1|V_+|k, J, M\rangle = \alpha_+(k, J)\langle k, J, M+1|J_+|k, J, M\rangle$$

Ainsi :

$$\langle k, J, M|V_+|k, J, M^{'}\rangle = \alpha_+(k, J)\langle k, J, M|J_+|k, J, M^{'}\rangle \tag{2.43}$$

A partir des relations (2.38), on a :

$$[J_-, V_-] = 0;$$

ce qui donne :

$$\langle k, J, M-2|J_-V_-|k, J, M\rangle = \langle k, J, M-2|V_-J_-|k, J, M\rangle.$$

En insérant dans cette relation entre J_- et V_-, la relation de fermeture

$$\sum_{k',J',M'} |k^{'}, J^{'}, M^{'}\rangle\langle k^{'}, J^{'}, M^{'}| = \mathbb{I}$$

et en utilisant la seconde règle de sélection, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\langle k, J, M-2|J_-|k, J, M-1\rangle\langle k, J, M-1|V_-|k, J, M\rangle &= \langle k, J, M-2|V_-|k, J, M-1\rangle \\ &\quad \langle k, J, M-1|J_-|k, J, M\rangle.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\frac{\langle k, J, M-1|V_-|k, J, M\rangle}{\langle k, J, M-1|J_-|k, J, M\rangle} &= \frac{\langle k, J, M-2|V_-|k, J, M-1\rangle}{\langle k, J, M-2|J_-|k, J, M-1\rangle} \\ &= \alpha_-(k, J).\end{aligned}$$

où $\alpha_-(k,J)$ est une quantité qui dépend de k et de J, mais pas de M.
D'*où* :

$$\langle k,J,M-1|V_-|k,J,M\rangle = \alpha_-(k,J)\langle k,J,M-1|J_-|k,J,M\rangle.$$

Ainsi :

$$\langle k,J,M|V_-|k,J,M'\rangle = \alpha_-(k,J)\langle k,J,M|J_-|k,J,M'\rangle. \tag{2.44}$$

De plus, à partir de (2.38), nous avons :

$$[J_-,V_+] = -2\hbar V_z.$$

Donc, nous pouvons relier les éléments de matrice de V_z à ceux de J_z. En effet,

$$\langle k,J,M|J_-V_+|k,J,M\rangle - \langle k,J,M|V_+J_-|k,J,M\rangle = -2\hbar\langle k,J,M|V_z|k,J,M\rangle;$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned} -2\langle k,J,M|V_z|k,J,M\rangle &= \sqrt{J(J+1)-M(M+1)}\langle k,J,M+1|V_+|k,J,M\rangle \\ &- \sqrt{J(J+1)-M(M-1)}\langle k,J,M|V_+|k,J,M-1\rangle. \end{aligned}$$

Tenant compte de (2.43), on a :

$$\begin{aligned} \langle k,J,M|V_z|k,J,M\rangle &= -\frac{1}{2}[\sqrt{J(J+1)-M(M+1)}\alpha_+(k,J)\langle k,J,M+1|J_+|k,J,M\rangle \\ &- \sqrt{J(J+1)-M(M-1)}\alpha_+(k,J)\langle k,J,M|J_+|k,J,M-1\rangle] \\ &= M\hbar\alpha_+(k,J) \end{aligned} \tag{2.45}$$

Par le même raisonnement, de (2.38), nous avons :

$$[J_+,V_-] = 2\hbar V_z;$$

et, ainsi, nous pouvons relier les éléments de matrice de V_z à ceux de J_z. En effet,

$$\langle k,J,M|J_+V_-|k,J,M\rangle - \langle k,J,M|V_-J_+|k,J,M\rangle = 2\hbar\langle k,J,M|V_z|k,J,M\rangle;$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned} 2\langle k,J,M|V_z|k,J,M\rangle &= \sqrt{J(J+1)-M(M-1)}\langle k,J,M-1|V_-|k,J,M\rangle \\ &- \sqrt{J(J+1)-M(M+1)}\langle k,J,M|V_-|K,J,M+1\rangle. \end{aligned}$$

Tenant compte de (2.44),

$$\begin{aligned} \langle k,J,M|V_z|k,J,M\rangle &= \frac{1}{2}[\sqrt{J(J+1)-M(M-1)}\alpha_-(k,J)\langle k,J,M-1|J_-|k,J,M\rangle \\ &- \sqrt{J(J+1)-M(M-1)}\alpha_-(k,J)\langle k,J,M|J_-|k,J,M+1\rangle] \\ &= M\hbar\alpha_-(k,J). \end{aligned} \tag{2.46}$$

Des relations (2.45) et (2.46), nous concluons que :

$$\alpha_+(k,J) = \alpha_-(k,J) = \alpha(k,J).$$

Or, d'après 2.39

$$\langle k,J,M|V_z|k,J,M^{'}\rangle = \alpha(k,J)\langle k,J,M|J_z|k,J,M^{'}\rangle.$$

Ainsi, toute composante de $\vec{V}$ est une combinaison linéaire de V_+, V_- et V_z.
Donc :

$$\langle k,J,M|\vec{V}|k,J,M^{'}\rangle = \alpha(k,J)\langle k,J,M|\vec{J}|k,J,M^{'}\rangle. \tag{2.47}$$

2.4.3 Opérateurs tensoriels irréductibles d'ordre K

De ce qui précède, on a constaté qu'un opérateur scalaire est un opérateur tensoriel irréductible d'ordre $K = 0$ et que les 3 composantes standard d'un opérateur tensoriel irréductible d'ordre $K = 1$ sont les composantes standard d'un opérateur vectoriel. Soit $\{|k,J,M\rangle\}$ une base standard d'états propres communs à J^2 et J_z. D'après la relation (2.33), on a l'élément de matrice suivante :

$$\langle k,J,M|[J_z,T_Q^{(K)}]|k^{'},J^{'},M^{'}\rangle = \hbar Q\langle k,J,M|T_Q^{(K)}|k^{'},J^{'},M^{'}\rangle;$$

Ce qui donne :

$$(M-M^{'})\hbar\langle k,J,M|T_Q^{(K)}|k^{'},J^{'},M^{'}\rangle = \hbar Q\langle k,J,M|T_Q^{(K)}|k^{'},J^{'},M^{'}\rangle.$$

Ainsi, l'élément de matrice $\langle k,J,M|T_Q^{(K)}|k^{'},J^{'},M^{'}\rangle$ est nul si :

$$M \neq M^{'} + Q. \tag{2.48}$$

En procédant de même avec les relations (2.34), nous obtenons que les $(2J+1)(2K+1)(2J^{'}+1)$ éléments de matrice $\langle k,J,M|T_Q^{(K)}|k^{'},J^{'},M^{'}\rangle$ correspondant à des valeurs fixées de $k,J,K,k^{'},J^{'}$ vérifient des relations de récurrence identiques à celles satisfaites par les $(2J+1)(2K+1)(2J^{'}+1)$ coefficients de Clebsch-Gordan $\langle J^{'},K;M^{'},Q|J,M\rangle$ correspondant aux valeurs fixées de $J,K,J^{'}$. En effet, de la relation (2.34),

$$\begin{aligned}\langle k,J,M|J_+T_Q^{(K)}|k^{'},J^{'},M^{'}\rangle &- \langle k,J,M|T_Q^{(K)}J_+|k^{'},J^{'},M^{'}\rangle \\ &= \hbar\sqrt{K(K+1)-Q(Q+1)}\langle k,J,M|T_{Q+1}^{(K)}|k^{'},J^{'},M^{'}\rangle.\end{aligned}$$

D'où ;

$$\begin{aligned}&\sqrt{J(J+1)-M(M-1)}\langle k,J,M-1|T_Q^{(K)}|k^{'},J^{'},M^{'}\rangle \\ &= \sqrt{J^{'}(J^{'}+1)-M^{'}(M^{'}+1)}\langle k,J,M|T_Q^{(K)}|k^{'},J^{'},M^{'}+1\rangle \\ &+\sqrt{K(K+1)-Q(Q+1)}\langle k,J,M|T_{Q+1}^{K}|k^{'},J^{'},M^{'}\rangle.\end{aligned} \tag{2.49}$$

De même,

$$\begin{aligned}\langle k,J,M|J_-T_Q^{(K)}|k^{'},J^{'},M^{'}\rangle &- \langle k,J,M|T_Q^{(K)}J_-|k^{'},J^{'},M^{'}\rangle \\ &= \hbar\sqrt{K(K+1)-Q(Q-1)}\langle k,J,M|T_{Q-1}^{(K)}|k^{'},J^{'},M^{'}\rangle.\end{aligned}$$

D'où ;

$$\begin{aligned}&\sqrt{J(J+1)-M(M+1)}\langle k,J,M+1|T_Q^{(K)}|k^{'},J^{'},M^{'}\rangle \\ &=\sqrt{J^{'}(J^{'}+1)-M^{'}(M^{'}-1)}\langle k,J,M|T_Q^{(K)}|k^{'},J^{'},M^{'}-1\rangle \\ &+\sqrt{K(K+1)-Q(Q-1)}\langle k,J,M|T_{Q-1}^{(K)}|k^{'},J^{'},M^{'}\rangle. \qquad (2.50)\end{aligned}$$

or, le coefficient de Clebsch-Gordan $\langle J^{'},K;M^{'},Q|J,M\rangle$, par analogie avec les relations (1.45) et (1.46), vérifie les relations de récurrence suivantes :

$$\begin{aligned}&\sqrt{J(J+1)-M(M+1)}\langle J^{'},K;M^{'},Q|J,M+1\rangle \\ &=\sqrt{J^{'}(J^{'}+1)-M^{'}(\acute{M}-1)}\langle J^{'},K;M^{'}-1,Q|J,M\rangle \\ &+\sqrt{K(K+1)-Q(Q-1)}\langle J^{'},K;M^{'},Q-1|J,M\rangle \qquad (2.51)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}&\sqrt{J(J+1)-M(M-1)}\langle J^{'},K;M^{'},Q|J,M-1\rangle \\ &=\sqrt{J^{'}(J^{'}+1)-M^{'}(M^{'}+1)}\langle J^{'},K;M^{'}+1,Q|J,M\rangle \\ &+\sqrt{K(K+1)-Q(Q+1)}\langle J^{'},K;M^{'},Q+1|J,M\rangle. \qquad (2.52)\end{aligned}$$

Ainsi, les relations de récurrence (2.49)et(2.50) pour les éléments de matrice $\langle k,J,M|T_Q^{(K)}|k^{'},J^{'},M^{'}\rangle$ et (2.51) et (2.52) pour les coefficients de Clebsch-Gordan $\langle J^{'},K;M^{'},Q|J,M\rangle$ sont identiques.
Donc, les éléments de matrice $\langle k,J,M|T_Q^{(K)}|k^{'},J^{'},M^{'}\rangle$ sont proportionnels aux coefficients de Clebsch-Gordan $\langle J^{'},K;M^{'},Q|J,M\rangle$.

Écrivons alors :

$$\langle k,J,M|T_Q^{(K)}|k^{'},J^{'},M^{'}\rangle=\alpha\langle J^{'},K;M^{'},Q|J,M\rangle; \qquad (2.53)$$

Où α est une constante ne dépendant que de k, J, K, $k^{'}$, $J^{'}$, qu'il est d'usage d'écrire sous la forme :

$$\alpha=\frac{1}{\sqrt{2J+1}}\langle k,J\|T^{(K)}\|k^{'},J^{'}\rangle;$$

avec $\langle k,J\|T^{(K)}\|k^{'},J^{'}\rangle$ qui est appelé $\ll$ *élement de matrice réduit* $\gg$ qui varie d'un opérateur à un autre.(le facteur $\frac{1}{\sqrt{2J+1}}$ est introduit par commodité [1].)

En définitive, formulons le théorème de Wigner-Eckart de façon générale :

Si $\{|k, J, M\rangle\}$ est une base standard constituée de vecteurs propres communs à J^2 et à J_z, on a :

$$\langle k, J, M|T_Q^{(K)}|k^{'}, J^{'}, M^{'}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2J+1}}\langle k, J\|T^{(K)}\|k^{'}, J^{'}\rangle\langle J^{'}, K; M^{'}, Q|J, M\rangle \tag{2.54}$$

où $\langle J^{'}, K; M^{'}, Q|J, M\rangle$ est le coefficient de Clebsch-Gordan.

A cause de la présence du coefficient de Clebsch-Gordan, on remarque que ces éléments de matrice sont nécessairement différents de zéro si :

$$|J - J^{'}| \leq K \leq J + J^{'}. \tag{2.55}$$

Ce qui constitue la seconde règle de sélection de l'opérateur $T_Q^{(K)}$.

Réciproquement, si $(2K + 1)$ opérateurs vérifient la relation (2.54) quels que soient les vecteurs $|k, J, M\rangle$ et $|k^{'}, J^{'}, M^{'}\rangle$, alors, ils constituent les $(2K + 1)$ composantes standard d'un opérateur tensoriel irréductible d'ordre K.
En effet,

$$\begin{aligned}\langle k, J, M|[J_z, T_Q^{(K)}]|k^{'}, J^{'}, M^{'}\rangle &= (M - M^{'})\hbar\langle k, J, M|T_Q^{(K)}|k^{'}, J^{'}, M^{'}\rangle \\ &= (M - M^{'})\hbar\alpha\langle J^{'}, K; M^{'}, Q|J, M\rangle.\end{aligned}$$

En tenant compte des règles de sélection ,

$$\begin{aligned}\langle k, J, M|[J_z, T_Q^{(K)}]|k^{'}, J - K, M - Q\rangle &= \hbar Q\alpha\langle J - K, K; M - Q, Q|J, M\rangle \\ &= \langle k, J, M|\hbar Q T_Q^{(K)}|k^{'}, J - K, M - Q\rangle.\end{aligned}$$

D'où,

$$[J_z, T_Q^{(K)}] = \hbar Q T_Q^{(K)}. \tag{2.56}$$

De plus,

$$\begin{aligned}\langle k, J, M|[J_+, T_Q^{(K)}]|k^{'}, J^{'}, M^{'}\rangle &= \hbar(\sqrt{J(J+1) - M(M-1)}\langle k, J, M-1|T_Q^{(K)}]|k^{'}, J^{'}, M^{'}\rangle \\ &- \hbar(\sqrt{J^{'}(J^{'}+1) - M^{'}(M^{'}+1)}\langle k, J, M|T_Q^{(K)}]|k^{'}, J^{'}, M^{'}+1\rangle \\ &= \hbar(\sqrt{J(J+1) - M(M-1)}\alpha\langle J^{'}, K; M^{'}, Q|J; M-1\rangle \\ &- \hbar(\sqrt{J^{'}(J^{'}+1) - M^{'}(M^{'}+1)}\alpha\langle J^{'}, K; M+1, Q|J; M\rangle.\end{aligned}$$

En utilisant les relations de récurrence (2.51)et (2.52) pour le coefficient de Clebsch-Gordan

$\langle \acute{J}, K; \acute{M}, Q|J, M\rangle$, nous avons :

$$\begin{aligned}
\langle k, J, M|[J_+, T_Q^{(K)}]|k^{'}, J^{'}, M^{'}\rangle &= \hbar(\sqrt{J'(J'+1) - M'(M'+1)}\alpha\langle J^{'}, K; M^{'}+1, Q|J; M\rangle \\
&+ \hbar(\sqrt{K(K+1) - Q(Q+1)}\alpha\langle J^{'}, K; M^{'}, Q+1|J; M\rangle \\
&- \hbar(\sqrt{J'(J'+1) - M'(M'+1)}\alpha\langle J^{'}, K; M^{'}+1, Q|J; M\rangle \\
&= \hbar(\sqrt{K(K+1) - Q(Q+1)}\alpha\langle J^{'}, K; M^{'}, Q+1|J; M\rangle \\
&= \langle k, J, M|\hbar\sqrt{K(K+1) - Q(Q+1)}T_{Q+1}^{(K)}|k^{'}, J^{'}, M^{'}\rangle.
\end{aligned}$$

Ce qui implique que :

$$[J_+, T_Q^{(K)}] = \hbar\sqrt{K(K+1) - Q(Q+1)}T_{Q+1}^{(K)}. \tag{2.57}$$

Par analogie, nous avons :

$$\begin{aligned}
\langle k, J, M|[J_-, T_Q^{(K)}]|k^{'}, J, M\rangle &= \hbar(\sqrt{J(J+1) - M(M+1)}\langle k, J, M+1|T_Q^{(K)}]|k^{'}, J^{'}, M^{'}\rangle \\
&- \hbar(\sqrt{J'(J'+1) - M'(M'-1)}\langle k, J, M|T_Q^{(K)}]|k^{'}, J^{'}, M^{'}-1\rangle \\
&= \hbar(\sqrt{J(J+1) - M(M+1)}\alpha\langle J^{'}, K; M^{'}, Q|J; M+1\rangle \\
&- \hbar(\sqrt{J'(J'+1) - M'(M'-1)}\alpha\langle J^{'}, K; M-1, Q|J; M\rangle
\end{aligned}$$

En utilisant les relations de récurrence (2.51)et (2.52) pour le coefficient de Clebsch-Gordan $\langle J^{'}, K; M^{'}, Q|J, M\rangle$, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\langle k, J, M|[J_-, T_Q^{(K)}]|k^{'}, J^{'}, M^{'}\rangle &= \hbar(\sqrt{J'(J'+1) - M'(M'-1)}\alpha\langle J^{'}, K; M^{'}-1, Q|J; M\rangle \\
&+ \hbar(\sqrt{K(K+1) - Q(Q-1)}\alpha\langle J^{'}, K; M^{'}, Q-1|J; M\rangle \\
&- \hbar(\sqrt{J'(J'+1) - M'(M'-1)}\alpha\langle J^{'}, K; M^{'}-1, Q|J; M\rangle \\
&= \hbar(\sqrt{K(K+1) - Q(Q-1)}\alpha\langle J^{'}, K; M^{'}, Q-1|J; M\rangle \\
&= \langle k, J, M|\hbar\sqrt{K(K+1) - Q(Q-1)}T_{Q-1}^{(K)}|k^{'}, J^{'}, M^{'}\rangle.
\end{aligned}$$

Ce qui implique que :

$$[J_-, T_Q^{(K)}] = \hbar\sqrt{K(K+1) - Q(Q-1)}T_{Q-1}^{(K)}. \tag{2.58}$$

Ainsi, nous retrouvons les relations (2.33) et (2.34) à partir des relations (2.56), (2.57)et(2.58).

Nous concluons que tous les opérateurs qui vérifient 2.54 sont les composantes standard tensoriels irréductibles.

Chapitre 3

APPLICATIONS EN PHYSIQUE NUCLÉAIRE THÉORIQUE

Nous considérons ici des cas concrets d'opérateurs tensoriels irréductibles d'ordre $K = 0$ (scalaire), $K = 1$ (vectoriel), $K = 2$ (tensoriel d'ordre 2). Plus précisément, nous traitons des moments multipolaires électriques et magnétiques. Nous en discutons d'abord les propriétés et nous formulons pour leur cas le théorème de Wigner-Eckart.

3.1 Moments multipolaires électriques

Soit un noyau soumis à l'action d'un potentiel électrique quelconque créé par son environnement. Ceci nous amène à des interactions développables à l'aide d'opérateurs tensoriels irréductibles : l'interaction monopolaire (scalaire) d'ordre 0, l'interaction dipolaire (vectoriel) d'ordre 1, l'interaction quadripolaire (tensoriel d'ordre 2) et ainsi de suite.

Ainsi, nous considérons un système physique φ formé de N particules chargées placées dans un potentiel électrostatique $U(\vec{r})$ donné et nous calculons alors l'énergie d'interaction du système avec le potentiel.

Supposons dans un premier temps, un système physique (classique) formé d'une seule particule chargée de charge q, de position $\vec{r}$, plongée dans le potentiel $U(\vec{r})$. L'énergie potentielle de cette particule est égale à :

$$V(\vec{r}) = qU(\vec{r}). \tag{3.1}$$

Étant donné que les harmoniques sphériques constituent une base orthonormée dans laquelle une fonction de θ, et φ peut être développée, nous écrivons le potentiel en fonction des harmoniques sphériques sous la forme [4] :

$$U(\vec{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} f_{l,m}(r) Y_l^m(\theta, \varphi), \tag{3.2}$$

avec

$$l \text{ entier} \geq 0 \text{ et} - l \leq m \leq l.$$

En supposant que les charges créant le potentiel électrostatique sont placées hors de la région de l'espace où peut se trouver la particule chargée, nous avons alors, en utilisant le laplacien en coordonnées sphériques [4] :

$$\begin{aligned} \Delta U(\vec{r}) &= \left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}r - \frac{L^2}{\hbar^2 r^2}\right)U(\vec{r}) \\ &= \vec{0}, \end{aligned} \tag{3.3}$$

où l'opérateur laplacien Δ est relié à l'opérateur moment cinétique $\vec{L}$.

Comme

$$L^2 Y_l^m(\theta,\varphi) = l(l+1)\hbar^2 Y_l^m(\theta,\varphi),$$

alors, la relation (3.3) donne :

$$\left[\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}r - \frac{l(l+1)}{r^2}\right]f_{l,m}(r) = 0. \tag{3.4}$$

C'est l'équation du type Euler-Cauchy [1] [6]. En effet, elle peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}r - \frac{l(l+1)}{r^2}\right]f_{l,m}(r) &= r^2\frac{d^2}{dr^2}f_{l,m}(r) + 2r\frac{d}{dr}f_{l,m}(r) - l(l+1)f_{l,m}(r) \\ &= 0. \end{aligned} \tag{3.5}$$

C'est l'équation radiale ne contenant que la variable r.

Elle admet ainsi deux solutions linéairement indépendantes :

$$r^l \text{ et } r^{-(l+1)}.$$

Comme $U(\vec{r}) \neq \infty$ si $\vec{r} \longrightarrow \vec{0}$, on retient seulement la solution :

$$f_{l,m}(r) = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}c_{l,m}r^l, \tag{3.6}$$

où $c_{l,m}$ sont les constantes dépendant du potentiel considéré, et $\sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}$ est un facteur introduit pour des raisons de pure commodité [4]. Donc, le potentiel devient :

$$U(\vec{r}) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}c_{l,m}r^l Y_l^m(\theta,\varphi), \tag{3.7}$$

1. L'équation du type Euler-Cauchy est de la forme $x^2y'' + axy' + by = 0$, a et b étant 2 constantes données, $y(x)$ une fonction inconnue. Sa résolution se fait par substitution $y = x^m$.

et l'énergie d'interaction est :

$$\begin{aligned} V(\vec{r}) &= qU(\vec{r}) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} c_{l,m} q\sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} r^l Y_l^m(\theta,\varphi) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} c_{l,m} D_l^m(\vec{r}), \end{aligned} \tag{3.8}$$

avec, $D_l^m(\vec{r}) = q\sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} r^l Y_l^m(\theta,\varphi)$.

En Mécanique quantique, le même type de développement est possible. En effet, l'opérateur énergie potentielle de la particule s'écrit [4] :

$$V(\vec{R}) = qU(\vec{R}). \tag{3.9}$$

En choisissant une base orthonormée (au sens large de Dirac) $\{|\vec{r}\rangle\}$ (où $\vec{r}(x,y,z)$ est remplacé par $\vec{R}(X,Y,Z)$), on a :

$$\begin{aligned} \langle\vec{r}|V(\vec{R})|\vec{r}'\rangle &= qU(\vec{r})\delta(\vec{r}-\vec{r}') \\ &= \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} c_{l,m} q\sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} r^l Y_l^m(\theta,\varphi)\delta(\vec{r}-\vec{r}'). \end{aligned}$$

En définissant les opérateurs Q_l^m par :

$$\langle\vec{r}|Q_l^m|\vec{r}'\rangle = D_l^m(\vec{r})\delta(\vec{r}-\vec{r}'); \tag{3.10}$$

On obtient :

$$\begin{aligned} V(\vec{R}) &= qU(\vec{R}) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} c_{l,m} Q_l^m; \end{aligned} \tag{3.11}$$

Ainsi, les opérateurs Q_l^m sont appelés **opérateurs multipolaires électriques**
avec $\delta(\vec{r}-\vec{r}')$, la fonction delta de Dirac définie par (1.53).

Généralisons maintenant ce résultat à un système de N particules indépendantes chargées de charges $q_1, ..., q_N$ et de vecteurs position $\vec{r}_1, ..., \vec{r}_N$.

Leur énergie de couplage avec le potentiel extérieur $U(\vec{r})$ est :

$$\begin{aligned} V(\vec{r}_1,...,\vec{r}_n) &= \sum_{n=1}^{N} q_n U(\vec{r}_n) \\ &= \sum_{n=1}^{N}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} c_{l,m} q_n \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} (r_n)^l Y_l^m(\theta_n,\varphi_n) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} c_{l,m} \sum_{n=1}^{N} q_n \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} (r_n)^l Y_l^m(\theta_n,\varphi_n) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} c_{l,m} D_l^m(\vec{r}_1,...,\vec{r}_n), \end{aligned} \tag{3.12}$$

avec,

$$D_l^m(\vec{r}_1,...,\vec{r}_n) = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \sum_{n=1}^{N} q_n (r_n)^l Y_l^m(\theta_n,\varphi_n); \tag{3.13}$$

θ_n et φ_n étant les angles polaires de $\vec{r}_n$.

Nous constatons ici que les moments multipolaires électriques sont donc simplement la somme des moments multipolaires associés à chacune des particules.

De même, en Mécanique Quantique, l'énergie de couplage avec le potentiel extérieur est décrite par l'opérateur :

$$V(\vec{R}_1,...\vec{R}_N) = \sum_{n=1}^{N} q_n U(\vec{R}_n), \tag{3.14}$$

$$\begin{aligned} \langle \vec{r}_1,...,\vec{r}_N | V(\vec{R}_1,...,\vec{R}_N) | \vec{r_1}',...,\vec{r_N}' \rangle &= \sum_{n=1} q_n U(\vec{R}_n) \delta(\vec{r}_1 - \vec{r_1}')...\delta(\vec{r}_N - \vec{r_N}') \\ &= \langle \vec{r}_1,...,\vec{r}_N | \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} c_{l,m} Q_l^m | \vec{r_1}',...,\vec{r_N}' \rangle \end{aligned}$$

. D'où :

$$V(\vec{R}_1,...,\vec{R}_N) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} c_{l,m} Q_l^m. \tag{3.15}$$

Par convention, dans tout ce qui va suivre, nous désignerons par Q_l^m les opérateurs moments multipolaires électriques tels que :

$$Q_l^m = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \sum_{n=1}^{N} q_n (R_n)^l Y_l^m(\theta_n,\varphi_n). \tag{3.16}$$

Montrons que, pour une particule sans spin, Q_l^m sont des opérateurs tensoriels irréductibles d'ordre l dans l'espace des états $\varepsilon_{\vec{r}}$, avec $-l \leq m \leq l$.

3.1.1 Opérateur Q_0^0, le moment monopolaire électrique

A partir de la relation (3.16), pour $l = 0$ et $m = 0$, utilisant les expressions explicites des harmoniques sphériques(1.37), nous obtenons :

$$\begin{aligned} Q_0^0 &= \sqrt{4\pi}\sum_{n=1}^{N} q_n Y_0^0(\theta_n, \varphi_n) \\ &= \sum_{n=1}^{N} q_n \mathbb{I}. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Vérifions les relations de commutation d'un opérateur tensoriel avec le moment cinétique, (2.33) et (2.34) pour Q_0^0,

$$\begin{aligned} \Big[J_z, Q_0^0\Big] &= \sum_{n=1}^{N} \Big[J_z, q_n\Big] \\ &= 0. \end{aligned} \tag{3.18}$$

De plus,

$$\begin{aligned} \Big[J_\pm, Q_0^0\Big] &= \sum_{n=1}^{N} \Big[J_\pm, q_n\Big] \\ &= 0. \end{aligned} \tag{3.19}$$

D'où, l'opérateur Q_0^0 est un opérateur tensoriel d'ordre 0. C'est un opérateur scalaire. On l'appelle *charge totale* du système ou encore *moment monopolaire électrique*.

3.1.2 Opérateur Q_1^m, le moment dipolaire électrique

A partir de la relation (3.16), pour $l = 1$ et $m = -1, 0, 1$, utilisant les expressions explicites des harmoniques sphériques(1.38)-(1.39), nous obtenons :

$$\begin{aligned} Q_1^1 &= \sqrt{\frac{4\pi}{3}}\sum_{n=1}^{N} q_n R_n Y_1^1(\theta_n, \varphi_n) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=1}^{N} q_n R_n \sin\theta_n \Big(\cos\varphi_n + i\sin\varphi_n\Big) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=1}^{N} q_n \Big(X_n + iY_n\Big), \end{aligned} \tag{3.20}$$

$$\begin{aligned} Q_1^0 &= \sqrt{\frac{4\pi}{3}}\sum_{n=1}^{N} q_n R_n Y_1^0(\theta_n,\varphi_n) \\ &= \sum_{n=1}^{N} q_n R_n \cos\theta_n \\ &= \sum_{n=1}^{N} q_n Z_n, \end{aligned} \tag{3.21}$$

$$\begin{aligned} Q_1^{-1} &= \sqrt{\frac{4\pi}{3}}\sum_{n=1}^{N} q_n R_n Y_1^{-1}(\theta_n,\varphi_n) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=1}^{N} q_n R_n \sin\theta_n \Big(\cos\varphi_n - i\sin\varphi_n \Big) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=1}^{N} q_n \Big(X_n - iY_n \Big). \end{aligned} \tag{3.22}$$

Nous remarquons que les quantités (3.20), (3.21) et (3.22) peuvent être considérées comme des composantes[4] d'un vecteur noté $\vec{D}$ sur la base complexe des trois vecteurs $\vec{e}_1$, $\vec{e}_0$ et $\vec{e}_{-1}$ avec :

$$\begin{cases} \vec{e}_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_x + i\vec{e}_y) \\ \vec{e}_0 = \vec{e}_z \\ \vec{e}_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_x - i\vec{e}_y). \end{cases} \tag{3.23}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \vec{D} &= -Q_1^{-1}\vec{e}_1 + Q_1^0\vec{e}_0 - Q_1^1\vec{e}_{-1} \\ &= \sum_{n=1}^{N} q_n \Big(X_n\vec{e}_x + Y_n\vec{e}_y + Z_n\vec{e}_z \Big) \\ &= \sum_{n=1}^{N} q_n \vec{R}_n. \end{aligned} \tag{3.24}$$

Ainsi, les opérateurs Q_1^m sont formés par combinaison linéaire des opérateurs composantes du moment dipolaire électrique total du système par rapport à l'origine.

En effet,

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\Big[Q_1^{-1} - Q_1^1 \Big] = \sum_{n=1}^{N} q_n X_n,$$

$$\frac{i}{\sqrt{2}}\Big[Q_1^{-1} + Q_1^1 \Big] = \sum_{n=1}^{N} q_n Y_n,$$

et

$$Q_1^0 = \sum_{n=1}^{N} q_n Z_n.$$

Plus précisément, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{m=-1}^{+1} c_{1,m} D_{1,m} &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\Big(c_{1,1} - c_{1,-1}\Big)\sum_n q_n x_n \\
&\quad -\frac{i}{\sqrt{2}}\Big(c_{1,1} + c_{1,-1}\Big)\sum_n q_n y_n \\
&\quad +c_{1,0}\sum_n q_n z_n \\
&= \Big(\sum_n q_n \vec{r}_n\Big).\Big(\nabla U\Big)_{\vec{r}=\vec{0}}. \qquad (3.25)
\end{aligned}$$

Nous retrouvons dans la relation précédente(3.25), l'expression de l'énergie de couplage entre un dipôle électrique et le champ [4].

Vérifions à présent les relations de commutation d'un opérateur tensoriel avec le moment cinétique, (2.33) et (2.34) pour Q_1^m :

$$\begin{aligned}
\Big[J_z, Q_1^1\Big] &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=1}^{N}\Big\{[J_z, X_n] + i[J_z, Y_n]\Big\} \\
&= \hbar Q_1^1, \qquad (3.26)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Big[J_z, Q_1^0\Big] &= \sum_{n=1}^{N}[J_z, Z_n] \\
&= 0, \qquad (3.26a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Big[J_z, Q_1^{-1}\Big] &= \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=1}^{N}\Big\{[J_z, X_n] - i[J_z, Y_n]\Big\} \\
&= -\hbar Q_1^{-1}, \qquad (3.26b)
\end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned}
\Big[J_+, Q_1^1\Big] &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=1}^{N}\Big\{ - i[J_y, X_n] + i[J_x, Y_n]\Big\} \\
&= 0, \qquad (3.27)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left[J_+, Q_1^0\right] &= \sum_{n=1}^{N}\Big\{[J_x, Z_n] + i[J_y, Z_n]\Big\} \\ &= \hbar\sqrt{2}Q_1^1, \end{aligned} \tag{3.27a}$$

$$\begin{aligned}\left[J_+, Q_1^{-1}\right] &= \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=1}^{N}\Big\{ + i[J_y, X_n] - i[J_x, Y_n]\Big\} \\ &= \hbar\sqrt{2}Q_1^0. \end{aligned} \tag{3.27b}$$

De même,

$$\begin{aligned}\left[J_-, Q_1^{-1}\right] &= \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=1}^{N}\Big\{ - i[J_y, X_n] - i[J_x, Y_n]\Big\} \\ &= 0, \end{aligned} \tag{3.28}$$

$$\begin{aligned}\left[J_-, Q_1^0\right] &= \sum_{n=1}^{N}\Big\{[J_x, Z_n] - i[J_y, Z_n]\Big\} \\ &= \hbar\sqrt{2}Q_1^{-1}, \end{aligned} \tag{3.28a}$$

$$\begin{aligned}\left[J_-, Q_1^1\right] &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=1}^{N}\Big\{ - i[J_y, X_n] + i[J_x, Y_n]\Big\} \\ &= \hbar\sqrt{2}Q_1^0. \end{aligned} \tag{3.28b}$$

Ainsi, ces relations de commutation (3.26)-(3.28*b*) ressemblent aux relations (2.33) et (2.34). Nous concluons que les opérateurs $Q_1^m (m = -1, 0, 1)$ sont les composantes d'un opérateur tensoriel d'ordre 1.

3.1.3 Opérateur Q_2^m, le moment quadripolaire électrique

A partir de la relation (3.16), pour $l = 2$ et $m = -2$, -1, 0, 1, 2 utilisant les expressions explicites des harmoniques sphériques(1.40)-(1.40d), nous obtenons :

$$\begin{aligned} Q_2^2 &= \sqrt{\frac{4\pi}{5}}\sum_{n=1}^{N} q_n (R_n)^2 Y_2^2(\theta_n, \varphi_n) \\ &= \frac{\sqrt{6}}{4}\sum_{n=1}^{N} q_n \Big(R_n \sin\theta_n (\cos\varphi_n + i\sin\varphi_n)\Big)^2 \\ &= \frac{\sqrt{6}}{4}\sum_{n=1}^{N} q_n \Big(X_n + iY_n\Big)^2, \end{aligned} \tag{3.29}$$

$$
\begin{aligned}
Q_2^1 &= \sqrt{\frac{4\pi}{5}} \sum_{n=1}^{N} q_n (R_n)^2 Y_2^1(\theta_n, \varphi_n) \\
&= -\frac{\sqrt{6}}{2} \sum_{n=1}^{N} q_n R_n \cos\theta_n \Big(R_n \sin\theta_n \cos\varphi_n + i R_n \sin\theta_n \cos\varphi_n \Big) \\
&= -\frac{\sqrt{6}}{2} \sum_{n=1}^{N} q_n Z_n \Big(X_n + i Y_n \Big), \qquad (3.30)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Q_2^0 &= \sqrt{\frac{4\pi}{5}} \sum_{n=1}^{N} q_n R_n Y_2^0(\theta_n, \varphi_n) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} q_n \Big(3(R_n)^2 \cos^2\theta_n - (R_n)^2 \Big) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} q_n \Big(2(Z_n)^2 - (X_n)^2 - (Y_n)^2 \Big), \qquad (3.31)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Q_2^{-1} &= \sqrt{\frac{4\pi}{5}} \sum_{n=1}^{N} q_n (R_n)^2 Y_2^{-1}(\theta_n, \varphi_n) \\
&= \frac{\sqrt{6}}{2} \sum_{n=1}^{N} q_n R_n \cos\theta_n \Big(R_n \sin\theta_n \cos\varphi_n - i R_n \sin\theta_n \sin\varphi_n \Big) \\
&= \frac{\sqrt{6}}{2} \sum_{n=1}^{N} q_n Z_n (X_n - i Y_n), \qquad (3.32)
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
Q_2^{-2} &= \sqrt{\frac{4\pi}{5}} \sum_{n=1}^{N} q_n (R_n)^2 Y_2^{-2}(\theta_n, \varphi_n) \\
&= \frac{\sqrt{6}}{4} \sum_{n=1}^{N} q_n \Big(R_n \sin\theta_n (\cos\varphi_n - i \sin\varphi_n) \Big)^2 \\
&= \frac{\sqrt{6}}{4} \sum_{n=1}^{N} q_n \Big(X_n - i Y_n \Big)^2 . \qquad (3.33)
\end{aligned}
$$

On obtient ainsi les 5 composantes du moment quadripolaire électrique d'un système physique considéré [4] .

Alors que la charge totale du système est un scalaire et que son moment dipolaire est un vecteur, le moment quadripolaire est un tenseur d'ordre 2.
De plus, on a :

$$\sum_{m=-2}^{2} c_{2,m} D_{2,m} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \left[\frac{\partial^2 U}{\partial x^i x^j} \right]_{\vec{r}=\vec{0}} . \sum_{n=1}^{N} q_n x_n^i x_n^j. \tag{3.34}$$

Cette relation (3.34) décrit le couplage entre le moment quadripolaire électrique du système et le gradient du champ au point $\vec{r} = \vec{0}$ [4] .

Évaluons maintenant les commutateurs entre ces opérateurs et le moment cinétique ;

$$\begin{aligned} \left[J_z, Q_2^2 \right] &= \frac{\sqrt{6}}{4} \sum_{n=1}^{N} q_n \left[J_z, (X_n + iY_n)^2 \right] \\ &= 2\hbar Q_2^2 \end{aligned} \tag{3.35}$$

$$\begin{aligned} \left[J_z, Q_2^1 \right] &= -\frac{\sqrt{6}}{2} \sum_{n=1}^{N} q_n \left[J_z, Z_n (X_n + iY_n) \right] \\ &= \hbar Q_2^1, \end{aligned} \tag{3.35a}$$

$$\begin{aligned} \left[J_z, Q_2^0 \right] &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} q_n \left[J_z, 2(Z_n)^2 - (X_n)^2 - (Y_n)^2 \right] \\ &= 0, \end{aligned} \tag{3.35b}$$

$$\begin{aligned} \left[J_z, Q_2^{-1} \right] &= \frac{\sqrt{6}}{2} \sum_{n=1}^{N} q_n \left[J_z, Z_n (X_n - iY_n) \right] \\ &= -\hbar Q_2^{-1}, \end{aligned} \tag{3.35c}$$

$$\begin{aligned} \left[J_z, Q_2^{-2} \right] &= \frac{\sqrt{6}}{4} \sum_{n=1}^{N} q_n \left[J_z, (X_n - iY_n)^2 \right] \\ &= -2\hbar Q_2^{-2}. \end{aligned} \tag{3.35d}$$

De plus ,

$$\begin{aligned} \left[J_+, Q_2^2 \right] &= \frac{\sqrt{6}}{4} \sum_{n=1}^{N} q_n \left[J_+, (X_n + iY_n)^2 \right] \\ &= 0, \end{aligned} \tag{3.36}$$

$$\begin{aligned}\left[J_+, Q_2^1\right] &= -\frac{\sqrt{6}}{2}\sum_{n=1}^{N} q_n \left[J_z, Z_n(X_n + iY_n)\right] \\ &= \sqrt{4}\hbar Q_2^2, \end{aligned} \tag{3.36a}$$

$$\begin{aligned}\left[J_+, Q_2^0\right] &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} q_n \left[J_+, 2(Z_n)^2 - (X_n)^2 - (Y_n)^2\right] \\ &= \sqrt{6}\hbar Q_2^1, \end{aligned} \tag{3.36b}$$

$$\begin{aligned}\left[J_+, Q_2^{-1}\right] &= \frac{\sqrt{6}}{2}\sum_{n=1}^{N} q_n \left[J_+, Z_n(X_n - iY_n)\right] \\ &= \sqrt{6}\hbar Q_2^0, \end{aligned} \tag{3.36c}$$

et

$$\begin{aligned}\left[J_+, Q_2^{-2}\right] &= \frac{\sqrt{6}}{4}\sum_{n=1}^{N} q_n \left[J_+, (X_n - iY_n)^2\right] \\ &= \sqrt{4}\hbar Q_2^{-1}. \end{aligned} \tag{3.36d}$$

De même,

$$\begin{aligned}\left[J_-, Q_2^2\right] &= \frac{\sqrt{6}}{4}\sum_{n=1}^{N} q_n \left[J_-, (X_n + iY_n)^2\right] \\ &= \sqrt{4}\hbar Q_2^1, \end{aligned} \tag{3.37}$$

$$\begin{aligned}\left[J_-, Q_2^1\right] &= -\frac{\sqrt{6}}{2}\sum_{n=1}^{N} q_n \left[J_-, Z_n(X_n + iY_n)\right] \\ &= \sqrt{6}\hbar Q_2^0, \end{aligned} \tag{3.37a}$$

$$\begin{aligned}\left[J_-, Q_2^0\right] &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} q_n \left[J_-, 2(Z_n)^2 - (X_n)^2 - (Y_n)^2\right] \\ &= \sqrt{6}\hbar Q_2^{-1}, \end{aligned} \tag{3.37b}$$

$$\begin{aligned}\left[J_-, Q_2^{-1}\right] &= \frac{\sqrt{6}}{2}\sum_{n=1}^{N} q_n \left[J_-, Z_n(X_n - iY_n)\right] \\ &= \sqrt{4}\hbar Q_2^{-2}, \end{aligned} \tag{3.37c}$$

$$\left[J_-, Q_2^{-2}\right] = \frac{\sqrt{6}}{4}\sum_{n=1}^{N} q_n \left[J_-, (X_n - iY_n)^2\right]$$
$$= 0. \tag{3.37d}$$

Ainsi, à partir de ces relations de commutation(3.35)-(3.37d), nous concluons que les opérateurs $Q_2^m (m = -2, -1, 0, 1, 2)$ sont les composantes d'un opérateur tensoriel irréductible d'ordre 2.

3.1.4 Théorème de Wigner-Eckart relatif aux moments multipolaires électriques

Dans un premier temps, nous considérons le cas d'une particule sans spin [4] . L'espace des états $\varepsilon_{\vec{r}}$ de la particule est rapporté à une base orthonormée $\{|\chi_{n,l,m}\rangle\}$ de vecteurs propres communs à L^2 et L_z respectivement, de valeurs propres $l(l+1)\hbar^2$ et $m\hbar$. Nous allons alors évaluer les éléments de matrice des opérateurs multipolaires électriques Q_l^m dans une telle base. Pour cela, nous savons que les fonctions d'onde associées aux états $|\chi_{n,l,m}\rangle$ sont nécessairement de la forme :

$$\chi_{n,l,m}(\vec{r}) = R_{n,l}(r) Y_l^m(\theta, \varphi). \tag{3.38}$$

L'élément de matrice entre deux états de cette base orthonormée pour ces opérateurs est donné par [4] :

$$\begin{aligned}\langle \chi_{n_1,l_1,m_1} | Q_l^m | \chi_{n_2,l_2,m_2} \rangle &= \iiint \chi^*_{n_1,l_1,m_1}(r,\theta,\varphi) Q_l^m \chi_{n_2,l_2,m_2}(r,\theta,\varphi) d\Omega \\ &= \iiint R^*_{n_1,l_1}(r) Y_{l_1}^{m_1 *}(\theta,\varphi) Q_l^m R_{n_2,l_2}(r) Y_{l_2}^{m_2}(\theta,\varphi) \\ &\quad r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi.\end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned}\langle \chi_{n_1,l_1,m_1} | Q_l^m | \chi_{n_2,l_2,m_2} \rangle &= q\sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \int_0^\infty r^2 dr R^*_{n_1,l_1}(r) r^l R_{n_2,l_2}(r) \int_0^\pi \sin\theta d\theta \\ &\quad \int_0^{2\pi} d\varphi (-1)^{m_1} Y_{l_1}^{-m_1}(\theta,\varphi) Y_l^m(\theta,\varphi) Y_{l_2}^{m_2}(\theta,\varphi),\end{aligned} \tag{3.39}$$

car la relation de conjugaison des harmoniques sphériques[4] s'écrit :

$$Y_l^{m*}(\theta,\varphi) = (-1)^m Y_l^{-m}(\theta,\varphi). \tag{3.40}$$

Pour calculer l'intégrale du second membre, nous avons besoin du théorème de Wigner-Eckart pour les harmoniques sphériques et de la relation de composition des harmoniques sphériques.

La relation de composition des harmoniques sphériques est donnée par [4] :

$$\begin{aligned} Y_{l_1}^{m_1}(\Omega)Y_{l_2}^{m_2}(\Omega) &= \sum_{l=|l_1-l_2|}^{l_1+l_2}\sum_{m=-l}^{l}\sqrt{\frac{(2l_1+1)(2l_2+1)}{4\pi(2l+1)}}\langle l_1,l_2;0,0|l,0\rangle \\ &\quad\times\langle l_1,l_2;m_1,m_2|l,m\rangle Y_l^m(\Omega); \end{aligned} \tag{3.41}$$

où Ω est l'ensemble d'angles polaires (θ,φ).
Ainsi, d'après la relation (3.41), nous formulons le théorème de Wigner-Eckart pour les harmoniques sphériques[4] :

$$\begin{aligned} \int Y_{l_1}^{m_1}(\Omega)Y_{l_2}^{m_2}(\Omega)Y_{l_3}^{m_3}(\Omega)d\Omega &= (-1)^{m_3}\sqrt{\frac{(2l_1+1)(2l_2+1)}{4\pi(2l_3+1)}}\langle l_1,l_2;0,0|l_3,0\rangle \\ &\quad\langle l_1,l_2;m_1,m_2|l_3,-m_3\rangle; \end{aligned} \tag{3.42}$$

où Ω est l'ensemble d'angles polaires (θ,φ). Ainsi, de (3.42), la relation (3.39) donne le théorème de Wigner-Eckart pour les opérateurs Moments multipolaires électriques, dans le cas d'une particule de charge q :

$$\begin{aligned} \langle\chi_{n_1,l_1,m_1}|Q_l^m|\chi_{n_2,l_2,m_2}\rangle &= q\sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}\int_0^\infty r^2dr R^*_{n_1,l_1}(r)r^lR_{n_2,l_2}(r)\int_0^\pi\sin\theta d\theta \\ &\quad\int_0^{2\pi}d\varphi(-1)^{m_1}Y_{l_1}^{-m_1}(\theta,\varphi)Y_l^m(\theta,\varphi)Y_{l_2}^{m_2}(\theta,\varphi) \\ &= \frac{q\sqrt{(2l_2+1)}\langle l_2,l;0,0|l_1,0\rangle\times\int_0^\infty dr R^*_{n_1,l_1}(r)r^{l+2}R_{n_2,l_2}(r)}{\sqrt{2l_1+1}} \\ &\quad\times\langle l_2,l;m_2,m|l_1,m_1\rangle \\ &= \frac{\langle\chi_{n_1,l_1}||Q_l||\chi_{n_2,l_2}\rangle}{\sqrt{2l_1+1}}\langle l_2,l;m_2,m|l_1,m_1\rangle. \end{aligned} \tag{3.43}$$

La quantité :

$$\langle\chi_{n_1,l_1}||Q_l||\chi_{n_2,l_2}\rangle = q\sqrt{(2l_2+1)}\langle l_2,l;0,0|l_1,0\rangle\times\int_0^\infty dr R^*_{n_1,l_1}(r)r^{l+2}R_{n_2,l_2}(r),$$

est appelée **élément de matrice réduit** et ne dépend pas de m.

Généralisons maintenant la relation (3.43) à un système de N particules.
Nous obtenons :

$$\begin{aligned} \langle\chi_{n_1,l_1,m_1}|Q_l^m|\chi_{n_2,l_2,m_2}\rangle &= \sum_{n=1}^N q_n\sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}\int_0^\infty {r_n}^2dr_nR^*_{n_1,l_1}(r_n)(r_n)^lR_{n_2,l_2}(r_n) \\ &\quad\int_0^\pi\sin\theta_nd\theta_n\int_0^{2\pi}d\varphi_n(-1)^{m_1}Y_{l_1}^{-m_1}(\theta_n,\varphi_n)Y_l^m(\theta_n,\varphi_n)Y_{l_2}^{m_2}(\theta_n,\varphi_n) \\ &= \frac{\langle\chi_{n_1,l_1}||Q_l||\chi_{n_2,l_2}\rangle}{\sqrt{2l_1+1}}\langle l_2,l;m_2,m|l_1,m_1\rangle; \end{aligned} \tag{3.44}$$

où :

$$\langle \chi_{n_1,l_1}||Q_l||\chi_{n_2,l_2}\rangle = \sqrt{2l_2+1}\sum_{n=1}^{N} q_n \langle l_2, l; 0, 0|l_1, 0\rangle \times \int_0^\infty dr_n R^*_{n_1,l_1}(r_n)(r_n)^{l+2} R_{n_2,l_2}(r_n),$$

est également appelé **élément de matrice réduit** de l'opérateur multipolaire d'ordre l et ne dépend pas de m.

Par la présence du coefficient de Clebsch-Gordan $\langle l_2, l; m_2, m|l_1, m_1\rangle$, nous constatons que l'élément de matrice (3.44), est non nul si :

$$m_1 - m_2 = m, \tag{3.45}$$

$$|l_1 - l_2| \leq l \leq l_1 + l_2. \tag{3.46}$$

Cette dernière inégalité appelée règle de sélection du triangle exprime que l'on peut former un triangle, avec trois segments de longueur l_1, l_2 et l qui sont des nombres y jouant un rôle symétrique.

Ainsi, le coefficient de Clebsch-Gordan ne peut être différent de zéro que s'il est possible de former un triangle avec trois segments de longueur l_1, l_2 et l.

En particulier, la relation (3.44), donne :

- pour $l = m = 0$:

$$\langle \chi_{n_1,l_1,m_1}|Q^0_0|\chi_{n_2,l_2,m_2}\rangle = \frac{\langle \chi_{n_1,l_1}||Q_0||\chi_{n_2,l_2}\rangle}{\sqrt{2l_1+1}} \langle l_2, 0; m_2, 0|l_1, m_1\rangle \tag{3.47}$$

  où :

$$\begin{aligned}\langle \chi_{n_1,l_1}||Q_0||\chi_{n_2,l_2}\rangle &= \sqrt{2l_2+1}\sum_{n=1}^{N} q_n \langle l_2, 0; 0, 0|l_1, 0\rangle \\ &\quad \times \int_0^\infty dr_n R^*_{n_1,l_1}(r_n)(r_n)^2 R_{n_2,l_2}(r_n)\end{aligned}$$

  est appelé **élément de matrice réduit** de l'opérateur multipolaire d'ordre 0 .

- pour $l = 1$ et $m = -1,\ 0,\ 1$:

$$\langle \chi_{n_1,l_1,m_1}|Q^m_1|\chi_{n_2,l_2,m_2}\rangle = \frac{\langle \chi_{n_1,l_1}||Q_1||\chi_{n_2,l_2}\rangle}{\sqrt{2l_1+1}} \langle l_2, 1; m_2, m|l_1, m_1\rangle \tag{3.48}$$

  où :

$$\begin{aligned}\langle \chi_{n_1,l_1}||Q_1||\chi_{n_2,l_2}\rangle &= \sqrt{2l_2+1}\sum_{n=1}^{N} q_n \langle l_2, 1; 0, 0|l_1, 0\rangle \\ &\quad \times \int_0^\infty dr_n R^*_{n_1,l_1}(r_n)(r_n)^3 R_{n_2,l_2}(r_n)\end{aligned}$$

est appelé **élément de matrice réduit** de l'opérateur multipolaire d'ordre 1 .

- pour $l = 2$ et $m = -2, -1, 0, 1, 2$:

$$\langle \chi_{n_1,l_1,m_1} | Q_2^m | \chi_{n_2,l_2,m_2} \rangle = \frac{\langle \chi_{n_1,l_1} || Q_2 || \chi_{n_2,l_2} \rangle}{\sqrt{2l_1+1}} \langle l_2, 2; m_2, m | l_1, m_1 \rangle \tag{3.49}$$

où :

$$\begin{aligned} \langle \chi_{n_1,l_1} || Q_2 || \chi_{n_2,l_2} \rangle &= \sqrt{2l_2+1} \sum_{n=1}^{N} q_n \langle l_2, 2; 0, 0 | l_1, 0 \rangle \\ &\quad \times \int_0^\infty dr_n R^*_{n_1,l_1}(r_n)(r_n)^4 R_{n_2,l_2}(r_n) \end{aligned}$$

est appelé **élément de matrice réduit** de l'opérateur multipolaire d'ordre 2 .

De ce qui précède, nous savons que, pour une particule sans spin, les opérateurs moments multipolaires électriques Q_l^m sont des opérateurs tensoriels irréductibles d'ordre l dans l'espace des états $\varepsilon_{\vec{r}}$ de cette particule.

De plus, lorsqu'on tient compte des degrés de liberté de spin, les opérateurs Q_l^m demeurent des opérateurs tensoriels irréductibles dans l'espace des états $\varepsilon_{\vec{r}} \otimes \varepsilon_{\vec{s}}$ où $\varepsilon_{\vec{s}}$ est l'espace des états de spin.
Le moment cinétique total s'écrit dans ce cas :

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}.$$

.
Donc :

$$J_z = L_z + S_z$$

et

$$J_\pm = L_\pm + S_\pm;$$

avec

$$\begin{aligned} j &\geq 0, \\ -j \leq m &\leq j. \end{aligned}$$

Nous savons que les opérateurs moments cinétique orbital $\vec{L}$ et le spin $\vec{S}$ agissent respectivement dans les espaces $\varepsilon_{\vec{r}}$ et $\varepsilon_{\vec{s}}$.
D'où :

$$\begin{aligned} \left[J_z, Q_l^m \right] &= \left[L_z, Q_l^m \right] + \left[S_z, Q_l^m \right] \\ &= \left[L_z, Q_l^m \right] \\ &= m\hbar Q_l^m, \end{aligned} \tag{3.50}$$

$$\begin{aligned}\left[J_+, Q_l^m\right] &= \left[L_+, Q_l^m\right] + \left[S_+, Q_l^m\right] \\ &= \hbar\sqrt{l(l+1) - m(m+1)}Q_l^{m+1} \end{aligned} \tag{3.51}$$

et

$$\begin{aligned}\left[J_-, Q_l^m\right] &= \left[L_-, Q_l^m\right] + \left[S_-, Q_l^m\right] \\ &= \hbar\sqrt{l(l+1) - m(m-1)}Q_l^{m-1}. \end{aligned} \tag{3.52}$$

Soit une base standard $\{|k, l, J, M_J\rangle\}$ obtenue en composant le moment cinétique orbital $\vec{L}$ et le spin $\vec{S}$ de la particule pour former le moment cinétique total : $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$.
Comme les opérateurs Q_l^m sont des opérateurs tensoriels irréductibles d'ordre l dans l'espace $\varepsilon_{\vec{r}} \otimes \varepsilon_{\vec{s}}$, ils vérifient la relation (3.44) dans la base $\{|k, l, J, M_J\rangle\}$.
Ainsi, nous écrivons :

$$\langle k, l, J, M_J|Q_l^m|k^{'}, l^{'}, J^{'}, M_J^{'}\rangle = \frac{\langle \chi_{n_1,l_1}||Q_l^m||\chi_{n_2,l_2}\rangle}{\sqrt{2l_1+1}}\langle J^{'}, l; M_J^{'}, m|J, M_J\rangle. \tag{3.53}$$

Nous en déduisons ainsi, les règles de sélection satisfaites par les opérateurs Q_l^m dans cette base standard $\{|k, l, J, M_J\rangle\}$ compte tenu de la présence du coefficient de Clebsch-Gordan $\langle J^{'}, l; M_J^{'}, m|J, M_J\rangle$. Donc, les éléments de matrice (3.53) sont différents de zéro si et seulement si les relations suivantes sont satisfaites simultanément :

$$M_J - M_J^{'} = m, \tag{3.54}$$

$$|J - J^{'}| \leq l \leq J^{'} + J. \tag{3.55}$$

Nous concluons ainsi que les moments multipolaires électriques des particules chargées (avec ou sans spin), sont des opérateurs tensoriels irréductibles.

Étudions maintenant les opérateurs moments multipolaires magnétiques en suivant les mêmes étapes que précédemment.

3.2 Moments multipolaires magnétiques

Nous cherchons à déterminer le champ magnétique créé par un système de N particules chargées de charges q_n, de vitesse $\vec{v}_n$ et d'angles polaires α_n en un point $\vec{R}(x, y, z)$ éloigné [2].

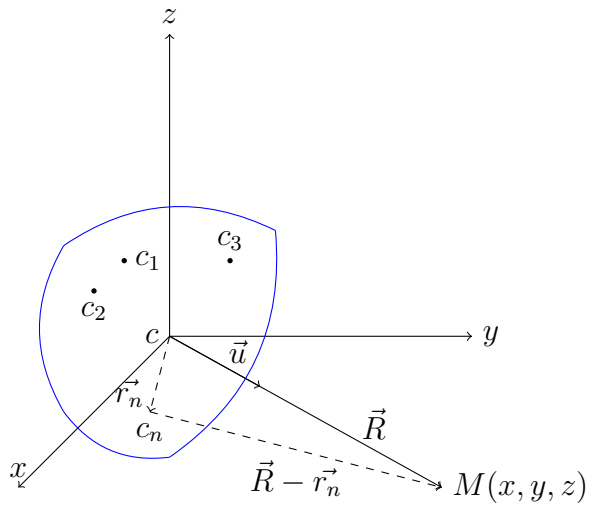


Figure 3.1 – Collection de charges en mouvement

Pour cela, nous déterminons le potentiel vecteur $\vec{A}(\vec{r})$ [2] :

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{n=1}^{N} \frac{q_n \vec{v}_n}{|\vec{R} - \vec{r}_n|}, \tag{3.56}$$

or, pour $|\vec{R}| >> |\vec{r}_n|$[4] :

$$\frac{1}{|\vec{R} - \vec{r}_n|} = \frac{1}{R} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r_n}{R}\right)^l P_l(\cos\alpha_n). \tag{3.57}$$

où α_n désigne l'angle polaire $(\vec{R}, \vec{r_n})$ et P_l est le polynôme de Legendre d'ordre l tel que :

$$P_l(\cos\alpha_n) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^{+l} (-1)^m Y_l^{-m}(\theta_n, \varphi_n) Y_l^m(\theta, \varphi), \tag{3.58}$$

θ et φ désignant les angles polaires de $\vec{R}$.

Ainsi, en nous limitant aux termes du développement $l = 1$, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\vec{A}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{n=1}^{N}\frac{q_n\vec{v}_n}{|\vec{R}-\vec{r}_n|} \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{+l}\sum_{n=1}^{N}(-1)^m\frac{4\pi}{2l+1}(r_n)^l Y_l^{-m}(\theta_n,\varphi_n)\frac{Y_l^m(\theta,\varphi)}{R^{l+1}}q_n\vec{v}_n \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{R}\sum_{n=1}^{N}q_n\vec{v}_n + \frac{1}{R^2}\sum_{n=1}^{N}q_n\vec{v}_n\cdot(\vec{r}_n\cdot\vec{u}) + ...\right]
\end{aligned} \tag{3.59}$$

avec $\vec{u} = \frac{\vec{R}}{R}$.

Or, en choisissant l'axe (ox) parallèle à $\vec{u}$ et en considérant que le moment quadripolaire électrique est constant au cours du temps, nous concluons [2] :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N}q_n\vec{v}_n\Big(\vec{r}_n\cdot\vec{u}\Big) + \sum_{n=1}^{N}q_n\vec{r}_n\Big(\vec{v}_n\cdot\vec{u}\Big) &= \sum_{n=1}^{N}q_n\frac{d\vec{r}_n}{dt}\Big(\vec{r}_n\cdot\vec{u}\Big) + \sum_{n=1}^{N}q_n\vec{r}_n\Big(\frac{d\vec{r}_n}{dt}\cdot\vec{u}\Big) \\
&= \sum_{n=1}^{N}q_n\frac{d}{dt}\Big[\vec{r}_n(\vec{r}_n\cdot\vec{u})\Big] \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{3.60}$$

Comme,

$$\sum_{n=1}^{N}q_n\Big[\vec{v}_n(\vec{r}_n\cdot\vec{u}) - \vec{r}_n(\vec{v}_n\cdot\vec{u})\Big] = \sum_{n=1}^{N}q_n(\vec{r}_n\times\vec{v}_n)\times\vec{u}, \tag{3.61}$$

alors, de ces deux relations (3.60) et (3.61), nous déduisons :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N}q_n\vec{v}_n(\vec{r}_n\cdot\vec{u}) &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}q_n(\vec{r}_n\times\vec{v}_n)\times\vec{u} \\
&= -\vec{u}\times\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}q_n(\vec{r}_n\times\vec{v}_n)
\end{aligned} \tag{3.62}$$

D'où,

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{R}\sum_{n=1}^{N}q_n\vec{v}_n - \frac{\vec{u}}{R^2}\times\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}q_n(\vec{r}_n\times\vec{v}_n) + ...\right] \tag{3.63}$$

En moyenne, $\sum_{n=1}^{N}q_n\vec{v}_n = \vec{0}$ car il n'y a pas de monopole magnétique.

Dans ce cas, le moment monopolaire ($l = 0$) magnétique s'annule.

Le moment dipolaire magnétique (pour $l = 1$) s'écrit :

$$\begin{aligned} \vec{\mu} &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} q_n(\vec{r}_n \times \vec{v}_n) \\ &= \sum_{n=1}^{N} \frac{q_n}{2m_n}\vec{L}_n \end{aligned} \tag{3.64}$$

où, m_n est la masse de la particule n de charge q_n et $\vec{L}_n$, son moment cinétique orbital.

Dans ce qui suit, nous formulons les opérateurs moments multipolaires magnétiques de façon similaire aux opérateurs moments multipolaires électriques [9].

Comme le monopole magnétique n'existe pas et que le moment quadripolaire magnétique n'est pas important dans la pratique [9, 4], intéressons-nous au moment dipolaire magnétique $M_{1,m}$, $m = -1,\ 0,\ 1$.

Ainsi,

$$\begin{aligned} M_{1,1} &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\mu_x + i\mu_y\Big) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=1}^{N}\frac{q_n}{2m_n}\Big(L_{nx} + iL_{ny}\Big) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=1}^{N}\frac{q_n}{2m_n}L_{n+}, \end{aligned} \tag{3.65}$$

$$\begin{aligned} M_{1,0} &= \mu_z \\ &= \sum_{n=1}^{N}\frac{q_n}{2m_n}L_{nz} \end{aligned} \tag{3.66}$$

et

$$\begin{aligned} M_{1,-1} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\mu_x - i\mu_y\Big) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=1}^{N}\frac{q_n}{2m_n}\Big(L_{nx} - iL_{ny}\Big) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=1}^{N}\frac{q_n}{2m_n}L_{n-}. \end{aligned} \tag{3.67}$$

Vérifions maintenant les relations de commutation avec le moment cinétique.

$$\begin{aligned}\left[J_z, M_{1,1}\right] &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=1}^{N}\frac{q_n}{2m_n}\Big\{[J_z, L_{nx}] + i[J_z, L_{ny}]\Big\} \\ &= \hbar M_{1,1}, \end{aligned} \tag{3.68}$$

$$\begin{aligned}\left[J_z, M_{1,-1}\right] &= \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=1}^{N}\frac{q_n}{2m_n}\Big\{[J_z, L_{nx}] - i[J_z, L_{ny}]\Big\} \\ &= -\hbar M_{1,-1}, \end{aligned} \tag{3.68a}$$

et

$$\left[J_z, M_{1,0}\right] = 0, \tag{3.68b}$$

$$\begin{aligned}\left[J_+, M_{1,1}\right] &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=1}^{N}\frac{q_n}{2m_n}\Big\{i[J_x, L_{ny}] + i[J_y, L_{nx}]\Big\} \\ &= 0, \end{aligned} \tag{3.69}$$

$$\begin{aligned}\left[J_+, M_{1,0}\right] &= \sum_{n=1}^{N}\frac{q_n}{2m_n}\Big\{[J_x, L_{nz}] + i[J_y, L_{nz}]\Big\} \\ &= \sqrt{2}\hbar M_{1,1} \end{aligned} \tag{3.69a}$$

et

$$\begin{aligned}\left[J_+, M_{1,-1}\right] &= \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=1}^{N}\frac{q_n}{2m_n}\Big\{ - i[J_x, L_{ny}] + i[J_y, L_{nx}]\Big\} \\ &= \sqrt{2}\hbar M_{1,0}. \end{aligned} \tag{3.69b}$$

Enfin,

$$\begin{aligned}\left[J_-, M_{1,1}\right] &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=1}^{N}\frac{q_n}{2m_n}\Big\{i[J_x, L_{ny}] - i[J_y, L_{nx}]\Big\} \\ &= \sqrt{2}\hbar M_{1,0}, \end{aligned} \tag{3.70}$$

$$\begin{aligned}\left[J_-, M_{1,0}\right] &= \sum_{n=1}^{N}\frac{q_n}{2m_n}\Big\{[J_x, L_{nz}] - i[J_y, L_{nz}]\Big\} \\ &= \sqrt{2}\hbar M_{1,-1} \end{aligned} \tag{3.70a}$$

et

$$\left[J_-, M_{1,-1}\right] = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=1}^{N} \frac{q_n}{2m_n} \Big\{ -i[J_x, L_{ny}] - i[J_y, L_{nx}] \Big\}$$
$$= 0. \tag{3.70b}$$

A partir des relations précédentes, nous concluons que l'opérateur moment dipolaire magnétique $M_{1,m}(m = -1, 0, 1)$ est un opérateur tensoriel irréductible d'ordre 1.
Donc,

$$\left[J_z, M_{1,m}\right] = m\hbar M_{1,m} \tag{3.71}$$

et

$$\left[J_\pm, M_{1,m}\right] = \hbar\sqrt{2 - m(m \pm 1)} M_{1,m\pm1}. \tag{3.72}$$

Ainsi, par analogie avec(3.44), cet opérateur vérifie le théorème de Wigner-Eckart :

$$\langle \chi_{n_1,l_1,m_1} | M_{1,m} | \chi_{n_2,l_2,m_2} \rangle = \frac{\langle \chi_{n_1,l_1} || M_1 || \chi_{n_2,l_2} \rangle}{\sqrt{2l_1 + 1}} \langle l_2, 1; m_2, m | l_1, m_1 \rangle. \tag{3.73}$$

En tenant compte des degrés de liberté de spin, le moment dipolaire magnétique s'écrit alors [1, 9] :

$$\vec{\mu} = \sum_{n=1}^{N} \frac{q_n}{2m_n} \vec{L}_n + \sum_{n=1}^{N} g_n \frac{q_n}{2m_n} \vec{S}_n \tag{3.74}$$

o$\vec{u}$ g_n est une constante et $\vec{S}_n$ le moment cinétique de spin de la particule n.

Les opérateurs moments dipolaires magnétiques sont définis alors par :

$$\begin{aligned}
M_{1,1} &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \Big(\mu_x + i\mu_y \Big) \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2}} \left[\sum_{n=1}^{N} \frac{q_n}{2m_n} (L_{nx} + iL_{ny}) + \sum_{n=1}^{N} g_n \frac{q_n}{2m_n} (S_{nx} + iS_{ny}) \right] \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2}} \left[\sum_{n=1}^{N} \frac{q_n}{2m_n} L_{n+} + \sum_{n=1}^{N} g_n \frac{q_n}{2m_n} S_{n+} \right], \qquad (3.75) \\
M_{1,0} &= \mu_z \\
&= \sum_{n=1}^{N} \frac{q_n}{2m_n} L_{nz} + \sum_{n=1}^{N} g_n \frac{q_n}{2m_n} S_{nz} \qquad (3.76)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} M_{1,-1} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\mu_x - i\mu_y\Big) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\sum_{n=1}^{N}\frac{q_n}{2m_n}(L_{nx} - iL_{ny}) + \sum_{n=1}^{N} g_n\frac{q_n}{2m_n}(S_{nx} - iS_{ny})\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\sum_{n=1}^{N}\frac{q_n}{2m_n}L_{n-} + \sum_{n=1}^{N} g_n\frac{q_n}{2m_n}S_{n-}\right]. \end{aligned} \tag{3.77}$$

Ces opérateurs demeurent ainsi des opérateurs tensoriels irréductibles car ils vérifient les relations de commutation (2.33)-(2.34) et le théorème de Wigner-Eckart (3.73).

Conclusion

Les n opérateurs qui se transforment linéairement par rotation les uns dans les autres suivant une même loi de transformation que n vecteurs linéairement indépendants d'un espace donné ε_n, sont les composantes d'un opérateur tensoriel à n dimensions. Si l'espace est irréductible (par rotation), l'opérateur tensoriel est irréductible. Ainsi, les opérateurs vectoriels constituent une classe particulière d'opérateurs tensoriels irréductibles.
Nous distinguons trois catégories d'opérateurs tensoriels irréductibles :

- Les opérateurs scalaires qui ne sont pas modifiés sous rotation, c'est-à-dire qui commutent avec le moment cinétique du système.
- Les opérateurs vectoriels qui se transforment sous rotation suivant la loi caractéristique des grandeurs vectorielles.
- Les opérateurs tensoriels qui sont des généralisations des opérateurs vectoriels.

Lorsqu'on étudie une grandeur physique déterminée d'un système isolé, la seule connaissance du comportement de l'observable associée lors d'une rotation, permet déjà d'établir certaines propriétés sans avoir à faire appel à sa forme précise : on peut prévoir que seuls certains de ses éléments de matrice dans une base standard seront différents de zéro, et donner une relation entre ceux-ci. Ainsi, une observable scalaire n'a d'éléments de matrice qu'entre deux vecteurs de base dont les valeurs de j sont égales, de même que les valeurs de m. Pour des observables vectorielles ou tensorielles, ces propriétés sont contenues dans le théorème de Wigner-Eckart qui est fréquemment utilisé en Physique Nucléaire : le développement du champ électromagnétique en fonction des harmoniques sphériques, par l'intermédiaire des potentiels scalaire et vecteur, mène à des interactions développables à l'aide d'opérateurs irréductibles : l'interaction monopolaire (scalaire) tensorielle d'ordre 0, l' interaction dipolaire (vectorielle) tensorielle d'ordre 1, l'interaction quadripolaire (tensorielle d'ordre 2).

Ainsi, l'objectif de notre travail, qui était de donner la théorie générale des opérateurs tensoriels irréductibles et d'en dégager quelques cas concrets surtout en Physique nucléaire, est atteint.

Perspectives

Malgré l'importance des résultats atteints dans ce mémoire, la soif de pousser encore loin dans ce domaine subsiste ; et ainsi, d'autres angles de recherche pourraient être envisagés :

1. Dans notre travail, nous avons étudié de façon générale les propriétés statiques uniquement des noyaux ; il ya moyen d'étudier aussi leurs propriétés dynamiques.

2. Il est possible aussi de prendre un noyau particulier et étudier de façon concrète ses propriétés statiques : moment quadripolaire électrique, moment dipolaire magnétique ; et ses propriétés dynamiques comme les moments multipolaires de transition et le calcul des temps de vie des niveaux instables.

3. Dans notre travail, nous avons travaillé avec le groupe de rotation ; on peut aussi envisager de travailler avec un autre groupe de symétrie (par exemple le groupe de translation) et dégager la forme des opérateurs tensoriels irréductibles, formuler pour leurs cas le théorème de Wigner-Eckart et voir s'il y aurait des cas concrets de ces opérateurs dans certains domaines scientifiques.

4. On peut aussi faire des simulations et étudier numériquement les opérateurs tensoriels et concrètement, les propriétés statiques et dynamiques des noyaux (radioactifs ou pas).

Bibliographie

[1] A. Messiah *Mécanique quantique*, Tome 2, Paris (1995), Dunod.

[2] B. Cagnac, J. -C. Pebay-Peyroula *Physique atomique*, Tome 2, Applications de la Mécanique quantique, $2^{ème}$ édition Paris (1982), Dunod.

[3] C.Cohen-Tannoudji, B. Diu, F. Laloe *Mécanique quantique*, Tome 1, Nouvelle édition revue, corrigée et augmentée, Paris (1973), Hermann.

[4] C.Cohen-Tannoudji, B. Diu, F. Laloe *Mécanique quantique*, Tome 2, Nouvelle édition revue, corrigée et augmentée, Paris (1973), Hermann.

[5] E. Butkov *Mathematical Physics,* $10^{ème}$ edition, Asia (2011), JohnWiley & Sons.

[6] E. Kreyszing *Advanced Engineering Mathematics,* $10^{ème}$ edition, Asia (2011), John-Wiley & Sons.

[7] Jean NDIMUBANDI *Théorie des groupes et de leurs représentations*, notes de cours, U.B, Mastère en mathématiques fondamentales et appliquées, 2018.

[8] Jos ODEURS *Mécanique quantique*, notes de cours, U.B, Mastère en mathématiques fondamentales et appliquées, 2018.

[9] L. Valentin *Physique Subatomique* Noyaux et particules , Paris (1975), Hermann.

[10] YVES TALPAERT *Mécanique Analytique*, Tome 2, Dynamique des systèmes matériels, Bruxelles (1982), J. DUCULOT.