UNIVERSITÉ DU BURUNDI
GRENIER DU SAVOIR DU BURUNDI
Dépôt institutionnel officiel
https://repository.ub.edu.bi

Systèmes dynamiques élémentaires associes a une classe de groupes de lie nilpotents

NIYIBIGIRA, Jean Bosco; Sous la direction de : Dr NGENDAKUMANA Ancille

2024-06
UB, ENS
https://repository.ub.edu.bi/handle/123456789/1042

Document téléchargé depuis le **Grenier du Savoir du Burundi** — https://repository.ub.edu.bi

UNIVERSITE DU BURUNDI ET ECOLE NORMALE SUPERIEURE

MASTER CONJOINT EN DIDACTIQUE DES SCIENCES

OPTION : MATHEMATIQUES

SYSTEMES DYNAMIQUES ELEMENTAIRES ASSOCIES A UNE CLASSE DE GROUPES DE LIE NILPOTENTS

Par :

NIYIBIGIRA Jean Bosco

Mémoire
présenté et défendu publiquement en vue de l'obtention du
Diplôme de Master en didactique des sciences mathématiques.

Sous la direction de :
Dr NGENDAKUMANA Ancille

Bujumbura, Juin 2024

Composition du Jury

Président du Jury	:	Pr NIBARUTA Gilbert
Secrétaire du Jury	:	Pr NDAYIRUKIYE Domitien
Membre du Jury	:	Pr NIBIRANTIZA Aboubacar
Directeur de Mémoire	:	Dr NGENDAKUMANA Ancille

Dédicace

A Dieu Tout Puissant ;
A toutes mes familles : restreinte et élargie ;
A toutes mes connaissances ;
Je dédie ce mémoire.

Remerciements

Je tiens à exprimer toute ma gratitude :

A Dieu Tout Puissant qui m'a gardé dès les prémiers jours de ma vie à nos jours ;

A Madame Dr NGENDAKUMANA Ancille qui m'a dirigé dans mes recherches pour rédiger ce mémoire avec beaucoup d'enthousiasme, de compétences, et de disponibilité ;

Au président du jury d'avoir accepté de présider et de bien vouloir porter intérêt à ce travail de mémoire ;

Au secrétaire du jury qui a spontanément accepté de mettre sa compétence au service du jury et d'être rapporteur de mon travail de recherche. Son accord m'honore et je l'en remercie ;

Au membre du jury, pour l'intérêt qu'il a montré pour mon travail de mémoire ;

A mon épouse NIYIBIZI Donavine pour son soutien constant et précieux ;

A mes enfants INEZA Joy Danie Roberta, NINZIZA Jean Dany Robert et MUGISHA Alain Aimé Gustave pour leur soutien morale ;

A toute personne, qui de près ou de loin, a contribué à la réalisation du présent travail, qu'il trouve ici l'expression de mes sincères remerciements.

Résumé

Le présent travail détermine les systèmes dynamiques élementaires associés à une classe de groupes de Lie nilpotents. La méthode des orbites coadjointes utilisée pour obtenir ces structures symplectiques permet en outre de déterminer les réalisations symplectiques de cette classe de groupes de Lie.

Les systèmes dynamiques élémentaires ainsi construits sont interprétés physiquement et les solutions des équations de mouvement correspondantes sont déterminées. Les dimensions physiques des nouveaux paramètres d'extension sont déterminées.

Les constructions faites dans ce travail ont permis d'obtenir les principaux résultats suivants :

- L'extension centrale de l'algèbre de Lie associée à la classe de groupes de Lie considéré est déterminée et le paramètre d'extension a pour dimension physique le quantum de Planck [1].
- Les réalisations symplectiques de la classe de groupes de Lie considérée sont déterminées et les structures symplectiques (orbites coadjointes) correspondantes sont élucidées.
- Les équations du mouvement correspondant sont déduites de ces réalisations symplectiques et leurs intégrales premières (solutions) déterminées.

1. Max Planck (1858-1947) est un physicien allemand, l'un des fondateur de la mécanique quantique.

Mots-clés : réalisation symplectique, structures symplectiques, systèmes dynamiques.

Key-words : symplectic realization, symplectic structures, systems dynamic.

Abstract

The present work determines the dynamic systems associated with a class of nilpotent Lie groups. The coadjoint orbit method used for to obtain these symplectic structures also makes it possible to determine the symplec realizations of this class of Lie groups.

The elementary dynamic systems thus constructed are interpreted physically and the solutions of the equations obtained from the corresponding movements.The physical dimensions of the new extension parameters are determined.

The constructions made in this work made it possible to obtain the main following resultats :

- The central extension of the Lie algebra associated with the class of Lie groups considered is determined and the extension parameter has for physical dimension the Planck quantum.
- The symplectic realizations of the class of Lie groups considered are determined and symplectic structures (coadjoint orbits) corresponding are elucidated.
- The corresponding equations of movement are deduced from the symplectic realizations and their first integrals (solutions) determined.

Table des matières

Composition du Jury i

Dédicace ii

Remerciements iii

Résumé iv

Abstract vi

Table des matières viii

Symbole et signification ix

Avant propos x

Introduction 1

1 Généralités sur les groupes et algèbres de Lie 4
- 1.1 Groupes de Lie . . . 4
- 1.2 Exemples de groupes de Lie . . . 4
  - 1.2.1 Groupes de Lie classiques . . . 4
  - 1.2.2 Groupes de Lie complexes . . . 5
  - 1.2.3 Groupes de Lie nilpotents . . . 5
- 1.3 Algèbres de Lie d'un groupe de Lie . . . 7
  - 1.3.1 Classification des algèbres de Lie nilpotentes . . . 9
- 1.4 Passage de l'algèbre de Lie au groupe de Lie . . . 10
- 1.5 Formule de Baker-Campbell-Hausdorff . . . 10
- 1.6 Représentation d'un groupe sur lui-même . . . 11
  - 1.6.1 Représentation adjointe . . . 11
  - 1.6.2 Représentation coadjointe . . . 15
  - 1.6.3 Application dans le cas du groupe $SO(n)$ . . . 17

2 Construction des structures symplectiques par la méthode des orbites coadjointes 21
2.1 Variétés de Poisson 21
2.2 Structure de Poisson 22
2.3 Variété symplectique 23
2.3.1 Exemples de structures symplectiques 24
2.3.2 Propriétés 25
2.4 Méthode des orbites coadjointes 27

3 Systèmes dynamiques élémentaires associés à une classe de groupes de Lie nilpotents 28
3.1 Présentation de la classe de groupes de Lie nilpotents 28
3.2 Structures symplectiques sur les orbites et applications 29
3.3 Extension centrale 32
3.4 Analyse dimensionnelle 33
3.5 Exemple de construction 34
3.6 Réalisation symplectique 47

Conclusion 49

Bibliographie 50

Symbole et signification

$\mathcal{G}$	: algèbre de Lie
$\mathcal{G}^*$	: algèbre dme Lie duale
G	: groupe de Lie
$\mathbb{K}$	: un corps commutatif rée ou complexe
$\mathbb{R}^n$	: espace vectoriel sur les réels de dimension n
C^∞	: classe de variétés différentielles lisses
e	: élément neutre
T_eG	: espace tangent à G en l'élément neutre
$M_n(\mathbb{K})$	: espace vectoriel des matrices d'ordre n sur $\mathbb{K}$
B-C-H	: Backer-Campbell-Hausdorff
End	: endomorphisme
$\mathcal{C}^\infty$	: Une structure de variété lisse
$[\cdot,\cdot]$	: crochet de Lie
$\{\cdot,\cdot\}$	: crochet de Poisson
X, Y, Z	: les champs de vecteurs
η	: élément de G
ξ	: élément de G
Der	: dérivation extérieure
$\mathcal{Z}(\mathcal{G})$	: noyau d'une représentation adjointe
ad	: dérivaion d'une algèbre de Lie
Ad	: représentation adjointe
Ad^*	: représentation coadjointe
R_g	: translation à droite g
L_g	: translation à gauche
I_n	: la matrice identité d'ordre n
exp	: application exponentielle
$\mathcal{O}$	: orbite
$SU(n)$	: groupe spécial unitaire

Avant propos

Le travail de ce mémoire :" Systèmes dynamiques élémentaires associés à une classe de groupes de Lie nilpotents " a été réalisé dans le but d'obtenir le Diplôme de Master en didactique des sciences mathématiques à l'Université du Burundi conjointement à l'Ecole Normale Supérieure spécialement à l'Institut de Pédagogie Appliquée. Par la méthode des orbites coadjointes, nous avons abouti aux réalisations symplectiques et aux constructions des systèmes dynamiques élémentaires ainsi que leurs équations de mouvement correspondantes.

Le sujet était complexe à exploiter. Nous avons traité le cas particulier de la cinquième classe de groupes de Lie dans la classification des algèbres de Lie de Gambouri.

Nous espérons que ce travail rendra de services aux chercheurs ; nous accueillons avec reconnaissances et attention les remarques ; les critiques et les suggestions que les lecteurs voudront bien nous présenter et, par avance nous les en remercions.

Introduction

Le présent travail s'inscrit dans le cadre de la géométrie symplectique. La géométrie symplectique est le cadre géométrique à cheval entre des domaines variés tels que la mécanique, le calcul des variations, l'optique, la thermodynamique, l'analyse microlocale des équations aux dérivées partielles et la quantification géométrique. Elle est un outil de choix en particulier pour étudier le comportement de la dynamique d'un système mécanique avec des applications en géométrie algébrique, en géométrie riemannienne et en géométrie de contact. Formellement, elle consiste en l'étude des variétés munies des 2-formes différentielles fermées non dégénérées - appelées formes symplectiques [1] .

Un groupe de Lie étant une variété différentielle où la multiplication et le passage à l'inverse sont des difféomorphismes de classe C^∞, le problème d'associer à un groupe de Lie une variété symplectique a été résolu complètement par Jean Marie Sauriau [2] ([2],[3]). Son approche a permis de donner un sens à la méthode des orbites coadjointes proposée pour la première fois par A. A. Kirillov [3] [4] dans la description d'une classe d'équivalence des représentations unitaires irréductibles des groupes de Lie nilpotents.

La méthode des orbites coadjointes permet de construire à partir d'un groupe de Lie, des structures symplectiques (espaces de phase) et d'associer une représentation unitaire d'un groupe de Lie G à chacune de ses orbites coadjointes. Dans le cas des groupes nilpotents, Kirillov a montré que cette technique construit des représentations irréductibles, et que toutes les représentations irréductibles d'un groupe s'obtiennent de cette manière [5]. Par la suite, la méthode a été étendue à des groupes de Lie plus généraux.

2. Mathématicien français, principalement connu pour ses travaux sur la géométrie symplectique

3. Mathématicien soviétique et russe, professeur émérite à l'université de Pennsylvanie connu pour ses travaux dans les domaines de théorie des représentations (où il a introduit la méthode des orbites) groupes topologique et groupe de Lie.

Le but de notre travail de mémoire est d'étendre certaines classes de groupes de Lie nilpotents qui joue un rôle important dans la quantification géométrique d'un système mécanique classique. Par ailleurs, la méthode des orbites coadjointes a été très utile dans la quantification géométrique qui permet une observation classique de la mécanique classique un système équivalent en mécanique quantique. Nous interprétons les équations dans le contexte de la mécanique classique, et montrons comment la correspondance de Kirillov-Kostant-Souriau permet d'en produire des solutions.

Notre travail s'intéresse à la construction des systèmes dynamiques associés à une classe de groupes de Lie nilpotents. En partant de cette classe de groupes de Lie, le problème consiste à construire des structures symplectiques correspondant à cette classe de groupes de Lie par la méthode des orbites coadjointes. L'étude à été motivée par le fait que les réalisations symplectiques associées à cette classe de groupes de Lie n'avaient pas été déterminées. Pour aboutir à ces réalisations symplectiques, nous ferons recours à la méthode des orbites coadjointes comme déjà dit précédemment.

Dans notre travail, nous avons considéré la cinquième classe de groupe de Lie dans la classification des algèbres de Lie faite par Ganbouri [6]. Nous avons considéré le cas particulier où $\theta = \frac{\pi}{2}$. Les constructions faites ont abouti à des résultats dont les principaux sont les suivants :

- l'extension de L'algèbre de Lie associée à la classe de groupes de Lie considérée a été déterminée,
- la loi du groupe étendue déterminée a permis de construire l'orbite de la représentation coadjointe du groupe étendu sur le dual de son algèbre de Lie,
- les systèmes dynamiques associés à l'extension de classe de groupe de Lie sont obtenus et la dimension physique du nouveau paramètre d'extension précisée dans le travail.

En fin, les solutions des équations de mouvement de ce système dynamique ont été déterminées.

Notre travail s'articule sur trois chapitres.

Le premier chapitre expose les notions préliminaires utiles pour la compréhension du reste du texte. Certaines notions telles que les notions de groupes de Lie, d'algèbres de Lie, de représentations adjointe et coadjointe, ainsi que les formules de B-C-H utilisées dans la détermination de la loi de l'extension du groupe à partir de la structure de l'algèbre de Lie associée, ont été intégrées dans ce chapitre.

Le deuxième chapitre développe de façon détaillée les structures symplectiques et introduit la méthode des orbites coadjointes dans la détermination de ces structures.

Le troisième chapitre, et dernier, est consacré à la méthode des orbites coadjointes et son application à la construction des espaces de phase, l'extension centrale, l'analyse dimensionnelle des paramètres associés aux champs de vecteurs, les réalisations et les structures symplectiques en s'appuyant sur l'exemple de construction de notre travail de mémoire, nous avons fait des interprétations physiques et tiré des conclusions.

Chapitre 1

Généralités sur les groupes et algèbres de Lie

Le présent chapitre décrit les concepts clés de l'algèbre des groupes de Lie utiles pour la compréhension du reste de ce travail de mémoire.

1.1 Groupes de Lie

Définition 1.1.

Un groupe de Lie est un ensemble G muni de deux structures compatibles :

i) Une structure de groupe donnée par une loi de composition $m : G \times G \to G : (x, y) \mapsto m(x, y) = xy$, et dont on note $i : G \to G : x \mapsto x^{-1}$ l'application « passage à l'inverse »,

ii) Une structure de variété de classe C^∞.

iii) Compatibilité : les applications m et i sont de classe C^∞.

1.2 Exemples de groupes de Lie

La classification suivante des groupes de Lie classiques et complexes se trouve dans ([2],[6],[?]).

1.2.1 Groupes de Lie classiques

— $\mathbb{R}^n$: Espace euclidien de dimension n muni de l'addition.

— $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$: Nombres complexes de module 1 muni de la multiplication de dimension 1.

— $GL_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : dét A \neq 0\}$: Groupe général linéaire.

— $\mathcal{S}L_n(\mathbb{R}) = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) : dét A = 1\}$: Groupe spécial linéaire.

— $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) : A^t A = I_n\}$: Groupe orthogonal (groupe des bijections linéaires qui préservent le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$).

— $\mathcal{S}\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{O}_n \cap \mathcal{S}L_n(\mathbb{R}) = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) : A^t A = I_n \quad et \quad dét A = 1\}$.

— $\mathcal{O}_{(p,q)} = \{A \in GL_{p+q}(\mathbb{R}) : A^t I_{pq} A = I_{pq}\}$ où $I_{pq} = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & I_q \end{pmatrix}$.
— $SU(n)$: Groupe spécial des matrices unitaires complexes $n \times n$ de déterminant 1.
— $Sp(2n, \mathbb{R})$: Groupes des matrices symplectiques réelles de dimension $n(2n+1)$.
— $Spin(n)$: Groupe spin.
— $Sp(n)$: Groupes compactes symplectiques : matrices unitaires $n \times n$ quaternionique de dimension $n(2n+1)$.
— S^3 : Quaternions de module 1 muni de la multiplication, de dimension 3 ; également noté $Sp(1)$.

1.2.2 Groupes de Lie complexes

— $\mathbb{C}^n$: Espace euclidien de dimension $2n$ muni de l'addition.
— $GL(n, \mathbb{C})$: Groupe général linéaire à éléments matriciels complexes $n \times n$ inversibles de dimension n
— $\mathcal{S}L(n, \mathbb{C}) = \{A \in SL(n, \mathbb{C}) : dét A = 1\}$ et de dimension $n^2 - 1$: Groupe spécial linéaire.
— $\mathcal{O}(n, \mathbb{C}) = \{A \in GL(n, \mathbb{C}) : A^t A = I_n\}$: Groupe orthogonal dont les matrices orthogonales sont à éléments complexes.
— $\mathcal{SO}(n, \mathbb{C}) = \{A \in GL(\mathbb{C}) : A^t A = I_n \quad et \quad dét A = 1\}$ de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$.
— $Sp(2n, \mathbb{C})$: Groupes des matrices symplectiques complexes de dimension $n(2n+1)$.

1.2.3 Groupes de Lie nilpotents

Soient G un groupe de Lie et G^* son dual unitaire. Le problème de trouver une paramétrisation satisfaisante de G^* a été résolu par A.A Kirillov avec sa célèbre « méthode des orbites », qui établit une bijection canonique entre G^* et l'espace des G-orbites dans $\mathcal{G}^*$ où $\mathcal{G}^*$ est le dual de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ de G. Les groupes nilpotents forment une certaine classe de groupes contenue dans celle des groupes résolubles et contenant celle des groupes abéliens. Les groupes nilpotents apparaissent dans la théorie de Galois [1] et dans la classification des groupes de Lie ou des groupes algébriques linéaires. Le but de cette section est de développer certaines classes de groupes de Lie nilpotents qui joue un rôle important dans la quantification géométrique d'un système dynamique de la mécanique classique ([2],[7],[8]) .

1. Etudes des extensions des corps commutatifs, par le biais d'une correspondance avec des groupes de transformations, les groupes de Galois.

Définition 1.2.

Soit G un groupe. Nous définissons par récurrence les sous-groupes $\mathcal{C}^n(G)$:
i) $\mathcal{C}^1(G) = G$
ii) $\forall n \geq 1, \mathcal{C}^{n+1}(G) = [G, \mathcal{C}^n(G)]$

La suite centrale descendante est la suite des sous-groupes $\mathcal{C}^n(G)$: ainsi définie.
Nous définissons également par récurrence les sous-groupes $\mathcal{D}^n(G)$ tels que :
i) $\mathcal{D}^1(G) = G$
ii) $\forall n \geq 1, \mathcal{D}^{n+1}(G) = [\mathcal{D}^n(G), \mathcal{D}^n(G)]$

La suite dérivée est la suite des sous-groupes $\mathcal{D}^n(G)$ ainsi définie.

Proposition 1.1.

Soit G un groupe, alors pour tout entier n plus grand que 1, $\mathcal{D}^n(G)$ est un sous-groupe de $\mathcal{C}^n(G)$. Nous définissons à présent ce que sont les groupes nilpotents et les groupes résolubles.

1) On dit que G est nilpotent s'il existe n tel que $\mathcal{C}^n(G)$ soit trivial.
2) On dit que G est résoluble s'il existe n tel que $\mathcal{D}^n(G)$ soit trivial. Si G est nilpotent, son degré de nilpotence est le plus petit entier n tel que $\mathcal{C}^{n+1}(G)$ soit trivial. Si G est résoluble, son degré de résolubilité est le plus petit entier n tel que $\mathcal{D}^{n+1}(G)$ soit trivial.

Exemples 1.1.

1. Une algèbre de Lie abélienne est résoluble. L'algèbre des matrices triangulaires supérieures est résoluble.
2. L'idéal $[\mathcal{G}, \mathcal{G}]$ est appelé idéal dérivé de $\mathcal{G}$. Il est nul si et seulement si $\mathcal{G}$ est abélienne. En général, il est contenu dans tout morphisme de $\mathcal{G}$ vers une algèbre de Lie abélienne, si bien que $\mathcal{G}_{ab} := G/[\mathcal{G}, \mathcal{G}]$ est le plus grand quotient abélien de $\mathcal{G}$.
   Plus généralement, nous définissions deux suites croissantes (pour l'inclusion) d'idéaux :
   i. la suite centrale définie par : $\mathcal{C}^0(G) := \mathcal{G}$ et $\mathcal{C}^{n+1}(G) := [\mathcal{G}, \mathcal{C}^n\mathcal{G}]$, pour $n \geq 0$.
   ii. la suite dérivée définie par : $\mathcal{D}^0(G) := \mathcal{G}$ et $\mathcal{D}^{n+1}(G) := [\mathcal{D}^n(\mathcal{G}), \mathcal{D}^n(\mathcal{G})]$, pour $n \geq 0$.
   Nous avons : $\mathcal{C}^1(\mathcal{G}) = \mathcal{D}^1(\mathcal{G}) = [\mathcal{G}, \mathcal{G}]$ et pour $n \geq 1$ nous avons : $\mathcal{C}^n(\mathcal{G}) \supset \mathcal{D}^n(\mathcal{G})$.

Définition 1.3.

Nous disons que $\mathcal{G}$ est :
- nilpotente s'il existe $n \in \mathbb{N}$ telque $\mathcal{C}^n(\mathcal{G}) = 0$
- résoluble s'il existe $n \in \mathbb{N}$ telque $\mathcal{D}^n(\mathcal{G}) = 0$.

Nous avons donc "abélienne" $\Longrightarrow$ "nilpotente" $\Longrightarrow$ "résoluble" [5].

Remarque 1.1.

1. Un groupe nilpotent est en particulier résoluble.
2. Les groupes nilpotents de degré 1 sont les groupes abéliens.
3. Un groupe est nilpotent de classe 0 si et seulement si il est trivial.
4. Le groupe de Heinsenberg sur $\mathbb{R}$ est nilpotent de classe 2 (groupe général linéaire $GL_n(\mathbb{R})$ formé des matrices triangulaires supérieures).

1.3 Algèbres de Lie d'un groupe de Lie

Soient G un groupe de Lie et T_eG l'espace tangent à G en son élément neutre e.
Notons que $Ad : G \to GL(T_eG)$ l'application :
$g \mapsto Ad(g) = T_eI_G : T_eG \mapsto T_eG$ qui à $g \in G$ associe l'application en son élément e la conjugaison : $\xi \mapsto g\xi g^{-1}$. C'est une représentation adjointe de G.
Notons également que $ad = T_eAd : T_eG \to End(T_eG)$ l'application tangente en e de Ad. Pour tous les X et Y dans T_eG posons $[X, Y] = ad_X(Y)$, le crochet de Lie dans T_eG. Les propriétés de ce crochet confèrent à T_eG une structure d'algèbre de Lie appelée algèbre de Lie du groupe de Lie G.

Exemples 1.2.

1 Si G est abélien, alors I_G vaut l'identité de G pour tout g dans G donc : $Ad_gT_eG \to T_eG$ vaut l'identité de T_eG pour tout g dans G, et $ad = T_eAd : T_eG \to End(T_eG)$ est une application nulle.
Le groupe de Lie G opère dans lui-même par une translation à gauche :

$$L_g : G \to G, k \mapsto gk.$$

et une translation à droite :

$$R_g : G \to G, k \mapsto kg.$$

Par l'association de la loi du groupe, nous avons :

i. $$\begin{aligned} L_gL_h : G \to G, k \mapsto L_g[L_h(k)] &= L_g(hk) \\ &= g(hk) \\ &= (gh)(k) \\ &= L_{gh}(k) \end{aligned}$$
D'où : $L_gL_h = L_{gh}$

ii. $$\begin{aligned} R_gL_h : G \to G, k \mapsto R_g[L_h(k)] &= R_g(hk) \\ &= (hk)(g) \overset{\text{associativité}}{=} h(kg) \\ &= R_{hg}(k) \end{aligned}$$
D'où : $R_gL_h = R_{gh}$

iii. $$\begin{aligned} R_hR_g : G \to G, k \mapsto R_h[R_g(k)] &= R_h(kg) \\ &= k(gh) \overset{\text{associativité}}{=} k(gh) \\ &= L_{gh} \end{aligned}$$
D'où : $R_gR_h = L_{gh}$

2. G opère sur lui-même par conjugaison ou automorphisme intérieur : $Int(g) = gkg^{-1}$. On note, $Int(G) = \{Int(g), g \in G\}$
où $Int(g) : k \mapsto gkg^{-1}$. On remarque que G est un automorphisme de groupes $\varphi : G \to \sigma(G)$ en posant que $\varphi(g)(\xi) = g.\xi$ et agit sur un sous-groupe distingué X de G ce qui montre que $\sigma(G)$ opère naturellement sur G : $\sigma.\xi = \sigma(\xi)$.

$$L_g^{-1} : G \to G, k \mapsto g^{-1}k.$$

$$R_g^{-1} : G \to G, k \mapsto kg^{-1}.$$

Par l'association de la loi du groupe, nous avons :

i. $$\begin{aligned} L_gL_g^{-1} : G \to G, k \mapsto L_g[L_g^{-1}(k)] &= L_g(g^{-1}k) \\ &= g(g^{-1}k) \\ &= (gg^{-1})(k) \\ &= k \\ &= Id_G \end{aligned}$$
D'où : $L_gL_g^{-1} = Id_G \Leftrightarrow L_g^{-1} = (Lg)^{-1}$

$$\begin{aligned} \text{ii.} \qquad R_g R_g^{-1} : G \to G, k \mapsto R_g[R_g^{-1}(k)] &= R_g(kg^{-1}) \\ &= (kg^{-1})(g) \\ &= k(gg^{-1}) \\ &= k \\ &= Id_G \quad \square \end{aligned}$$

D'où : $R_g R_g^{-1} = Id_G \Leftrightarrow R_g^{-1} = (Rg)^{-1}$

1.3.1 Classification des algèbres de Lie nilpotentes

1. En dimension 1 et 2, toute algèbre de Lie nilpotente est abélienne.
2. En dimension 3, toute algèbre de Lie nilpotente non abélienne est isomorphe à l'algèbre de Heisenberg $\mathcal{H}_3$. Le produit est défini par : $\mu(X_1, X_2) = [X_1, X_2] = X_3$ où $\{X_1, X_2, X_3\}$ est la base.
3. En dimension 4, l'algèbre de Lie est soit abélienne, soit isomorphe à une somme directe externe d'une algèbre de Lie abélienne de dimension 1 avec l'algèbre de Heisenberg de dimension 3, soit est filiforme et donnée par le produit :

$$\begin{cases} \mu(X_1, X_2) = [X_1, X_2] = X_3 \\ \mu(X_1, X_3) = [X_1, X_3] = X_4 \end{cases} \quad \text{dans la base } \{X_1, X_2, X_3, X_4\}$$

4. En dimensions 5 et 6, il n'existe toujours qu'un nombre fini de classes d'isomorphie d'algèbres de Lie nilpotentes.
5. En dimension 7, (et au-delà), il existe une infinité de classes d'isomorphie d'algèbres de Lie nilpotentes. En dimension 7, nous avons 6 familles à un paramètre d'algèbres non isomorphes ainsi qu'une grande famille discrète [2].
6. Pour les dimensions supérieures ou égales à 8, seules des classifications partielles sont connues. Par exemple les algèbres filiformes sont classées jusqu'en dimension 11. Une algèbre filiforme est dite graduée si elle est munie d'une dérivation diagonalisable. La graduation dans ce cas est donné par les espaces raciniens. Ces algèbres filiformes graduées sont classées (ou plutôt décrites) en toute dimension. Pour approcher une classification générale, nous pouvons utiliser l'invariant appelée suite caractéristique (ou parfois invariant de Goze [2]) [2].

2. Etude des extentions des corps commutatifs, par le biais d'une correspondance avec des groupes de transformations, les groupes de Galois.

1.4 Passage de l'algèbre de Lie au groupe de Lie

Il s'agit d'étudier les propriétés du foncteur $G \to \mathcal{G}$ de la catégorie des groupes de Lie vers celle des algèbres de Lie. L'idée que nous voulons exprimer ici est que le groupe des difféomorphismes d'une variété de classe C^∞ se comporte comme un groupe de Lie dont l'algèbre de Lie serait l'algèbre des champs de vecteurs C^∞ , munie du crochet issu des dérivations. Une action de classe C^∞ d'un groupe de Lie G peut alors dériver en une action de G sur les fonctions sur C^∞ , que l'on peut aussi exprimer comme un morphisme d'algèbres de Lie.

Exemples 1.3.

Soit $G = \{\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}; a, b \in \mathbb{R}, a > 0\}$

L'application $\varphi : G \to U\{(a, b) \in \mathbb{R}^2, a > 0\} : \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} \mapsto (a, b)$ est bijective. Puisque U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, c'est une variété différentielle C^∞ de dimension 2, ainsi il existe une unique structure différentielle sur G telle que dans $GL(2, \mathbb{R})$ et φ est un difféomorphisme.

G est le groupe avec le produit des matrices $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} a' & 0 \\ b' & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow AB = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & 0 \\ b' & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' & 0 \\ ba' + b' & 1 \end{pmatrix} \in G$ et le passage à l'inverse de A, i.e $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ \frac{-b}{a} & 1 \end{pmatrix} \in G$. Par conséquent, G est un sous-groupe de $GL(2, \mathbb{R})$.

1.5 Formule de Baker-Campbell-Hausdorff

Soient G un groupe de Lie et $\mathcal{G} = T_eG$ son algèbre de Lie, vue comme l'espace tangent à G en l'élément neutre e. Alors il existe un voisinage V de 0 dans G et un voisinage U de e dans G tels que la restriction de l'application exponentielle $exp : V \to U$ est un difféomorphisme. Son inverse $U \to V$ s'appelle le logarithme. Si deux éléments X et Y de $\mathcal{G}$ sont suffisamment proches de l'origine, alors les formules de Baker-Campbell-Hausdorff donne l'expression de $log(expXexpY)$ en tant que série entière dans l'algèbre de Lie engendrée par X et Y ([9],[10]) :

$$expXexpY = exp(X + Y + \frac{1}{2}[X, Y] + \frac{1}{12}([X, [X, Y]] + [Y, [Y, X]] + \cdots) \quad (1.1)$$

et

$$exp(-X)expYexpX = exp(Y + [-X, Y] + \frac{1}{2!}[-X, [-X, Y]] + \frac{1}{3!}\cdots) \quad (1.2)$$

1.6 Représentation d'un groupe sur lui-même

Définition 1.4.

On dit que G opère à gauche sur G si on a une application de L_g : $G \times G \to G : L_g(\xi) \mapsto g.\xi$ telle que pour tous $g, h \in G$, pour tout $\xi \in G$, $g.(h.\xi) = (g.h)\xi$ (on parle de la représentation à droite) et $1.\xi = \xi$.

1.6.1 Représentation adjointe

De façon particulière G agit sur son algèbre de Lie de la manière suivante : considérons les translations à droite et à gauche R_g et L_g de G dans lui-même. Nous en déduisons :

$$R_g^{-1}L_g : G \to G, h \mapsto ghg^{-1}$$

est l' automorphisme intérieur du groupe G (ou conjugaison).

Soit G un groupe opérant sur $\mathcal{G}$.

Proposition 1.2.

i) L'élément neutre e du groupe G reste fixe.
En effet : $R_g^{-1}L_g(e) = R_g^{-1}g(e) = g(e)g^{-1} = gg^{-1} = e$. Nous disons que la représentation est fidèle. Nous définissons la dérivée de $R_g^{-1}L_g$ en e, i.e. l'application induite des espaces tangents comme :

$$Ad_g : \mathcal{G} \to \mathcal{G}, \xi \mapsto \frac{d}{dt}R_g^{-1}L_g(e^{t\xi})|_{t=0}. \quad (1.3)$$

L'application (1.3) s'appelle représentation adjointe du groupe G sur l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$.

Pour tout élément $\xi \in \mathcal{G}$, nous avons : $Ad_g(\xi) = g\xi g^{-1}, g \in G$.

Preuve :
Nous avons :

$$\begin{aligned}
Ad_g(\xi) &= \frac{d}{dt} R_g^{-1} L_g(e^{t\xi})|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}(ge^{t\xi}g^{-1})|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt} g(\sum_{(n\in\mathbb{N})} \frac{1}{n!}(t\xi)^n)g^{-1}|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}(\sum_{(n\in\mathbb{N})} \frac{1}{n!}t^n)g\xi^n g^{-1}|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}(\sum_{(n\in\mathbb{N})} \frac{1}{n!}t^n)g\xi g^{-1}g\xi g^{-1}g\xi g^{-1}\cdots g\xi g^{-1}|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}(\sum_{(n\in\mathbb{N})} \frac{1}{n!}t^n)(g\xi g^{-1})^n|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt} e^{t(g\xi g^{-1})}|_{t=0} \\
&= g\xi g^{-1} e^{t(g\xi g^{-1})}|_{t=0} \\
&= g\xi g^{-1}. \quad \square
\end{aligned}$$

ii) Nous vérifions que : $Ad_{gh} = Ad_g \circ Ad_h$
En effet :

$$\begin{aligned}
Ad_{gh}(\xi) &= gh\xi(gh)^{-1} \\
&= gh\xi h^{-1}g^{-1} \\
&= g(Ad_h(\xi))g^{-1} \\
&= Ad_g(Ad_h(\xi)) \\
&= (Ad_g \circ Ad_h)(\xi) \quad \square
\end{aligned}$$

D'où : $Ad_{gh} = Ad_g \circ Ad_h$.

Proposition 1.3.

L'application Ad_g est un homéomorphisme d'algèbre de Lie.

$$Ad_g[\xi,\eta] = [Ad_g\xi, Ad_g\eta], (\xi,\eta \in \mathcal{G}). \tag{1.4}$$

Preuve :
Nous avons :

$$\begin{aligned} Ad_g[\xi,\eta] &= Ad_g(\xi\eta - \eta\xi), \\ &= g(\xi\eta - \eta\xi)g^{-1}, \\ &= g\xi\eta g^{-1} - g\eta\xi g^{-1}, \\ &= g\xi g^{-1}.g\eta g^{-1} - g\eta g^{-1}.g\xi g^{-1}, \\ &= [g\xi g^{-1}, g\eta g^{-1}], \\ &= [Ad_g\xi, Ad_g\eta]. \quad \square \end{aligned}$$

Considérons maintenant la fonction

$$Ad : G \to End(\mathcal{G}), g \mapsto Ad(g) \cong Ad_g,$$

où $End(\mathcal{G})$ est l'espace des opérateurs linéaires sur l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$, l'application Ad est différentiable et sa dérivée Ad_*e en l'unité du groupe de Lie G est une application linéaire de l'algèbre de Lie $T_eG = \mathcal{G}$ dans l'espace vectoriel $T_IEnd(\mathcal{G}) = End(\mathcal{G})$. cette application sera notée :

$$\begin{aligned} ad \equiv Ad_*e : \quad \mathcal{G} &\to End(\mathcal{G}) \\ \xi &\mapsto ad_\xi = \frac{d}{dt}Ad_g(t)|_{t=0}, \end{aligned}$$

où $g(t)$ est un groupe à un paramètre avec $\frac{d}{dt}Ad_{g(t)}|_{t=0} = \xi$ et $g(0) = e$.

Proposition 1.4.

Soit $\xi \in \mathcal{G}$ et $\eta \in End(\mathcal{G})$. En posant $ad \equiv Ad_*e$, alors $ad_\xi \eta = [\xi, \eta]$.

Preuve :

Nous avons :

$$\begin{aligned} ad_\xi \eta &= Ad_*e(\xi)(\eta), \\ &= \frac{d}{dt} Ad_g(t)(\eta)|_{t=0} \\ &= \dot{g}(t)\eta g^{-1}(t) + g(t)\eta(\dot{g^{-1}})(t)|_{t=0} \\ &= \dot{g}(t)\eta g^{-1}(t) - g(t)\eta(g^{-2})(t)\dot{g}(t)|_{t=0} \\ &= \dot{g}(t)\eta g^{-1}(t) - \eta(g^{-1})(t)\dot{g}(t)|_{t=0} \\ &= \dot{g}(0)\eta - \eta\dot{g}(0), \\ &= \xi\eta - \eta\xi, \\ &= [\xi, \eta]. \quad \square \end{aligned}$$

De même ; le chemin $c : t \mapsto exp(t\xi)$ est un chemin de classe C^1 dans $GL(n, \mathbb{R})$, tel que
$c(0) = I_n$ et $\dot{c}(0) = \xi$. Donc pour les ξ et η dans $M(n, \mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} ad_\xi(\eta) &= ((T_eAd)(\xi))(\eta) \\ &= \frac{d}{dt} Ad_g(t)(\eta)|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}(exp(t\xi)(exp(-t\xi))(\eta)|_{t=0} \\ &= \xi\eta - \eta\xi \\ &= [\xi, \eta]. \quad \square \end{aligned}$$

Soit $\mathcal{G}$ une algèbre de Lie sur $\mathbb{R}$. Pour tout X dans $\mathcal{G}$, l'application $ad_X : \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ définie par : $ad_X(Y) := [X, Y]$ est une dérivation d'une algèbre de Lie (parfois appelée dérivation intérieure)[12], car tous les Y et Z dans $\mathcal{G}$, nous avons : $ad_X([Y, Z]) = [ad_X(Y), Z] + [Y, ad_X(Z)]$

Preuve :

Pour tous X, Y, et Z, nous avons :

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow [X, [Y, Z]] &= -[Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] \\ &= [[X, Y], Z] + [Y, [X, Z]] \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow ad_X([Y, Z]) = [ad_X(Y), Z] + [Y, ad_X(Z)]$$

La repésentation adjointe commute avec les crochets de Lie. Pour tout , $Y \in G$, nous avons : $ad_{[X,Y]} = [ad_X, ad_Y]$ (7)
En effet, en utilisant l'identité de Jacobi, nous avons :

$$[[X,Y],Z] = [X,[Y,Z]] - [Y,[X,Z]] = 0$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow ad_{[X,Y]}(Z) &= ad_X(ad_Y(Z)) - ad_Y(ad_X(Z)) \\ &= (ad_X ad_Y - ad_Y ad_X)(Z) \\ &= [ad_X, ad_Y](Z) \\ &= [ad_X, ad_Y](Z). \quad \square \end{aligned}$$

D'où nous avons : $ad_{[X,Y]} = [ad_X, ad_Y]$

Cela montre que l'application $ad : \mathcal{G} \to Der(\mathcal{G})$ définie par $X \mapsto ad_X$ est un morphisme d'algèbre de Lie.
La représentation d'algèbre de Lie $ad : \mathcal{G} \to \mathcal{G}l(\mathcal{G})$ s'appelle la représentation adjointe de $\mathcal{G}$. Elle est à valeur dans $Der(\mathcal{G})$.

Définition 1.5.

On définit l'orbite adjointe de ξ par :

$$\mathcal{O}_G(\xi) := \{Ad_g(\xi) = \xi \in \mathcal{G}, g \in G\} \subset \mathcal{G}. \tag{1.5}$$

Ainsi la représentation est transitive s'il n' y a qu'une seule orbite pour la représentation de G sur $\mathcal{G}$, i.e si pour tout $\xi \in G, \mathcal{O}_G(\xi) = G$.

1.6.2 Représentation coadjointe

De façon analogue, G agit sur le dual de son algèbre de Lie. Soit T_g^*G l'espace cotangent ou l'espace dual de l'espace tangent T_gG du groupe G en l'élément g . L'élément $\zeta \in T_g^*G$ est une forme linéaire sur T_gG et pour tout $\zeta \in T_gG$, nous avons :

$$\zeta(\eta) \equiv \langle \zeta, \eta \rangle.$$

Soit $\mathcal{G}^* = T_e^*G$, l'espace dual de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ au groupe G en son élément neutre e de G.
L'opérateur dual Ad_g^* de Ad_g est défini par :

$$\begin{aligned} Ad_g^* \ : \ & \mathcal{G}^* \to \mathcal{G}^*, \zeta \mapsto Ad_g^*(\zeta) \text{ tel que} \\ & \langle Ad_g^*(\zeta), \eta \rangle = \langle \zeta, Ad_{g^{-1}}(\eta) \rangle; \zeta \in \mathcal{G}^*, \eta \in \mathcal{G} \end{aligned}$$

Proposition 1.5.

Nous avons :

$$Ad^*_{gh} = Ad^*_h.Ad^*_g.$$

En effet, soit $\zeta \in \mathcal{G}^*,\ \eta \in \mathcal{G}$, nous avons :

$$\begin{aligned}\langle Ad^*_{gh}(\zeta), \eta\rangle &= \langle \zeta, Ad_{(gh)^{-1}}(\eta\rangle \\ &= \langle \zeta, Ad_{h^{-1}}.Ad_{g^{-1}}(\eta)\rangle \\ &= \langle \zeta, Ad_{h^{-1}}(\eta), Ad_{g^{-1}}(\eta)\rangle \\ &= \langle (Ad^*_h.Ad^*_g)(\zeta), \eta\rangle \quad \square\end{aligned}$$

Soit l'application :

$$Ad^* : G \to End(\mathcal{G}^*), g \mapsto Ad^*(g) \equiv Ad^*_g,$$

et considérons sa dérivée en l'élément neutre du groupe défini par :

$$ad^* \equiv (Ad^*)_{*e} : G \to End(\mathcal{G}^*), \xi \mapsto ad^*_\xi.$$

Proposition 1.6.

Soient $\xi, \eta \in \mathcal{G}$ et $\zeta \in \mathcal{G}^*$. En posant que :

$$\begin{aligned}\langle Ad^*_\xi(\zeta), \eta\rangle &= \langle \zeta, [\xi, \eta]\rangle \\ &= \langle \{\xi, \zeta\}, \eta\rangle.\end{aligned}$$

Où :

$$\{\cdot, \cdot\} : \mathcal{G} \times \mathcal{G}^*, (\xi, \zeta) \mapsto \{\xi, \zeta\},$$

est une forme bilinéaire , alors : $ad^*_\xi = \{\xi, \zeta\}$.

Preuve :

$$\begin{aligned}\langle Ad^*_\xi(\zeta), \eta\rangle &= \langle (Ad^*)_{*e}(\zeta), \eta\rangle, \\ &= \langle \frac{d}{dt} Ad^*_{e^{t\xi}}(\zeta)|_{t=0}, \eta\rangle,\ e^{t\xi}|_{t=0} = e,\ \frac{d}{dt}e^{t\xi}|_{t=0} = \xi, \\ &= \langle \frac{d}{dt} Ad^*_{e^{t\xi}}(\zeta), \eta\rangle|_{t=0}, \\ &= \langle \frac{d}{dt}\zeta, Ad_{e^{t\xi}}(\eta)\rangle|_{t=0}, \\ &= \langle \zeta, \frac{d}{dt} Ad_{e^{t\xi}}(\eta)\rangle|_{t=0}, \\ &= \langle \zeta, Ad_\xi \eta\rangle, \\ &= \langle \zeta, [\xi, \eta]\rangle, \\ &= \langle \{\xi, \zeta\}, \eta\rangle. \quad \square\end{aligned}$$

L'application $Ad_g^* : G \to GL(\mathcal{G}^*)$ est un homomorphisme différentiable, et définit une représentation de G sur $\mathcal{G}^*$, appelée représentation coadjointe du groupe de Lie sur son algèbre de Lie duale. Sa différentielle en l'élément neutre e d'un groupe s'il existe, il est unique, qui à tout élément X de $\mathcal{G}$ associé un endomorphisme de $\mathcal{G}^*$ noté $d(e)Ad_X^*$, est alors donné par :

$$\begin{aligned} \langle Ad_X^*(\zeta), Y\rangle &= \langle \zeta, [Y, X]\rangle \\ &= -\langle \zeta, ad_X Y\rangle \quad \forall \zeta \in \mathcal{G}^*, X, Y \in \mathcal{G} \end{aligned}$$

Définition 1.6.

On définit l'orbite coadjointe (appelée aussi orbite de Kostant-Kirillov-Souriau) au point $\eta \in \mathcal{G}^*$ par :

$$\mathcal{O}_G^*(\eta) := \{Ad_g^*(\eta) = \eta \in \mathcal{G}^*, g \in G\} \subset \mathcal{G}^* \tag{1.6}$$

1.6.3 Application dans le cas du groupe $SO(n)$

Nous montrons comment déterminer les orbites coadjontes dans le cas du groupe de Lie $SO(n)$ (groupe spécial orthogonal d'ordre n, i.e. l'ensemble des matrices X de type $n \times n$ telles que : $XX^t = I$ où $X^t = X^{-1}$ et $détX = 1$). L'espace tangent à l'identité du groupe $SO(n)$ de Lie,que l'on note $so(n)$, est constitué par les matrices de type $n \times n$ antisymétriques, i.e., des matrices A telles que :$A + A^{-1} = 0$. Le commutateur de deux matrices antisymétriques est encore une matrice antisymétrique,

$$A, B \in so(n) \Rightarrow [A, B] = AB - BA \in so(n).$$

Ce produit définit une structure d'algèbre de Lie sur $so(n)$; c'est l'algèbre de Lie du groupe de Lie $SO(n)$. En effet, soit $X, Y \in SO(n)$. On a :

$$(X.Y)^{-1} = Y^{-1}X^{-1} = Y^tX^t = (X.Y)^t \in SO(n).$$

Avec $X = \begin{pmatrix} cos\theta & sin\theta \\ -sin\theta & cos\theta \end{pmatrix}$, nous avons : $X^t = \begin{pmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{pmatrix}$
et $X^{-1} = \begin{pmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{pmatrix}, X \in SO(2)$

En outre, on a $\dot{X} = AX$ $A \in so(n)$ et par conséquent l'espace tangent à l'identité de $SO(n)$ est $T_ISO(n) = so(n)$.
Soit

$$R_Y^{-1}R_Y : SO(n) \to SO(n), X \mapsto YXY^{-1}, Y \in SO(n),$$

l'automorphisme intérieur du groupe $SO(n)$. On vérifie que $YXY^{-1} \in SO(n)$. En effet, on a

$$(YXY^{-1})^{-1} = YX^{-1}Y^{-1} = YX^tY^t = (YXY^t)^t = (YXY^{-1}).$$

Théorème 1.

Soit $A \in so(n)$, l'orbite de la représentation coadjointe du groupe $(SO(n))$ sur son algèbre de Lie duale est :

$$\mathcal{O}^*_{SO(n)}(A) = \{Y^{-1}AY : Y \in SO(n)\}, A \in so(n), \tag{1.7}$$

ou

$$\mathcal{O}^*_{SO(n)}(A) = \{C = Y^{-1}AY : C \in so(n), \text{spectre de} \quad C = \text{spectre de} A\}. \tag{1.8}$$

De (1.6), on a :

$$\{A, B\} = [A, B], (A, B \in so(n))$$

Soit $Ad : SO(n) \to End(so(n)), Y \mapsto Ad_Y$, avec $Ad_Y(A) = YAY^{-1}$,
$A \in so(n)$; et soit $ad : so(n) \to End(so(n)), \dot{Y}(0) \mapsto ad_{\dot{Y}}$,
avec $ad_{\dot{Y}(0)} = [\dot{Y}(0),] : so(n) \to so(n), A \mapsto [\dot{Y}(0), A]$, où $Y(t)$ est une courbe dans $SO(n)$ avec $Y(0) = I$.

Lemme 1.1.

L'algèbre de Lie $so(n)$ munie du commutateur $[\cdot, \cdot]$ des matrices est isomorphe à l'espace $\mathbb{R}^{\frac{n(n-1)}{2}}$ muni du produit vectoriel $\wedge$. L'isomorphisme est donnée par :

$$u \wedge v \mapsto [A, B] = AB - BA, \text{où} \quad u, v \in \mathbb{R}^{\frac{n(n-1)}{2}} \text{et} \quad A, B \in so(n).$$

En effet, dans le cas où $n = 3$ avec $u = (x, y, z)$ et $v = (x^{'}, y^{'}, z^{'}) \in \mathbb{R}^3$, $A = \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & -z^{'} & y^{'} \\ z^{'} & 0 & -x^{'} \\ -y^{'} & x^{'} & 0 \end{pmatrix} \in so(3)$. Nous associons au produit scalaire de $\mathbb{R}^3$ la forme de Killing dans $so(3)$,

$$(A, B) = -\frac{1}{2}tr(A.B).$$

Nous avons :

$$(A, B) = xx^{'} + yy^{'} + zz^{'}$$

et $A.B = \begin{pmatrix} -zz^{'} - yy^{'} & yx^{'} & zx^{'} \\ xy^{'} & -zz^{'} - xx^{'} & zy^{'} \\ xz^{'} & yz^{'} & -yy^{'} - xx^{'} \end{pmatrix} \in so(3)$.
De même, nous associons au produit vectoriel de $\mathbb{R}^3$ le commutateur des matrices,

$$u \wedge v = [A.B].$$

Nous avons :

$$u \wedge v = (yz^{'} - zy^{'}, zx^{'} - xz^{'}, xy^{'} - yx^{'})$$

et $[A, B] = \begin{pmatrix} 0 & yx^{'} - y^{'}x & zx^{'} - z^{'}x \\ xy^{'} - x^{'}y & 0 & zy^{'} - z^{'}y \\ xz^{'} - x^{'}z & yz^{'} - y^{'}z & 0 \end{pmatrix} \in so(3)$. $\square$

D'après ce lemme, nous voyons que : $(\mathbb{R}^{n\times n})^* \cong \mathbb{R}^{n\times n}$, nous avons aussi : $(so(n))^* \cong so(n)$.
Nous pouvons donc définir Ad^* par :

$$Ad^*_Y : so(n) \longrightarrow so(n),$$

avec

$$\begin{aligned} \langle Ad^*_Y(A), B\rangle &= \langle A, Ad_{Y^{-1}}B\rangle \\ &= \langle A, YBY^{-1}\rangle \\ &= -\frac{1}{2}tr(AYBY^{-1}) \\ &= -\frac{1}{2}tr(Y^{-1}AYB) \\ &= \langle Y^{-1}AY, B\rangle \\ &= Y^{-1}AY. \end{aligned}$$

Nous avons ainsi : $(Y^{-1}AY)^t = Y^tA^t(Y^{-1})^t = Y^{-1}AY$, car $Y \in SO(n)$ et $A \in so(n)$. Donc :

$$\mathcal{O}^*_{SO(n)}(A) = \{Y^{-1}AY : Y \in SO(n)\},$$

ou

$$\mathcal{O}^*_{SO(n)}(A) = \{C \in so(n) : \exists Y \in SO(n), C = Y^{-1}AY\}.$$

Notons que :

$$\begin{aligned} d\acute{e}t(C - \lambda I) &= d\acute{e}t(Y^{-1}AY - Y^{-1}\lambda IY) \\ &= d\acute{e}t(Y^{-1}(A - \lambda I)Y), \\ &= d\acute{e}tY^{-1}d\acute{e}t(A - \lambda I)d\acute{e}tY, \\ &= d\acute{e}t(A - \lambda I). \end{aligned}$$

Dès lors, les matrices C et A ont le même spectre. Par conséquent :

$$\mathcal{O}^*_{SO(n)}(A) = \{C \in so(n) : \exists Y \in SO(n), C = Y^{-1}AY, \text{spectre de}\, C = \text{ spectre de}\, A\}.$$

c) Appliquons la proposition (1.6) au cas du groupe de Lie $SO(n)$ tout en sachant que $(so(n))^* = so(n)$.

$$\{\cdot,\cdot\} = so(n) \times so(n) \to so(n), (A, B) = \{A, B\},$$

ainsi, les applications :

$$Ad^* : SO(n) \to End(so(n)), Y \mapsto Ad^*_Y(B) = Y^{-1}BY, M \in so(n)$$

$$ad^* : so(n) \to End(so(n)), A \mapsto ad^*_A$$

où

$$\langle ad^*_N(B), C\rangle = \langle\{A, B\}, C\rangle.$$

Nous avons :

$$\begin{aligned}
\langle\{A, B\}, C\rangle &= \langle B, [A, C]\rangle \\
&= -\frac{1}{2}tr(B, [A, C]), \\
&= -\frac{1}{2}tr(BAC - BCA), \\
&= -\frac{1}{2}tr([B, A], C), \\
&= \langle\{B, A\}, C\rangle.
\end{aligned}$$

D'où : $\{A, B\} = [B, A]$ $\square$

Chapitre 2

Construction des structures symplectiques par la méthode des orbites coadjointes

La géométrie symplectique a permis de porter un nouveau regard sur la mécanique classique. Elle permet l'étude du comportement global d'un système mécanique, en traitant les systèmes et les conséquences, et aborde les questions qualitatives associées comme l'existence des trajectoires périodiques ou stables d'une évolution. L'état complet d'un système à un instant t donné en un point $x(q_1, \cdots, q_n, p_1, \cdots, p_n)$ dans un espace à $2n$ dimensions, appelé espace des phases. Cet espace n'a pas de structure d'espace vectoriel (c'est une variété différentiable). Pour comprendre le comportement du système, on peut essayer de suivre le déplacement d'un sous-ensemble de l'espace des phases [11].

Le théorème de Liouville affirme que lorsqu'un système mécanique évolue, le volume de toute partie de l'espace des phases est préservé. On peut donc penser que la structure géométrique de l'espace des phases est celle du volume des objets. Le théorème de Poincaré est un raffinement du théorème de Liouville. Il stipule que l'évolution du système mécanique préserve la structure symplectique canonique de l'espace des phases [12].

L'espace des phases va nous permettre d'appréhender tout un ensemble de propriétés formelles des systèmes dynamiques et d'en tirer des interprétations géométriques simples. Il s'agit de construire une représentation sur un espace vectoriel symplectique de dimensions paires.

2.1 Variétés de Poisson

La notion de variété de Poisson, connue depuis Lie et popularisée par Lichnerowicz [11] et Weinstein [13], est une généralisation des variétés symplectiques. Une variété symplectique est un couple (M, Ω) où M est une variété de classe C^∞ (réelle ou complexe) et Ω est une 2-forme différentielle fermée non dégénérée. Si f est une fonction de classe C^∞ sur M, la forme symplectique

Ω permet de lui associer un champ de vecteurs, appelé champ Hamiltonien associé à f, noté X_f et défini par $\forall X \in M, \forall Y \in T_xM, \Omega_x(Y, X_f(x)) = df_X Y$ dont le fibré cotangent décrit l'espace des phases du système.

2.2 Structure de Poisson

Les crochets de Poisson définissent une algèbre de Lie sur l'espace des phases du problème à n corps considéré. Ils sont invariants par une transformation canonique et interviennent dans toutes les questions concernant la recherche d'intégrales premières. Ils jettent également un lien entre la mécanique classique et la mécanique quantique via leur assimilation aux commutateurs entre les opérateurs associés à deux champs de vecteurs.
Soient deux fonctions $f(q,p)$ et $g(q,p)$ quelconques définies dans l'espace des phases, le crochet de Poisson de f et g par définition est :

$$\begin{aligned}(f,g) \mapsto \{f,g\} &= \sum_{i=1}^{l}\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{l}\pi_{(q_i p_i)}\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i}\right)\end{aligned}$$

En particulier dans le cas où $f = q_k$ et $g = p_j$; nous aurons :

$$\begin{aligned}\{f,g\} &= \{q_k, p_j\} \\ &= \sum_{i=1}^{l}\left(\frac{\partial q_k}{\partial q_i}\frac{\partial p_j}{\partial p_i} - \frac{\partial q_k}{\partial p_i}\frac{\partial p_j}{\partial q_i}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{l}\frac{\partial q_k}{\partial q_i}\frac{\partial p_j}{\partial p_i} \\ &= \delta_{kj} \\ &= \begin{cases} 0 \text{ si } j \neq k \\ 1 \text{ si } j = k \end{cases} \quad \text{(la mesure de Dirac).}\end{aligned}$$

Le champ de vecteur X_f défini par $X_{(f)}(g) = \{f,g\}$ est appelé champ hamiltonien associé à f. Ce qui entraine que $\{f,g\} = 0$ donc f est une intégrale première.

Définition 2.1.

Une structure de Poisson sur une variété différentiable M est déterminée par la donnée sur l'espace $C^\infty(M,\mathbb{R})$, du crochet de Poisson, $(f,g) \mapsto \{f,g\}$, vérifiant les propriétés suivantes :

i) bilinéarité,
ii) $\{f,g\} = -\{g,f\}$ antisymétrie,
iii) $\{f,\{g,h\}\} + \{g,\{h,f\}\} + \{h,\{f,g\}\} = 0$ identité de Jacobi,
iv) $\{f,gh\} = \{f,g\}h + g\{f,h\}\}$ identité de Leibniz.

Les propriétés i), ii) et iii) confèrent à $C^\infty(M,\mathbb{R})$ une structure d'algèbre de Lie et les propriétés i) à iv) du crochet de Poisson définissent une algèbre de Lie sur l'espace de phases du fait des deux structures de Poisson.

La propriété ii) a pour conséquence : la valeur $\{f,g\}(x)$ en un point $x \in M$ du crochet des fonctions f et g ne dépend que de $df(x)$ et de $dg(x)$, de manière bilinéaire antisymétrique ([11],[13]).

Proposition 2.1.

Sur une variété M munie d'une structure de Poisson, il existe un unique champ de tenseurs π, deux fois contravariant et antisymétrique, appelé tenseur de Poisson, tel que le crochet $\{f,g\}$ de deux fonctions ait pour expression :

$$\{f,g\} = \pi(df,dg).(*)$$

La loi $(*)$ vérifie l'identité de Leibniz si le couple (M,π) est une variété de Poisson et de plus l'égalité : $[\pi,\pi] = \sum_{i=1}^{l} \pi_{(q_i,p_i)} \frac{\partial}{\partial q_i} \wedge \frac{\partial}{\partial p_i}$ en coordonnées locales est le crochet de Schouten-Nijenhuis [13].

2.3 Variété symplectique

Définition 2.2.

Le couple (M,Ω) est une variété symplectique si les conditions suivantes sont satisfaites :

i) M est une variété différentiable de dimension paire ;
ii) Ω est une structure ou forme symplectique sur M qui est une 2-forme différentielle fermée et non-dégénérée i.e.

$$d\Omega = 0 \text{ et } \forall p \in M, \forall \xi \neq 0, \exists \eta / \Omega_p(\xi,\eta) = 0 \ \forall \xi,\eta \in T_pM$$

Conséquence 2.1.

La non dégénérescence de Ω à une conséquence très importante : la dimension de M est nécessairement paire $2n$. La non dégénérescence et la fermeture de Ω ont pour conséquence l'existence, au voisinage de chaque point de M, des coordonnées de Darboux pour lesquelles les composantes de Ω sont des constantes.

Théorème 2.1.

Théorème de Darboux

Soient (M, Ω) une variété symplectique et $x \in M$. Alors il existe des coordonnées locales $(q_1, \cdots, q_n, p_1, \cdots, p_n)$ centrées en x dans lesquelles $\Omega = \sum_{(i=1)}^{n}(dp_i \wedge dq_i)$. Ce théorème est central de la géométrie symplectique et est très utile car il permet toujours de se ramener localement au cas canonique de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ quelque soit la variété symplectique considérée. Il implique qu'il n'y a pas d'invariant local en géométrie symplectique au contraire il y a un groupe de dimension infinie de difféomorphismes symplectiques et un ensemble discret de classes d'équivalence de formes symplectiques [10] .

2.3.1 Exemples de structures symplectiques

1. L'espace $M = \mathbb{R}^{2n}$ muni de la 2-forme $\sum_{(i=1)}^{n}(dy_i \wedge dx_i)$, où ($(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n)$ sont des coordonnées locales) est une variété symplectique. Les vecteurs $(\frac{\partial}{\partial x_1})_p, \cdots, (\frac{\partial}{\partial x_n})_p, (\frac{\partial}{\partial y_1})_p, \cdots, (\frac{\partial}{\partial y_n})_p$, $p \in M$ constituent une base symplectique de l'espace tangent T_pM.
2. Sur une surface orientée plongée dans un espace euclidien de dimension 3, la forme élémentaire d'aire est symplectique.
3. Les surfaces de Riemann [1], les variétés kählériennes [2] ainsi que les variétés projectives complexes sont des varietes symplectiques.
4. Nous allons voir que le fibré cotangent T^*M (i.e., l'union de tous les espaces cotangents à M) admet une structure symplectique naturelle. Les espaces de phases des systèmes hamiltoniens sont des variétés symplectiques et souvent ce sont des fibrés cotangents équipés de la structure canonique.

1. Ce sont des variétés analytiques de dimension 1 complexe (2 réelles) munies d'atlas dont les changements de cartes sont holomorphes.

2. Une variété kählérienne est une variété complexe munie d'une métrique hermitienne dont la partie imaginaire, qui est une 2-forme Ω de type (1,1) relativement à la structure complexe, est fermée.

5. Soit M est une variété différentiable de dimension n. Il existe sur son fibré cotangent T^*M une forme symplectique Ω_{T^*M}, différentielle extérieure de la 1-forme de Liouville. Si $(p_1, \cdots, p_n)$ sont les cordonnées locales dans une carte de M et $(p_1, \cdots, _n, q_1, \cdots, q_n)$ sont les coordonnées locales dans la carte associée de T^*M, on a : $\Omega_{T^*M} = d\alpha = \sum_{(i=1)}^{n}(dp_i \wedge dq_i)$. La 2-forme $d\alpha$ est une forme symplectique sur T^*M.

Dans notre travail, nous avons considéré l'exemple de variétés symplectiques c'est- à-dire les variétés symplectiques construites à partir des algèbres de Lie duales, des algèbres de groupes de Lie, la 2-forme symplectique étant déduite de la 2-forme de Kirillov.

2.3.2 Propriétés

1. Toute variété symplectique est orientable [11].

   Preuve :
   Dans un système de cartes symplectiques $(x_1, \cdots, _{2n})$, nous avons : $\Omega = (dx_1 \wedge dx_{(n+1)} + \cdots + \wedge dx_n \wedge dx_{2n})$
   Dès lors :

$$\begin{aligned} \Omega^n &= (dx_1 \wedge dx_{(n+1)} + \cdots + \wedge dx_n \wedge dx_{2n}) \\ &= (-1)^{\frac{(n(n+1))}{2}}(dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_{2n}), \end{aligned}$$

   Cela signifie que la $2n$-forme Ω^n est une forme volume sur la variété M et est orientable. Autrement dit, l'orientation associée à la forme différentielle Ω est l'orientation canonique de $\mathbb{R}^{2n}$.

2. Plus généralement, un espace vectoriel symplectique (V, Ω) peut être considéré comme une variété symplectique, Ω étant considérée comme une 2-forme différentielle sur V . En effet, à toute base de V correspond une carte, dans laquelle Ω a des composantes constantes, ce qui prouve que $d\Omega = 0$ (i.e. $\Omega \in kerd$).

3. Soient (M_1, Ω_1) et (M_1, Ω_1) deux variétés symplectiques. On note $p_1 : M_1 \times M_2 \mapsto M_1$ et $p_2 : M_1 \times M_2 \mapsto M_2$ projections de $M_1 \times M_2$ sur ses deux facteurs. Les 2-formes $p_1^*\Omega_1 + p_2^*\Omega_2$ et $p_1^*\Omega_1 - p_2^*\Omega_2$ sur la variété produit $M_1 \times M_2$, sont toutes deux des formes symplectiques, qu'on notera simplement $\Omega_1 + \Omega_2$ et $\Omega_1 - \Omega_2$, pour simplifier l'écriture.

4. Soient (M_1, Ω_1) et (M_1, Ω_1) variétés symplectiques de même dimension, et $\varphi : M_1 \to M$ une application différentiable.
   i) On dit que φ est un symplectomorphisme local si $\varphi^*\Omega_2 = \Omega_1$;

ii) On dit que φ est un symplectomorphisme si c'est à la fois un symplectomorphisme local et un difféomorphisme.

Ceci signifie que pour tout $p \in M$, l'application linéaire entre espaces vectoriels symplectique $d\varphi : T_{p_1}M_1 \to T_{p_2}M_2$ est symplectique.

5. La différentielle extérieure $d\alpha$ de la forme de Liouville $\alpha = \sum_{(i=1)}^{n} p_i dx_i$ est une forme symplectique sur T^*N, dite forme symplectique canonique.

   Preuve :
   Nous avons $d(d\alpha) = 0$ puisque $d \circ d = 0$. De plus, $d\alpha$ est non dégénérée. Son expression locale est en effet :

$$d\alpha = \sum_{(i=1)}^{n} dp_i \wedge dx_i. \tag{2.1}$$

   Nous en déduisons le théorème de Poincaré :

   Toute forme différentielle exacte est fermée.

   Et le lemme de Poincaré :

   Toute forme différentielle fermée est localement exacte.

6. Toute transformation canonique ou symplectomorphisme d'une variété symplectique est un difféomorphisme : $\varphi : M \to M$ qui préserve Ω , i.e. $\varphi^*\Omega = \Omega$ Si G est un groupe de Lie agissant sur M, l'action $\tau : G \times M \to M; (\mathcal{G}, x) \mapsto \tau\mathcal{G}(x)$ est dite symplectique si, pour tout $\mathcal{G} \in G$, $\tau\mathcal{G}(.)$ est un symplectomorphisme. Dans ce cas, on appelle G un groupe dynamique de (M, Ω) [14].

7. Soient G un groupe de Lie, $\mathcal{G}$ son algèbre de Lie , $\mathcal{G}^*$ le dual de $\mathcal{G}$ et $\eta \in \mathcal{G}^*$. Nous avons vu que G agit sur $\mathcal{G}^*$ via l'action coadjointe. Considérons l'orbite coadjointe $\mathcal{O}$ de η dans $\mathcal{G}^*$:

$$\mathcal{O}(\eta) := \{Ad_g^*(\eta) = \eta \in \mathcal{G}^*, g \in G\}$$

   et le stabilisateur K de η :

$$K := \{Ad_k^*(\eta) = \eta \in \mathcal{G}^*, k \in G\}.$$

   K est fermé dans G et G/K est donc une variété [11, 13, 3]. On a la bijection bien définie suivante $\varphi : G/K \to 0; gK \mapsto Ad_g^*(\eta)$ et on définit une structure de variété sur $\mathcal{O}$ de façon à ce que φ soit un difféomorphisme.

$\mathcal{O}$ est alors un espace G-homogène, et on définit une 2-forme $\Omega^{\mathcal{O}}$ sur $\mathcal{O}$ en termes des champs de vecteurs fondamentaux :

$$\Omega^{\mathcal{O}}(Ad_g^*(\eta))(X^*_{(Ad_k^*(\eta))}, Y^*_{(Ad_k^*(\eta))}) = -\langle Ad_g^*(\eta), [X, Y]\rangle$$

On peut vérifier que cette forme est bien définie, et qu'elle est symplectique sur $\mathcal{O}$. De plus, G agit sur $\mathcal{O}$ par symplectomorphismes et constitue donc un groupe dynamique de $\mathcal{O}$. On appelle $\Omega^{\mathcal{O}}$ la forme de Kirillov-Kostant-Souriau (ou forme de KKS) [9].

2.4 Méthode des orbites coadjointes

La méthode des orbites de Kirillov consiste à associer une action unitaire d'un groupe de Lie G à chacune de ses orbites coadjointes. Dans le cas des groupes nilpotents ([7],[4],[15]), Kirillov a montré que cette technique construit des représentations irréductibles. Par la suite, la méthode a été étendue à des groupes plus généraux et des arguments de théorie spectrale, implémente une récurrence sur le rang de nilpotence et peut s'interpréter en coordonnées de Darboux. Nous nous intéressons aux propriétés différentielles des groupes de Lie, nous construisons à l'aide de cette méthode des structures symplectiques de ces groupes de Lie et nous en déduisons les équations de mouvement du système correspondant.

Chapitre 3

Systèmes dynamiques élémentaires associés à une classe de groupes de Lie nilpotents

Le présent chapitre s'intéresse à la construction des systèmes dynamiques associés à une classe de groupes de Lie nilpotents. En partant de la classification des classes de groupes de Lie de B.Ganbouri [7] , nous avons traité des structures symplectiques de cinquième classe qui est un cas particulier des structures de Poisson par la méthode des orbites coadjointes et son application à la construction des espaces de phase, l'extension centrale, l'analyse dimensionnelle des paramètres associés aux champs de vecteurs, les réalisations et les structures symplectiques en s'appuyant sur l'exemple de construction de notre travail de mémoire, nous avons fait des interprétations physiques et tiré des conclusions.

3.1 Présentation de la classe de groupes de Lie nilpotents

Nous résolvons la question pour la classe de Lie $\mathcal{G}$ donnée par :

$$[Z,X] = cos\theta X - sin\theta Y, \quad [Z,Y] = sin\theta X - cos\theta Y, \quad [Z,X] = 0 \quad (0 < \theta < \pi).$$

Les algèbres de Lie ici considérées constituent la cinquième famille de la classification des algèbres de Lie de B. Ganbouri [6] de dimension trois suivante :

$$\text{I.} \quad (su(2)) : [Z,X] = 2Y, \quad [Z,Y] = -2X, \quad [Z,X] = 2Z; \tag{3.1}$$

$$\text{II.} \quad (sl(2,\mathbb{R})) : [Z,X] = -2Y, \quad [Z,Y] = -2X, \quad [Z,X] = 2Z; \tag{3.2}$$

$$\text{III.} \quad : [Z,X] = \lambda X, \quad [Z,Y] = Y, \quad [Z,X] = 0, \quad (0 < |\lambda| \leq 1); \tag{3.3}$$

$$\text{IV.} \quad : [Z,X] = X + Y, \quad [Z,Y] = Y, \quad [Z,X] = 2Z; \tag{3.4}$$

$$\text{V.} \quad : [Z,X] = cos\theta X - sin\theta Y, \quad [Z,Y] = sin\theta X - cos\theta Y, \quad [Z,X] = 0 \tag{3.5}$$

$$\text{VI.} \quad : [Z,X] = 0, \quad [Z,Y] = 0, \quad [Z,X] = Z; \tag{3.6}$$

$$\text{VII.} \quad : [Z,X] = 0, \quad [Z,Y] = Y, \quad [Z,X] = 0; \tag{3.7}$$

Notre travail est une continuité des résultats de B. Ganbouri sur les algèbres de Lie $su(2)$ et $sl(2,\mathbb{R})$ paru dans ([2],[6],[?]) où on a montré que toutes les structures de Lie-Poisson sont linéarisables au voisinage de l'élément neutre.

3.2 Structures symplectiques sur les orbites et applications

Dans cette partie nous allons voir comment définir une structure symplectique sur l'orbite de la représentation coadjointe. Soit $\eta \in \mathcal{G}^*$. ξ le vecteur tangent en η à l'orbite. Comme $\mathcal{G}^*$ est un espace vectoriel, alors évidemment $\xi \in T_\eta \mathcal{G}^* = \mathcal{G}^*$. Rappelons que :

$$\mathcal{O}_G^*(\eta) := \{Ad_g^*(\eta) = \eta \in \mathcal{G}^*, g \in G\} \subset \mathcal{G}^*.$$

$\forall \eta \in \mathcal{O}_G^*(\eta), \exists g \in G$ tel que : $\eta = Ad_g^*$. Soit $\gamma \in \mathcal{G}$ et $e^{\gamma t}$ un groupe à un paramètre dans G avec

$$e^{\gamma t}|_{t=0} = g \text{ et } \frac{d}{dt}(Ad_{e^{\gamma t}}^*(\eta))|_{t=0} = \xi.$$

Or

$$\frac{d}{dt}(Ad_{e^{\gamma t}}^*(\eta))|_{t=0} \equiv ad_\gamma^*(\eta) = \{\gamma, \eta\},$$

donc le vecteur ξ peut-être représenté comme le vecteur vitesse du mouvement de η sous l'action d'un groupe $e^{\gamma t}, \gamma \in \mathcal{G}$. Autrement dit, tout vecteur ξ tangent à l'orbite $\mathcal{O}_G^*(\eta)$ s'exprime en fonction de $\gamma \in \mathcal{G}$ par :

$$\xi = \{\gamma, \eta\}, \gamma \in \mathcal{G}, \eta \in \mathcal{G}^*. \tag{3.8}$$

Par conséquent, nous pouvons déterminer la valeur d'une 2-forme Ω sur l'orbite $\mathcal{O}_G^*(\eta)$ comme suit : soient γ_1 et γ_2 deux vecteurs tangents à l'orbite de η. Nous avons :

$$\xi_1 = \{\gamma_1, \eta\}, \gamma_1 \in \mathcal{G}, \eta \in \mathcal{G}^*$$
$$\xi_2 = \{\gamma_2, \eta\}, \gamma_2 \in \mathcal{G}, \eta \in \mathcal{G}^*.$$

Nous avons ainsi la 2-forme différentielle

$$\Omega(\gamma_1,\gamma_2)(\eta)=\langle\eta,[\gamma_1,\gamma_2]\rangle,\gamma_1,\gamma_2\in\mathcal{G},\eta\in\mathcal{G}^*, \tag{3.9}$$

la valeur de l'orbite $\mathcal{O}_G^*(\eta)$ ne dépend pas du choix de γ_1 et γ_2. En outre, elle est antisymétrique, non-dégénérée et fermée.

Pour déterminer la structure symplectique sur l'orbite $\mathcal{O}^*_{SO(n)}(\eta)$, nous avons :

$\Omega(\gamma_1,\gamma_2)(X)=\langle X,[A,B]\rangle, A,B\in so(3), X\in(so(3))^*=so(3)$, (voir le lemme (1.1))

$$\zeta_1=\{X,A\},\zeta_2=\{X,B\},$$

sont deux vecteurs tangents à l'orbite en X

$$\zeta_1=[X,A],\zeta_2=[X,B].$$

En utilisant le même lemme ; i.e. l'isomorphisme entre $(so(3),[,])$ et $(\mathbb{R}^3;\wedge)$, nous donne ainsi :

$$\xi_1=\eta\wedge\gamma,\ \xi_2=\eta\wedge\tau,$$
$$\Omega(\gamma_1,\gamma_2)(\eta)=\langle\eta,\gamma\wedge\tau\rangle.$$

Selon le théorème de la section (1.6.3) l'orbite coadjointe de $SO(3)$ est :

$$\mathcal{O}^*_{SO(n)}(A)=\{C=Y^{-1}AY : C\in so(n),\text{spectre de}\quad C=\text{spectre de}A\}.$$

Le spectre de la matrice est donné par :

$$dét(A-\lambda I)=-\lambda(\lambda^2+x^2+y^2+z^2)=0,$$

d'où : $\lambda=0$ ou $\lambda=\pm i\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\pm ir^2$. Alors,

$$\mathcal{O}^*_{SO(3)}(A)=\{C\in so(3) : x^{''2}+y^{''2}+z^{''2}=r^2\},$$

avec $A=\begin{pmatrix}0&-z&y\\z&0&-x\\-y&x&0\end{pmatrix}$ et $C=\begin{pmatrix}0&-z^{''}&y^{''}\\z^{''}&0&-x^{''}\\-y^{''}&x^{''}&0\end{pmatrix}\in so(3)$.

L'algèbre de Lie $so(3)$ étant isomorphe à $\mathbb{R}^3$, nous en déduisons que l'orbite $\mathcal{O}^*_{SO(3)}(A)$ est isomorphe à une sphère S^2 de rayon r. Puisque les vecteurs ξ_1 et ξ_2 appartiennent au plan tangent $T_XO^*_{SO(3)}$ en X, ils appartiennent aussi au plan tangent $T_\eta S^2$ en η.
Soit

$$S^2=\{(x_1,y_2,z_3)\in\mathbb{R}^3 : x_1^2+y_2^2+z_3^2=r^2\},$$

la sphère de rayon r, alors le plan tangent à cette sphère en η de coordonnées (x_1, y_2, z_3) est :

$$\begin{aligned} T_\eta S^2 &= \{(x_1, y_2, z_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1y_1 + x_2y_2 + x_3z_3 = r^2\}, \quad (3.10) \\ &= \{(x_1, y_2, -\frac{x_1y_1 + x_2y_2}{x_3})\} \quad (3.11) \end{aligned}$$

Soit $z = (z_1, z_2, z_3) \in T_\eta S^2$ et déterminons $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ tel que : $\eta \wedge \gamma = z$. Cette dernière est équivalente au système suivant :

$$\begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ -\frac{x_1z_1+x_2z_2}{x_3} \end{pmatrix},$$

dont la solution est : $\gamma = (\frac{x_1\gamma_3+x_2\gamma_3}{x_3}, \frac{x_2\gamma_3-z_1}{x_3}; \gamma_3), \gamma_3 \in \mathbb{R}$.

Nous déterminons la forme symplectique intrinsèque S^2, i.e., ne dépend pas du choix des coordonnées locales, nous choisissons comme coordonnées locales x_1, x_2 et le même raisonnement sera valable pour les autres cas, i.e., x_2, x_3 et x_3, x_1. Nous calculons donc γ et τ relativement à la base $(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2})$ de $T_\eta S^2$ avec :

$$\frac{\partial}{\partial x_1} = (1, 0, -\frac{x_1}{x_3}), \quad \frac{\partial}{\partial x_2} = (0, 1, -\frac{x_2}{x_3}).$$

Nous avons : $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = (\frac{x_1\tau_3+1}{x_3}, \frac{x_2\tau_3}{x_3}, \gamma_3)$.
D'où :

$$\begin{aligned} \gamma \wedge \tau &= (\gamma_2\tau_3 - \gamma_3\tau_2, \gamma_3\tau_1 - \gamma_1\tau_3, \gamma_1\tau_2 - \gamma_2\tau_1), \\ &= (-\frac{\gamma_3}{x_3}, \frac{\tau_3}{x_3}, \frac{x_1\tau_3 - x_2\gamma_3 + 1}{x_3^2}). \end{aligned}$$

Donc :

$$\Omega(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}) = (\eta, \gamma \wedge \tau) = \frac{1}{x_3} \text{ et par conséquent } \Omega = \frac{dx_1 \wedge dx_2}{x_3}.$$

Comme nous l'avons déjà signalé, la forme symplectique étant intrinsèque, nous aurons finalement :

$$\Omega = \frac{dx_1 \wedge dx_2}{x_3} = \frac{dx_2 \wedge dx_3}{x_1} = \frac{dx_3 \wedge dx_1}{x_2}.$$

3.3 Extension centrale

Une extension est une manière de décrire un groupe en termes de deux groupes plus petits. Une extension d'un groupe Q par un groupe N est un groupe G qui s'insère dans une suite exacte courte.

$$1 \longrightarrow N \longrightarrow G \longrightarrow Q \longrightarrow 1$$

Le groupe G est une extension centrale du groupe Q par un groupe N, si N est un sous groupe distingué de G, $Q = G/N$ et les restrictions à N des automorphismes internes de G, sont des automorphismes internes de N.

La loi du groupe d'une extension G peut s'écrire :

$$(\alpha, a)(\beta, b) = (\alpha + \beta + \omega(a, b), ab) \tag{3.12}$$

où $\omega(a, b)$ est un 2-cocycle.

Le facteur $\omega(a, b)$ étant un $2-$cocycle i.e une application ω de $G \times G$ dans N telle que $\omega \in Z^2(G, N) \leftrightarrow \delta\omega = 0$ où $\delta\omega$ est défini par :

$$(\delta\omega)(a, b, c) = \omega(b, c) - \omega(ab, c) + \omega(a, bc) - \omega(a, b).$$

Réciproquement, tout $2-$cocycle ω définit une extension par (3.12). Deux cocycles ω_1 et ω_2 diffèrent par un cobord $\delta\varphi$:

$$(\delta\varphi)(a, b) = \varphi(a, b) - \varphi(ab) + \varphi(b) \in Z^2(G, N),$$

définissent deux extensions différentes.

Une suite exacte de $\mathbb{K}-$algèbres de Lie : $0 \to k \longrightarrow \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow 0$ est une extension centrale de $\mathcal{G}$ par k, si k est dans le centre de $\mathcal{U}$, i.e si $[k,\mathcal{U}] = 0$. L'extension $\alpha : \mathcal{U} \to \mathcal{G}$ est universelle (et dans ce cas, elle est unique à l'isomorphisme près) si pour toute extension centrale $\beta : \mathcal{V} \to \mathcal{G}$, il existe un unique homomorphisme d'algèbres de Lie $\alpha : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ tel que $\beta\gamma = \alpha$.

3.4 Analyse dimensionnelle

Dans cette section, nous analysons les paramètres associés aux différents champs de vecteurs. Pour étudier un phénomène physique nous passons à l'identification des variables importantes. La relation mathématique entre ces variables constitue une loi de la physique. Pour quelques phénomènes simples, ceci est possible. Dans ce cas une méthode de modélisation telle que l'analyse dimensionnelle est indispensable. On est déjà familiarisé avec l'analyse dimensionnelle lorsqu'on veut vérifier les unités pour s'assurer que la partie gauche et droite d'une équation ont la même unité. Nous parlons aussi d'expression « symbolique » ou « fonctionnelle ». Cet effort d'abstraction qui nous est demandé est un point crucial de notre travail de recherche car cela nous permettra, entre autre, de :
- vérifier un résultat après un raisonnement rigoureux,
- obtenir une formule après un raisonnement intuitif,
- comprendre la dépendance fonctionnelle d'une quantité par rapport aux paramètres et variables dont elle dépend [12].

Notons également que l'élément générale du groupe de Lie G a deux paramètres, généré par x et X où x et X sont inverses avec x le paramètre du groupe de Lie et X le paramètre sans dimension. C'est pour cette raison que les paramètres t, x_1, x_2 associés respectivement aux champs de vecteurs H, P_1, P_2 auront les dimensions du temps, de longueur et de vitesse. Leurs paramètres conjugués (élémentaire de l'algèbre de Lie dual $\mathcal{G}^*$) seront : m : masse, p_1 : dynamique linéaire de la quantité du mouvement, p_2 : dynamique statique de la vitesse, e : l'énergie.

Les relations entre ces grandeurs physiques dépendent de la structure de l'algèbre de Lie peuvent être déterminées par les réalisations fortement hamiltonienne [14], lagrangienne et liouvillienne des groupes de Lie correspondants. Nous traiterons le cas du groupe de Lie statique et particulièrement le groupe de Lie statique étendu en dimension spatiale.

Nous interprétons les résultats suivant leurs dimensions ainsi que les équations des trajectoires des particules trouvées. En effet, une action en physique a pour dimensions le produit d'une énergie par le temps. L'action est telle que :
$[x][\omega] = ml^2t^{-1}$ où : ω est un paramètre conjugué et appartenant à l'algèbre de Lie duale ; m est la masse ; l est la longueur et t est le temps.

i) Si $[x]$ est sans dimensions, nous avons :
$[x][\omega] =$ action
$\Leftrightarrow [\omega] = ml^2t^{-1}$ est l'action.

ii) Si $[x]$ a la dimension de la longueur (l), nous avons :
$[x][\omega] = ml^2t^{-1}$
$\Leftrightarrow l[\omega] = ml^2t^{-1}$
$\Leftrightarrow [\omega] = mlt^{-1}$. ω est une dynamique (moment) linéaire p.

iii) Si $[x]$ a la dimension de la vitesse (lt^{-1}) , nous avons :
$[x][\omega] = ml^2t^{-1}$
$\Leftrightarrow (lt^{-1})[\omega] = ml^2t^{-1}$
$\Leftrightarrow [\omega] = ml$. ω est une dynamique (moment) statique k .

iv) Si $[x]$ a la dimension du temps (t) , nous avons :
$[x][\omega] = ml^2t^{-1}$
$\Leftrightarrow t[\omega] = ml^2t^{-1}$
$\Leftrightarrow [\omega] = ml^2t^{-2} = m(lt^{-1})^2 = mv^2$. ω est une dynamique (moment) associé(e) à l'énergie.

v) Si $[x]$ a la dimension du carré de la longueur (l^2) , nous avons :
$[x][\omega] = ml^2t^{-1}$
$\Leftrightarrow (l^2)[\omega] = ml^2t^{-1}$
$\Leftrightarrow [\omega] = mt^{-1}$. ω est une dynamique (moment) associé(e) à la force de Planck (quantum d'action ou constante de Kosto ou encore limite de Kosto).

3.5 Exemple de construction

L'algèbre de Lie considérée dans ce travail est la $5^{ème}$ classe d'algèbre de Lie de classification de B. Ganbouri (3.5) dans le cas particulier où $\theta = \frac{\pi}{2}$. Considérons le groupe de transformation du plan défini par :

$$x_o^{'i} = R_j^i x_o^{'j} + x^i, \tag{3.13}$$

où $R(t) = \begin{pmatrix} cos\theta t & sin\theta t \\ -sin\theta t & cos\theta t \end{pmatrix}$ est une matrice de rotation avec θ paramètre et t paramètre de translation temporelle.
Soit maintenant la classe de groupe de Lie définie par la loi de la multiplication suivante :

$$(\vec{x}, t)(\vec{x}', t) = (R(t)\vec{x}' + x, t + t') \tag{3.14}$$

où $\vec{x}$: paramètre de translation spatiale. La classe correspondante d'algèbre de Lie est engendrée par les champs de vecteurs invariants à gauche.

Considérons l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ engendrée par les crochets de Lie définis par :

$$[Z, X] = cos\theta X - sin\theta Y$$
$$[Z, Y] = sin\theta X + cos\theta Y$$
$$[X, Y] = 0$$

où X, Y, Z sont les générateurs de l'algèbre de Lie et $0 < \theta < \pi$.
Posons :
$H = Z$: le générateur de $\mathcal{G}$ associée au paramètre t du groupe ;
$P_1 = X$: le générateur de $\mathcal{G}$ associée au paramètre x_1 du groupe ;
et $P_2 = Y$: le générateur de $\mathcal{G}$ associée au paramètre x_2 du groupe.
De façon équivalente, la structure algèbre de Lie de $\mathcal{G}$ devient :

$$[Z, X] = cos\theta P_1 - sin\theta P_2$$
$$[Z, Y] = sin\theta P_1 + cos\theta P_2$$
$$[X, Y] = 0$$

En particulier si $\theta = \frac{\pi}{2}$, nous avons :

$$[H, P_1] = -P_2$$
$$[H, P_2] = P_1$$
$$[P_1, P_2] = 0$$

La loi du groupe est donnée sous la forme d'un produit d'exponentiels de matrices et l'élément général du groupe s'écrit :

$$g = exp(x_1P_1 + x_2P_2)exp(tH)$$

puisque P_1 et P_2 commutent.
Donc :

$$gg^{'} = exp(x_1P_1 + x_2P_2)exp(tH)exp(x_1^{'}P_1 + x_2^{'}P_2)exp(t^{'}H) \tag{3.15}$$

En insérant l'élément neutre $exp(tH)exp(-tH)$ dans l'équation (3.15). Nous aurons :

$$gg^{'} = exp(x_1P_1 + x_2P_2)\underbrace{exp(tH)exp(x_1^{'}P_1 + x_2^{'}P_2)exp(-tH)}_{I_1}exp[(t + t^{'})H] \tag{3.16}$$

Posons que :

$$I_1 = exp(tH)exp(x_1^{'}P_1 + x_2^{'}P_2)exp(-tH) \tag{3.17}$$
$$\overset{\text{BCH}}{=} exp(x_1^{'}P_1 + x_2^{'}P_2 + [tH, x_1^{'}P_1 + x_2^{'}P_2] + \frac{1}{2!}\cdots) \tag{3.18}$$

- $$\begin{aligned}[tH, x_1^{'}P_1 + x_2^{'}P_2] &= [tH, x_1P_1] + [t^{'}H, x_2P_2] \\ &= tx_1^{'}[H, P_1] + tx_2^{'}[H, P_2]\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow [tH, x_1^{'}P_1 + x_2^{'}P_2] = -tx_1^{'}P_2 + tx_2^{'}P_1 \tag{3.19}$$

- $$\begin{aligned}[tH, [tH, x_1^{'}P_1 + x_2^{'}P_2]] &= [tH, x_1^{'}P_2] + [tH, x_2^{'}P_1] \\ &= [-t^2x_1^{'}[H, P_2] + t^2x_2^{'}[H, P_1] \\ &= -t^2x_1^{'}P_1 - t^2x_2^{'}P_2\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow [tH, [tH, x_1^{'}P_1 + x_2^{'}P_2]] = -t^2x_1^{'}P_2 - t^2x_2^{'}P_1 \tag{3.20}$$

- $$\begin{aligned}[tH, [tH, [tH, x_1^{'}P_1 + x_2^{'}P_2]]] &= [tH, -t^2x_1^{'}P_2 - t^2x_2^{'}P_1] \\ &= [-t^3x_1^{'}[H, P_1] - t^3x_2^{'}[H, P_2] \\ &= t^3x_1^{'}P_2 - t^3x_2^{'}P_1\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow [tH, [tH, [tH, x_1^{'}P_1 + x_2^{'}P_2]]] = t^3x_1^{'}P_2 - t^3x_2^{'}P_1 \tag{3.21}$$

- $$\begin{aligned}[t^H, [tH, [tH, [tH, x_1^{'}P_1 + x_2^{'}P_2]]]] &= [tH, t^3x_1^{'}P_2 - t^3x_2^{'}P_1 \\ &= [t^4x_1^{'}[H, P_2] - t^4x_2^{'}[H, P_1] \\ &= t^4x_1^{'}P_1 + t^4x_2^{'}P_2\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow [tH, [tH, [tH, [tH, x_1^{'}P_1 + x_2^{'}P_2]]]] = t^4x_1^{'}P_1 + t^4x_2^{'}P_2 \tag{3.22}$$

En remplaçant les équations (3.12), (3.13), (3.14), (3.15) dans l'équation (3.18) et en regroupant les termes, nous obtenons :

$$\begin{aligned}I_1 &= exp[(x_1^{'} + tx_2^{'} - \frac{1}{2!}t^2x_1^{'} - \frac{1}{3!}t^3x_2^{'} + \frac{1}{4!}t^4x_1^{'} + \cdots)P_1 \\ &+ (x_2^{'} - tx_1^{'} - \frac{1}{2!}t^2x_2^{'} + \frac{1}{3!}t^3x_1^{'} + \frac{1}{4!}t^4x_2^{'} + \cdots)P_2]\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= exp([x_1^{'}\underbrace{(1-\frac{1}{2!}t^2+\frac{1}{4!}t^4+\cdots)}_{\underbrace{cos\,t}_{\text{par la série de Taylor}}}+x_2^{'}\underbrace{(t-\frac{1}{3!}t^3+\cdots)}_{\underbrace{sin\,t}_{\text{par la série de Taylor}}}]P_1\\
&+ [x_1^{'}\underbrace{(t-\frac{1}{3!}t^3+\cdots)}_{\underbrace{sin\,t}_{\text{par la série de Taylor}}}+x_2^{'}\underbrace{(1-\frac{1}{2!}t^2+\frac{1}{4!}t^4+\cdots]}_{\underbrace{cos\,t}_{\text{par la série de Taylor}}}P_2)
\end{aligned}
$$

$$\Leftrightarrow I_1 = exp((x_1^{'}cost+x_2^{'}sint)P_1+(-x_1^{'}sint+x_2^{'}cost)P_2) \quad (3.23)$$

En substituant l'équation (3.23) dans l'équation (3.16), nous obtenons :

$$gg^{'}=\underbrace{exp(x_1P_1+x_2P_2)exp((x_1^{'}cost+x_2^{'}sint)P_1+(-x_1^{'}sint+x_2^{'}cost)P_2)}_{I_2}exp((t+t^{'})H) \quad (3.24)$$

Posons que :

$$
\begin{aligned}
I_2 &= exp\underbrace{(x_1P_1+x_2P_2)}_{A}exp\underbrace{(x_1^{'}cost+x_2^{'}sint)P_1+(-x_1^{'}sint+x_2^{'}cost)P_2)}_{B}\\
&\overset{\text{BCH}}{=} exp(A+B+[A,B]+\frac{1}{2}[A,[A,B]]+\frac{1}{3!}\cdots)
\end{aligned}
$$

Dans l'expression de I_2, nous avons :

- $A+B=(x_1+x_1^{'}cost+x_2^{'}sint)P_1+(x_2-x_1^{'}sint+x_2^{'}cost)P_2$
- $[A,B]=0$ puisque P_1 et P_2 commutent.

D'où : $I_2=exp[(x_1+x_1^{'}cost+x_2^{'}sint)P_1+(x_2-x_1^{'}sint+x_2^{'}cost)P_2]$
et : $gg^{'}=exp[(x_1+x_1^{'}cost+x_2^{'}sint)P_1+(x_2-x_1^{'}sint+x_2^{'}cost)P_2]exp[(t+t^{'})H]$.
La loi du groupe est donnée par :

$$G=\{(x_1,x_2,t)/(x_1,x_2,t)(x_1^{'},x_2^{'},t^{'})=(x_1+x_1^{'}cost+x_2^{'}sint,x_2-x_1^{'}sint+x_2^{'}cost,t+t^{'})\} \quad (3.25)$$

Nous vérifions que l'élément neutre de G est : $g^{'}=e=(0,0,0)$.
Nous vérifions que, à partir de (3.25), les générateurs de l'algèbre de Lie sont :

$$
\begin{aligned}
P_1 &= \frac{\partial}{\partial x_1^{'}}(x_1^{'},x_2^{'},t^{'})=(x_1+x_1^{'}cost+x_2^{'}sint,x_2-x_1^{'}sint+x_2^{'}cost,t+t^{'})\mid_e(\frac{\partial}{\partial x_k})\\
&= (cost,-sint,0)\mid_e(\frac{\partial}{\partial x_k})=cost\frac{\partial}{\partial x_1}-sint\frac{\partial}{\partial x_2}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} P_2 &= \frac{\partial}{\partial x_2^{'}}(x_1^{'}, x_2^{'}, t^{'}) = (x_1 + x_1^{'}cost + x_2^{'}sint, x_2 - x_1^{'}sint + x_2^{'}cost, t + t^{'}) \mid_e (\frac{\partial}{\partial x_k}) \\ &= (sint, cost, 0) \mid_e (\frac{\partial}{\partial x_k}) = sint\frac{\partial}{\partial x_1} + cost\frac{\partial}{\partial x_2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H &= \frac{\partial}{\partial t^{'}}(x_1^{'}, x_2^{'}, t^{'}) = (0, 0, 1) \mid_e (\frac{\partial}{\partial x_k}) \\ &= \frac{\partial}{\partial t}. \end{aligned}$$

L'algèbre de Lie associée est donc engendrée par les champs de vecteurs H, P_1 et P_2 dans le cas particulier où $\theta = \frac{\pi}{2}$ et est définie par la structure de Lie suivante : $[H, P_1] = -P_2; [H, P_2] = P_1; [P_1, P_2] = 0$.

Nous vérifions que l'élément inverse de $g^{-1}(x_1, x_2, t)$ est :
$g^{-1} = (-x_1cost + x_2sint, -x_1sint - x_2cost, -t)$

Par définition l'action adjointe du groupe de Lie G sur son algèbre de Lie $\mathcal{G}$ est donnée par l'expression : $Ad_g(X) \equiv gXg^{-1}$, où $X = (\delta x_1, \delta x_2, \delta t)$.
Dans notre cas, nous avons :

$$\begin{aligned} Ad_{(x_1,x_2,t)}^{(\delta x_1, \delta x_2, \delta t)} &= (x_1, x_2, -t)(\delta x_1, \delta x_2, \delta t)(x_1, x_2, t)^{-1} \\ &= (x_1, x_2, t)(\delta x_1, \delta x_2, \delta t)(-x_1cost + x_2sint, -x_1sint - x_2cost, -t) \\ &= (x_1, x_2, t)(\delta x_1 - x_1cost + x_2sint, \delta x_2 - x_1sint - x_2cost, \delta t - t) \\ &= (\delta x_1 cost + \delta x_2 sint, -\delta x_1 sint + \delta x_2 cost, \delta t) \end{aligned}$$

étant donné que si $\delta t \to 0$, alors $sin\,\delta t \to 0$ et $cos\,\delta t \to 1$. C'est la représentation adjointe du groupe de Lie G sur son algèbre de Lie $\mathcal{G}$.

Par dualité entre l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ de G et son algèbre de Lie $\mathcal{G}^*$ et en posant que p_1, p_2, E sont les paramètres conjugués de x_1, x_2, t respectivement : $Ad_{(x_1,x_2,t)}^{(\delta x_1, \delta x_2, \delta t)} = (\delta x_1^{'}, \delta x_2^{'}, \delta t^{'})$ et $Ad_{(x_1,x_2,t)}^{*(p_1,p_2,E)} = (p_1^{'}, p_2^{'}, E^{'})$,

$$\text{où } : \langle Ad_{(x_1,x_2,t)}^{(p_1,p_2,E)}, Ad_{(x_1,x_2,t)}^{(\delta x_1, \delta x_2, \delta t)} \rangle = \langle (p_1^{'}, p_2^{'}, E^{'}), (\delta x_1^{'}, \delta x_2^{'}, \delta t^{'}) \rangle$$

$$\text{or } \langle (p_1^{'}, p_2^{'}, E^{'})(\delta x_1^{'}, \delta x_2^{'}, \delta t^{'}) \rangle = \langle (p_1, p_2, E), (\delta x_1, \delta x_2, \delta t) \rangle$$

$$\Leftrightarrow p_1^{'}\delta x_1^{'} + p_2^{'}\delta x_2^{'} + E^{'}\delta t^{'} = p_1\delta x_1 + p_2\delta x_2 + E\delta t$$

De plus nous avons : $\begin{cases} \delta x_1^{'} = \delta x_1 cost + \delta x_2 sint \\ \delta x_2^{'} = -\delta x_1 sint + \delta x_2 cost \\ \delta t^{'} = \delta t \end{cases}$ d'après l'action adjointe de G sur $\mathcal{G}$.

D'où : $p_1^{'}(\delta x_1 cost+\delta x_2 sint)+p_2^{'}(-\delta x_1 sint+\delta x_2 cost)+E^{'}\delta t^{'} = p_1\delta x_1+p_2\delta x_2+E\delta t$

$$\text{et par comparaison : } \begin{cases} p_1^{'}\delta x_1 cost - p_2^{'}\delta x_1 sint = p_1\delta x_1 \\ p_2^{'}\delta x_2 sint + p_2^{'}\delta x_2 cost = p_2\delta x_2 \\ E^{'} = E \end{cases}$$

$$\text{de façon équivalente : } \begin{cases} p_1^{'} cost - p_2^{'} sint = p_1 \\ p_2^{'} sint + p_2^{'} cost = p_2 \\ E^{'} = E \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} cost & -sint \\ sint & cost \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1^{'} \\ p_2^{'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} cost & -sint \\ sint & cost \end{vmatrix} = 1$$

$$\Leftrightarrow p_1^{'} = \begin{vmatrix} p_1 & -sint \\ p_2 & cost \end{vmatrix} = p_1 cost + p_2 sint$$

$$\Leftrightarrow p_2^{'} = \begin{vmatrix} cost & p_1 \\ sint & p_2 \end{vmatrix} = -p_1 sint + p_2 cost$$

D'où :$Ad^*_{(x_1,x_2,t)}(p_1,p_2,E) = (p_1^{'},p_2^{'},E^{'}) = (p_1 cost+p_2 sint, -p_1 sint+p_2 cost, E)$.
Nous constatons que E est un invariant immédiat de cette action coadjointe.

La forme de Kirillov est donnée par :

$$K_{ij}(p_1,p_2,k) = \begin{array}{c|ccc} [.,.] & P_1 & P_2 & H \\ \hline P_1 & 0 & 0 & p_2 \\ P_2 & 0 & 0 & -p_1 \\ H & -p_2 & p_1 & 0 \end{array}$$

$\Omega = K_{ij}(p_1,p_2,k)|_{\mathcal{O}(e)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (matrice nulle).
Il n'y a pas moyen de déterminer la 2-forme symplectique dans ce cas-ci. Pour contourner cette difficulté, nous déterminons la structure de Lie étendue associée au groupe de Lie.

Dans la structure de Lie de $\mathcal{G}$, remplaçons le zéro du crochet de Lie nul par un nouveau générateur N c'est-à-dire :

$$[H,P_1] = -P_2; \qquad [H,P_2] = P_1; \qquad [P_1,P_2] = N.$$

Vérifions si la nouvelle algèbre de Lie engendrée par les champs de vecteurs H, P_1, P_2 et N est une algèbre de Lie.

En d'autres termes, vérifions si les différentes identités de Jacobi sont toutes satisfaites.
En effet :

$$[H,[P_1,P_2]]+[P_1,[P_2,H]]+[P_2,[H,P_1]] = [H,N]-[P_1,P_1]-[P_2,P_2] = [H,N] = 0$$

$$[H,[P_1,N]]+[P_1,[N,H]]+[N,[H,P_1]] = [H,[P_1,N]]+[P_1,0]+[N,-P_2] = [P_1,N]-[N,-P_2] = 0$$

$$[H,[N,P_2]]+[N,[P_2,H]]+[P_2,[H,N]] = [H,[N,P_2]]+[N,-P_1]-[P_2,0] = [N,P_2]-[N,P_1] = 0$$

$$[N,[P_1,P_2]]+[P_1,[P_2,N]]+[P_2,[N,P_1]] = [N,N]+[P_1,[P_2,B]]+[P_2,[N,P_1]] = 0$$

Comme il n'y a pas de contrainte sur le nouveau générateur N, l'algèbre de Lie étendue existe et est une extension centrale de $\mathcal{G}$ et P_1, P_2 génèrent son centre.

De façon générale, l'élément général du groupe de Lie G est engendré par $g = exp(xX)$ où : x est le paramètre du groupe et $X \in \mathcal{G} \cong T_eG$; $(x;X)$ est sans dimension en physique et les paramètres de x et X sont inverses l'un de l'autre. Comme nous avons posé que : $B = P_1P_2 - P_2P_1$, nous avons : $[N] = [P_1P_2] = [P_1][P_2]$. Si α est le paramètre conjugué associé à E, alors $[\alpha] =$ action.
$\Leftrightarrow [\alpha] = \frac{ml^2t^{-1}}{ll} = mt^{-1} = me$ avec $t^{-1} = e$, où α est à la dimension physique la force de Planck [1] (ou le quantum d'action) [7] .
Posons que $N = e\mathcal{H}$, il en découle que $[P_1, P_2] = e\mathcal{H}$

Soient H, P_1, P_2, et $\mathcal{H}$ les champs des vecteurs de l'algèbre de Lie étendue. Posons l'élément général du groupe de Lie $\tilde{G}$ sous forme d'un produit d'exponentielles :

$$g(x) = exp(x_1P_1 + x_2P_2)exp(tH)$$

Pour l'algèbre de Lie étendue, l'élément général s'écrit :

$$\tilde{g} = exp(a\mathcal{H})exp(x_1P_1 + x_2P_2)exp(tH).$$

Il en résulte que :

$$\tilde{g}\tilde{g}^{'} = exp(a\mathcal{H})exp(x_1P_1 + x_2P_2)exp(tH)exp(a^{'}\mathcal{H})exp(x_1^{'}P_1 + x_2^{'}P_2)exp(t^{'}H)$$

En insérant l'élément neutre $exp(t^{'}H)exp(-t^{'}H)$ dans $\tilde{g}\tilde{g}^{'}$, nous avons :

$$\tilde{g}\tilde{g}^{'} = exp[(a+a^{'})\mathcal{H}]exp(x_1P_1 + x_2P_2)\underbrace{exp(tH)exp(x_1^{'}P_1 + x_2^{'}P_2)exp(-tH)}_{I_1}exp[(t+t^{'})H]$$

1. Physicien allemand (1858-1947), Max Planck fut l'un des fondateurs de la mécanique quantique

Or $I_1 = exp((x_1^{'}cost + x_2^{'}sint)P_1 + (-x_1^{'}sint + x_2^{'}cost)P_2)$ $(voir(3.23))$. Cela montre que l'expression $\tilde{g}\tilde{g}^{'}$ devient :

$$\begin{aligned}\tilde{g}\tilde{g}^{'} &= exp[(a+a^{'})\mathcal{H}] \\ &\quad \underbrace{exp(x_1P_1+x_2P_2)exp[(x_1^{'}cost+x_2^{'}sint)P_1+(-x_1^{'}sint+x_2^{'}cost)P_2]}_{I_2} exp[(t+t^{'})H]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}I_2 &= exp(\underbrace{x_1P_1+x_2P_2}_{A}) \exp(\underbrace{(x_1^{'}cost+x_2^{'}sint)P_1+(-x_1^{'}sint+x_2^{'}cost)P_2}_{B}) \\ &\overset{\text{BCH}}{=} exp(A+B+\frac{1}{2!}[A,B]+\frac{1}{3!}[A,[A+B]]+...)\end{aligned}$$

Dans l'expression de I_2, nous avons :

- $A+B = (x_1^{'}cost + x_2^{'}sint + x_1)P_1 + (-x_1^{'}sint + x_2^{'}cost + x_2)P_2$

- $$\begin{aligned}[A,B] &= [x_1P_1+x_2P_2, (x_1^{'}cost+x_2^{'}sint)P_1+(-x_1^{'}sint+x_2^{'}cost)P_2] \\ &= x_1(-x_1^{'}sint+x_2^{'}cost)[P_1,P_2]+x_2(x_1^{'}cost+x_2^{'}sint)[P_2,P_1] \\ &= ex_1(-x_1^{'}sint+x_2^{'}cost)\mathcal{H} - ex_2(x_1^{'}cost+x_2^{'}sint)\mathcal{H}\end{aligned}$$

- $[A,[A,B]] = 0$ car P_1, P_2 et $\mathcal{H}$ commutent.

$\Leftrightarrow I_2 = exp[(x_1+x_1^{'}cost+x_2^{'}sint)P_1+(x_2-x_1^{'}sint+x_2^{'}cost)P_2+\frac{1}{2}e[x_1(-x_1^{'}sint+ x_2^{'}cost) - x_2(x_1^{'}cost + x_2^{'}sint)]\mathcal{H}]$.

Il en résulte que :

$$\begin{aligned}\tilde{g}\tilde{g}^{'} &= exp[(a+a^{'})\mathcal{H}]exp[(x_1+x_1^{'}cost+x_2^{'}sint)P_1+(x_2-x_1^{'}sint+x_2^{'}cost)P_2 \\ &\quad +\frac{1}{2}e[x_1(-x_1^{'}sint+x_2^{'}cost)-x_2(x_1^{'}cost+x_2^{'}sint)]\mathcal{H}]exp[(t+t^{'})H] \\ &= exp[a+a^{'}+\frac{1}{2}e[x_1(-x_1^{'}sint+x_2^{'}cost)-x_2(x_1^{'}cost+x_2^{'}sint)]\mathcal{H}]] \\ &\quad exp[(x_1+x_1^{'}cost+x_2^{'}sint)P_1+(x_2-x_1^{'}sint+x_2^{'}cost)P_2]exp[(t+t^{'})H]\end{aligned}$$

La loi du groupe étendu est donnée par :

$$\begin{aligned}\tilde{G} &= \{(a,x_1,x_2,t)/(a,x_1,x_2,t)(a,x_1^{'},x_2^{'},t^{'}) \\ &= (a+a^{'}+\frac{1}{2}e[x_1(-x_1^{'}sint+x_2^{'}cost)-x_2(x_1^{'}cost+x_2^{'}sint)], x_1+x_1^{'}cost+x_2^{'}sint, \\ &\quad x_2-x_1^{'}sint+x_2^{'}cost, t+t^{'})\end{aligned}$$

Nous vérifions que l'élément neutre $\tilde{g}^{'} = e = (a^{'}, x_1^{'}, x_2^{'}, t^{'})$ est : $\tilde{g}^{'} = (0,0,0,0)$.

$$\mathcal{H} = \frac{\partial}{\partial a^{'}}(\tilde{G}) \mid_e (\frac{\partial}{x_k}) = (1,0,0,0) \mid_e (\frac{\partial}{x_k}) = \frac{\partial}{\partial a}$$

$$P_1 = \frac{\partial}{\partial x_1^{'}}(\tilde{G}) \mid_e (\frac{\partial}{x_k}) = -\frac{e}{2}(x_1 sint + x_2 cost)\frac{\partial}{\partial a} + cost\frac{\partial}{\partial x_1} - sint\frac{\partial}{\partial x_2}$$

$$P_2 = \frac{\partial}{\partial x_2^{'}}(\tilde{G}) \mid_e (\frac{\partial}{x_k}) = \frac{e}{2}(x_1 cost - x_2 sint)\frac{\partial}{\partial a} + sint\frac{\partial}{\partial x_1} + cost\frac{\partial}{\partial x_2}$$

$$H = \frac{\partial}{\partial t^{'}}(\tilde{G}) \mid_e (\frac{\partial}{x_k}) = (0,0,0,1) \mid_e (\frac{\partial}{x_k}) = \frac{\partial}{\partial t}$$

L'algèbre de Lie associée est engendrée par les champs des vecteurs $\mathcal{H}, P_1, P_2, H$ et est définie par la structure de l'algèbre de Lie suivante :

$$[P_1, P_2] = e\mathcal{H}; \quad [H, P_1] = -P_2; \quad [H, P_2] = P_1.$$

Nous vérifions que l'élément inverse $\tilde{g}^{-1} = (a^{'}, x_1^{'}, x_2^{'}, t^{'})^{-1}$ de $\tilde{g}$ est :

$$\tilde{g}^{-1} = (-a, -x_1 cost + x_2 sint, -x_1 sint - x_2 cost, -t)$$

La représentation adjointe du groupe de Lie étendu sur son algèbre de Lie est donnée par : $Ad_g X = \tilde{g} X \tilde{g}^{-1}$, où $X = (\delta a, \delta x_1, \delta x_2, \delta t)$, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
Ad_{(a,x_1,x_2,t)}^{(\delta a,\delta x_1,x_2,\delta t)} &= (\delta, x_1, x_2, t)(\delta a, \delta x_1, x_2, \delta t)(a, x_1, x_2, t)^{-1} \\
&= (a, x_1, x_2, t)(\delta a, \delta x_1, x_2, \delta t)(-a, -x_1 cost + x_2 sint, -x_1 sint - x_2 cost, -t) \\
&= (a, x_1, x_2, t)(\delta a - a + \frac{e}{2}[-\delta x_1(x_1 sint + x_2 cost) - \delta x_2(-x_1 cost + x_2 sint)] \\
&\quad , \delta x_1 - x_1 cost + x_2 sint, \delta x_2 - x_1 sint - x_2 cost, \delta t - t) \\
&= (\delta a - \frac{e}{2}[\delta x_1(x_1 sint + x_2 cost) + \delta x_2(-x_1 cost + x_2 sint)] \\
&\quad + \frac{e}{2}[x_1(-\delta x_1 sint + \delta x_2 cost) - x_2(\delta x_1 cost + \delta x_2 sint)], \\
&\quad \delta x_1 cost + \delta x_2 sint, -\delta x_1 sint + \delta x_2 cost, \delta t).
\end{aligned}$$

Par dualité entre l'algèbre de Lie du groupe étendu et son algèbre de Lie duale et en posant que m, p_1, p_2, E sont les paramètres conjugués de a, x_1, x_2, t respectivement ; $Ad_{(a,x_1,x_2,t)}^{(\delta a,\delta x_1,x_2,\delta t)} = (\delta a^{'}, \delta x_1^{'}, x_2^{'}, \delta t^{'})$ et $Ad_{(a,x_1,x_2,t)}^{*(m,p_1,p_2,k)} = (m^{'}, p_1^{'}, p_2^{'}, E^{'})$. Il en résulte que :

$$\langle Ad_{(a,x_1,x_2,t)}^{*(m,p_1,p_2,k)}, Ad_{(a,x_1,x_2,t)}^{(\delta a,\delta x_1,x_2,\delta t)} \rangle = \langle (m^{'}, p_1^{'}, p_2^{'}, E^{'}), (\delta a^{'}, \delta x_1^{'}, \delta x_2^{'}, \delta t^{'}) \rangle$$

$$\Leftrightarrow \langle (m^{'}, p_1^{'}, p_2^{'}, k^{'}), (\delta a^{'}, \delta x_1^{'}, \delta x_2^{'}, \delta t^{'}) \rangle = \langle (m, p_1, p_2, E), (\delta a, \delta x_1, \delta x_2, \delta t) \rangle$$

$\Leftrightarrow m^{'}\delta a^{'} + p_1^{'}\delta x_1^{'} + p_2^{'}\delta x_2^{'} + E^{'}\delta t^{'} = m\delta a + p_1\delta x_1 + p_2\delta x_2 + E\delta t.$
Idem que précédemment :

$$\begin{cases} \delta a^{'} = (\delta a - \frac{e}{2}[\delta x_1(x_1 sint + x_2 cost) + \delta x_2(-x_1 cost + x_2 sint)] \\ +\frac{e}{2}[x_1(-\delta x_1 sint + \delta x_2 cost) - x_2(\delta x_1 cost + \delta x_2 sint)] \\ \delta x_1^{'} = \delta x_1 cost + \delta x_2 sint \\ \delta x_2^{'} = -\delta x_1 sint + \delta x_2 cost \\ \delta t^{'} = \delta t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^{'} = m \\ -me(x_1 sint + x_2 cost) + p_1^{'} cost - p_2^{'} sint = p_1 \\ -me(-x_1 cost + x_2 sint) + p_1^{'} sint + p_2^{'} cost = p_2 \\ E^{'} = E \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^{'} = m \\ p_1^{'} cost - p_2^{'} sint = p_1 + me(x_1 sint + x_2 cost) \\ p_1^{'} sint + p_2^{'} cost = p_2 + me(-x_1 cost + x_2 sint) \\ E^{'} = E \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} cost & -sint \\ sint & cost \end{vmatrix} = 1$$

$$\bullet p_1 = \begin{vmatrix} p_1 + me(x_1 sint + x_2 cost) & -sint \\ p_1 + me(-x_1 cost + x_2 sint) & cost \end{vmatrix} = p_1 cost + p_2 sint + mex_2$$

$$\bullet p_2 = \begin{vmatrix} cost & p_1 + me(x_1 sint + x_2 cost) \\ sint & p_2 + me(-x_1 cost + x_2 sint) \end{vmatrix} = -p_1 sint + p_2 cost - mex_1$$

D'où : $Ad_g^*(m, p_1 cost + p_2 sint + mex_2, -p_1 sint + p_2 cost - mex_1, E)$.
Nous constatons que m et E sont invariants immédiats de cette action coadjointe du groupe de Lie étendu.
La forme de Kirillov est donnée par :

$K_{ij}(m, p_1, p_2, k) =$

[.,.]	$\mathcal{H}$	P_1	P_2	H
$\mathcal{H}$	0	0	0	0
P_1	0	0	me	p_2
P_2	0	$-me$	0	$-p_1$
H	0	$-p_2$	p_1	0

La restriction de la forme de Kirillov aa l'orbite est donc :
$\Omega = K_{ij}(m, p_1, p_2, k) = \begin{pmatrix} 0 & me & p_2 \\ -me & 0 & -p_1 \\ -p_2 & p_1 & 0 \end{pmatrix}$.

La matrice de Kirillov étant antisymétrique d'ordre impair, il en découle que dét$K = 0$, donc $rgK < 3$.

Comme dét$K = \begin{vmatrix} 0 & me \\ -me & 0 \end{vmatrix} = m^2e^2 \neq 0$ si $m \neq 0$ et e $\neq 0$ donc le $rgK = 2$.

Ce qui signifie qu'il existe un autre invariant I. Nous partons de l'expression où I est l'invariant :

$$K_{ij}(\alpha_k) = \frac{\partial I}{\partial \alpha_k} = 0$$

ou de façon équivalente : $\begin{pmatrix} 0 & me & p_2 \\ -me & 0 & -p_1 \\ -p_2 & +p_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial I}{\partial p_1} \\ \frac{\partial I}{\partial p_2} \\ \frac{\partial I}{\partial E} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} me\dfrac{\partial I}{\partial p_2} + p_2\dfrac{\partial I}{\partial k} = 0 \\ -me\dfrac{\partial I}{\partial p_1} - p_1\dfrac{\partial I}{\partial k} = 0 \\ -p_2\dfrac{\partial I}{\partial p_1} + p_1\dfrac{\partial I}{\partial p_1} = 0 \end{cases} \tag{3.26}$$

$$\frac{\partial I}{\partial \alpha_k} = 1 \tag{3.27}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial I}{\partial \alpha_k} = E + I(p_1, p_2) \tag{3.28}$$

(3.27) dans la première équation du système (3.26) :

$$me\frac{\partial I}{\partial p_2} = -p_2$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial I}{\partial p_1} = -\frac{p_2}{me}$$

en intégrant cette expression par rapport à p_2, nous aurons :

$$I = -\frac{p_2^2}{2me} + I(p_2)$$

(3.27) dans la deuxième équation du système (3.26) :

$$me\frac{\partial I}{\partial p_1} = -p_1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial I}{\partial p_1} = -\frac{p_1}{me}$$

en intégrant cette expression par rapport à p_1, nous aurons :

$$I = -\frac{p_1^2}{2me} + I(p_1).$$

L'expression de l'invariant est :

$$U = E - \frac{p_1^2}{2me} - \frac{p_2^2}{2me}$$

en posant que $0 = E - \frac{p_1^2}{2me} - \frac{p_2^2}{2me}$, il en résulte que : $E = \frac{p_1^2}{2me} + \frac{p_2^2}{2me}$ en posant que $q = \frac{p_1}{me\sqrt{e}}$ et $v = \frac{p_2}{m\sqrt{e}}$, nous aurons :

$$E = \frac{1}{2}me^2q^2 + \frac{1}{2}mv^2.$$

Où E est l'énergie totale du système ; $\frac{1}{2}me^2q^2$ est la quantité de la dimension d'énergie potentielle et $\frac{1}{2}mv^2$ est l'énergie cinétique.
La restriction de la forme de Kirillov à l'orbite est donc :

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & me \\ -me & 0 \end{pmatrix}$$

et son inverse est :

$$\Omega^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{me} \\ \frac{1}{me} & 0 \end{pmatrix}.$$

La forme symplectique est donnée par :

$$\sigma = (dp_1 dp_2) \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{me} \\ \frac{1}{me} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dp_1 \\ dp_2 \end{pmatrix}$$

$$= (dp_1 dp_2) \begin{pmatrix} -\frac{1}{me} dp_2 \\ \\ \frac{1}{me} dp_1 \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{me} dp_1 dp_2 + \frac{1}{me} dp_2 dp_1$$

$$= -\frac{1}{me}(dp_1 dp_2 - dp_2 dp_1)$$

$$= -\frac{1}{me}(dp_1 \wedge dp_2).$$

D'où l'orbite adjointe $\mathcal{O}(m, E)$ est une variété symplectique munie de la forme symplectique $\sigma = -\frac{1}{me}(dp_1 \wedge dp_2)$ l'orbite de la représentation coadjointe et p_1 et p_2 sont les coordonées de cette variété. Comme nous avons posé que $q = \frac{p_1}{me\sqrt{e}}$ et $p = -\sqrt{e}p_2$, la $2-$forme symplectique devient :

$$\sigma_0 = dq \wedge dp.$$

Où σ_0 est la $2-$forme symplectique standard q et p sont les coordonnées de Darboux (voir le théorème de Darboux).

3.6 Réalisation symplectique

Les réalisations symplectiques du groupe de Lie G montre que le système dynamique élémentaire (orbite coadjointe) est une particule de masse m non nulle sous l'action de la force de Planck. En effet, le système est caractérisé par les grandeurs physiques : la masse m et l'inverse du temps $t^{-1} = e$. Nous avons ainsi :

$$L^{(p_1,p_2)}_{(x_1,x_2,t)} = (p_1 cost + p_2 sint + mex_2, -p_1 sint + p_2 cost - mex_1)$$

La restriction de Ad^*_g à l'orbite :

$$\begin{aligned}(q(t), p(t)) &= I_{(0,0,t)^{(p_1,p2)}} \\ &= (p_1 cost + p_2 sint, -p_1 sint + p_2 cost)\end{aligned}$$

Le système d'équations du mouvement sont données par :

$$\begin{cases} p(t) = p_1 cost + p_2 sint = me\sqrt{e}qcost - \frac{1}{\sqrt{e}}psint \\ q(t) = -p_1 sint + p_2 cost = -me\sqrt{e}qsint - \frac{1}{\sqrt{e}}pcost \end{cases} \tag{3.29}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{dp(t)}{dt} = -p_1 sint + p_2 cost = -me\sqrt{e}qsint - \frac{1}{\sqrt{e}}pcost \\ \dfrac{dq(t)}{dt} = -p_1 cost - p_2 sint = -me\sqrt{e}qcost + \frac{1}{\sqrt{e}}psint \end{cases} \tag{3.30}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{dp(t)}{dt} = q(t) \\ \dfrac{dq(t)}{dt} = -p(t) \end{cases} \tag{3.31}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2q(t)}{dt^2} = -\frac{dp(t)}{dt} = -q(t) \tag{3.32}$$

.

C'est l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique dont les solutions sont des fonctions trigonométriques. Telles sont des équations de Hamilton, appelées aussi équations canoniques. En considérant le système Hamiltonien sur la variété M de dimension 2 et en posant que ce système admet n intégrales premières, nous trouvons les équations de Liouville qui sont des solutions exactes, s'exprimant par un nombre fini de calculs intégrales et d'autres opérations algébriques permettant ainsi d'étudier des situations topologiques [14].

Considérons $H(q,p)$ la fonction Hamiltonienne (énergie) et $\frac{1}{me}$ l'inverse de la constante de Planck, p et q les coordonnées canoniques. Le Hamiltonien H s'écrit :

$$H = H_0 + E \tag{3.33}$$

où

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} + \frac{me^2q^2}{2} \tag{3.34}$$

est le Hamiltonien de oscillateur harmonique simple tandis que E est énergie interne. Le système d'équations Hamiltoniennes est donné par :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dot{p} = \dfrac{dp(t)}{dt} = q(t) = \frac{p}{m} \\ \\ \dot{q} = \dfrac{dq(t)}{dt} = -p(t) = -me^2q. \end{cases} \tag{3.35}$$

Les solutions de ce système Hamiltonien sont aussi appelées intégrales du mouvement.

De $\dfrac{dp(t)}{dt} = q(t)$, nous aurons $\int dq = q\int dt \Leftrightarrow p(t) = qt + c$.

De $\dfrac{d^2p(t)}{dt^2} = -q(t) \Leftrightarrow \ddot{q} + q = 0$ en posant que $q = e^{\lambda t}$, nous aurons :

$$\dot{q} = \lambda e^{\lambda t} \quad \text{et} \quad \ddot{q} = \lambda^2 e^{\lambda t}.$$

L'équation devient :

$$\begin{gathered} \lambda^2 e^{\lambda t} + e^{\lambda t} = 0 \\ \Leftrightarrow e^{\lambda t}(\lambda^2 + 1) = 0 \\ \Leftrightarrow e^{\lambda t} = 0 \quad \text{à rejeter ou} \quad \lambda^2 = \pm i. \\ \Leftrightarrow q = e^{\alpha t}(c_1 cos(\beta t) + c_2 sin(\beta t)) \end{gathered} \tag{3.36}$$

Si $\alpha = 0$ et $\beta = 1 \Leftrightarrow q = (c_1 cost + c_2 sint)$

où c_1 et c_2 sont les constantes d'intégrations déterminées par les conditions initiales de $q(0)$ et $\dot{q}(0)$.

Au cas où $t = t_0 = \dfrac{\pi}{2}$ (conditions initiales) ; nous avons :

$q_0 = c_2$ et $\dfrac{dq(t)}{dt} = -c_1 = v_0$

$$\Leftrightarrow q(t) = q_0 cost + v_0 sint \tag{3.37}$$

est l'équation de la particule de Planck [7].

Conclusion

Au terme de notre travail de Mémoire, revenons brièvement sur les notions et les résultats approuvés au long de ses chapitres.

Le premier chapitre nous présente brièvement et successivement certaines notions de base des algèbres des groupes de Lie, des définitions ainsi que les formules utilisées pour la détermination de la loi de l'extension du groupe.

Le second chapitre parle des structures et des variétés symplectiques qui nous permettent d'appréhender tout un ensemble de propriétés formelles des intégrales du mouvement ainsi que les différentes interprétations géométriques.

Finalement, dans le dernier chapitre, nous avons appliqué toutes ces considérations à un cas particulier où nous avons construit les orbites coadjointes afin de décrire la correspondance entre les approches de Kirillov et de Kostant-Souriau dans la réalisations symplectiques associées à un groupe de Lie nilpotent. Ensuite, nous avons utilisé ces résultats pour déterminer le système des équations de la particule de Planck [2]. Nous espérons que notre mise au point pourra servir pour une étude plus complète des représentations et des propriétés de cette théorie. Il serait en effet intéressant d'avoir une classification générale des représentations des orbites coadjointes dans le cas où les champs de vecteurs sont abéliens ou non. Par ailleurs, on peut également s'intéresser à des systèmes mécaniques dynamiques plus complexes.

2. Est une particule subatomique, définie comme un minuscule trou noir dont la longueur d'onde de comptons est identique au rayon de Schwarzschild : sa masse est égale à la masse de Planck

Bibliographie

[1] A. Cannas da Silva. Lectures on Symplectic Geometry. Number n° 1764 in Lecture Notes in Mathematics. Springer, 2001.

[2] Ancochea Bermudez J.M., Goze M., classification des algèbres de Lie nilpotentes complexes de dimension 7, Arch. Maths., 52(1989), 175-185.

[3] A. Cannas da Silva Lecture on symplectic geometry, volume 1764 of Lecture Notes in Mathematics Springer-Verlag, Berlin, 2001.

[4] S. Kobayashi and K. Nomizu. Foundations of Differential Geometry Set. Wiley Classics Library. John Wiley et Sons, 2009.

[5] A.A. Kirillov. Unitary representations of nilpotent lie groups. Russian Mathematical Surveys, 17(4) :53.

[6] S. Benmouloud, B. Ganbouri, SM. Sbai, Structures de Lie-Poisson sur SU(2) et SL(2,R), African Journal of Mathemaical Physics. Vol 2, No 1, (2005) 49-52.

[7] R. Dudley, J. Feldman, B. Kostant, R. Langlands, E. Stein, and Bertram Kostant. Quantization and unitary representations. In Lectures in Modern Analysis and Applications III, volume 170 of Lecture Notes in Mathematics, pages 87–208. Springer Berlin / Heidelberg, 1970.

[8] Souriau, J.M. : Structure des systèmes dynamiques. Dunod, collections Dunod Université, Paris. Réimprimé par Jacques Gabay, Paris (1970).

[9] A.A. Kirillov. Lectures on the Orbit Method. Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, 2004.

[10] Goze, Michel Perturbations of Lie algebra structures. Deformation theory of algebras and structures and applications (Il Ciocco, 1986), 265–355, NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci., 247, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1988. 5.

[11] A. Lichnerowicz, Les variétés de Poisson et leurs algèbres de Lie associées, J. Differential geometry 12 (1977), 253–300.

[12] Liouville,J. :Note sur l'intégration des équations différentielles de la dynamique, présentée au bureau des longitudes le 29 juin 1853. *Journal de Mathématiques pures et appliquées* 20, 137-138 (1855).

[13] A. Weinstein, The local structure of Poisson manifolds, J. Diff. Geom. 18 (1983), 523–557.

[14] L. Ekeland and H. Hofer. Symplectic topology and Hamiltonian dynamics. Math.Z., 200(3) : 355-378, 1989.

[15] A. Kirillov, Local Lie algebras, Russian Math Surveys 31 (1976), 55–75.