UNIVERSITÉ DU BURUNDI
GRENIER DU SAVOIR DU BURUNDI
Dépôt institutionnel officiel
https://repository.ub.edu.bi

Inégalités de chen-ricci sur une hyper surface d'une variété Statistique

Irakoze, Yves; Sous la direction de : Prof. Karimumuryango Ménédore

2024-06
UB, ENS
https://repository.ub.edu.bi/handle/123456789/2040

Document téléchargé depuis le **Grenier du Savoir du Burundi** — https://repository.ub.edu.bi

UNIVERSITE DU BURUNDI ET ECOLE NORMALE SUPERIEURE

MASTER CONJOINT EN DIDACTIQUE DES SCIENCES
OPTION : MATHEMATIQUES

INEGALITES DE CHEN-RICCI SUR UNE HYPERSURFACE D'UNE VARIETE STATISTIQUE

Par :

IRAKOZE YVES

Mémoire
Présenté et défendu publiquement en vue de l'obtention du
Diplôme de Master en didactique des sciences mathématiques.

Sous la direction de :
Prof. KARIMUMURYANGO Ménédore

Bujumbura, juin 2024

Composition du Jury

Pr. NDAYIRUKIYE Domitien (*Président du Jury*)
Dr. NIZIGAMA Gloriose (*Secrétaire du Jury*)
Pr. NIBIRANTIZA Aboubacar (*Membre du Jury*)
Pr. KARIMUMURYANGO Ménédore (*Directeur de Mémoire*)

Dédicace

Je dédie ce travail ;
A ceux qui sont la source de mon inspiration et de mon courage, à qui je dois de l'amour et la reconnaissance.
A mon père qui m'a donné la confiance et le courage .
A ma mère qui m'a donné l'amour et l'affection : Mère.
A mon frère IRIHO Kevin.
A mes soeurs Inès, Diane et Camelle.
A mon beau frère Jean de Dieu.
A tous les proches que j'ai mentionnés et les autres que je n'ai pas pu mentionnés ici .

Remerciements

Tous d'abord, nous souhaitons exprimer notre profonde gratitude à Dieu tout Puissant qui m'a donné la force et le courage d'accomplir ce travail. La première personne que nous tenons à remercier est notre encadreur Professeur Ménédore KARIMUMURYANGO pour l'orientation, ses efforts fournis, ainsi que pour ses conseils pertinents du début jusqu'à la fin de ce travail.
Nos vifs rémerciements sont adressés aux membres de jury pour l'interêt qu'ils ont porté à notre mémoire en acceptant de l'examiner et au Docteur Hans Fotsing pour tous ses conseils bienveillants. Leurs recommandations nous ont apporté des idées nouvelles pour les études futures. Nous tenons aussi à exprimer notre rémerciement à nos familles et nos amis qui par leur prière et leur encouragement, nous avons eu le courage de surmonter les obstacles.

Résumé

L'objectif de ce mémoire est de contribuer à étudier les inégalités de Chen-Ricci pour l'hypersurface d'une variété statisique. Ainsi, nous avons défini les notions de base de la géométrie différentielle, des variétés statistiques et de l'hypersurface d'une variété statistique. Après avoir étudié les courbures d'une variété statistique et les courbures de Ricci pour l'hypersurface d'une variété statistique, nous avons étudié quelques inégalités de type Chen-Ricci pour l'hypersurface d'une variété statistique.
Enfin, nous avons établi une inégalité impliquant la courbure scalaire et la courbure moyenne sur une hypersurface d'une variété statistique.
Les mots clés :
Variété riemannienne, Courbure scalaire, Courbure de Ricci, Inégalité de Chen-Ricci, Connexion duale, Variété statistique, Hypersurface d'une variété statistique.

Abstract

The objective of this memory is to contribute studying the inequalities of Chen-Ricci for the hypersurface of a statistical manifold. Thus, we have defined the basic notions of differential geometry, statistical manifold and statistical manifold of the hypersurface. After studying the curvatures of a statistical manifold and the Ricci curvatures for the hypersurface of a statistical manifold, we studied some Chen-Ricci type inequalities for the hypersurface in statistical manifold.
Finally, we have established an inequality involving scalar curvature and mean curvature of the hypersurface in statistical manifold.
Key words : Riemannian manifold, scalar curvature, Ricci curvature, Chen-Ricci inequality, dual connections, Statistical manifolds, Hypersurface in statistical manifold.

Table des matières

Composition du Jury i

Dédicace ii

Remerciements iii

Résumé iv

Abstract v

Table des Matières vi

Table des figures viii

Avant-propos ix

Introduction générale 1

1 Quelques notions de la géométrie différentielle. 3
- 1.1 Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$ . . . 3
  - 1.1.1 Difféomorphismes, Submersions, Immersions . . . 3
  - 1.1.2 Définitions équivalentes d'une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ . . . 6
  - 1.1.3 Espace tangent en un point de la sous-variété . . . 8
  - 1.1.4 Variétés différentielles . . . 9
- 1.2 Espaces semi-euclidiens . . . 11
  - 1.2.1 Formes bilinéaires et quadritiques . . . 11
  - 1.2.2 Produits scalaires . . . 12
  - 1.2.3 Orthogonalité et isotropie . . . 13
  - 1.2.4 Base Orthonormale . . . 13
- 1.3 Géométrie Riemannienne . . . 14
  - 1.3.1 Métriques Semi-riemanniennes . . . 14
  - 1.3.2 Connexions Linéaires . . . 14

1.3.3 Champ des tenseurs de torsion et Courbures 15

2 Hypersurface d'une variété statistique 18
2.1 Notions de bases sur les sous-variétés statistiques 18
2.2 Hypersurface d'une variété statistique 27

3 Inégalités de Chen-Ricci sur l'hypersurface d'une variété statistique 31
3.1 Courbure de Ricci d'une sous-variété d'une variété statistique. 31
3.2 Courbure de Ricci d'une sous-variété d'une variété statistique à courbure sectionnelle constante c. 32
3.3 Inégalités de Chen-Ricci pour les sous-variétés statistiques dans la variété statistique de courbure constante. 36
3.4 Inégalités de Chen-Ricci sur l'hypersurface d'une variété statistique 39
3.4.1 Courbure de Ricci sur l'hypersurface d'une variété statistique 39
3.4.2 Inégalités de Chen-Ricci sur l'hypersurface d'une variété statistique 42
3.5 Inégalité sur la courbure scalaire d'une hypersurface d'une variété statistique. 43

Conclusion 48

Récommendation 49

Bibliographie 51

Table des figures

1.1 figure d'une fonction locale par redressement 6
1.2 figure d'une fonction implicite 7
1.3 figure d'une fonction locale par paramétrage 7
1.4 figure d'une fonction locale par graphe 8

Avant-propos

Le présent mémoire a été une inspiration de mon directeur de mémoire de de s'orienter dans le domaine de la géométrie.
En effet, mes premières pensées les plus profondes se tournent vers mon directeur de mémoire qui a conduit mon travail de recherche avec une haute compétence et une grande disponibilité. Cette mémoire s' oriente dans le domaine de la géométrie différentielle et en géométrie des variétés statistiques qui est une blanche relativement récente des mathématiques qui utilise pour son inférence statistique des outils de la géométrie différentielle en modélisant l'information. L'objectif de ce mémoire donne une contribution à l'étude des inégalités de Chen-Ricci pour l'hypersurface d'une variété statistique.

Introduction générale

La célébre théorème de Nash en 1956 de l'immersion isométrique d'une variété riemannienne dans un espace euclidien a donné une motivation très importante et efficace pour voir chaque variété riemannienne comme sous-variété dans un espace euclidien[4].
Néanmoins un problème de la découverte des rélations nettes et simples entre les invariants intrinséques et extrinséques d'une sous-variété riemmanienne devient l'un des problèmes fondamentaux de la théorie des sous-variétés. En effet, les principaux invariants extrinséques d'une sous-variété est la courbure moyenne et les principaux invariants intrinséques d'une sous-variété inclue la courbure de Ricci et la courbure scalaire[8]. En 1996, Chen a établi une inégalité optimale impliquant la courbure de Ricci et la courbure moyenne des sous-variétés dans un espace réel[5]. Cette inégalité est connue sous le nom d'une inégalité de Chen-Ricci.
Le nom de la géométrie statistique est relativement nouveau, c'est une blanche des mathématiques utilisée pour modéliser l'information en utilisant des notions de la géométrie différentielle pour son inférence statistique. Pour toute variété Riemannienne (M, ∇, g) est associée une variété statistique muni d'une connexion duale (M, ∇^*, g)[13]. La notion des connexions duales a été introduite par AMARI en 1985 ; en 1990 T. KUROSE a remarqué qu'il existe une relation étroite entre la géométrie de la variété statistique et la géométrie affine[9] ; de ce fait un travail a été reformulé en étudiant les immersions affines des variétés statistiques dans l'espace affine ; en 2009 Furuhata a introduit l'hypersurface d'une variété statistique en une version complexe de la notion des structures statistques[7].
Dans ce mémoire, nous allons nous focaliser sur l' étude des inégalités de Chen-Ricci sur l'hypesurface d'une variétés statistiques et à établir les inégalités de la courbure scalaire sur l'hypersurface d'une variété statistique. Il est structuré en trois chapitres ; du pemier chapitre, nous allons nous interesser à l' étude de quelques notions la géomérie différentielle.
Le deuxième chapitre est consacré à l'étude de l'hypersurface d'une variété statistique où on va introduire les notions de bases sur les sous-variétés statistiques et l'hypersurface d'une variété statistique .

Dans le troisième chapitre, nous allons étudier les inégalités de Chen-Ricci sur l'hypersurface d'une variété statistique et établir les inégalités sur la courbure scalaire sur l'hypersurface d'une variété statistique.

Chapitre 1

Quelques notions de la géométrie différentielle.

1.1 Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$

Une partie $N \subset \mathbb{R}^n$ est une sous-variété de dimension p de $\mathbb{R}^n$ si :
• $\forall x \in N$, il existe un ouvert U voisinnage de x et un ouvert V voisinnage de 0 et un difféomorphisme $\phi : U \longrightarrow V$ tel que $\phi(U \cap N) = V \cap (\mathbb{R}^P \times \{0\})$.[10]
On dit qu'elle est de codimension n-p dans $\mathbb{R}^n$.

1.1.1 Difféomorphismes, Submersions, Immersions

On se donne n, p $\in \mathbb{N}^*$, $p \leqslant n$, et k$\in N^* \cup \{\infty, \omega\}$; pour unifier les énnoncés, on parlera des fonctions de régularité, ou de classe C^ω, pour les fonctions analytiques réelles, c'est-à-dire développable en série entière autour de chaque point.[11]

Difféomorphismes

Définition 1.1. *Soient U et V des ouverts de $\mathbb{R}^n$. On dit que $f : U \longrightarrow V$ est un C^k-difféomorphisme si et seulement si*
• *f est une bijection*
• *f et f^{-1} sont de classe c^k. On dit que f est un c^k-difféomorphisme local en $x \in U$, s'il existe U_x et $V_{f(x)}$ voisinages respectifs de x dans U et de f(x) dans V tels que $V_{f(x)} = f(U_x)$ et l'application induite $f : U_x \longrightarrow V_{f(x)}$ est un C^k-difféomorphisme.*

Exemple 1.1. *Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par f(y, z) = $(e^y + e^z, y + z)$.*
Pour montrer que l'application f est un C^1-difféomorphisme ; il est important de calculer la matrice jacobienne de f et montrer que le déterminant est différent de 0.
En effet ; $J_{f(y,z)} = \begin{pmatrix} e^y & e^z \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

•*Il est claire que les dérivées partielles sont continues sur* $\mathbb{R}^2$.
• *Ainsi* $det(J_{f(y,z)}) = e^y - e^z \neq 0$ *ce qui montre que la matrice jacobienne admet une inverse.*
Conclusion *: Comme ces deux étapes sont verfiées, on peut dire que f est un* C^1*-difféomorphisme.*

Immersions

Définition 1.2. *Soit n,* $p \in \mathbb{N}^*$ *U, un ouvert de* $\mathbb{R}^p$ *et* $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *une application de classe* C^1*. On dit que f est une immersion, si pour tout* $x \in U$*, la différentielle df(x) :* $\mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *est injective. (i.e.La matrice jacobienne est de rang p).*

Exemple 1.2. *Soit l'application suivante, elle illustre l'exemple d'une immersion*

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x, y) \longrightarrow (x, y, 0)$$

la matrice jacobienne de f en (x, y) est
$j_{f(x,y)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. *Cette matrice est toujours de rang 2 (la dimension égal à la dimension de l'éspace de départ) ; donc f est une immmersion.*

Submersions

Définition 1.3. *Soit n,* $p \in \mathbb{N}^*$*, U un ouvert de* $\mathbb{R}^p$ *et* $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *une application de classe* C^1*. On dit que f est une submersion, si pour tout* $x \in U$*, la différentielle df(x) :* $\mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *est surjective. (i.e.La matrice jacobienne est de rang n).*

Exemple 1.3. *Soit l'application suivante, elle illustre l'exemple d'une submersion*

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x, y, z) \longrightarrow (x, y)$$

la matrice jacobienne de f en (x, y) est
$j_{f(x,y,z)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. *Cette matrice est toujours de rang 2 (la dimension égal à la dimension de l'éspace d'arrivée), donc f est une submersion.*

Remarque 1.1. *Soient*

$$\begin{aligned} f : U \subset \mathbb{R}^p &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (x_1, ..., x_p) &\longrightarrow (f_1(x), ..., f_n(x)) \end{aligned}$$

alors
•*f est une immersion en x si le rang(Jf(x)) = p.*
•*f est une submersion en x si le rang(Jf(x)) = n.*

Théorème 1.1. *[11][Forme normale locale des immersions] Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$ contenant 0 et soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une immersion C^k en 0 telle que f(0) = 0. Alors il existe ω un C^k-diffeomorphisme local en $0 \in \mathbb{R}^n$ tel qu'au voisinage de 0.*
$\omega \circ f(x^1, ..., x^n) = (x^1, ..., x^p, 0, ..., 0)$.

Dmonstration
Soient

$$\begin{aligned} f : U \subset \mathbb{R}^p &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (x_1, ..., x_p) &\longrightarrow (f_1(x), ..., f_p(x), ..., f_n(x)) \end{aligned}$$

est une immersion en 0(i.e $rang_0$f = p). En effet, on peut supposer que

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_p} \end{vmatrix}_{(0)} \neq 0$$

Théorème 1.2. *[11][Forme normale locale des Submersions] Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant 0 et soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^{n-p}$ une submersion C^k en 0 telle que f(0) = 0. Alors il existe ω un C^k-diffeomorphisme local en $0 \in \mathbb{R}^n$ tel qu'au voisinage de 0 :*
$\omega \circ f(x^1, ..., x^n) = (x^1, ..., x^{n-p}, 0, ..., 0)$.

Dmonstration
Soient

$$\begin{aligned} f : U \subset \mathbb{R}^p &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (x_1, ..., x_p) &\longrightarrow (f_1(x), ..., f_n(x)) \end{aligned}$$

est une submersion en 0(i.e $rang_0$f = n). En effet, on a que

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}_{(0)} \neq 0$$

1.1.2 Définitions équivalentes d'une sous-variété de $\mathbb{R}^n$

Définition 1.4. *Soit M sous ensemble de $\mathbb{R}^n$. On dit que M est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension p et de classe C^k s'il vérifie l'une des assertions équivalentes suivantes[11] :*

(1.définition locale par redressement) *Pour tout x de M, il existe des voisinages respectifs U de x dans $\mathbb{R}^n$ et V de 0 dans $\mathbb{R}^n$, ainsi qu'un C^k-difféomorphisme $\varphi : U \longrightarrow V$, envoyant x sur 0, et telle que $\varphi(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^p \times \{0\})$.*

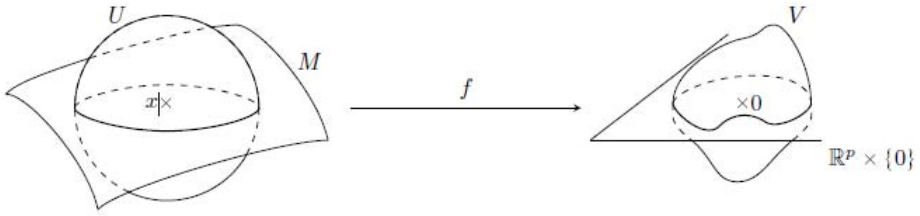


FIGURE 1.1 – figure d'une fonction locale par redressement

Exemple 1.4. *Soit l'application suivante :*

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longrightarrow (x, y - x^2) \end{aligned}$$

est de classe C^∞ et satisfait $\varphi(P) = \mathbb{R}^P \times 0$. Pour montrer que φ est C^∞-difféomorphisme locale par redressement au voisinnage du paint $(x, y) \in P$, il suffit de calculer le jacobien et montre qu'il est inversible.
$d\varphi(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & -2x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Alors, $d\varphi(x, y)$ est inversible pour tout $(x, y) \in P$ car le dértiminant du jacobien est différent de 0.

(2.définition locale par fonction implicite) *Pour tout x de M, il existe un voisinage U de x dans $\mathbb{R}^n$ ainsi que $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}^{n-p}$ une C^k-submersion en x, telle que $U \cap M = \varphi^{-1}\{0\}$.*

Exemple 1.5. *Les cercles de $\mathbb{R}^2$ sont des sous-variétés de de dimension 1. En effet le cercle C de centre $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ et de rayon $r > 0$ est l'ensemble des (x, y) tels que*
$f(x, y) = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - r = 0$

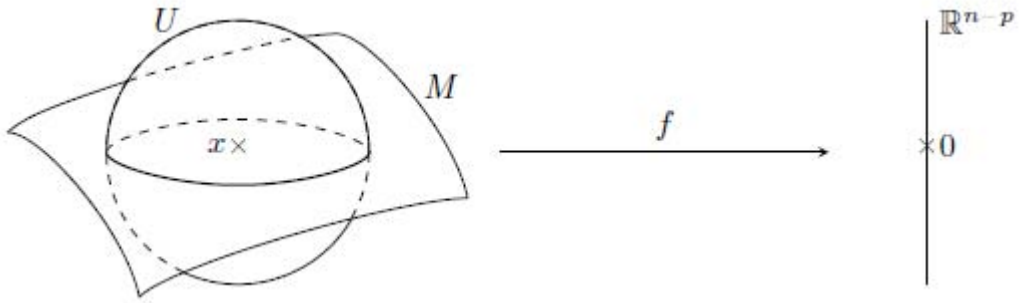


FIGURE 1.2 – figure d'une fonction implicite

En effet, pour $(x, y) \in C$ *on a* $J_{f(x,y)} = (2(x - x_0), 2(y - y_0)) \neq 0$ *donc* $d_{(x,y)}f$ *est nécessairement surjective et par conséquent* f *est une submersion.*

(3.définition locale par paramétrage) *Pour tout* x *de* M*, il existe des voisinages respectifs* U *de* x *dans* $\mathbb{R}^n$ *et* V *de 0 dans* $\mathbb{R}^p$*, ainsi que* $\varphi : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *une* C^k*-immersion en 0, envoyant 0 sur* x*, et induisant un homéomorphisme* $V \longrightarrow U \cap M$*.*

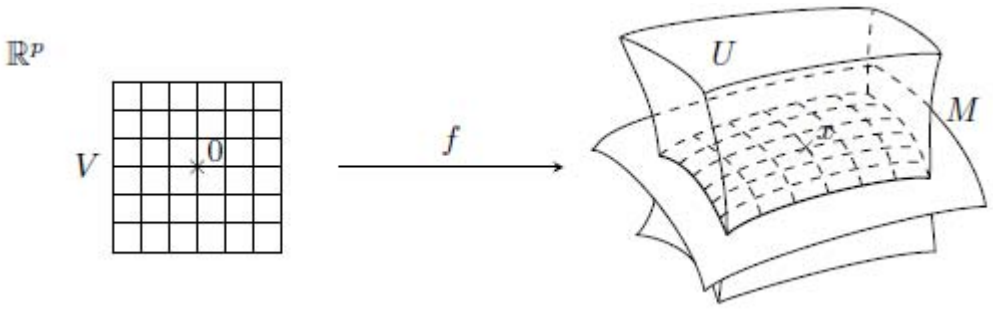


FIGURE 1.3 – figure d'une fonction locale par paramétrage

Exemple 1.6. *Soit l'application ;*
$\varphi : x \in \mathbb{R} \longrightarrow (x_0 + x, (x_0 + x)^2)$ *est de classe* C^p*, satisfait* $\varphi(0) = (x_0, x_0^2)$ *et* $d\varphi(0) = (1, 2x_0)$ *d'0ù* $d\varphi(0) \neq 0$*.* $d\varphi(0)$ *est injective*

(4.définition locale par graphe) *Pour tout* x *de* M*, on a un voisinage* U *de* x *dans* $\mathbb{R}^n$*, une identication linéaire* $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$*, un ouvert* V *de* $\mathbb{R}^p$ *et une fonction* $\varphi : V \longrightarrow \mathbb{R}^{n-p}$ *de* C^k *classe telle que* $U \cap M$ *soit le graphe de f, i.e.* $U \cap M = \{(y, \varphi(y)) | y \in V\}$*.*

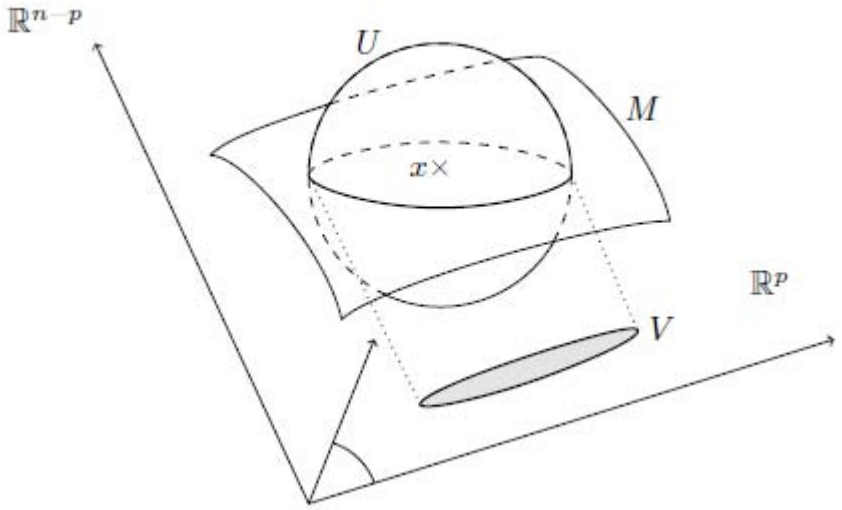


FIGURE 1.4 – figure d'une fonction locale par graphe

Exemple 1.7. *Soit l'application :*
$\varphi : x \in \mathbb{R} \longrightarrow x^2$ *est de classe* c^∞ *et* $P = \{(x, \varphi(x)), x \in \mathbb{R}\}$.

1.1.3 Espace tangent en un point de la sous-variété

Soit M une sous-variété C^1 de $\mathbb{R}^n$ de dimension p, et un point x ∈ M.

Définition 1.5. *Un vecteur* $v \in \mathbb{R}^n$ *est tangent à M en x s'il existe* $\delta \geqslant 0$ *et* $c :]-\delta, \delta[\longrightarrow \mathbb{R}^n$ *une courbe* C^1 *à image dans M telle que : c(0) = x et ć(0) = v.*
On note T_xM *l'ensemble des vecteurs tangents à M en x, que l'on appelle sous-espace (vectoriel) tangent à M en x (*$x + T_xM$ *étant le sous-espace affine tangent à M en x).*

Proposition 1.1.

1. *Si U est un voisinage ouvert de x dans* $\mathbb{R}^n$*, V un voisinage ouvert de 0 dans* $\mathbb{R}^n$*, et* $f : U \longrightarrow V$ *un* C^1*-difféomorphisme tel que* $f(x) = 0$ *et* $f(U \cap M) = (\mathbb{R}^p \times 0) \cap V$*, alors :* $T_xM = (df_x)^{-1}((\mathbb{R}^p \times 0)$.
2. *Si U est un voisinage ouvert de x dans* $\mathbb{R}^n$*, et* $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^{n-p}$ *une submersion* C^1 *en x telle que* $U \cap M = f^{-1}(f(x))$*, alors :* $T_xM = ker(df_x)$.
3. *Si U est un voisinage de 0 dans* $\mathbb{R}^p$*, U un voisinage de x dans* $\mathbb{R}^n$*, et* $f : V \longrightarrow U$ *un paramétrage local de M en x avec* $f(0) = x$*, alors :*

T_xM = *Im* (df_0).

Démonstrations

(1) La donnée d'une courbe c tracée sur M avec c(0) = x et $\acute{c}(0)$ = v équivaut à celle de $f \circ c$ tracée sur $f(U \cap M)$ avec $f \circ c(0)$=0 et $\widehat{f \circ c}(0)$ = $df_x(v)$, Or les vecteurs tangents à une courbe linéaire sont les vecteurs de cette courbe / droite. En particulier, $T_xM$est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension p.

(2) Si c est une courbe tracée sur M telle que c(0) = 0 et $\acute{c}(0)$ = v, alors comme $f(c(t))$ = f(x) pour tout s petit car f est une équation locale de M près de x, et donc $df_x(v) = 0$: v$\in$ $ker(df_x)$.
Pour l'inclusion réciproque, on conclut simplement comme suit : T_xM et $ker(df_x)$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$, dimT_xM = p, et f est une submersion donc dim$ker(df_x)$ = n-(n-p). Ainsi $T_xM = ker(df_x)$.

(3) Soit U $\in \mathbb{R}^p$, soit δ une courbe C^1dans V, avec $\delta(0) = 0$ et $\acute{\delta}(0)$ = V .Alors $c := f \circ \delta$ est une courbe C^1 tracée sur M, telle que c(0) = $f(\delta(0))$ = y et $\acute{c}(0) = df_0 v$.
L'inclusion réciproque se traite à nouveau par un argument de dimension : dim($Imdf_0$) = p, car df_0 est injective (f est une immersion en 0).

1.1.4 Variétés différentielles

Définition 1.6. *Si k>0, une variété différentielle de classe C^k de dimension n est un espace topologique M séparable à base dénombrable d'ouverts, muni d'un atlas de cartes C^k maximal à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.*

Remarque 1.2. • *On peut remplacer séparé à base dénombrable d'ouverts par métrisable séparable, ou dénombrable à l'infini .*
• *Une variété différentielle est une variété topologique, plus généralement, une variété C^k est une variété C^l dès que k$\geqslant$l.*

Exemples des variétés différentielles

Exemple 1.8. *L'espace $\mathbb{R}^n$ muni d'une toplologie usuelle et $\mathbb{A}$ =$\{(\mathbb{R}^n, id_{\mathbb{R}^n})\}$ est une variété différentielle de dimension n et de classe C^∞.*

Exemple 1.9. *Un autre exemple est celui d'une sphère S^n. Pour chaque entier naturel n, on désigne par S^n la sphère unité de $\mathbb{R}^{n+1}$.*

S^n=$\{(x^1, x^2, ..., x^{n+1}) \in R^{n+1}$ *tels que* $\sum_i^{n+1}(x^i)^2 = 1\}$ *muni d'une toplologie induite par la topologie de* $\mathbb{R}^{n+1}$ *à une structure de variété différentielle de dimension n définie par l'atlas suivante :*
$\mathbb{A}$=$\{(U, \varphi), (V, \psi)\}$
Avec
- U=$S^n \backslash \{0, ..., 0, 1\}$
- V=$S^n \backslash \{0, ..., 0, -1\}$

et les applications
- φ : $U \longrightarrow \mathbb{R}^m$
- ψ : $V \longrightarrow \mathbb{R}^n$

étant données les projections stéréographiques sur l'hyperplan $x^{n+1} = 0$ *à partir des points N(0, ..., 0, 1) et S(0, ..., 0, -1) appelées pôles Nord et pôles Sud.*

En effet, prenons un cas où n=2 on a :
- U_N=$S^2 \backslash N$=$\{0, 0, 1\}$
- U_S=$S^2 \backslash S$=$\{0, 0, -1\}$

ou de la même manière on a :

- U_N=$\{(x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3 : x^3 \neq 1\}$
- U_S=$\{(x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3 : x^3 \neq -1\}$.

. Les projections stéréographiques sur cette hyperplan sont :
- φ : $U_N \longrightarrow \mathbb{R}^2$
- ψ : $U_S \longrightarrow \mathbb{R}^2$

. Soit d la droite vectorielle vue comme combinaison affine des points et λ *un scailaire non nul*

$$\begin{aligned} d &= \{\lambda x + (1-\lambda)N\} \\ &= \left\{\lambda(x^1, x^2, x^3) + (1-\lambda)(0, 0, 1)\right\} \\ &= \left\{(\lambda x^1, \lambda x^2, \lambda x^3 + (0, 0, (1-\lambda)))\right\} \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} d &= \{\lambda x + (1-\lambda)N\} \\ &= \left\{\lambda(x^1, x^2, x^3) + (1-\lambda)(0, 0, -1)\right\} \\ &= \left\{(\lambda x^1, \lambda x^2, \lambda x^3 + (0, 0, -(1-\lambda)))\right\}. \end{aligned}$$

. L'image par φ_N *des points de* U_N *et donc l'intersection de* $d \cap \{x^3\} = 0$ *. Cela donne :*

$\lambda x^3 + (1-\lambda) = 0$
$\lambda = \frac{1}{1-x^3}$.
Ainsi :

$$\varphi : U_N \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x^1, x^2, x^3) \longmapsto (\frac{x^1}{1-x^3}, \frac{x^2}{1-x^3})$$

de la même manière l'image par φ_S des points de U_S et donc l'intersection de $d \cap \{x^3\} = 0$, on obtient :
$\lambda x^3 - (1-\lambda) = 0$
$\lambda = \frac{1}{1+x^3}$
Ainsi :

$$\varphi : U_S \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x^1, x^2, x^3) \longmapsto (\frac{x^1}{1+x^3}, \frac{x^2}{1+x^3}).$$

L'ensemble$\{\varphi_N, \varphi_S\}$ définit un atlas de classe C^∞ sur la sphère. Ce qui confère à la sphère S^2 une structure de variété différentiable de dimension 2 et de classe C^1.

Propriétés

- Toute variété de dimension zéro est un sous-ensemble discret de $\mathbb{R}^n$ et tout sous-ensemble discret est une variété de dimension zéro.
- Toute variété est un espace topologique localement compact et localement connexe par arcs(car localement homéomorphe à $\mathbb{R}^p$). Il s'ensuit que pour une variété, les propriétés d'être connexe ou d'être connexe par arcs sont équivalentes.
- Les variétés de dimension 1 sont parfois appelées courbes et les variétés de dimension 2 sont couramment appelées surfaces.

1.2 Espaces semi-euclidiens

1.2.1 Formes bilinéaires et quadritiques

Définition 1.7. *Soit E un espace vectoriel de dimension n. Une application $f : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ est appelée forme bilinéaire symétrique si elle est linéaire en chacune de ses variables et vérifie.*

$$f(x,y) = f(y,x) \forall x, y \in E. \tag{1.1}$$

Soit f une forme bilinéaire symétrique sur E. On définit sur E une fonction Q_f appelée forme quadratique associée à f par $Q_f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que

$$Q_{f(x)} = f(x,x) \forall x \in E. \tag{1.2}$$

Exemple 1.10. *L'application* $((x_1,x_2),(y_1,y_2)) \longrightarrow x_1y_2 + y_1x_2$

est une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}$. Sa forme quadratique associée est donnée par $Q(x_1,x_2) = 2x_1x_2$, certains vecteurs ont donc une image nulle ou négative.

1.2.2 Produits scalaires

Soit f une forme bilinéaire symétrique sur E dont on note Q_f la forme quadratique associé. On dit que f est :

- Positive (respectivement négative) si Q(x)$\geqslant$0 (respictevement Q(x)$\leqslant$0) pour tout x$\in$E.
- définie Positive (respectivement définie négative) si Q(x)>0 (respictevement Q(x)<0) pour tout x$\in$E.
- non dégénée si pour tout y $\in$E, f(x, y) = 0, i.e x = 0.

Définition 1.8. *Un produit scalaire euclidien sur E est une forme bilinéaire symétrique définie positif sur $E \times E$.*

Soit f une forme bilinéaire symétrique sur E. On dit que f est définie si elle est définie positive ou négative, qu'elle est semi-définie si elle est positive ou négative. Soit (E,β) un espace semi-euclidien ;

- Un vecteur v de E est dit de type temps, si f(v, v)<0 ;
- v est de type espace, si f(v, v)>0 ou v = 0.
- v est de type lumière (ousitrope), si f(v, v) = 0 ou $v \neq 0$.

Remarque 1.3. *Soit E un espace vectoriel de dimension n, β une forme bilinéaire sur E.*
β est non dégénée sur E, si et seulement si elle est de rang n, c'est-à-dire si son dicriminant est est non nul. β est définie, elle est nécessairement non dégénérée.

1.2.3 Orthogonalité et isotropie

Définition 1.9. *Soit β une forme bilinéaire symétrique sur E et x, y sont des vecteurs de E. On dit que x et y sont orthogonaux et on note $x \perp y$ si $\beta(x, y) = 0$.*

Un vecteur est dit isotrope s'il est orthogonal à lui *même*, c'est-à-dire si $\beta(x, x) = 0 \Leftrightarrow Q(x) = 0$. L'ensemble des vecteurs isotropes est appelé *cône* isotrope de β.
L'ensemble de tous les vecteurs orthogonaux à tous les vecteurs de E est appelé le noyau de β.

Définition 1.10. *Soit F un sous espace vectorielde de E. On appelle orthogonal de F et on note $F^{\perp}$ l'ensemble des vecteurs de E qui sont orthogonaux à tous les vecteurs de F.*

Proposition 1.2. *Si f est un produit scalaire et si F est un sous-espace vectoriel de E, on a : $dimF + dimF^{\perp} = n$ et $(F^{\perp})^{\perp} = F$*

Preuve : Considérons une base $(e_1, ..., e_k)$ de F que l'on complète en une base $(e_1, ..., e_n)$ de E. Un vecteur $\sum x_i e_i$ de E est orthogonal à F si et seulement si elle vérifie $\sum_{j=1}^{n} f_{i,j} x_j = 0 \quad \forall 1 \leq i \leq k$ qui est un système linéaire de rang k car f étant non dégénéré, sa matrice est inversible. Donc la dimension de $F^{\perp}$ est n-k où k est la dimension de F. Il est clair que $F \perp F^{\perp}$, donc $F \subset (F^{\perp})^{\perp}$. Mais $dim(F^{\perp})^{\perp} = n - (n - dimF) =$ dimF. Par conséquent F = $(F^{\perp})^{\perp}$ ■

Lemme 1.1. *Soit f un produit scalaire sur E et F un sous espace de E. Alors F est non dégénéré si et seulement si $E = F \oplus F^{\perp}$. De plus F est non dégénéré si et seulement si $F^{\perp}$ l'est.*

Définition 1.11. *Soit (E, β) un espace semi-euclidien et W un sous espace de E. On appelle radical de W et on note RadW, le sous-espace de E défini par :*

$$RadW = \{w \in W,\ \beta(w, u) = 0\ \forall\ u \in W\} \ = \ W \cap W^{\perp} \tag{1.3}$$

1.2.4 Base Orthonormale

Soit f une forme bilinéaire. On appelle norme de x le nombre $|f(x, x)|^{\frac{1}{2}}$. Un vecteur est dit unitaire s'il est de norme égale 1. On dit qu'une famille de vecteurs qui la composent sont deux à deux orthogonaux.

1.3 Géométrie Riemannienne

1.3.1 Métriques Semi-riemanniennes

Définition 1.12. *Un tenseur métrique ou métrique semi-riemannienne sur M, est une famille des applications* $g_x : T_xM \times T_xM \longrightarrow \mathbb{R}(x \in M)$, *telle que :*
• *Pour tout* $x \in M$, g_x *est une forme bilinéaire symétrique et non-dégénérée.*
• *Si X,* $Y \in \Gamma(TM)$, *la fonction* $g(X,Y)(x) = g_x(X,Y)$ *est différentiable.*
• *L' indice de g est constant, et noté Ind M, c'est-à-dire :*
$\exists p \in \mathbb{N}, \forall x \in M, Ind(T_xM) = p($ *par apport* $g_x)$

Notation 1.1. *g(u, v) est noté* $\langle u, v \rangle$.

Définition 1.13. *Une varité Riemannienne (M, g)est une variété différentielle M munie de la métrique Riemannienne g.*

Locallement, dans un système de coordonnées (U, x) sur M ;

$$g = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} dx^i \otimes dx^j, \tag{1.4}$$

Avec $g_{ij} = g(\partial_{x_i}, \partial_{x_j})$ et $dx^i \otimes dx^j$(u, v) = $dx^i(u).dx^j(v)$ u,v $\in T_pM$.
On note par $\Gamma(TM)$ l'ensemble de tous les champs de vecteurs de classe C^∞ sur M.

1.3.2 Connexions Linéaires

Une connexion linéaire désigne la dérivée directionnelle dans le cas euclidien.

Définition 1.14. *Une connexion linéaire sur une variété différentiable M est une application linéaire* $\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \longrightarrow \Gamma(TM)$ *définie par les propriétés suivantes :*

- $\nabla_X Y$ *est* $C^\infty(M)$*-linéaire par à rapport X;*
- $\nabla_X Y$ *est* $\mathbb{R}$*-linéaire par a rapport Y;*
- *la régle Vérifie de Leibniz :*
  $\nabla_X(fY) = (Xf)Y + f\nabla_X Y \qquad \forall f \in C^\infty(M)$

$\forall$ *X,Y*$\in \Gamma(TM)$, $\nabla_X Y$ *désigne un champ de vecteurs sur M qui est la derivée directionnelle de Y dans la direction de X.*

Dans un système de coordonnées locales (x^1, ... , x^n), on peut écrire : $\nabla_{\partial_i}\partial_j = \Gamma_{ij}^k \partial_k$
oú Γ_{ij}^k désigne les coordonnées la connexion par rapport á la base locale $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$.
On peut utiliser une connexion linéaire pour la différenciation du tenseur. Si T est un champ de tenseur s-covariant, nous pouvons différencier le long d'un champ de vecteurs y par rapport à la connexion linéaire s comme :

$$(\nabla_Y T)(X_1, ..., X_s) = \mathrm{YT}(X_1, ..., X_s) - \sum_{i=1}^{r} \mathrm{T}(X_1, ..., \nabla_Y X^i, ...X_s).$$

Définition 1.15. *Soit g le champ de tenseur métrique de Riemann. Une connexion linéaire ∇ est appelé connexion métrique si g est parallèle par rapport ∇, c'est-à-dire $\nabla_X g = 0$, $\forall\ X \in \Gamma(TM)$.*

Donc on a : $\mathrm{X(g(Y,\ Z\ ))} = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)(*)$, $\forall$ X, Y, Z$\in \Gamma(TM)$.
Dans un système de coordonnèes locales (x^1, ... , x^n) avec $\mathrm{X} = X^i\partial_i$, $\mathrm{Y} = Y^j\partial_j$, $\mathrm{Z} = Z^k\partial_k$. on aura $(*)$ qui devient :
$\partial_i g_{jk} = \Gamma_{ij}^p g_{pk} + \Gamma_{ik}^r g_{jr}$.

1.3.3 Champ des tenseurs de torsion et Courbures

Une connexion linéaire est écrite par deux autres champs de tenseurs dont la torsion et la courbure.

Définition 1.16. *Soit ∇ une connexion linéaire. La torsion est définie comme :*

$$\begin{aligned} T :& \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \longrightarrow \Gamma(TM) \\ & T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] \end{aligned}$$

La torsion mesure la non commutativité de la dérivation par rapport à deux champs de vecteurs. L'existence du terme $[X, Y]$ nous permet d'avoir les propriétés tensorielles suivante :
Propriétés

1. $\mathrm{T(gX,\ hY\ )} = \mathrm{ghT(X,\ Y\ )}$; $\forall$ X, Y$\in \Gamma(TM)$, $\forall$ g, h$\in C^{\{\infty)}$
2. $\mathrm{T(X,\ Y + Z)} = \mathrm{T(X,\ Y\ )} + \mathrm{T(X,\ Z)}$; $\forall$ X, Y, Z $\in \Gamma(TM)$
3. $\mathrm{T(X,\ Y)} = \mathrm{-T(Y,\ X)}$; T est un tenseur antisymétrique 2-covariant.
   En utilisant les coordonnées locales on a : $T_{ij} = T(\partial_i, \partial_j) = \nabla_{\partial_i}\partial_j - \nabla_{\partial_j}\partial_i - [\partial_i, \partial_j]$ ($[\partial_i, \partial_j] = 0$)
   $T_{ij} = \Gamma_{ij}{}^k \partial_k$ - $\Gamma_{ji}{}^k \partial_k$

$T_{ij} = (\Gamma_{ij}{}^k$ - $\Gamma_{ji}{}^k)\partial_k$
Une connexion linéaire ∇ est appelée sans torsion si T = 0 ; cela entaîne que $\Gamma_{ij}{}^k = \Gamma_{ji}{}^k$.

Définition 1.17. *La courbure R d'une variété Riemannienne (M, g) est un champ de tenseur de type (1, 3) défini par :*

$$R : \Gamma(TM)\times\Gamma(TM)\times\Gamma(TM) \longrightarrow \Gamma(TM)$$
$$R(X,Y,Z) = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X;Y]}Z,$$

avec ∇ une connexion linéaire.

Propriétés

•R($X_1 + X_2$, Y, Z)=R(X_1, Y, Z) + $R(X_2, Y, Z)$

•R(X, $Y_1 + Y_2$)Z=R(X, Y_1, Z) + R(X, Y_2, Z)

•R(X, Y, $Z_1 + Z_2$)=R(X, Y, Z_1) + R(X, Y, Z_2)
Pour tous $X_1, X_2, Y_1, Y_2, Z_1, Z_2 \in \Gamma(TM)$; R est un champ de tenseur 3-covariant.

•Le tenseur R est antisymétrique, c'est-à- dire, R(X, Y, Z) = -R(Y, X, Z)
En effet,

$$\begin{aligned} R(X,Y,Z) &= \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z \\ &= \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{\nabla_X Y - \nabla_Y X}Z \\ &= \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z + \nabla_{\nabla_Y X - \nabla_X Y}Z \\ &= \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z + \nabla_{[Y,X]}Z \\ &= (\nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_{[Y,X]}Z) \end{aligned}$$

D'où R(X, Y, Z) = -R(Y, X, Z).

Courbure de Ricci

Définition 1.18. *La courbure de Ricci associé à la connexion linéaire ∇ est donnée par :*

$$Ric : \Gamma(TM)\times\Gamma(TM) \longrightarrow C^\infty(M)$$
$$Ric(X,Y) = TraceR(Z \mapsto R(Z,X)Y)$$

Il est intéressant de noter que Ric est un champ de tenseur 2-covariant. Autrement dit :

$$Ric_p : T_PM \times T_PM \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(X_P, Y_P) \mapsto Ric_p(X_P, Y_P) = \sum_{i=1}^{n} g_p((ei, X_P)Y_P, ei).$$

Courbure scalaire

Définition 1.19. *La courbure scalaire dans une variété riemannienne (M, g) par rapport à une base orthonormée locale $(e_j)_{j=1,\ldots;n}$ est la fonction sur M donnée par :*

$$\delta(p) = \sum_{i=1}^{n} Ric_p(ei, ei) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} g_p(R_p(e_j, e_i)e_i, e_j)$$

Courbure sectionnelle

Définition 1.20. *Soit (M, g) une variété riemannienne de dimension $n \geqslant 2$. On définit la courbure sectionnelle du 2-plan de T_PM engendré par deux vecteurs X_p, $Y_p \in T_PM$ et $p \in M$, la fonction :*

$$K_p : G_2\Gamma(TM) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$K_p(\pi) = \frac{g_p(R(X, Y, Y)_p, X_p)}{|X_p|^2|Y_p|^2 - g_p(X_P, Y_p)^2}$$

Chapitre 2

Hypersurface d'une variété statistique

2.1 Notions de bases sur les sous-variétés statistiques

Soit $(\tilde{M}, \tilde{g})$ une variété riemannienne de dimension (n + k) et $\tilde{\nabla}$ une connexion affine sur $\tilde{M}$. Notons l'ensemble des sections du fibré vectoriel $\Gamma(E) : E \longrightarrow \tilde{M}$. Ainsi, l'ensemble des champs tensoriels de type (p, q) sur $\tilde{M}$ est noté par $\Gamma(T\tilde{M}^{(p,q)})$.

Définition 2.1. *[3]Soit $T \in \Gamma(T\tilde{M}^{(1,2)})$ le champ tensoreil du type (1, 2) et $\tilde{\nabla}$ une connexion affne sur $\tilde{M}$. Alors une paire $(\tilde{\nabla}, g)$ s'appelle structure statistique sur $\tilde{M}$ si*

1.
$$(\tilde{\nabla}_X \tilde{g})(Y, Z) - (\tilde{\nabla}_Y \tilde{g})(X, Z) = \tilde{g}(T^{\tilde{\nabla}}(X, Y), Z) \tag{2.1}$$

2.
$$\tilde{T} = 0 \tag{2.2}$$

Une variété statistique est une variété riemannienne $(\tilde{M}, \tilde{g})$ de dimension (n + k) associée à une paire des connexions affines $\tilde{\nabla}$ et $\tilde{\nabla}^*$ sans torsion satisfaisant

$$X.\tilde{g}(Y, Z) = \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y, Z) + \tilde{g}(Y, \tilde{\nabla^*}_X Z) \tag{2.3}$$

pour tout X, Y, Z $\in \Gamma(T\tilde{M})$.
Les connexions affines $\tilde{\nabla}$ et $\tilde{\nabla}^*$ sont appelées connexions duales.
La géométrie des connexions conjuguées est une généralisation naturelle de la géométrie des connexions de Levi Civita à partir de la théorie Riemannienne des variétés.

Des connexions conjuguées apparaissent de la géométrie différentielle et de la théorie géométrique des inférences statistiques[1].

Proposition 2.1. *Les tenseurs de torsion $T^{\tilde{\nabla}}$ et $T^{\tilde{\nabla}^*}$ de $\tilde{\nabla}$ et $\tilde{\nabla}^*$, satisfont :*
$\tilde{g}(T^{\tilde{\nabla}}(X,Y),Z) = \tilde{g}(T^{\tilde{\nabla}^*}(X,Y),Z) + \tilde{\nabla}^*_{\tilde{g}}(X,Y,Z) - \tilde{\nabla}^*_{\tilde{g}}(Y,X,Z)$
Pour tout X, Y, Z $\in \Gamma(TM)$.

Preuve :
A partir de l' équation du torsion, nous avons :

$$\begin{aligned}\tilde{g}(T^{\tilde{\nabla}}(X,Y),Z) &= \tilde{g}(\nabla_{\tilde{X}}Y,Z) - \tilde{g}(\nabla_{\tilde{Y}}X,Z) - \tilde{g}([X,Y],Z)\\ &= X\tilde{g}(Y,Z) - \tilde{g}(Y,\tilde{\nabla^*_X}Z) - Y\tilde{g}(X,Z) + \tilde{g}(X,\tilde{\nabla^*_Y}Z)\\ &- \tilde{g}(\tilde{\nabla^*_X}Y - \tilde{\nabla^*_Y}X - T^{\tilde{\nabla}^*}(X,Y),Z)\\ &= \tilde{g}(T^{\tilde{\nabla}^*}(X,Y),Z) + \tilde{\nabla^*_X}\tilde{g}(Y,Z) - \tilde{\nabla^*_Y}\tilde{g}(X,Z)\\ &= \tilde{g}(T^{\tilde{\nabla}^*}(X,Y),Z) + \tilde{\nabla^*_{\tilde{g}}}(X.Y,Z) - \tilde{\nabla^*_{\tilde{g}}}(Y,X,Z)\end{aligned}$$

Pour tout X, Y, Z $\in \Gamma(TM)$. ■

Si $(\tilde{\nabla},\tilde{g})$ est une structure statistique sur $\tilde{M}$, alors $(\tilde{\nabla}^*,\tilde{g})$ est aussi une structure statistique $\tilde{M}$ ([2], [14]).
Par contre, toute connexion affine $\tilde{\nabla}$ sans torsion a toujours une connexion duale donnée par[6] satisfaisant

$$\tilde{\nabla} + \tilde{\nabla}^* = 2\tilde{\nabla}^o \tag{2.4}$$

où $\tilde{\nabla}^o$ est la connexion Levi-Civita pour $\tilde{M}$.

Proposition 2.2. $\tilde{\nabla}$ *est une connexion métrique sur la variété* $(\tilde{M}, \tilde{g})$ *et* $\tilde{\nabla}^*$ *une connexion métrique sur la variété* $(\tilde{M}, \tilde{g})$ *, alors* $\tilde{\nabla} = \tilde{\nabla}^*$.
Preuve
Si $\tilde{\nabla}$ *est compatible avec la métrique* $\tilde{g}$*, on écrit :*

$$X\tilde{g}(Y,Z) = \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y,Z) + \tilde{g}(Y,\tilde{\nabla}_X Z) \text{ pour tout } X,Y,Z \in \Gamma(TM). \tag{2.5}$$

En effet, la soustraction de (2.3) et (2.5) nous donne :
$\tilde{g}(Y,\tilde{\nabla^*_X}Z) = \tilde{g}(Y,\tilde{\nabla}_X Z)$ *pour tout*$X,Y,Z \in \Gamma(TM)$ *; ce qui équivaut à*

$$\tilde{\nabla}^* = \tilde{\nabla}. \tag{2.6}$$

Corollaire 2.1. *Si $\tilde{\nabla^*}g = 0$, alors $T^{\tilde{\nabla}} = T^{\tilde{\nabla}^*}$*

Soit C(X, Y, Z) = $\tilde{\nabla}_X\tilde{g}(Y,Z)$ une forme cubique de $(\tilde{\nabla},\tilde{g})$ et $C^*(Y,X,Z) = \tilde{\nabla}^*_Y\tilde{g}(X,Z)$ la forme cubique de $(\tilde{\nabla}^*,\tilde{g})$. Nous avons la propriété suivante :

Proposition 2.3. *La forme cubique de $(\tilde{\nabla},\tilde{g})$ est symétrique ssi la forme cubique de $(\tilde{\nabla}^*,\tilde{g})$ est symétrique.*

Preuve :
Par définition, nous avons

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla^*_X}g(Y,Z) &= X\tilde{g}(Y,Z) - \tilde{g}(\tilde{\nabla^*_X}Y,Z) - \tilde{g}(Y,\tilde{\nabla^*_X}Z)\\ &= X\tilde{g}(Y,Z) - X\tilde{g}(Y,Z) + \tilde{g}(Y,\tilde{\nabla_X}Z)\\ &- X\tilde{g}(Y,Z) + \tilde{g}(Z,\tilde{\nabla_X}Y)\\ &= -\tilde{\nabla_X}\tilde{g}(Y,Z) \text{ pour tout } X,Y,Z \in \Gamma(TM)\end{aligned}$$

■

Corollaire 2.2. *Si $\tilde{\nabla}^*_g$ est symétrique et $\tilde{\nabla}^*$ est sans torsion alors $\tilde{\nabla}_g$ est symétrique et $\tilde{\nabla}$ est sans torsion.*

Soient $\tilde{R}$ et $\tilde{R}^*$ les champs de courbure tensoriels associés aux connexions affines $\tilde{\nabla}$ et $\tilde{\nabla}^*$ respectivement.
Une structure statistique $(\tilde{\nabla},\tilde{g})$ est dite de courbure constante C$\in\mathbb{R}$ si

$$\tilde{R}(X,Y,Z) = C\{\tilde{g}(Y,X)Z - \tilde{g}(X,Z)Y\}. \tag{2.7}$$

La structure statistique $(\tilde{\nabla},\tilde{g})$ de courbure constante 0 est appelée structure hessienne.

Proposition 2.4. *Les champs de courbure tensoriels $\tilde{R}$ et $\tilde{R}^*$ à connection duale satisfont*
[3]

$$\tilde{g}(\tilde{R}(X,Y)Z,W) = -\tilde{g}(\tilde{R}^*(X,Y)W,Z). \tag{2.8}$$

pour tout X, Y, Z $\in \Gamma(TM)$

Corollaire 2.3. *$\tilde{R} = 0$ si et seulement si $\tilde{R}^* = 0$*

De (2.7) il s'ensuit immédiatement que si $(\tilde{\nabla},\tilde{g})$ est une structure statistique de courbure constante c, alors $(\tilde{\nabla}^*,\tilde{g})$ est aussi une structure statistique de courbure constante c. En particulier, si $(\tilde{\nabla},\tilde{g})$ est hessienne, $(\tilde{\nabla}^*,\tilde{g})$ est aussi hessienne. [7].

En effet pour tout X, Y, Z, W $\in \Gamma(TM)$, on pouve que la rélation (2.8) est verifiée.

Preuve :

$$\begin{aligned}\tilde{g}(\tilde{R}(X,Y)Z,W) &= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X\tilde{\nabla}_Y Z - \tilde{\nabla}_Y\tilde{\nabla}_X Z - \tilde{\nabla}_{[X,Y]}Z, W)\\ &= \underbrace{\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X\tilde{\nabla}_Y Z, W)}_{1} - \underbrace{\tilde{g}(\tilde{\nabla}_Y\tilde{\nabla}_X Z, W)}_{2} - \underbrace{\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{[X,Y]}Z, W)}_{3}\end{aligned}$$

de la relation (2.3), on peut en déduire ;

(1)

$$\begin{aligned}\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X\tilde{\nabla}_Y Z, W) &= X\tilde{g}(\tilde{\nabla}_Y Z, W) - \tilde{g}(\tilde{\nabla}_Y Z, \tilde{\nabla}^*_X W)\\ &= X\Big[Y\tilde{g}(Z,W) - \tilde{g}(Z, \tilde{\nabla^*}_Y W)\Big] - Y\tilde{g}(Z, \tilde{\nabla^*}_X W) + \tilde{g}(Z, \tilde{\nabla^*}_Y\tilde{\nabla^*}_X W)\\ &= XY\tilde{g}(Z,W) - X\tilde{g}(Z, \tilde{\nabla^*}_Y W) - Y\tilde{g}(Z, \tilde{\nabla^*}_X W) + \tilde{g}(Z, \tilde{\nabla^*}_Y\tilde{\nabla^*}_X W).\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\tilde{g}(\tilde{\nabla}_Y\tilde{\nabla}_X Z, W) &= Y\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Z, W) - \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Z, \tilde{\nabla}^*_Y W)\\ &= Y\Big[X\tilde{g}(Z,W) - \tilde{g}(Z, \tilde{\nabla^*}_X W)\Big] - X\tilde{g}(Z, \tilde{\nabla^*}_Y W) + \tilde{g}(Z, \tilde{\nabla^*}_X\tilde{\nabla^*}_Y W)\\ &= YX\tilde{g}(Z,W) - Y\tilde{g}(Z, \tilde{\nabla^*}_X W) - X\tilde{g}(Z, \tilde{\nabla^*}_Y W) + \tilde{g}(Z, \tilde{\nabla^*}_X\tilde{\nabla^*}_Y W).\end{aligned}$$

(3)

$$\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{[X,Y]}Z, W) = [X,Y]\tilde{g}(Z,W) - \tilde{g}(Z, \tilde{\nabla^*}_{[X,Y]}W). \qquad (2.9)$$

$$\begin{aligned}(1)-(2)-(3) &= XY\tilde{g}(Z,W) - X\tilde{g}(Z, \tilde{\nabla^*}_Y W) - Y\tilde{g}(Z, \tilde{\nabla^*}_X W) + \tilde{g}(Z, \tilde{\nabla^*}_Y\tilde{\nabla^*}_X W)\\ &\quad - YX\tilde{g}(Z,W) + Y\tilde{g}(Z, \tilde{\nabla^*}_X W) + X\tilde{g}(Z, \tilde{\nabla^*}_Y W) - \tilde{g}(Z, \tilde{\nabla^*}_X\tilde{\nabla^*}_Y W)\\ &\quad - [X,Y]\tilde{g}(Z,W) + \tilde{g}(Z, \tilde{\nabla^*}_{[X,Y]}W)\\ &= XY\tilde{g}(Z,W) - YX\tilde{g}(Z,W) - [X,Y]\tilde{g}(Z,W) - X\tilde{g}(Z, \tilde{\nabla^*}_Y W) + X\tilde{g}(Z, \tilde{\nabla^*}_Y W)\\ &\quad - Y\tilde{g}(Z, \tilde{\nabla^*}_X W) + Y\tilde{g}(Z, \tilde{\nabla^*}_X W) - \tilde{g}(Z, \tilde{\nabla^*}_X\tilde{\nabla^*}_Y W) + \tilde{g}(Z, \tilde{\nabla^*}_Y\tilde{\nabla^*}_X W)\\ &\quad + \tilde{g}(Z, \tilde{\nabla^*}_{[X,Y]}W)\\ &= -\tilde{g}(Z, \tilde{\nabla^*}_X\tilde{\nabla^*}_Y W) + \tilde{g}(Z, \tilde{\nabla^*}_Y\tilde{\nabla^*}_X W) + \tilde{g}(Z, \tilde{\nabla^*}_{[X,Y]}W)\\ &= -\tilde{g}(Z, \tilde{\nabla^*}_X\tilde{\nabla^*}_Y W - \tilde{\nabla^*}_Y\tilde{\nabla^*}_X W - \tilde{\nabla^*}_{[X,Y]}W)\\ &= -\tilde{g}(Z, \tilde{R^*}(X,Y)W).\end{aligned}$$

D'où

$$\tilde{g}(\tilde{R}(X,Y)Z,W) = -\tilde{g}(Z, \tilde{R^*}(X,Y)W). \qquad (2.10)$$

. ■ Soit M une sous-variété à n dimensions de $\tilde{M}$. Alors, pour tout X, Y $\in \Gamma(TM)$. Les formules de Gauss correspondantes sont[14] :

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X,Y); \tag{2.11}$$

$$\tilde{\nabla}^*_X Y = \nabla^*{}_X Y + h^*(X,Y) \tag{2.12}$$

où h et h^* sont des formes bilinéaires et symétriques. (∇, g) et (∇^*, g) sont des structures statistiques duales sur M, où g est une métrique induite sur $\Gamma(TM)$ de la métrique riemannienne $\tilde{g}$ sur $\tilde{M}$.
Notons que le fibré normal sur M est $\Gamma(TM^\perp)$. Comme h et h^* sont bilinéaires, on a des transformations linéaire A_ξ et $A^*{}_\xi$ définie par

$$g(A_\xi X, Y) = g(h(X,Y), \xi) \tag{2.13}$$

$$g(A^*{}_\xi X, Y) = g(h^*(X,Y), \xi). \tag{2.14}$$

Pour tout $\xi \in TM^\perp$ et $X, Y \in \Gamma(TM)$, les formules de Weingarten correspondantes sont les suivantes[14] :

$$\tilde{\nabla}_X \xi = -A^*_\xi X + \nabla^\perp_X \xi \tag{2.15}$$

$$\tilde{\nabla}_X \xi = -A_\xi X + \nabla^{*\perp}_X \xi. \tag{2.16}$$

Pour tout $\xi \in \Gamma(TM^\perp)$ et $X \in \Gamma(TM)$, Les connexions $\nabla^*{}_X \xi$ et $\nabla_X \xi$ données par (2.15) et (2.16) sont des connexions duales par rapport à la métrique riemannienne induite sur $TM^\perp$.
Les équations de Gauss, Codazzi et Ricci correspondantes sont données par les résultats suivants :

Proposition 2.5. *[14]Soient $\tilde{\nabla}$ une connexion sur $\tilde{M}$ et ∇ la connexion induite sur M. Soient $\tilde{R}$ et R les tenseurs de courbure de Rieman associés aux connexions affines $\tilde{\nabla}$ et ∇, respectivement. Alors,*

$$g(\tilde{R}(X,Y)Z,W) = g(R(X,Y)Z,W) + g(h(X,Z),h^*(Y,W)) - g(h^*(X,W),h(Y,Z)) \tag{2.17}$$

$$\begin{aligned}(\tilde{R}(X,Y)Z)^\perp = {} & (\nabla^\perp{}_X h)(Y,Z) - h(\nabla_X Y, Z) - h(Y, \nabla_X Z) \\ & - \left\{(\nabla^\perp{}_Y h)(X,Z) - h(\nabla_Y X, Z) - h(X, \nabla_Y Z)\right\}\end{aligned} \tag{2.18}$$

$$\tilde{g}(R^\perp(X,Y)\xi,\eta) = \tilde{g}(\tilde{R}(X,Y)\xi,\eta) + g([A^*{}_\xi, A_\eta]X, Y), \tag{2.19}$$

où $R^\perp$ est le tenseur de courbure de Reiman sur $TM^\perp$, avec $\xi, \eta \in TM^\perp$ et $[A^*{}_\xi, A_\eta] = A^*{}_\xi A_\eta - A_\eta A^*{}_\xi$.

Preuve :
•Pour tout X, Y, Z, W $\in \Gamma(TM)$;

$$\begin{aligned}
\tilde{g}(\tilde{R}(X,Y)Z,W) &= g(\tilde{\nabla}_X\tilde{\nabla}_Y Z - \tilde{\nabla}_Y\tilde{\nabla}_X Z - \tilde{\nabla}_{[X,Y]}Z, W)\\
&= g(\tilde{\nabla}_X[\nabla_Y Z + h(Y,Z)] - \tilde{\nabla}_Y[\nabla_X Z + h(X,Z)] - \tilde{\nabla}_{[\nabla_X Y - \nabla_Y X]}Z, W)\\
&= g(\tilde{\nabla}_X[\nabla_Y Z] + \tilde{\nabla}_X[h(Y,Z)] - \tilde{\nabla}_Y[\nabla_X Z] - \tilde{\nabla}_Y[h(X,Z)]\\
&- \tilde{\nabla}_{[\nabla_X Y]}Z + \tilde{\nabla}_{[\nabla_Y X]}Z, W)\\
&= g(\nabla_X\nabla_Y Z + h(X,\nabla_Y Z) + \nabla^{\perp}{}_X h(Y,Z) - A^*{}_{h(Y,Z)}X\\
&- \nabla_Y\nabla_X Z - h(Y,\nabla_X Z) - \nabla^{\perp}{}_Y h(X,Z) + A^*{}_{h(X,Z)}Y\\
&- \nabla_{[\nabla_X Y]}Z - h(Z,\nabla_X Y) + \nabla_{[\nabla_Y X]}Z + h(Z,\nabla_Y X), W)\\
&= g(\nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[\nabla_X Y]}Z + \nabla_{[\nabla_Y X]}Z - A^*{}_{h(Y,Z)}X\\
&+ A^*{}_{h(X,Z)}Y - \nabla^{\perp}{}_Y h(X,Z) + h(X,\nabla_Y Z) + h(Z,\nabla_Y X) + \nabla^{\perp}{}_X h(Y,Z)\\
&- h(Y,\nabla_X Z) - h(Z,\nabla_X Y), W).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{g}(\tilde{R}(X,Y)Z,W) &= g(\nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[\nabla_X Y]}Z + \nabla_{[\nabla_Y X]}Z - A^*{}_{h(Y,Z)}X\\
&+ A^*{}_{h(X,Z)}Y - \nabla^{\perp}{}_Y h(X,Z) + h(X,\nabla_Y Z) + h(Z,\nabla_Y X)\\
&+ \nabla^{\perp}{}_X h(Y,Z) - h(Y,\nabla_X Z) - h(Z,\nabla_X Y), W). \quad (2.20)
\end{aligned}$$

En effet,

$$R(X,Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[\nabla_X Y]}Z + \nabla_{[\nabla_Y X]}Z \quad (2.21)$$

$$(\nabla^{\perp}{}_Y h)(X,Z) = h(X,\nabla_Y Z) + h(Z,\nabla_Y X) \quad (2.22)$$

$$(\nabla^{\perp}{}_X h)(Y,Z) = h(Y,\nabla_X Z) + h(Z,\nabla_X Y). \quad (2.23)$$

En mettant (2.21), (2.22) et (2.23) dans (2.20), on a :

$$\begin{aligned}
\tilde{g}(\tilde{R}(X,Y)Z,W) &= g(R(X,Y)Z - A^*{}_{h(Y,Z)}X + A^*{}_{h(X,Z)}Y - \nabla^{\perp}{}_Y h(X,Z)\\
&+ \nabla^{\perp}{}_X h(Y,Z), W)\\
&= g(R^(X,Y)Z,W) - g(A^*{}_{h(Y,Z)}X, W) + g(A^*{}_{h(X,Z)}Y, W)\\
&- g(\underbrace{\nabla^{\perp}{}_Y h(X,Z)}_{\in TM^{\perp}}, \underbrace{W}_{\in TM}) + g(\underbrace{\nabla^{\perp}{}_X h(Y,Z)}_{\in TM^{\perp}}, \underbrace{W}_{\in TM})\\
&\qquad\qquad 0 \qquad\qquad\qquad\qquad 0\\
&= (R(X,Y)Z,W) - g(A^*{}_{h(Y,Z)}X, W) + g(A^*{}_{h(X,Z)}Y, W)\\
&= (R(X,Y)Z,W) - g(h(Y,Z), h^*(X,W)) + g(h(X,Z), h^*(Y,W))
\end{aligned}$$

d'où

$$\tilde{g}(\tilde{R}(X,Y)Z,W) = (R(X,Y)Z,W)+g(h(X,Z),h^*(Y,W))-g(h^*(X,W),h(Y,Z)). \tag{2.24}$$

•• Ainsi ; la composante normale est

$$(\tilde{R}^*(X,Y)Z)^\perp = (\nabla^\perp{}_Y h)(X,Z) - (\nabla^\perp{}_Y h)(X,Z). \tag{2.25}$$

En substituant (2.22) et (2.22) dans (2.25) on a :

$$\begin{aligned}(\tilde{R}(X,Y)Z)^\perp = {} & (\nabla^\perp{}_X h)(Y,Z) - h(\nabla_X Y,Z) - h(Y,\nabla_X Z) \\ & - \big\{(\nabla^\perp{}_Y h)(X,Z) - h(\nabla_Y X,Z) - h(X,\nabla_Y Z)\big\}.\end{aligned}$$

• •• Pour tout X, Y $\in \Gamma(TM)$ et $\xi,\eta \in TM^\perp$,

$$\begin{aligned}\tilde{g}(\tilde{R}(X,Y)\xi,\eta) &= g(\tilde{\nabla}_X\tilde{\nabla}_Y\xi - \tilde{\nabla}_Y\tilde{\nabla}_X\xi - \tilde{\nabla}_{[X,Y]}\xi,\eta) \\ &= g(\tilde{\nabla}_X\big[-A^*{}_\xi Y + \nabla^\perp{}_Y\xi\big] - \tilde{\nabla}_Y\big[-A^*{}_\xi X + \nabla^\perp{}_X\xi\big] + A^*{}_\xi[X,Y] - \tilde{\nabla}^\perp_{[X,Y]}\xi,\eta) \\ &= g(\tilde{\nabla}_X[-A^*{}_\xi Y] + \tilde{\nabla}_X\big[\nabla^\perp{}_Y\xi\big] - \tilde{\nabla}_Y[-A^*{}_\xi X] - \tilde{\nabla}_Y\big[\nabla^\perp{}_X\xi\big] + A^*{}_\xi[X,Y] \\ &\quad - \tilde{\nabla}^\perp_{[X,Y]}\xi,\eta) \\ &= g(-\tilde{\nabla}_X[A^*{}_\xi Y] + \tilde{\nabla}_X\big[\nabla^\perp{}_Y\xi\big] + \tilde{\nabla}_Y[A^*{}_\xi X] - \tilde{\nabla}_Y\big[\nabla^\perp{}_X\xi\big] + A^*{}_\xi[X,Y] \\ &\quad - \tilde{\nabla}^\perp_{[X,Y]}\xi,\eta) \\ &= g(-\nabla_X\big[A_{*\xi}Y\big] - h(X,A^*{}_\xi Y) + \nabla^\perp{}_X\big[\nabla^\perp{}_Y\xi\big] - A^*{}_{\nabla^\perp{}_Y\xi}X + \nabla_Y[A^*{}_\xi X] \\ &\quad + h(Y,A^*{}_\xi X) - \nabla^\perp{}_Y\big[\nabla^\perp{}_X\xi\big] + A^*{}_{\nabla^\perp{}_X\xi} + A^*{}_\xi[X,Y] - \tilde{\nabla}^\perp_{[X,Y]}\xi,\eta) \\ &= g(-\nabla_X[A^*{}_\xi Y] + \nabla_Y[A^*{}_\xi X] - A^*{}_{\nabla^\perp{}_Y\xi}X + A^*{}_{\nabla^\perp{}_X\xi} + A^*{}_\xi[X,Y] + h(Y,A^*{}_\xi X) \\ &\quad - h(X,A^*{}_\xi Y) + \underbrace{\nabla^\perp{}_X\big[\nabla^\perp{}_Y\xi\big] - \nabla^\perp{}_Y\big[\nabla^\perp{}_X\xi\big] - \tilde{\nabla}^\perp_{[X,Y]}\xi}_{R^\perp(X,Y)\xi},\eta).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{g}(\tilde{R}(X,Y)\xi,\eta) = g(R^\perp(X,Y)\xi,\eta) - g([A^*{}_\xi,A_\eta]X,Y) + \underbrace{g(\nabla^*{}_X[A_\xi Y],\eta)}_{=0} - \underbrace{g(\nabla^*{}_Y[A_\xi X],\eta)}_{=0} \\ - \underbrace{g(A_{\nabla^{*\perp}{}_Y\xi},\eta)}_{=0} - \underbrace{g(A_{\nabla^{*\perp}{}_X\xi},\eta)}_{=0} + \underbrace{g(A_\xi[X,Y],\eta)}_{=0}.\end{aligned} \tag{2.26}$$

Enfin, on a

$$g(R^\perp(X,Y)\xi,\eta) = \tilde{g}(\tilde{R}(X,Y)\xi,\eta) + g([A^*{}_\xi,A_\eta]X,Y). \tag{2.27}$$

Pour les équations de Gauss, Codazzi et Ricci la dualité de la connexion $\tilde{\nabla}^*$ sur $\tilde{M}$ est conservée.

■

Proposition 2.6. *[14]Soient $\tilde{\nabla}^*$ une connexion duale sur $\tilde{M}$ et ∇^* la connexion induite sur M. Soient $\tilde{R}^*$ et R^* les tenseurs de courbure de Riemann associés à $\tilde{\nabla}$ et ∇^*, respectivement. Alors,*

$$g(\tilde{R}^*(X,Y)Z,W) = g(R^*(X,Y)Z,W)+g(h^*(X,Z),h(Y,W))-g(h(X,W),h^*(Y,Z)) \tag{2.28}$$

$$\begin{aligned}(\tilde{R}^*(X,Y)Z)^\perp &= \nabla^*{}_X\perp h^*(Y,Z) - h^*(\nabla^*{}_XY,Z) - h^*(Y,\nabla^*{}_XZ)\\ &\quad - \{\nabla^*{}_Y\perp h^*(X,Z) - h^*(\nabla^*{}_YX,Z) - h^*(X,\nabla^*{}_YZ)\}\end{aligned} \tag{2.29}$$

$$\tilde{g}(R^{*\perp}(X,Y)\xi,\eta) = \tilde{g}(\tilde{R}(X,Y)\xi,\eta) + g([A_\xi,A^*{}_\eta]X,Y), \tag{2.30}$$

où $R^{*\perp}$ est le tenseur de courbure de reimann pour $\nabla^{\perp *}$ sur $TM^\perp$ et $[A_\xi,A^*{}_\eta]$ $= A_\xi A^*{}_\eta - A^*{}_\eta A_\xi$.

Preuves

•Pour tout X, Y, Z, W $\in \Gamma(TM)$;

$$\begin{aligned}\tilde{g}(\tilde{R}^*(X,Y)Z,W) &= g(\tilde{\nabla}^*_X\tilde{\nabla}^*_YZ - \tilde{\nabla}^*_Y\tilde{\nabla}^*_XZ - \tilde{\nabla}^*_{[X,Y]}Z,W)\\ &= g(\tilde{\nabla}^*_X[\nabla^*{}_YZ + h^*(Y,Z)] - \tilde{\nabla}^*_Y[\nabla^*{}_XZ + h^*(X,Z)] - \tilde{\nabla}^*_{[\nabla_XY-\nabla_YX]}Z,W)\\ &= g(\tilde{\nabla}^*_X[\nabla^*{}_YZ] + \tilde{\nabla}^*_X[h^*(Y,Z)] - \tilde{\nabla}^*_Y[\nabla^*{}_XZ] - \tilde{\nabla}^*_Y[h^*(X,Z)]\\ &\quad - \tilde{\nabla}^*_{[\nabla_XY]}Z + \tilde{\nabla}^*_{[\nabla_YX]}Z,W)\\ &= g(\nabla^*{}_X\nabla^*{}_YZ + h^*(X,\nabla^*{}_YZ) + \nabla^{*\perp}{}_Xh^*(Y,Z) - A_{h^*(Y,Z)}X\\ &\quad - \nabla^*{}_Y\nabla^*{}_XZ - h^*(Y,\nabla^*{}_XZ) - \nabla^{*\perp}{}_Yh^*(X,Z) + A_{h^*(X,Z)}Y\\ &\quad - \nabla^*{}_{[\nabla_XY]}Z - h^*(Z,\nabla_XY) + \nabla^*{}_{[\nabla_YX]}Z + h^*(Z,\nabla_YX),W)\\ &= g(\nabla^*{}_X\nabla^*{}_YZ - \nabla^*{}_Y\nabla^*{}_XZ - \nabla^*{}_{[\nabla_XY]}Z + \nabla^*{}_{[\nabla_YX]}Z - A_{h^*(Y,Z)}X\\ &\quad + A_{h^*(X,Z)}Y - \nabla^{*\perp}{}_Yh^*(X,Z) + h^*(X,\nabla^*{}_YZ) + h^*(Z,\nabla^*{}_YX) + \nabla^{*\perp}{}_Xh^*(Y,Z)\\ &\quad - h^*(Y,\nabla^*{}_XZ) - h^*(Z,\nabla^*{}_XY),W)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{g}(\tilde{R}^*(X,Y)Z,W) = g(&\nabla^*{}_X\nabla^*{}_YZ-\nabla^*{}_Y\nabla^*{}_XZ-\nabla^*{}_{[\nabla_XY]}Z+\nabla^*{}_{[\nabla_YX]}Z-A_{h^*(Y,Z)}X\\ &+A_{h^*(X,Z)}Y-\nabla^{*\perp}{}_Yh^*(X,Z)+h^*(X,\nabla^*{}_YZ)+h^*(Z,\nabla^*{}_YX)+\nabla^{*\perp}{}_Xh^*(Y,Z)\\ &- h^*(Y,\nabla^*{}_XZ) - h^*(Z,\nabla^*{}_XY),W).\end{aligned} \tag{2.31}$$

En effet,

$$R^*(X,Y)Z = \nabla^*{}_X\nabla^*{}_Y Z - \nabla^*{}_Y\nabla^*{}_X Z - \nabla^*{}_{[\nabla_X Y]}Z + \nabla^*{}_{[\nabla_Y X]}Z \qquad (2.32)$$

$$\nabla^{*\perp}{}_Y h^*(X,Z) = h^*(X,\nabla^*{}_Y Z) + h^*(Z,\nabla^*{}_Y X) \qquad (2.33)$$

$$\nabla^{*\perp}{}_X h^*(Y,Z) = h^*(Y,\nabla^*{}_X Z) + h^*(Z,\nabla^*{}_X Y). \qquad (2.34)$$

En mettant (2.32), (2.33) et (2.34) dans l'équation (2.31) on a :

$$\begin{aligned}
\nabla^{*\perp}{}_Y h^*(X,Z)\tilde{g}(\tilde{R}^*(X,Y)Z,W) &= g(R^*(X,Y)Z - A_{h^*(Y,Z)}X + A_{h^*(X,Z)}Y - \nabla^{*\perp}{}_Y h^*(X,Z) \\
&\quad + \nabla^{*\perp}{}_X h^*(Y,Z), W) \\
&= g(R^*(X,Y)Z,W) - g(A_{h^*(Y,Z)}X,W) + g(A_{h^*(X,Z)}Y,W) \\
&\quad - g(\underbrace{\underbrace{\nabla^{*\perp}{}_Y h^*(X,Z)}_{\in TM^\perp}, \underbrace{W}_{\in TM}}_{0}) + g(\underbrace{\underbrace{\nabla^{*\perp}{}_X h^*(Y,Z)}_{\in TM^\perp}, \underbrace{W}_{\in TM}}_{0}) \\
&= (R^*(X,Y)Z,W) - g(A_{h^*(Y,Z)}X,W) + g(A_{h^*(X,Z)}Y,W) \\
&= (R^*(X,Y)Z,W) - g(h^*(Y,Z),h(X,W)) \\
&\quad + g(h^*(X,Z),h(Y,W))
\end{aligned}$$

d'où

$$\tilde{g}(\tilde{R}^*(X,Y)Z,W) = (R^*(X,Y)Z,W) - g(h^*(Y,Z),h(X,W)) + g(h^*(X,Z),h(Y,W)). \qquad (2.35)$$

• Ainsi, la composante normale est

$$(\tilde{R}^*(X,Y)Z)^\perp = \nabla^{*\perp}{}_X h^*(X,Z) - \nabla^{*\perp}{}_Y h^*(X,Z)$$

$$\begin{aligned}
(\tilde{R}^*(X,Y)Z)^\perp &= \nabla^{*\perp}{}_X h^*(Y,Z) - h^*(Y,\nabla^*{}_X Z) - h^*(Z,\nabla^*{}_X Y) \\
&\quad - \left\{\nabla^{*\perp}{}_Y h^*(X,Z) - h^*(X,\nabla^*{}_Y Z) - h^*(Z,\nabla^*{}_Y X)\right\}. \qquad (2.36)
\end{aligned}$$

• •Pour tout X, Y $\in \Gamma(TM)$ et $\xi, \eta \in TM^\perp$.

$$\begin{aligned}
\tilde{g}(\tilde{R}^*(X,Y)\xi,\eta) &= g(\tilde{\nabla}^*_X\tilde{\nabla}^*_Y\xi - \tilde{\nabla}^*_Y\tilde{\nabla}^*_X\xi - \tilde{\nabla}^*_{[X,Y]}\xi,\eta)\\
&= g(\tilde{\nabla}^*_X\big[-A_\xi Y + \nabla^{*\perp}{}_Y\xi\big] - \tilde{\nabla}^*_Y\big[-A_\xi X + \nabla^{*\perp}{}_X\xi\big] + A_\xi[X,Y] - \tilde{\nabla}^{*\perp}_{[X,Y]}\xi,\eta)\\
&= g(\tilde{\nabla}^*_X[-A_\xi Y] + \tilde{\nabla}^*_X\big[\nabla^{*\perp}{}_Y\xi\big] - \tilde{\nabla}^*_Y[-A_\xi X] - \tilde{\nabla}^*_Y\big[\nabla^{*\perp}{}_X\xi\big] + A_\xi[X,Y]\\
&\quad - \tilde{\nabla}^{*\perp}_{[X,Y]}\xi,\eta)\\
&= g(-\tilde{\nabla}^*_X[A_\xi Y] + \tilde{\nabla}^*_X\big[\nabla^{*\perp}{}_Y\xi\big] + \tilde{\nabla}^*_Y[A_\xi X] - \tilde{\nabla}^*_Y\big[\nabla^{*\perp}{}_X\xi\big] + A_\xi[X,Y]\\
&\quad - \tilde{\nabla}^{*\perp}_{[X,Y]}\xi,\eta)\\
&= g(-\nabla^*{}_X[A_\xi Y] - h^*(X,A_\xi Y) + \nabla^{*\perp}{}_X\big[\nabla^{*\perp}{}_Y\xi\big] - A_{\nabla^{*\perp}{}_Y\xi}X + \nabla^*{}_Y[A_\xi X]\\
&\quad + h^*(Y,A_\xi X) - \nabla^{*\perp}{}_Y\big[\nabla^{*\perp}{}_X\xi\big] + A_{\nabla^{*\perp}{}_X\xi}Y + A_\xi[X,Y] - \tilde{\nabla}^{*\perp}_{[X,Y]}\xi,\eta)\\
&= g(-\nabla^*{}_X[A_\xi Y] + \nabla^*{}_Y[A_\xi X] - A_{\nabla^{*\perp}{}_Y\xi}X + A_{\nabla^{*\perp}{}_X\xi}Y + A_\xi[X,Y] + h^*(Y,A_\xi X)\\
&\quad - h^*(X,A_\xi Y) + \underbrace{\nabla^{*\perp}{}_X\big[\nabla^{*\perp}{}_Y\xi\big] - \nabla^{*\perp}{}_Y\big[\nabla^{*\perp}{}_X\xi\big] - \tilde{\nabla}^{*\perp}_{[X,Y]}\xi}_{R^{*\perp}(X,Y)\xi},\eta).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{g}(\tilde{R}^*(X,Y)\xi,\eta) = g(R^{*\perp}(X,Y)\xi,\eta) - g([A_\xi,A^*{}_\eta]X,Y) - \underbrace{g(\nabla^*{}_X[A_\xi Y],\eta)}_{=0} + \underbrace{g(\nabla^*{}_Y[-A_\xi X],\eta)}_{=0}\\
- \underbrace{g(A_{\nabla^{*\perp}{}_Y\xi},\eta)}_{=0} + \underbrace{g(A_{\nabla^{*\perp}{}_X\xi},\eta)}_{=0} + \underbrace{g(A_\xi[X,Y],\eta)}_{=0}. \quad (2.37)
\end{aligned}$$

Enfin, on a

$$g(R^{*\perp}(X,Y)\xi,\eta) = \tilde{g}(\tilde{R}^*(X,Y)\xi,\eta) + g([A_\xi,A^*{}_\eta]X,Y). \quad (2.38)$$

2.2 Hypersurface d'une variété statistique

Soit $(\tilde{M},\tilde{g},\tilde{\nabla})$ une variété statistique et f : M$\longrightarrow\tilde{M}$ une immersion isométrique. La métrique g et la connexion affine ∇ sur M est donné par :

$$g = f*\tilde{g}; g(\nabla_X Y,Z) = \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X f{*}Y, f{*}Z) \quad (2.39)$$

pour tout X, Y, Z $\in \Gamma(TM)$, où $\tilde{\nabla}$ est la connexion induite par f sur le fibre tangent f : $T\tilde{M}\longrightarrow M$.
Alors, le couple (∇,g) est une structure statistique sur M qui est induite par f de $(\tilde{\nabla},\tilde{g})$.

Définition 2.2. *[7]Soient (M,∇,g) et $(\tilde{M},\tilde{\nabla},\tilde{g})$ deux variétés statistiques. Une immersion $f : M\longrightarrow\tilde{M}$ est appeleé immersion statistique si le couple (∇,g) coincide avec la structure statistique induite par $(\tilde{\nabla},\tilde{g})$.*

Supposons que f : (M, ∇, g)$\longrightarrow(\tilde{M}, \tilde{\nabla}, \tilde{g})$ est une immersion statistique de codimmension 1 et $\xi\in\Gamma(f*T\tilde{M})$ est un champ de vecteur normale unitaire de f. On note la connexion duale de $\tilde{\nabla}$ par rapport à la métrique $\tilde{g}$ par $\tilde{\nabla}^*$. Ainsi par l'hypersuface d'une variété statistique, [7]on a les formules de Gauss et weingarten suivantes :

$$\tilde{\nabla}_X f*Y = f*\nabla_X Y + h(X,Y)\xi \tag{2.40}$$
$$\tilde{\nabla}_X \xi = -f*A^*X + \tau^*(X)\xi \tag{2.41}$$
$$\tilde{\nabla}^*_X f*Y = f*\nabla^*{}_X Y + h^*(X,Y)\xi \tag{2.42}$$
$$\tilde{\nabla}^*_X \xi = -f*AX + \tau(X)\xi \tag{2.43}$$

où h, $h^* \in \Gamma(TM^{(0,2)})$, A, $A^*\in \Gamma(TM^{(1,1)})$ τ, $\tau^*\in \Gamma(TM^*)$ satisfait :

$$h(X,Y) = g(AX,Y); h^*(X,Y) = g(A^*X,Y) \tag{2.44}$$
$$\tau(X) + \tau^*(X) = 0, \tag{2.45}$$

pour tout X, Y$\in\Gamma(TM)$
Notons que $\tilde{R}$, $\tilde{R}^*$, R et R^* sont les tenseurs de courbure associés aux connexions affines $\tilde{\nabla}$, $\tilde{\nabla}^*$, ∇ et ∇^* respectivement.
L'équation de Gauss-codazzi pour une hypersurface d'une variété statistique par rapport à $\tilde{\nabla}$ est donnée par la formule suivante :

$$\begin{aligned}\tilde{R}(X,Y,Z) = {} & R(X,Y)Z - h(Y,Z)A^*X + h(X,Z)A^*Y + (\nabla_X h)(Y,Z)\xi \\ & - (\nabla_Y h)(X,Z)\xi + \tau^*(X)h(Y,Z)\xi - \tau^*(Y)h(X,Z)\xi. \end{aligned} \tag{2.46}$$

En effet,

$$\begin{aligned}\tilde{R}(X,Y,Z) &= \tilde{\nabla}_X\tilde{\nabla}_Y Z - \tilde{\nabla}_Y\tilde{\nabla}_X Z - \tilde{\nabla}_{[X,Y]}Z \\ &= \tilde{\nabla}_X[\nabla_Y Z + h(Y,Z)\xi] - \tilde{\nabla}_Y[\nabla_X Z + h(X,Z)\xi] - \tilde{\nabla}_{(\nabla_X Y - \nabla_Y X)}Z \\ &= \tilde{\nabla}_X[\nabla_Y Z] + \tilde{\nabla}_X[h(Y,Z)\xi] - \tilde{\nabla}_Y[\nabla_X Z] - \tilde{\nabla}_Y[h(X,Z)\xi] - \tilde{\nabla}_{\nabla_X Y}Z + \tilde{\nabla}_{\nabla_Y X}Z \\ &= \nabla_X\nabla_Y Z + h(X,\nabla_Y Z)\xi + \nabla^\perp_X h(Y,Z) - h(Y,Z)A^*X - \nabla_Y\nabla_X Z - h(Y,\nabla_X Z)\xi \\ &- \nabla^\perp_Y h(X,Z) + h(X,Z)A^*Y - \nabla_{\nabla_X Y}Z - h(Z,\nabla_X Y)\xi + \nabla_{\nabla_Y X}Z + h(Z,\nabla_Y X)\xi \\ &= \nabla_X\nabla_Y Z + h(X,\nabla_Y Z)\xi + \tau^*(X)h(Y,Z)\xi - h(Y,Z)A^*X - \nabla_Y\nabla_X Z \\ &- h(Y,\nabla_X Z)\xi - \tau^*(Y)h(X,Z)\xi + h(X,Z)A^*Y - \nabla_{\nabla_X Y}Z + \nabla_{\nabla_Y X}Z \\ &- h(Z,\nabla_X Y)\xi + h(Z,\nabla_Y X)\xi \\ &= \nabla_X\nabla_Y Z + h(X,\nabla_Y Z)\xi + \tau^*(X)h(Y,Z)\xi - h(Y,Z)A^*X - \nabla_Y\nabla_X Z \\ &- h(Y,\nabla_X Z)\xi - \tau^*(Y)h(X,Z)\xi + h(X,Z)A^*Y - \nabla_{[\nabla_X Y - \nabla_Y X]}Z \\ &- h(Z,\nabla_X Y)\xi + h(Z,\nabla_Y X)\xi.\end{aligned}$$

$$\tilde{R}(X,Y,Z) = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z - h(Y,Z)A^*X + h(X,Z)A^*Y + h(X,\nabla_Y Z)\xi + h(Z,\nabla_Y X)\xi - h(Y,\nabla_X Z)\xi - h(Z,\nabla_X Y)\xi - \tau^*(Y)h(X,Z)\xi + \tau^*(X)h(Y,Z)\xi. \tag{2.47}$$

$$\tilde{R}(X,Y,Z) = R(X,Y,Z) - h(Y,Z)A^*X + h(X,Z)A^*Y + (\nabla_X h)(Y,Z)\xi - (\nabla_Y h)(X,Z)\xi + \tau^*(X)h(Y,Z)\xi - \tau^*(Y)h(X,Z)\xi. \tag{2.48}$$

La composante tangentielle de l'équation (2.47) donne

$$\tilde{R}(X,Y,Z) = R(X,Y,Z) - h(Y,Z)A^*X + h(X,Z)A^*Y. \tag{2.49}$$

et la composante normale de l'equation (2.47) donne

$$(\tilde{R}(X,Y)Z)^{\perp} = (\nabla_X h)(Y,Z)\xi - (\nabla_Y h)(X,Z)\xi + \tau^*(X)h(Y,Z)\xi - \tau^*(Y)h(X,Z)\xi. \tag{2.50}$$

qui est connue sous le nom d'équation de Codazzi.
Notons que par rapport aux connexions duales l' équations de Gauss-Codazzi est définie par :

$$\tilde{R}^*(X,Y,Z) = R^*(X,Y,Z) - h^*(Y,Z)AX + h^*(X,Z)AY + (\nabla^*_X h^*)(Y,Z)\xi - (\nabla^*_Y h^*)(X,Z)\xi + \tau(X)h^*(Y,Z)\xi - \tau(Y)h^*(X,Z)\xi. \tag{2.51}$$

En effet, pour tout X, Y, Z$\in \Gamma(TM)$ et $\xi \in TM^{\perp}$.

$$\begin{aligned}
\tilde{R}^*(X,Y)Z &= \tilde{\nabla}^*_X\tilde{\nabla}^*_Y Z - \tilde{\nabla}^*_Y\tilde{\nabla}^*_X Z - \tilde{\nabla}^*_{[X,Y]}Z \\
&= \tilde{\nabla}^*_X[\nabla^*_Y Z + h^*(Y,Z)\xi] - \tilde{\nabla}^*_Y[\nabla^*_X Z + h^*(X,Z)\xi] - \tilde{\nabla}^*_{(\nabla^*_X Y - \nabla^*_Y X)}Z \\
&= \tilde{\nabla}^*_X[\nabla^*_Y Z] + \tilde{\nabla}^*_X[h^*(Y,Z)\xi] - \tilde{\nabla}^*_Y[\nabla^*_X Z] - \tilde{\nabla}^*_Y[h^*(X,Z)\xi] - \tilde{\nabla}^*_{(\nabla^*_X Y)}Z + \tilde{\nabla}^*_{(\nabla^*_Y X)}Z \\
&= \nabla^*{}_X\nabla^*{}_Y Z + h^*(X,\nabla^*{}_Y Z)\xi + h^*(Y,Z)\tilde{\nabla}^*{}_X\xi - \nabla^*{}_Y\nabla^*{}_X Z - h^*(Y,\nabla^*{}_X Z)\xi \\
&- h^*(X,Z)\tilde{\nabla}^*{}_Y\xi - \nabla^*_{(\nabla^*_X Y)}Z - h^*(Z,\nabla^*_X Y)\xi + \nabla^*_{(\nabla^*_Y X)}Z + h^*(Z,\nabla^*_Y X)\xi \\
&= \nabla^*{}_X\nabla^*{}_Y Z + h^*(X,\nabla^*{}_Y Z)\xi + h^*(Y,Z)(-AX + \tau(X)\xi) - \nabla^*{}_Y\nabla^*{}_X Z \\
&- h^*(Y,\nabla^*{}_X Z)\xi - h^*(X,Z)(-AY + \tau(Y)\xi) - \nabla^*_{(\nabla^*_X Y)}Z + \nabla^*_{(\nabla^*_Y X)}Z \\
&- h^*(Z,\nabla^*_X Y)\xi + h^*(Z,\nabla^*_Y X)\xi \\
&= \nabla^*{}_X\nabla^*{}_Y Z + h^*(X,\nabla^*{}_Y Z)\xi - h^*(Y,Z)AX + h^*(Y,Z)\tau(X)\xi \\
&- \nabla^*{}_Y\nabla^*{}_X Z - h^*(Y,\nabla^*{}_X Z)\xi + h^*(X,Z)AY - h^*(X,Z)\tau(Y)\xi \\
&- \nabla^*_{[X,Y]}Z - h^*(Z,\nabla^*_X Y)\xi + h^*(Z,\nabla^*_Y X)\xi.
\end{aligned}$$

$$\tilde{R}^*(X,Y)Z = \nabla^*{}_X\nabla^*{}_YZ - \nabla^*{}_Y\nabla^*{}_XZ - \nabla^*_{[X,Y]}Z - h^*(Y,Z)AX + h^*(X,Z)AY + h^*(Z,\nabla^*_YX)\xi + h^*(X,\nabla^*_YZ)\xi - h^*(Z,\nabla^*_XY)\xi - h^*(Y,\nabla^*_XZ)\xi + h^*(Y,Z)\tau(X)\xi - h^*(X,Z)\tau(Y)\xi.$$

$$\tilde{R}^*(X,Y,Z) = R^*(X,Y,Z) - h^*(Y,Z)AX + h^*(X,Z)AY + (\nabla^*_Xh^*)(Y,Z)\xi - (\nabla^*_Yh^*)(X,Z)\xi + \tau(X)h^*(Y,Z)\xi - \tau(Y)h^*(X,Z)\xi.$$

Ainsi l'équation de Gauss-Codazzi pour une connexion duale est la suivante

$$\tilde{R}^*(X,Y,Z) = R^*(X,Y,Z) - h^*(Y,Z)AX + h^*(X,Z)AY + (\nabla^*_Xh^*)(Y,Z)\xi - (\nabla^*_Yh^*)(X,Z)\xi + \tau(X)h^*(Y,Z)\xi - \tau(Y)h^*(X,Z)\xi. \quad (2.52)$$

De (2.47) la composante normale de l'equation de Gauss-Codazzi est

$$\tilde{R}^{*\perp}(X,Y)Z = (\nabla^*_Xh^*)(Y,Z)\xi - (\nabla^*_Yh^*)(X,Z)\xi + \tau(X)h^*(Y,Z)\xi - \tau(Y)h^*(X,Z)\xi. \quad (2.53)$$

qui est l'équation de Codazzi pour une connexion duale.

Chapitre 3

Inégalités de Chen-Ricci sur l'hypersurface d'une variété statistique

3.1 Courbure de Ricci d'une sous-variété d'une variété statistique.

Soit M une variété riemannienne à n dimensions munie d'une métrique riemannienne g. Le produit interne de la métrique g est notée $\langle , \rangle$. Soit ∇ la connexion de Riemannienne de la métrique g et $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ une base orthonormée pour T_PM. La courbure sectionnelle d'une section plane portée par les vecteurs unitaires orthogonaux e_i et e_j en P $\in$M notée K_{ij} est

$$K_{ij} = \sum_{i,j=1}^{n} g(R(e_i, e_j)e_j, e_i). \tag{3.1}$$

Le tenseur de Ricci S est défini par

$$S(X, Y) = \sum_{i=1} g(R(e_i, X)Y, e_i), X, Y \in TM. \tag{3.2}$$

En fixant i$\in\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ la courbure de Ricci de e_i, notée $Ric(e_i)$, est définie par

$$Ric(e_i) = \sum_{i \neq j}^{n} K_{ij}. \tag{3.3}$$

En effet, $Ric(e_i) = S(e_i, e_i)$ et les courbures de Ricci déterminent complètement le tenseur de Ricci. La courbure scalaire $\tau(P)$ de M en p est définie par

$$\tau(P) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} K_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} Ric(e_i). \tag{3.4}$$

Soit π_k une section k-plane de T_PM et X un vecteur unitaire dans π_k . On choisit une base orthonormale $\{e_1, ...e_k\}$ de π_k tel que $e_1 = X$.

La courbure de Ricci Ric_{π_k} de π_k en X est défini par [4]

$$Ric_{\pi_k} = K_{11} + K_{12} + K_{13} + ... + K_{1k}. \tag{3.5}$$

Ric_{π_k} est appelée une courbure de k-Ricci. Ainsi pour chaque e_i fixé, i $\in\{1, ..., k\}$,nous obtenons

$$Ric(e_i) = \sum_{i\neq j}^{n} K_{ij}. \tag{3.6}$$

La courbure scalaire $\tau(\pi_k)$ de la section du k-plan de π_k est donnée par

$$\tau(\pi_k) = \sum_{1\leq i<j\leq n} K_{ij}. \tag{3.7}$$

où $\{e_1, ...e_k\}$ est toute base orthonormée de la section du k-plan de π_k .

$$2\tau(\pi_k) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j\neq i}^{k} K_{ij} = \sum_{i=1}^{k} Ric_{\pi_k}(e). \tag{3.8}$$

La courbure scalaire $\tau(P)$ de M en P est identique à la courbure scalaire de la tangente T_PM de M en P ; soit $\tau(P) = \tau(T_PM)$. Si π_k est une section 2-plan, $\tau(\pi_k)$ n'est que la courbure selectionnelle $K(\pi_k)$ de π_k.

Proposition 3.1. *Soit (M, g) une hypersurface d'une variété statistique $(\tilde{M}, \tilde{g})$ et $(e_i, ..., e_j)$ une base orthonormée au point p.*
Alors la courbure sectionnelle est donnée par

$$K_{ij} = \tilde{K}_{ij} - \sum_{i}\sum_{j} < h(e_i, e_i), h^*(e_j, e_j) > + \sum_{i}\sum_{j} < h^*(e_i, e_j), h(e_j, e_i) >. \tag{3.9}$$

3.2 Courbure de Ricci d'une sous-variété d'une variété statistique à courbure sectionnelle constante c.

Soit $\tilde{M}$ une variété statistique de dimension (n + k) de courbure constante $c\in\mathbb{R}$ et M une sous-variété statistique de $\tilde{M}(c)$ à n dimensions.

On utilise les notations

$$R(X,Y,Z,W) = g(R(X,Y)Z,W)$$

et

$$R^*(X,Y,Z,W) = g(R^*(X,Y)Z,W)$$

où R et R^* sont les champs de courbure tensoriels associés aux connexions affines ∇ et ∇^*. Soient $\{e_1,...,e_n\}$ et $\{e_{n+1},...,e_{n+k}\}$ deux bases orthonormées tangentes respectivement à M.
Les champs de vecteurs de courbure moyenne sont définies par [3]

$$H = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h(e_i,e_i) = \frac{1}{n}\sum_{\alpha=1}^{k}\left(\sum_{i=1}^{n} h_{ii}^{\alpha}\right)e_{n+\alpha}, h_{ij}^{\alpha} = \tilde{g}(h(e_i,e_j),e_{n+\alpha}), \quad (3.10)$$

et

$$H^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h^*(e_i,e_i) = \frac{1}{n}\sum_{\alpha=1}^{k}\left(\sum_{i=1}^{n} h_{ii}^{\star\alpha}\right)e_{n+\alpha}, h_{ij}^{\star\alpha} = \tilde{g}(h^*(e_i,e_j),e_{n+\alpha}). \quad (3.11)$$

Définition 3.1. *[12]Soit $\tilde{M}$ une variété statistique de dimension (n + k). Alors le tenseur de Ricci $\tilde{S}$ (de type (0, 2)) est défini par*

$$\tilde{S}(X,Y) = trace\Big\{X \longrightarrow \tilde{R}(X,Y)Z\Big\} \quad (3.12)$$

où $\tilde{R}$ est le champ du tenseur de courbure de la connexion affine $\tilde{\nabla}$ sur M de courbure constante c∈$\mathbb{R}$.

Théorème 3.1. *[3]Soit $\tilde{M}(c)$ une variété statistique de dimension (n+k) et M une sous variété statistique de $\tilde{M}(c)$ de dimension n. Soit $\{e_1,....,e_2\}$ et $\{n_1,...,n_k\}$ une base orthonormée tangente et normale respectivement sur M. Alors le tenseur de Ricci S et le tenseur de Ricci dual S^* De M satisfont*

$$S(X,Y) = c(n-1)g(X,Y) + \sum_{i=1}^{k}\big[g(A_{n_iX,Y})trA_{n_i}^* - g(A_{n_i}Y,A_{n_i}^*X)\big] \quad (3.13)$$

$$S^*(X,Y) = c(n-1)g(X,Y) + \sum_{i=1}^{k}\big[g(A_{n_iX,Y}^*)trA_{n_i} - g(A_{n_i}X,A_{n_i}^*Y)\big] \quad (3.14)$$

où A_{n_i} et $A_{n_i}^*$ sont des transformations linéaire définie dans (2.15) et (2.16).

Preuve :

•Supposons que M est une sous variété de $\tilde{M}(c)$ de dimension n. Notons que R est la tenseur de courbure de Riemann de M par rapport à ∇. Alors on écrit :

$$S(X,Y) = \sum_{j=1}^{n} g(R(e_j,X)Y,e_j). \tag{3.15}$$

Dans le cas où la variante ambiante est à courbure constante, en utilisant l'équation de Gauss (2.17) pour le tenseur de Ricci S(X, Y) ,on a

$$\sum_{j=1}^{n} g(R(e_j,X)Y,e_j) = \sum_{j=1}^{n} c(n-1)g(X,Y) + g(h(X,Y),h^*(e_j,e_j)) - g(h(e_j,Y)X,h^*(X,e_j)). \tag{3.16}$$

Ainsi,

$$\tilde{g}(h(X,Y),h^*(e_j,e_j)) = \sum_{i=1}^{k} g(A^*_{ni}e_j,e_j)g(A_{ni}X,Y). \tag{3.17}$$

et

$$\tilde{g}(h(e_j,Y)X,h^*(X,e_j)) = \sum_{i=1}^{k} g(A^*_{n_i}X,e_j)g(A_{n_i}Y,e_j)). \tag{3.18}$$

en mettant (3.18) et (3.17) dans (3.16), nous obtenons l'équation suivante du tenseur de Ricci

$$S(X,Y) = \sum_{i=1}^{n} C(n-1)g(X,Y) + \left\{ \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{k} g(A_{n_i}X,Y)g(A^*_{n_i}e_j,e_j)) - g(A_{ni}e_j,Y)g(A^*_{ni}X,e_j) \right\}. \tag{3.19}$$

d'où

$$S(X,Y) = c(n-1)g(X,Y) + \sum_{i=1}^{k} \{ g(A_{n_i}X,Y)trA^*_{ni} - g(A^*_{ni}X,A_{ni}Y) \}.$$

•Supposons que M est une sous variété de $\tilde{M}(c)$ de dimension n. Notons $\tilde{R}^*$ que est la tenseur de courbure de Riemann de M par rapport à ∇^*. Alors on

écrit :

$$S^*(X,Y) = \sum_{j=1}^{n} g(R^*(e_j,X)Y,e_j). \tag{3.20}$$

Dans le cas où la variante ambiante est à courbure constante pour une connexion duale. En utilisant l'équation de Gauss (2.35) pour le tenseur de ricci $S^*(X,Y)$, nous obtenons

$$\sum_{j=1}^{n} g(R^*(e_j,X)Y,e_j) = \sum_{j=1}^{n} C(n-1)g(X,Y) + g(h^*(X,Y),h(e_j,e_j)) - g(h^*(e_j,Y)X,h(X,e_j)). \tag{3.21}$$

Ainsi, avec

$$\tilde{g}(h^*(X,Y),h^*(e_j,e_j)) = \sum_{i=1}^{k} g(A_{ni}e_j,e_j)g(A^*_{ni}X,Y). \tag{3.22}$$

et

$$\tilde{g}(h^*(e_j,Y)X,h(X,e_j)) = \sum_{i=1}^{k} g(A_{n_i}X,e_j)g(A^*_{n_i}Y,e_j)). \tag{3.23}$$

en mettant (3.23) et (3.22) dans (3.21), nous obtenons l'équation du tenseur de Ricci pour une connexion duale suivante :

$$S^*(X,Y) = \sum_{i=1}^{n} c(n-1)g(X,Y) + \left\{ \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{k} g(A^*_{n_i}X,Y)g(A_{n_i}e_j,e_j)) - g(A^*_{ni}e_j,Y)g(A_{ni}X,e_j) \right\}. \tag{3.24}$$

d'où

$$S^*(X,Y) = c(n-1)g(X,Y) + \sum_{i=1}^{k} \big\{ g(A^*_{n_i}X,Y)trA_{ni} - g(A_{ni}X,A^*_{ni}Y) \big\}.$$

■

3.3 Inégalités de Chen-Ricci pour les sous-variétés statistiques dans la variété statistique de courbure constante.

Soit $\tilde{M}(C)$ une variété statistique de dimensions (n + k) à courbure constante $C\in\mathbb{R}$ et M sous-variété statistique de $\tilde{M}(C)$ de dimensions n. Soit $X\in T_PM$ un vecteur unitaire tangent en P. On choisit une base une orthonormée $e_1,...,e_n,e_{n+1},...,e_m$ tel que $e_e,...,e_n$ sont tangentes à M^n en P et $e_1 = X$. Alors à partir de l'équation de Gauss (2.17) , on peut endéduire l'inégealités de Chen-Ricci pour les sous-variétés statistiques dans la variété statistique de courbure constante.

Théorème 3.2. *[3]Soit $\tilde{M}$ une variété statistique de dimensions (n + k) à courbure constante $c\in\mathbb{R}$ et M une sous variété statistique de $\tilde{M}(c)$ de dimensions n. Alors*

$$Ric(X)\geqslant 2Ric^0(X)-\frac{n^2}{8}\tilde{g}(H,H)-\frac{n^2}{8}\tilde{g}(H^*,H^*)+(n-1)c-2\sum_{i=2}^{n}K^0(X\wedge e_i). \tag{3.25}$$

Preuve :
Pour toute base orthonormée $\{e_i,e_j\}$, i,j = 1 ;..... ; n et sommant sur $1\leq i<j\leq n$, on a

$$\sum_{i,j=1}^{n}g(\tilde{R}(e_i,e_j)e_i,e_j)=\sum_{i,j=1}^{n}g(R(e_i,e_j)e_i,e_j)+\sum_{i,j=1}^{n}g(h(e_i,e_i),h^*(e_j,e_j))-\sum_{i,j=1}^{n}g(h^*(e_i,e_j),h(e_j,e_i)) \tag{3.26}$$

$$\sum_{i,j=1}^{n}g(R(e_i,e_j)e_i,e_j)=\sum_{i,j=1}^{n}c\big[g(e_i,e_i)g(e_j,e_j)-g(e_i,e_j)^2\big]+\sum_{i,j=1}^{n}\tilde{g}(h(e_i,e_i)h^*(e_j,e_j))-\sum_{i,j=1}^{n}\tilde{g}(h^*(e_i,e_j)h(e_j,e_i)) \tag{3.27}$$

$$
\begin{aligned}
(n^2-n)c &= 2\tau - n^2\tilde{g}(H,H^*) + \sum_{i,j=1}^{n}\tilde{g}(h^*(e_i,e_j),h(e_i,e_j)) \\
&= 2\tau - \frac{n^2}{2}[\tilde{g}(H+H^*,H+H^*) - \tilde{g}(H,H) - \tilde{g}(H^*,H^*)] \\
&+ \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}[\tilde{g}(h^*(e_i,e_j)+h(e_i,e_j),h^*(e_i,e_j)+h(e_i,e_j))] \\
&- \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}[\tilde{g}(h(e_i,e_j),h(e_i,e_j))] - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}[\tilde{g}(h^*(e_i,e_j),h^*(e_i,e_j))].
\end{aligned}
$$

Avec $2H^0 = H + H^*$[3], il s'ensuit que

$$
\begin{aligned}
(n^2-n)c &= 2\tau - 2n^2\tilde{g}(H^0,H^0) + \frac{n^2}{2}\tilde{g}(H,H) + \frac{n^2}{2}\tilde{g}(H^*,H^*) + 2\sum_{I,j=1}^{n}\tilde{g}(h^0,h^0) \\
&- \frac{1}{2}(\| h \|^2 + \| h^* \|^2). \qquad (3.28)
\end{aligned}
$$

Ainsi, on peut écrire

$$
\begin{aligned}
\| h \|^2 &= \sum_{r=n+1}^{m}\left\{(h^r_{11})^2 + (h^r_{22}+...+h^r_{nn})^2 + 2\sum_{i<j}(h^r_{ij})^2\right\} - 2\sum_{r=n+1}^{m}\sum_{2\leq i<j\leq n}h^r_{ii}h^r_{jj} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{r=n+1}^{m}\left\{(h^r_{11}+h^r_{22}+...+h^r_{nn})^2 + (h^r_{11}-h^r_{22}-...-h^r_{nn})^2\right\} \\
&+ 2\sum_{r=n+1}^{m}\sum_{i<j}(h^r_{ij})^2 - \sum_{r=n+1}^{m}\sum_{2\leq i<j\leq n}h^r_{ii}h^r_{jj} \geqslant \frac{1}{2}n^2\| H^2 \| - \sum_{r=n+1}^{m}\sum_{2\leq i<j\leq n}\left\{h^r{}_{ii}h^r{}_{jj} - (h^r{}_{ij})^2\right\}
\end{aligned}
$$

$$
\| h \|^2 \geqslant \frac{1}{2}n^2\| H^2 \| - \sum_{r=n+1}^{m}\sum_{1\leq i<j\leq n}\left\{h^r{}_{ii}h^r{}_{jj} - (h^r{}_{ij})^2\right\}. \qquad (3.29)
$$

D'une façon qui est similaire

$$
\| h^* \|^2 \geqslant \frac{1}{2}n^2\| H^* \|^2 - \sum_{r=n+1}^{m}\sum_{1\leq i<j\leq n}\left\{h^{*r}{}_{ii}h^{*r}{}_{jj} - (h^{*r}{}_{ij})^2\right\}. \qquad (3.30)
$$

En additionant membre à membre (3.29) et (3.30), on a donc l'inégalité suivante

$$\| h \|^2+\| h^* \|^2 \geqslant \frac{1}{2}n^2\| H^2 \|+\frac{1}{2}n^2\| H^* \|^2-\sum_{r=n+1}^{m}\sum_{1\leq i<j\leq n}(h^r{}_{ii}+h^{*r}{}_{ii})(h^r{}_{jj}+h^{*r}{}_{jj})$$
$$+2\sum_{r=n+1}^{m}\sum_{1\leq i<j\leq n}h^r{}_{ii}h^{*r}{}_{jj}+\sum_{r=n+1}^{m}\sum_{1\leq i<j\leq n}\left[(h^r{}_{ij})^2+(h^{*r}{}_{ij})^2\right] \quad (3.31)$$

En mettant (3.31) dans (3.28) , on obtient

$$n(n-1)c\leq 2\tau-2n^2g(H^0,H^0)+\frac{n^2}{2}\tilde{g}(H,H)+\frac{n^2}{2}\tilde{g}(H^*,H^*)$$
$$+2\| h^0 \|+2\sum_{r=n+1}^{m}\sum_{1\leq i<j\leq n}h^{0r}{}_{ii}h^{0r}{}_{jj}-\frac{n^2}{4}\tilde{g}(H,H)-\frac{n^2}{4}\tilde{g}(H^*,H^*)$$
$$-\sum_{r=n+1}^{m}\sum_{1\leq j<j\leq n}h^r{}_{ii}h^{*r}{}_{jj}-\frac{1}{2}\sum_{r=n+1}^{m}\sum_{1\leq j<j\leq n}\left[(h^r{}_{ij})^2+(h^{*r}{}_{ij})^2\right] \quad (3.32)$$

or

$$\sum_{2\leq i\neq j\leq n}R(e_i,e_j,e_i,e_j)=(n-1)(n-2)c+\sum_{r=n+1}^{m}\sum_{2\leq i<j\leq n}(h^r{}_{ii}h^{*r}{}_{jj}-h^r{}_{ij}h^{*r}{}_{ij}) \quad (3.33)$$

l'inégalité précédente devient

$$n(n-1)c\leq 2\tau-2n^2g(H^0,H^0)+\frac{n^2}{4}\tilde{g}(H,H)+\frac{n^2}{4}\tilde{g}(H^*,H^*)+2\| h^0 \|$$
$$+2\sum_{r=n+1}^{m}\sum_{1\leq j<j\leq n}h^{0r}{}_{ii}h^{0r}{}_{jj}-\sum_{2\leq i\neq j\leq n}R(e_i,e_j,e_i,e_j)$$
$$+(n-1)(n-2)c-\frac{1}{2}\sum_{r=n+1}^{m}\sum_{1\leq i\neq j\leq n}(h^r{}_{ij}+h^{*r}{}_{ij})^2. \quad (3.34)$$

Ainsi, nous avons

$$Ric(X)\geqslant n^2\tilde{g}(H^0,H^0)-\frac{n^2}{8}\tilde{g}(H,H)-\frac{n^2}{8}\tilde{g}(H^*,H^*)+(n-1)c-\| h^0 \|^2$$
$$-\sum_{r=n+1}^{m}\sum_{1\leq j<j\leq n}\left[h^{0r}{}_{ii}h^{0r}{}_{jj}-(h^{0r}{}_{ij})^2\right] \quad (3.35)$$

de l'équation de Gauss par rapport à la connexion Levi-Civita, nous avons

$$\sum_{1\leq j\neq i\leq n}\tilde{R}^0(e_i,e_j,e_i,e_j)=2\tau^0-n^2\tilde{g}(H^0,H^0)+\parallel h^0\parallel^2.$$

$$\sum_{1\leq j\neq i\leq n}\tilde{R}^0(e_i,e_j,e_i,e_j)-2\tau^0=-n^2\tilde{g}(H^0,H^0)+\parallel h^0\parallel^2. \tag{3.36}$$

et, respectivement,

$$\sum_{1\leq i\neq j\leq n}\tilde{R}^0(e_i,e_j,e_i,e_j)=\sum_{1\leq i\neq j\leq n}R^0(e_i,e_j,e_i,e_j)-\sum_{r=n+1}^{m}\sum_{1\leq i<j\leq n}\left[{h^{0r}}_{ii}{h^{0r}}_{jj}-({h^{0r}}_{ij})^2\right]. \tag{3.37}$$

En mettant (3.36) dans (3.35), on a

$$Ric\geqslant 2\tau^0-\sum_{1\leq i<j\leq n}\tilde{R}^0(e_i,e_j,e_i,e_j)-\frac{n^2}{8}\tilde{g}(H,H)-\frac{n^2}{8}\tilde{g}(H^*,H^*)+(n-1)c$$
$$-\sum_{2\leq i\neq j\leq n}R^0(e_i,e_j,e_i,e_j)+\sum_{2\leq i\neq j\leq n}\tilde{R}^0(e_i,e_j,e_i,e_j).$$

enfin, on obtient

$$Ric(X)\geqslant 2Ric^0(X)-\frac{n^2}{8}\tilde{g}(H,H)-\frac{n^2}{8}\tilde{g}(H^*,H^*)+(n-1)c-2\sum_{i=2}^{n}K^0(X\wedge e_i). \tag{3.38}$$

On note que $\max K^0(X\wedge e_i)$ est le maximum de la fonction de courbure sectionnelle de $\tilde{M}$(C) par rapport à $\tilde{\nabla}$ limité aux sections 2̀ plans de l'espace tangent T_PM qui sont tangentes à X. ■

3.4 Inégalités de Chen-Ricci sur l'hypersurface d'une variété statistique

3.4.1 Courbure de Ricci sur l'hypersurface d'une variété statistique

Soit (M, g) une hypersurface de $(\tilde{M},\tilde{g},\tilde{\nabla})$ et $(e_1,....,e_n)$ une base orthonormée de T_PM en un point $P\in M$ Pour tout vecteur tangent X $\in \Gamma(TM)$;

(•) l'équation de Ricci pour l'hypersurface d'une variété statique òu $\tilde{R}$ est le champ tenseur de courbure riemannien de $\tilde{M}$ est donnée par les égalités suivante :

$$\tilde{Ric}(X) = Ric(X) - \sum_{j=1}^{n} g(h(X,X)), h^*(e_j,e_j) + \sum_{j=1}^{n} g(h(e_j,X)), h^*(X,e_j).$$

Preuve :
En effet, tout en sachant que les courbures de Ricci sont déterminés complètement par le tenseur de Ricci. On a que

$$\tilde{Ric}(X) = \tilde{S}(X,X) = \sum_{j=1}^{n} g(\tilde{R}(e_j,X)X,e_j). \tag{3.39}$$

Ainsi, en substituant X par Y dans l'équation du tenseur de Ricci(3.13), on a les résultats suivante

$$\sum_{j=1}^{n} g(\tilde{R}(e_{e_j},X)X,e_j) = \sum_{j=1}^{n} g(R(e_{e_j},X)X,e_j) - \sum_{j=1}^{n} h(X,X)g(A^*e_j,e_j) + \sum_{j=2}^{n} h(e_j,X)g(A^*X,e_j)$$

$$\tilde{Ric}(X) = Ric(X) - \sum_{j=1}^{n} g(h(X,X),h^*(e_j,e_j)) + \sum_{i=1}^{n} g(h(e_j,X),h^*(X,e_j))$$

$$\tilde{Ric}(X) = Ric(X) - g(A_\xi X,X)tracA^*{}_\xi + g(A_\xi X, A^*{}_\xi X). \tag{3.40}$$

■

(•) D'une facon qui est similaire à l'équation de Ricci pour $\tilde{R}^*$. Ainsi, l'équation de Ricci pour l'hypersurface d'une variété statique òu $\tilde{R}^*$ est le champ tenseur de courbure riemannien de $\tilde{M}$ est donnée par les égalités suivante :
$\tilde{Ric}^*(X) = Ric^*(X) - \sum_{j=1}^{n} g(h^*(X,X)), h(e_j,e_j) + \sum_{j=1}^{n} g(h^*(e_j,X)), h(X,e_j).$
Preuve :
En effet, tout en sachant que les courbures de Ricci sont déterminés complètement par le tenseur de Ricci *même* dans le cas d'une connexion duale ∇^*. on a que

$$\tilde{Ric}^*(X) = \tilde{S}^*(X,X) = \sum_{j=1}^{n} g(\tilde{R}^*(e_j,X)X,e_j).$$

Ainsi, en substituant Y par X dans l'équation du tenseur de Ricci pour

une connexion duale ∇^*(3.14), nous obtenons les résultats suivante :

$$\sum_{j=1}^{n}\tilde{g}(\tilde{R}^*(e_{e_j},X,X),e_j)=\sum_{j=1}^{n}g(R^*(e_{e_j},X,X),e_j)-\sum_{j=1}^{n}h^*(X,X)g(Ae_j,e_j)+\sum_{j=1}^{n}h^*(e_j,X)g(AX,e_j).$$

$$\tilde{Ric}^*(X)=Ric^*(X)-\sum_{j=1}^{n}g(h^*(X,X),h(e_j,e_j))+\sum_{j=1}^{n}g(h^*(e_j,X),h(e_j,X)).$$

$$\tilde{Ric}^*(X)=Ric^*(X)-g(A^*{}_\xi X,X)tracA_\xi+g(A^*{}_\xi X,A_\xi X). \quad (3.41)$$

■

(•) En plus d'une facon qui est similaire à l'équation de Ricci pour $\tilde{R}$ et $\tilde{R}^*$, alors l'équation de Ricci pour l'hypersurface d'une variété statique òu $\tilde{R}^0$ est le champ de tenseur de courbure riemannien de $\tilde{M}$ est donnée par les égalités suivante :
$\tilde{Ric}^0(X)=Ric^0(X)-\sum_{j=1}^{n}g(h^0(X,X)),h^0(e_j,e_j)+\sum_{j=1}^{n}g(h^0(e_j,X)),h^0(X,e_j)$.
Preuve :
En effet, tout en sachant que les courbures de Ricci sont déterminés complètement par le tenseur de Ricci *même* dans le cas de $\tilde{R}^0$. On a que

$$\tilde{Ric}^0(X)=\tilde{S}^0(X,X)=\sum_{j=1}^{n}g(\tilde{R}^0(e_j,X)X,e_j)$$

Ainsi substituant Y par X dans l'équation du tenseur de Ricci pour le cas où le tenseur de courbure est $\tilde{R}^0$. Nous obtenons les résultats suivants

$$\sum_{j=1}^{n}\tilde{g}(\tilde{R}^0(e_j,X)X,e_j)=\sum_{j=1}^{n}g(R^0(e_{e_j},X)X,e_j)-\sum_{j=1}^{n}h^0(X,X)g(Ae_j,e_j)+\sum_{j=1}^{n}h^0(e_j,X)g(AX,e_j).$$

$$\tilde{Ric}^0(X)=Ric^0(X)-\sum_{j=1}^{n}g(h^0(X,X)h^0(e_j,e_j))+\sum_{j=1}^{n}g(h^0(e_j,X)h^0(e_j,X)).$$

$$\tilde{Ric}^0(X)=Ric^0(X)-g(A^0{}_\xi X,X)tracA_\xi+g(A^0{}_\xi X,A^0{}_\xi X). \quad (3.42)$$

■

3.4.2 Inégalités de Chen-Ricci sur l'hypersurface d'une variété statistique

Théorème 3.3. *Soit (M, g) une hypersurface d'une variété statistique* $(\tilde{M}, \tilde{g}, \tilde{\nabla})$ *et* $(e_1, ..., e_n)$ *une base orthonormée de* T_PM *en un point* $P \in M$. *Pour tout vecteur tangent* $X \in \Gamma(TM)$, *òu* $\tilde{R}^0$ *est le champ tenseur de courbure riemannien de* $\tilde{M}$.
L'inégalités de de Chen-Ricci sur l'hypersurface d'une variété statiatique est définie par :

$$Ric^0(X) \geqslant \tilde{Ric}^0(X) + g(A^0{}_\xi X, X) tracA_\xi - \| A^0{}_\xi X \|^2. \tag{3.43}$$

Preuve :
Ains, avec (3.43) on a :

$$Ric^0(X) = \tilde{Ric}^0(X) + g(A^0{}_\xi X, X) tracA_\xi - g(A^0{}_\xi X, A^0{}_\xi X)$$

en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$g(A^0{}_\xi X, A^0{}_\xi X) \leq \| A^0{}_\xi X \|^2$$

$\Leftrightarrow$

$$-g(A^0{}_\xi X, A^0{}_\xi X) \geqslant - \| A^0{}_\xi X \|^2$$

d'où l'inégalité de Chen-Ricci pour l'hypersurface d'un variété statistique qui est :

$$Ric^0(X) \geqslant \tilde{Ric}^0(X) + g(A^0{}_\xi X, X) tracA_\xi - \| A^0{}_\xi X \|^2.$$

■

3.5 Inégalité sur la courbure scalaire d'une hypersurface d'une variété statistique.

Soit (M, g) une hypersurface de $(\tilde{M}, \tilde{g})$ et soit $\{e_1, ..., e_n\}$ une base orthonormale de l'éspace tangent T_PM et $\{e_{n+1}, ..., e_m\}$ une base orthonormale du fibre vectoriel $T_PM^{\perp}$. Alors,

$$\tilde{\tau}(p) \geqslant n(n-1)C + \frac{n^2}{2} \| H \| \| H^* \| - \frac{1}{2} \| h^* \| \| h \|. \tag{3.44}$$

Preuve :
En utilisant l'équation (2.17), on a

$$\sum_i \sum_j \tilde{g}(\tilde{R}(e_i, e_j)e_i, e_j) = \sum_i \sum_j \tilde{g}(R(e_i, e_j)e_i, e_j) + \sum_i \sum_j \tilde{g}(h(e_i, e_i), h^*(e_j, e_j)) - \sum_i \sum_j \tilde{g}(h(e_j, e_i), h^*(e_i, e_j)). \tag{3.45}$$

Ainsi ;

$$h_{ij}{}^{n+1} = \sum_{i,j=1}^{n} g(h(e_i, e_j), e_{n+1}). \tag{3.46}$$

$$\| h \|^2 = \sum_{i,j=1}^{n+1} g(h(e_i, e_j), h(e_i, e_j)). \tag{3.47}$$

$$trh = \sum_{i,j=1}^{n+1} g(h(e_i, e_i). \tag{3.48}$$

$$\| trh \|^2 = g(trh, trh). \tag{3.49}$$

Soit N_h l'éspace de nulté de la seconde forme fondamental définie par

$$N_h = \{X \in T_PM, h(X, Y) = 0 \ \ \forall X, Y \in T_PM\}. \tag{3.50}$$

$$\begin{aligned}
\| h \|^2 &= \sum_{i,j=1}^{n+1} g(h(e_i,e_j),h(e_i,e_j)) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n+1} g(h(e_i,e_j),h(e_i,e_j)) + \sum_{i\neq j=1}^{n} g(h(e_i,e_j),h(e_i,e_j)) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n+1} g(g(h((e_i,e_j),e_0)e_0, g(h(e_i,e_j),e_0)e_0)) + \sum_{i\neq j=1}^{n} g(g(h((e_i,e_j),e_0)e_0, g(h(e_i,e_j),e_0)e_0)) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n+1} g(h(e_i,e_j),e_0), g(h(e_i,e_j),e_0)) + \sum_{i\neq j=1}^{n} g(h(e_i,e_j),e_0), g(h(e_i,e_j),e_0)) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n+1} h^0_{ij}h^0_{ij} + \sum_{i\neq j=1}^{n} h^0_{ij}h^0_{ij} \\
&= \sum_{i,j=1}^{n+1} h^0_{ij}h^0_{ij} + 2\sum_{1\leq i<j\leq=n+1} h^0_{ij}h^0_{ij} \\
&= \frac{1}{2}(\sum_{i=1}^{n+1} h^0_{ii}h^0_{ii} + 2\sum_{1\leq i<j\leq=n+1} h^0_{ij}h^0_{ij}) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n+1} h^0_{ii}h^0_{ii} - \sum_{1\leq i<j\leq=n+1} h^0_{ij}h^0_{ij} \\
&+ 2\sum_{1\leq i<j\leq=n+1} h^0_{ij}h^0_{ij} \\
&= \sum_{i,j=1}^{n+1} h^0_{ij}h^0_{ij} + 2\sum_{1\leq i<j\leq=n+1} h^0_{ij}h^0_{ij} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n+1}(h^0_{ii}h^0_{ii} + 2\sum_{1\leq i<j\leq=n+1} h^0_{ii}h^0_{jj}) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n+1} h^0_{ii}h^0_{ii} - \sum_{1\leq i<j\leq=n+1} h^0_{ij}h^0_{ij} \\
&+ 2\sum_{j=2}^{n+2} h^0_{1j}h^0_{1j} + 2\sum_{1\leq i<j\leq=n+1} h^0_{ij}h^0_{ij}.
\end{aligned}$$

$$\| h \|^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n+1}(h^0_{ii}h^0_{ii} + 2\sum_{1\leq i<j\leq=n+1} h^0_{ii}h^0_{jj}) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n+1} h^0_{ii}h^0_{ii} - \sum_{1\leq i<j\leq=n+1} h^0_{ij}h^0_{ij} + 2\sum_{j=2}^{n+2} h^0_{1j}h^0_{1j} + 2\sum_{1\leq i<j\leq=n+1} h^0_{ij}h^0_{ij}. \quad (3.51)$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\| trh \|^2 &= g(trh, trh)\\ &= g(\sum_{i=1}^{n+1} h(e_i,e_i), \sum_{j=1}^{n+1} h(e_j,e_j))\\ &= \sum_{i,j=1}^{n+1} g(g(h(e_i,e_i),e_0)e_0, g(h(e_j,e_j),e_0)e_0)\\ &= \sum_{i,j=1}^{n+1} g(h(e_i,e_i),e_0)g(h(e_j,e_j),e_0)\\ &= \sum_{i,j=1}^{n+1} h^0_{ii}h^0_{jj}\\ &= \sum_{i,j=1}^{n+1} h^0_{ii}h^0_{ii} + \sum_{i\neq j=1}^{n+1} h^0_{ii}h^0_{jj}\\ &= \sum_{i=1}^{n+1} h^0_{ii}h^0_{ii} + 2\sum_{1\leq i<j\leq n+1} h^0_{ii}h^0_{jj}.\end{aligned}$$

$$\| trh \|^2 = \sum_{i=1}^{n+1} h^0_{ii}h^0_{ii} + 2\sum_{1\leq i<j\leq n+1} h^0_{ii}h^0_{jj}. \tag{3.52}$$

en substituant (3.52) dans (3.51), on obtient

$$\begin{aligned}\| h \|^2 &= \frac{1}{2}\| trh \|^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n+1} h^0_{ii}h^0_{ii} - \sum_{1\leq i<j\leq=n+1} h^0_{ii}h^0_{jj} + 2\sum_{j=2}^{n+1} h^0_{1j}h^0_{1j} + 2\sum_{1\leq i<j\leq n+1} h^0_{ij}h^0_{ij}\\ &= \frac{1}{2}\| trh \|^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n+1} (h^0_{ii})^2 - \sum_{1\leq i<j\leq=n+1} h^0_{ii}h^0_{jj} + 2\sum_{j=2}^{n+1} (h^0_{1j})^2 + 2\sum_{1\leq i<j\leq=n+1} (h^0_{ij})^2\\ &+ 2\sum_{j=2}^{n+1} (h^0_{1j})^2 + 2\sum_{1\leq i<j\leq=n+1} (h^0_{ij})^2.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\| h \|^2 = \frac{1}{2}\| trh \|^2 &+ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n+1} (h^0_{ii})^2 - \sum_{j=2}^{n+2} h^0_{11}h^0_{jj} - 2\sum_{2\leq i<j\leq=n+1} (h^0_{ii})^2(h^0_{jj})^2 + 2\sum_{j=2}^{n+1} (h^0_{1j})^2\\ &+ 2\sum_{1\leq i<j} (h^0_{ij})^2.\end{aligned} \tag{3.53}$$

Soit

$$(h^0_{11}-h^0_{22}-.....-h^0_{n+1})^2=\sum_{i=1}^{n+1}(h^0_{ii})^2-2\sum_{j=2}^{n+1}h^0_{11}h^0_{jj}+2\sum_{2\leq i<j\leq=n+1}(h^0_{ii})^2(h^0_{jj})^2$$

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n+1}(h^0_{ii})^2=\frac{1}{2}(h^0_{11}-h^0_{22}-.....-h^0_{n+1})^2+\sum_{j=2}^{n+1}h^0_{11}h^0_{jj}-2\sum_{2\leq i<j\leq=n+1}(h^0_{ii})(h^0_{jj}) \tag{3.54}$$

En substituant (3.54) dans (3.53), on obtient

$$\begin{aligned}\parallel h\parallel^2&=\frac{1}{2}\parallel trh\parallel^2+\frac{1}{2}(h^0_{11}-h^0_{22}-.....-h^0_{n+1})^2+\sum_{j=2}^{n+1}h^0_{11}h^0_{jj}-2\sum_{2\leq i<j\leq=n+1}h^0_{ii}h_{jj}\\&-\sum_{j=2}^{n+1}h^0_{11}h^0_{jj}-\sum_{2\leq i<j\leq=n+1}h^0_{ii}h^0_{jj}+\sum_{j=2}^{n+1}(h^0_{1j})^2+\sum_{2\leq i<j\leq=n+1}(h_{ij})^2\\&=\frac{1}{2}\parallel trh\parallel^2+\frac{1}{2}(h^0_{11}-h^0_{22}-.....-h^0_{n+1})^2-2\sum_{2\leq i<j\leq=n+1}(h^0_{ii})^2(h^0_{jj})^2\\&+2\sum_{j=2}^{n+1}(h^0_{1j})^2+\sum_{2\leq i<j\leq=n+1}(h_{ij})^2.\end{aligned}$$

$$\parallel h\parallel^2=\frac{1}{2}\parallel trh\parallel^2+\frac{1}{2}(h^0_{11}-h^0_{22}-.....-h^0_{n+1})^2-2\sum_{2\leq i<j\leq=n+1}(h^0_{ii}h^0_{jj}-(h^0_{ij})^2)+2\sum_{j=2}^{n+1}(h^0_{1j})^2. \tag{3.55}$$

En mettant (3.7) dans (3.9), on obtient l'équation de la courbure scalaire de l'hypersurface pour une variété statistique

$$\tilde{\tau}(p)=\tau(p)+\sum_i\sum_j\langle h(e_i,e_i),h^*(e_j,e_j)\rangle-\sum_i\sum_j\langle h^*(e_i,e_j),h(e_j,e_i)\rangle. \tag{3.56}$$

Ainsi, en mettant (3.10) et (3.11) dans (3.56), nous obtenons

$$\begin{aligned}\tilde{\tau}(p)&=\tau(p)+\sum_{i,j=1}\tilde{g}(\tilde{g}(h(e_i,e_i),e_{n+1})e_{n+1}\tilde{g}(h^*(e_j,e_j),e_{n+1})e_{n+1})\\&-\sum_{i,j=1}\tilde{g}(\tilde{g}(h^*(e_i,e_j),e_{n+1})e_{n+1}\tilde{g}(h(e_i,e_j),e_{n+1})e_{n+1}).\end{aligned} \tag{3.57}$$

$$\tilde{\tau}(p) = \tau(p) + n\| H \|n\| H^* \| - \sum_{i,j=1} h^*_{ii} h_{jj}. \tag{3.58}$$

Par Cauchy-Schwartz on a

$$\sum_{i,j=1} (h^*_{ii} h_{jj}) \leq \sum_{i,j=1} h^*_{ii} h_{jj}$$

$$-\sum_{i,j=1} (h^*_{ii} h_{jj}) \geqslant -\sum_{i,j=1} h^*_{ii} h_{jj}$$

$$-\| h^* h^* \| \geqslant \| h \|^* \| h \|. \tag{3.59}$$

Ainsi, nous obtenons l'inégalité de courbure scalaire de l'hypersurface pour une variété statistique qui est la suivante

$$\tilde{\tau}(p) \geqslant \tau(p) + \frac{n^2}{2} \| H \| \| H^* \| - \frac{1}{2} \| h^* \| \| h \|. \tag{3.60}$$

■

Corollaire 3.1. *Soit M une hypersurface de dimension $(n+1)$ d'une variété $\tilde{M}(c)$ à courbure sectionnelle constante $C \in \mathbb{R}$, nous avons*

$$\tilde{\tau}(p) \geqslant n(n-1)C + \frac{n^2}{2} \| H \| \| H^* \| - \frac{1}{2} \| h^* \| \| h \|. \tag{3.61}$$

Conclusion

L' inégalité de Chen-Ricci sur l'hypersurface d'une variété statistique est obtenue par application de l'inégalité de Chauchy-Schwartz sur la courbure de Ricci de l' hypersurface d' une variété statistique. Ainsi, les variétés statistiques sont des abstractions géométriques utilisées pour modéliser l'information, leur domaine d'études appartenant à la géométrie de l'information, une branche relativement récente des mathématiques, qui utilise des outils de la géométrie différentielle pour étudier l'inférence statistique.
En effet, dans ce mémoire pour la démonstration de l'inégalité de Chen-Ricci sur l'hypersurface d'une variété statistique, nous avons fait une étude des notions de base de la géométrie différentielle.
Avec référence de l'inégalité de Cauchy-Schwartz, l'inégalité de Chen-Ricci sur l'hypersurface d'une variété statistique a été établi. Afin, nous avons établi quelques inégalités de la courbure scalaire sur l'hypersurface d'une variété statistique à courbure sectionnelle constante.

Récommendation

Comme la géométrie des variétés statistique est une branche relativement récente de la géométrie différentielle, nous éperons continuer notre recherche pour bien établir d'autres inégalités dans le but de donner un *contrôle* optimal d'une sous variété d'une variété statistique de façon générale.

Bibliographie

[1] Shun-ichi Amari. *Differential-geometrical methods in statistics, lectures notes in statistics*, volume 28. springer-verlag, 1985.

[2] Shun-ichi Amari. *Differential-geometrical methods in statistics*, volume 28. Springer Science & Business Media, 2012.

[3] Muhittin Evren Aydin, Adela Mihai, and Ion Mihai. Some inequalities on submanifolds in statistical manifolds of constant curvature. *Filomat*, 29(3) :465–477, 2015.

[4] Bang-Yen Chen. Relations between ricci curvature and shape operator for submanifolds with arbitrary codimensions. *Glasgow Mathematical Journal*, 41(1) :33–41, 1999.

[5] Shangrong Deng. An improved chen-ricci inequality. *Int. Electron. J. Geom*, 2(2) :39–45, 2009.

[6] Esra Erkan and Mehmet Gülbahar. Chen's basic inequalities for hypersurfaces of statistical riemannian manifolds. *International Journal of Maps in Mathematics*, 6(1) :37–53, 2023.

[7] Hitoshi Furuhata. Hypersurfaces in statistical manifolds. *Differential Geometry and its Applications*, 27(3) :420–429, 2009.

[8] Sungpyo Hong and Mukut Mani Tripathi. On ricci curvature of submanifolds. *Int. J. Pure Appl. Math. Sci*, 2(2) :227–245, 2005.

[9] Takashi Kurose. Dual connections and affine geometry. *Mathematische Zeitschrift*, 203 :115–121, 1990.

[10] Jacques Lafontaine. *Introduction aux variétés différentielles (Collection Grenoble sciences)*. EDP sciences, 1996.

[11] Préparationa l'Agrégation and ENS de Cachan Hugues Auvray. Géométrie différentielle : sous-variétés de rn, variétés. 2014.

[12] Buqing Su. *Affine differential geometry*. CRC Press, 1983.

[13] Marta Teofilova. Conjugate connections and statistical structures on almost norden manifolds. *arXiv preprint arXiv :1812.04512*, 2018.

[14] Paul W Vos. Fundamental equations for statistical submanifolds with applications to the bartlett correction. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 41 :429–450, 1989.