UNIVERSITÉ DU BURUNDI
GRENIER DU SAVOIR DU BURUNDI
Dépôt institutionnel officiel
https://repository.ub.edu.bi

Application de la méthode analytique de résolubilité partielle dans la construction d'un nouveau type d' hamiltonien partiellement algébrique dépendant des fonctions elliptiques de Jacobi

Munezero, Jean Pacifique; Sous la direction de Pr. Ancilla Nininahazwe

2023-12
UB, ENS
https://repository.ub.edu.bi/handle/123456789/2078

Document téléchargé depuis le **Grenier du Savoir du Burundi** — https://repository.ub.edu.bi

UNIVERSITE DU BURUNDI-ECOLE NORMALE SUPERIEURE

MASTER EN DIDACTIQUE DES SCIENCES (MASTER CONJOINT)

INSTITUT DE PEDAGOGIE APPLIQUEE

DEPARTEMENT DE PHYSIQUE –TECHNOLOGIE

DEPARTEMENT DES SCIENCES NATURELLES

SECTION PHYSIQUE-TECHNOLOGIE

« APPLICATION DE LA METHODE ANALYTIQUE DE RESOLUBILITE PARTIELLE DANS LA CONSTRUCTION D'UN NOUVEAU TYPE D'HAMILTONIEN PARTIELLEMENT ALGEBRIQUE DEPENDANT DES FONCTIONS ELLIPTIQUES DE JACOBI»

Par

Jean Pacifique MUNEZERO

Sous la direction de

Pr. Ancilla NININAHAZWE

Mémoire présenté et défendu publiquement en vue de l'obtention du Diplôme de Master en **Didactique des Sciences Physiques**

Bujumbura, Décembre 2023

MEMBRES DU JURY

Pr. Alfred VYABANDI : Président

Pr. Ancilla NININAHAZWE : Directeur

Pr. Déogratias NUGWAHA : Secrétaire

Dr. Agnès NAKIMANA : Membre

REMERCIEMENTS

Nos sincères remerciements s'adressent principalement à **DIEU** qui m'a ainsi créé et pour son amour qui dure à jamais.

Je tiens tout également à remercier Professeur **Ancilla NININAHAZWE**, promoteur et directeur de ce mémoire. Son humilité, sa patience, son ouverture d'esprit, sa détermination, son originalité, ses remarques et suggestions pertinentes, ses encouragements, sa disponibilité, son esprit de recherche et surtout sa rigueur scientifique m'ont été d'une grande utilité dans toutes les démarches que j'ai entreprises. J'ai ´énormément appris avec elle durant toute la période de la formation à l'Université du Burundi, je la remercie assez de m'avoir permis de me rendre au point où` je suis. Qu'elle trouve ici l'expression de mon entière reconnaissance.

J'éprouve l'agréable devoir de remercier tous nos éducateurs, depuis l'école primaire jusqu'à l'Université du Burundi plus particulièrement ceux du Master en Didactique des Sciences physiques pour la formation tant humaine que scientifique dont ils nous ont dispensé, qu'ils trouvent ici ma grande reconnaissance.

Les mots ne seront jamais suffisants afin d'exprimer ma profonde gratitude envers toutes les personnes sans doute trop nombreuses dont le soutien moral et/ou matériel m'est arrivé en temps favorable. Qu'elles trouvent dans ce travail le résultat de leur effort précieux.

Je tiens finalement à remercier mes parents, mes parentés, mes camarades étudiants de master avec lesquels nous avons partagé nos joies et peines à l'Université pour leur soutien de toute forme, leur collaboration, leur compréhension et pour tout ce qu'ils m'ont apporté. La seule chose que je peux faire pour les remercier est de leur dédier ce mémoire.

A tous et à chacun, je dis cordialement merci.

DEDICACE

A mon regretté Père ;

A ma Chère Mère ;

A ma chère épouse ;

A mes enfants ;

A mes Frères et Sœurs ;

A mes Oncles et Tantes ;

A mes Cousins et Cousines ;

A tous mes Amis,

Je dédie ce mémoire.

RESUME

Mon travail de recherche porte sur l'***application de la méthode analytique de résolubilité partielle dans la construction d'un nouveau type d'hamiltonien partiellement algébrique dépendant des fonctions elliptiques de Jacobi.*** L'objectif principal de ce travail est de construire un nouveau type d'hamiltonien partiellement algébrique matriciel d'ordre 2×2 associé à un potentiel dépendant des fonctions elliptiques de Jacobi. Pour construire ce type d'hamiltonien, on applique la méthode analytique de résolubilité partielle où on établit trois conditions algébriques nécessaires et suffisantes pour que le hamiltonien matriciel de Jacobi, après avoir subi une transformation de jauge, laisse invariant un espace vectoriel polynômial de dimension finie. La présentation moderne des fonctions elliptiques repose sur deux piliers : le caractère méromorphe et la double périodicité. Cette dernière propriété entraîne naturellement des représentations de type trigonométrique bien connues pour les fonctions de Jacobi. Contrairement aux fonctions de la trigonométrie ordinaire qui sont définies en référence à un cercle, les fonctions elliptiques de Jacobi sont une généralisation qui se réfère à d'autres sections coniques, l'ellipse en particulier. Ces fonctions interviennent non seulement en mécanique quantique non relativiste pour la construction d'un hamiltonien partiellement algébrique mais aussi dans des situations pratiques dans différents domaines de la physique. On peut citer notamment la résolution de l'équation différentielle du mouvement d'un pendule simple dans le cas des oscillations de grande amplitude, la résolution des équations différentielles d'Euler qui expriment le mouvement à la Poinsot d'un solide, l'étude du phénomène de la propagation d'une certaine catégorie d'ondes appelées ondes cnoïdales, la détermination des équations paramétriques d'une spirale de Seiffert en coordonnées cylindriques.

Mots clés : *Fonctions Elliptiques de Jacobi, Hamiltonien Elliptiques de Jacobi, Méthode Analytique de Résolubilité partielle, Résolubilité Partielle.*

ABSTRACT

My research focuses on the **application *of the quasi-Exactly analytic method in the construction of a new type of quasi-exactly solvable hamiltonian depending on the Jacobi elliptic functions.*** The main objective of this work is to construct a new example of 2×2-matrix quasi-exactly solvable (QES) hamiltonian which is associated to a potential depending on the Jacobi elliptic functions. To construct this type of hamiltonian, we apply the QES analytic method in order to establish three necessary and sufficient algebraic conditions for the previous hamiltonian to have an invariant vector space whose generic elements are polynomials. This hamiltonian is called *quasi-exactly solvable.* The modern presentation of elliptic functions rests on two pillars: the meromorph character and the double periodicity. This last property naturally leads to well-known trigonometric type representations for Jacobi functions. Unlike functions in ordinary trigonometry which are defined with reference to a circle, Jacobi elliptic functions refer to other conics, the ellipse in particular. These functions occur not only in non-relativistic quantum mechanics for the construction of a quasi-exactly solvable hamiltonian but also in practical situations in different fields of physics. We can cite in particular the resolution of the differential equation of the motion of a simple pendulum in the case of large amplitude oscillations, the resolution of Euler differential equations that express the Poinsot motion of a solid, the study of the propagation phenomenon of a certain category of waves called cnoidal waves, the determination of the parametric equations of a seiffert spiral in cylindrical coordinates.

Key words:*Jacobi Elliptic Functions, Jacobi Elliptic Hamiltonian, QES Analytic Method, Quasi-Exactly Solvability.*

TABLE DES MATIERES

MEMBRES DU JURY ..... **i**
REMERCIEMENTS ..... **ii**
DEDICACE ..... **iii**
RESUME ..... **iv**
ABSTRACT ..... **v**
TABLE DES MATIERES ..... **vi**
LISTE DES TABLEAUX ..... **ix**
LISTE DES FIGURES ..... **x**
SIGLES ET ABREVIATIONS ..... **xi**
AVANT-PROPOS ..... **xiii**
INTRODUCTION GENERALE **1**
i. Problématique et contexte 2
ii. Hypothèse de recherche 3
iii. Objectifs de recherche 3
iv. Méthodologie de recherche 3
v. Contribution à l'avancement des connaissances 4
CHAPITRE I : GENERALITES SUR LES FONCTIONS ELLIPTIQUES **5**
I.1.Notion de fonctions elliptiques 5
I.1.1. Introduction 5
I.1.2. Quelques définitions 5
I.1.3. La double périodicité d'une fonction 6
I.1.4. Pôles et zéros d'une fonction 6
I.1.5.Notion d'intégrales elliptiques 7
I.1.5.1. Intégrales elliptiques incomplètes 9
I. 1.5.2. Intégrales elliptiques complètes 10
I.1.6. Lemniscate de Bernoulli 10
I.1.6.1 Définitions et équations 10
I.1.6.2. Une lemniscate de Bernoulli et ses deux foyers 12
I.1.6.3.La longueur de l'arc de la lemniscate de Bernoulli 12
I.2. Fonctions elliptiques de Jacobi 13

I.2.1. Définition 13
I .2.2. Les douze fonctions elliptiques de Jacobi 13
I.2.2.1. Les trois fonctions elliptiques de base de Jacobi 14
I .2.3 Les propriétés algébriques des fonctions elliptiques 16
I.2.3.1. Relations entre les carrés des fonctions elliptiques de Jacobi 16
I.2.4.2. Formules d'addition 16
I.2.4.4. Dérivées des trois fonctions elliptiques de base de Jacobi 20
I.2.4.5. Equations différentielles 21
I.2.5. Les neuf autres fonctions elliptiques de Jacobi 23
I.2.6.La trigonométrie lemniscatique et les fonctions elliptiques de Jacobi 25
CHAPITRE II : LA RESOLUBILITE PARTIELLE DU HAMILTONIEN MATRICIEL DEPENDANT DES FONCTIONS ELLIPTIQUES DE JACOBI…… 28
II.1. Introduction 28
II.2. Opérateur Complètement Algébrique 28
II.3. Opérateur partiellement algébrique 28
II.4. Méthode analytique de résolubilité partielle 29
II.4.1. 1er cas : $\delta = 1$ 29
II.4.1.1. Détermination des matrices $M_1, \tilde{M}_1$ et M_0 34
II.4.1.2.Les trois conditions de résolubilité partielle de jauge $\tilde{H}$ 35
II.4.2. 2ème : $\delta = 2$ 38
II.4.2.1.Détermination des matrices M_1, $\tilde{M}_1$ et M_0 40
II.4.2.2. Les trois conditions de résolubilité partielle du hamiltonien de jauge $\tilde{H}$ 42
CHAPITREIII : QUELQUES APPLICATIONS DES FONCTIONS ELLIPTIQUES EN PHYSIQUE 47
III.1. Le pendule simple 47
III.1.1.Quelques rappels importants sur le pendule simple 47
III.1.1.1.Définition 47
III.1.1.2. Différentes techniques pour établir l'équation différentielle du mouvement 48
III.1.1.2.1. Le formalisme newtonien 48
III.1.1.2.2 Le formalisme de Lagrange 50
III.1.1.2.3. Le formalisme de Hamilton 52
III. 1.2. Résolution de l'équation différentielle du mouvement du pendule simple 53
III.2. Le mouvement à la Poinsot d'un solide 60
III.2.1. Définition 60

III.2.2.Le mouvement du corps rigide d'Euler 60
III.3. La propagation d'une onde de surface: les ondes cnoïdales 65
III.3.1.La Formation des vagues 65
III.3.2. Ondes de gravité à la surface d'un fluide 67
III.3.3. Les modèles de houle 68
III.3.3.1. Différents modèles de houle 68
III.3.3.2. Paramètres de description de la houle 68
III.3.4. Ondes cnoïdales et ondes solitaires dans l'approximation de Korteweg-de Vries 69
III.3.4.1. Equation de Korteweg-de Vries 69
III.3.4.2.Les ondes cnoïdales et ondes solitaires 70
III.4. La spirale sphérique de Seiffert 72
III.4.1.Définition 72
III.4.2.Equations paramétriques d'une spirale de Seiffert en coordonnées cylindriques 73
CONCLUSION GENERALE 76
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES 78

LISTE DES TABLEAUX

Tableau.1. Comparaison entre les fonctions circulaires et les fonctions elliptiques de Jacobi 24

Tableau 2.Comparaison entre les fonctions circulaires et les fonctions lemniscatiques..... 26

LISTE DES FIGURES

Fig.1. Exemple de la représentation d'une lemniscate de Bernoulli 12

Fig. 2. Le rectangle de Jacobi qui permet de trouver ses douze fonctions elliptiques 14

Fig.3. Un pendule simple écarté de sa position d'équilibre d'un angle θ 47

Fig.4 Un pendule simple à l'équilibre……...47

Fig.5. L'état de mouvement d'un pendule simple..... 48

Fig.6. La représentation dans un repère orthonormé du pendule simple en mouvement..... 51

Fig.7. La production des vagues à la surface de l'eau..... 66

Fig.8. Le passage de la vague à la houle. 66

Fig.9. Les vagues transformées en houles en dehors de la zone génératrice 67

Fig.10. Illustration des paramètres caractéristiques des vagues..... 69

Fig.11. Illustration du début de traçage de la spirale sphérique de Seiffert 73

Fig.12. Un élément infiniment petit d'une ligne à la surface d'une sphère 74

SIGLES ET ABREVIATIONS

$\mathbb{C}$: Le corps des nombres complexes

Ω : Un ouvert de l'ensemble $\mathbb{C}$

$K(k)$: Intégrale elliptique de premier type

$E(k,\varphi)$: Intégrale elliptique de deuxième type

$\Pi(k,l,\varphi)$: Intégrale elliptique de troisième type

φ : L'angle modulaire des intégrales ou fonctions elliptiques

k :Le moduledes fonctions elliptiques de Jacobi

sn : La fonction sinus elliptique

cn : La fonction cosinus elliptique

dn :La fonction delta elliptique

$am(u)$:La fonction amplitude elliptique de Jacobi de u

$\Gamma(n)$: La fonction gamma de n

QES : Quasi-exactlysolvable

k' :Le co-module ou complément du module des fonctions elliptiques de Jacobi

tanh : La tangente hyperbolique

cosh : Le cosinus hyperbolique

sl : Le sinus lemniscatique

cl :Le cosinus lemniscatique

$\tilde{H}$: L'opérateur hamiltonien de jauge

L : Le lagrangien du système

ϖ : La demi-période des fonctions lemniscatiques

θ : L'abscisse angulaire

$\dot{\theta}$: La vitesse angulaire

$\ddot{\theta}$: L'accélération angulaire

θ_m : :L'amplitude ou élongation angulaire maximale

m: :La masse du système

E : L'énergie totale du système

E_p : L'énergie potentielle du système

E_C :L'énergie cinétique du système

$\hbar$: La constante de Planck réduite

λ : La longueur d'onde

Λ : Matrice de la transformation homogène de Lorentz

Fig : figure

ddl : degré de liberté

AVANT-PROPOS

Cette étude rentre dans le cadre de l'obtention du Diplôme de Master en Didactique des sciences physiques. Elle vise à appliquer la méthode analytique de résolubilité partielle dans le but de construire un nouveau type d'hamiltonien partiellement algébrique dépendant des fonctuions elliptiques de Jacobi. Ladite étude s'est déroulée dans le cadre d'accroître la classe d'opérateurs appelés opérateurs partiellement algébriques.

INTRODUCTION GENERALE

Différentes méthodes existent pour résoudre l'équation de Schrödinger à une dimension. Le choix d'une méthode particulière repose généralement sur la forme du potentiel et sur celle de la fonction d'onde recherchée (Lill, Parker et Light, 1986). Le but principal de la résolution analytique de cette équation est de déterminer les valeurs propres d'un opérateur linéaire défini dans un domaine de l'espace de Hilbert. Il est certain que les mathématiques et la physique sont deux disciplines intellectuelles très proches, comme en témoignent non seulement leur histoire et leur développement au fil des siècles, mais aussi les échanges fructueux et les enrichissements qu'elles se sont mutuellement apportés.

Notre travail est subdivisé en trois chapitres :

Dans le premier chapitre, je mets en évidence les idées de base, les propriétés des fonctions elliptiques en général et des fonctions elliptiques de Jacobi en particulier. Par la suite, je développe la notion d'intégrale elliptique et de la Lemniscate de Bernoulli car les fonctions elliptiques sont des applications réciproques des intégrales elliptiques et le calcul de la longueur de l'arc de la lemniscate fournit une des premières motivations pour l'étude des intégrales elliptiques. En plus, on essaie d'établir d'une part une comparaison entre les fonctions elliptiques de Jacobi et les fonctions circulaires car les fonctions elliptiques de Jacobi présentent des analogies avec les fonctions trigonométriques, qui sont mises en valeur pour le choix des notations $\boldsymbol{sn}$ et $\boldsymbol{cn}$ qui rappellent $\boldsymbol{sin}$ et $\boldsymbol{cos}$, d'autre part une comparaison entre les fonctions trigonométriques et les fonctions lemniscatiques sinus lemniscatique et cosinus lemniscatique car ces dernières présentent elles aussi des analogies avec les fonctions sinus et cosinus de la trigonométrie ordinaire, en remplaçant le cercle par la lemniscate de Bernoulli.

Dans le second chapitre, je construis un nouveau type d'hamiltonien partiellement algébrique matriciel d'ordre 2×2 associé à un potentiel dépendant des fonctions elliptiques de Jacobi. J'applique la méthode analytique de résolubilité partielle pour déterminer trois conditions algébriques nécessaires et suffisantes pour que le hamiltonien matriciel de Jacobi laisse invariant un espace vectoriel polynômial de dimension **n**.

Dans le troisième et dernier chapitre, étant donné que les fonctions elliptiques de Jacobi interviennent dans la résolution des problèmes pratiques en physique et dans divers domaines des mathématiques, je présente quelques situations pratiques de la physique où interviennent les fonctions elliptiques de Jacobi. Ce sont entre autres la résolution de l'équation

différentielle du mouvement d'un pendule simple pour des oscillations de grande amplitude, la dynamique analytique des particules et des corps rigides, l'étude de la propagation des ondes appelées ondes cnoïdales et l'étude des propriétés de la spirale sphérique de Seiffert.

i. Problématique et contexte

Depuis les premières années de l'évolution de la mécanique quantique, les modèles exactement solubles de la mécanique quantique ont attiré beaucoup d'attention [1]. Mais malheureusement les modèles exactement solubles, c'est-à-dire les modèles avec des hamiltoniens explicites et complètement diagonalisables, sont très peu nombreux et insuffisamment diversifiés pour répondre aux exigences de la physique moderne [2]. A ce niveau, il s'observe un défi mathématique de construire le spectre d'un opérateur linéaire défini sur un espace vectoriel approprié de fonctions qui appartiennent à un domaine de l'espace de Hilbert. Dans la plupart des cas, ce type de problème ne peut pas être résolu analytiquement, c'est-à-dire que toutes les valeurs propres du hamiltonien ne peuvent pas être calculées algébriquement [3]. C'est dans les années 1980 que les chercheurs de la mécanique quantique ont pu trouver une nouvelle catégorie de modèles appelés modèles partiellement algébriques. C'est une catégorie intermédiaire entre les problèmes pour lesquels le spectre peut être trouvé exactement et ceux qui ne peuvent pas être résolus analytiquement [4]. Leur propriété principale est une connaissance explicite de plusieurs états propres tandis que les autres sont inconnus. Mustafa et Habib, cités[1], précisent que les opérateurs partiellement algébriques ont fait l'objet d'une grande attention au cours de ces dernières années. Dans la plupart des exemples connus, les opérateurs partiellement algébriques peuvent être transformés en opérateurs préservant un espace de polynômes de degré donné après un changement de variable et un changement de fonction appropriés (aussi appelé transformation de jauge) [5, 6]. Les opérateurs préservant un espace de polynômes jouent donc un rôle important dans l'étude des opérateurs partiellement algébriques. De même, un nouveau hamiltonien qui sera construit dans ce travail préservera l'espace vectoriel des polynômes après avoir subi une transformation de jauge. Devant un tel vide dans la littérature, il importe de se pencher chaque fois sur la construction de nouveaux types d'hamiltoniens partiellement algébriques qui font référence à une classe d'opérateurs linéaires qui préservent un sous-espace de dimension finie de l'espace de Hilbert sur lequel ils agissent.

ii. Hypothèse de recherche

La construction de nouveaux types d'hamiltoniens partiellement algébriques permet d'enrichir la nouvelle classe d'opérateurs découverte très récemment et de calculer analytiquement une grande partie de leurs valeurs propres et leurs vecteurs propres.

iii. Objectifs de recherche

L'objectif général de mon travail de mémoire est de construire un nouveau type d'hamiltonien partiellement algébrique matriciel d'ordre 2×2 associé à un potentiel dépendant des fonctions elliptiques de Jacobi. Cet objectif se décline en trois objectifs spécifiques qui sont les suivants :

- Dégager les notions de base et les propriétés des fonctions elliptiques en général et celles de Jacobi en particulier,
- Appliquer la méthode de résolubilité partielle dans la construction d'un hamiltonien partiellement algébrique matriciel d'ordre deux,
- Développer les applications des fonctions elliptiques de Jacobi dans différents domaines de la physique.

iv. Méthodologie de recherche

Dans un premier temps, j'identifie à travers une revue de la littérature les généralités sur les fonctions elliptiques dans le cas général et sur celles de Jacobi en particulier. Ces généralités porteront notamment sur les définitions, les propriétés algébriques de ces fonctions, la notion d'intégrales elliptiques et la notion de Lemniscate de Bernoulli car les fonctions elliptiques sont des applications réciproques des intégrales elliptiques et le calcul de la longueur de l'arc de la lemniscate fournit une des premières motivations pour l'étude des intégrales elliptiques. L'émergence et la construction des théories physiques modernes (par exemple la Relativité, la Mécanique quantique) auraient été impossibles sans le recours à des concepts ou des outils mathématiques assez élaborés et très puissants. C'est dans cette optique que dans un second temps j'applique la méthode analytique de résolubilité partielle pour déterminer les trois conditions algébriques nécessaires et suffisantes pour que le hamiltonien matriciel de Jacobi laisse invariant un espace vectoriel polynômial de dimension finie. Enfin, étant donné que les fonctions elliptiques de Jacobi interviennent dans la résolution des problèmes pratiques en

physique et en mathématiques, j'utilise également des calculs pour développer quelques situations pratiques de la physique où interviennent les fonctions elliptiques de Jacobi.

v. Contribution à l'avancement des connaissances

Mon travail de mémoire s'inscrit dans le cadre de la résolution d'un problème mathématique en physique quantique de ne pas parvenir à construire aisément le spectre d'un opérateur linéaire défini dans un domaine de l'espace de Hilbert. Comme les hamiltoniens complètement algébriques sont très peu nombreux, pour contribuer à la résolution de ce problème, il faut faire recours à la construction des nouveaux types d'hamiltoniens partiellement algébriques dont une partie de leur spectre peut être calculée algébriquement. En plus, les applications des modèles partiellement algébriques sont larges, telles que l'étude des phénomènes non perturbatifs ou comme une bonne approximation des problèmes exactement irrésolvables, les chercheurs dans les domaines liés à la mécanique quantique non relativiste ne peuvent pas se permettre d'ignorer les possibilités des modèles partiellement algébriques. Donc le présent travail apportera une double contribution à la littérature scientifique car ce dernier vient accroître la nouvelle classe d'opérateurs partiellement algébriques et enrichir quelques applications des fonctions elliptiques en physique qui ne sont pas développées dans la littérature.

CHAPITRE I : GENERALITES SUR LES FONCTIONS ELLIPTIQUES

I.1.Notion de fonctions elliptiques

I.1.1. Introduction

Depuis Abel, Jacobi et Weierstrass, les bases des théories des fonctions elliptiques sont bien établies. Niels Henrik Abel procède par une inversion de longueur d'arc d'ellipse ce qui justifie la dénomination de ces fonctions. L'académie des sciences retrouva quand même le travail d'Abel et le publia douze ans après sa mort. Carl Gustav Jacobi, eut une trajectoire nettement plus agréable qu'Abel s'adonne à la recherche sans limitation d'aucune sorte ; il introduit des fonctions elliptiques qui présentent des analogies avec des fonctions trigonométriques. Il introduit aussi les fonctions thêta pour définir les fonctions elliptiques. Enfin, Weierstrass définit les fonctions elliptiques à l'aide de séries qui livrent de manière immédiate la double périodicité de telles fonctions [7,8].

A la suite de Weierstrass, la présentation moderne des fonctions elliptiques repose sur deux piliers : le caractère méromorphe et la double périodicité. Cette dernière propriété entraîne naturellement des représentations de type trigonométrique bien connues pour les fonctions de Jacobi.

Dans le présent chapitre, nous insisterons à la classe des fonctions elliptiques de Jacobi carces dernières interviennent souvent lors de la résolution des problèmes pratiques en mathématique et en physique et elles ne nécessitent pas des notions d'analyse complexe pour être définies et/ou comprises.

I.1.2. Quelques définitions

Considérons une fonction complexe f définie sur Ω un ouvert de l'ensemble $\mathbb{C}$. Si $z_0 \in \Omega$ et $\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ existe, alors on dit que f est $\mathbb{C}$-dérivable en z_0 et on note $f'(z_0)$ sa dérivée en z_0. Si $f'(z_0)$ existe pour tout $z_0 \in \Omega$, on dira que f est holomorphe sur Ω. La classe de toutes les fonctions holomorphes sur Ω sera notée $E(\Omega)$ [9, 10,11]. En particulier, on appelle fonction entière une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$. Une fonction méromorphe est une fonction holomorphe dans tout le plan complexe, sauf éventuellement sur un ensemble de points dont chacun est un pôle pour la fonction.

Une fonction f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ est dite elliptique si et seulement si elle est méromorphe et doublement périodique [9,12].

Les fonctions elliptiques sont des applications réciproques des intégrales elliptiques et c'est de cette façon qu'historiquement elles ont été introduites [7].

I.1.3. La double périodicité d'une fonction

Une fonction $f(z)$ est définie comme une fonction simplement périodique de z s'il existe une constante α non nulle telle que [13]

$$f(z+\alpha)=f(z) \quad (1.1)$$

pour toutes les valeurs z. Ce nombre α est la période de $f(z)$. Clairement, si n est un entier non nul alors $n\alpha$ est aussi une période. Si aucun sous-multiple de α n'est pas une période, alors il est connu comme une période fondamentale.

On dit qu'une fonction f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ est doublement périodique de période α_1 et α_2, si et seulement si [7,10],

$$f=(z+\alpha_1)=f(z), \quad f(z+\alpha_2)=f(z) \quad (1.2)$$

Si les deux périodes α_1 et α_2 sont telles que toute autre période α puisse être écrite sous la forme :

$$\alpha=m\alpha_1+n\alpha_2 \quad (1.3)$$

Avec m et n des entiers, alors α_1 et α_2 sont appelées périodes fondamentales. En général, il n'y a pas d'unicité de périodes fondamentales. Si α_1 et α_2 sont des périodes fondamentales, alors tout parallélogramme de sommets d'affixes $z, z+\alpha_1, z+\alpha_2, z+\alpha_1+\alpha_2$ est appelé parallélogramme fondamental ou domaine fondamental associé à f.

Un affixe est constitué d'une partie réelle et d'une partie imaginaire correspondant respectivement à l'abscisse et l'ordonnée d'un point.

I.1.4. Pôles et zéros d'une fonction

Un pôle de la fonction f est un point a pour lequel $|f(z)|$ tend vers l'infini lorsque z tend vers a [10, 13,14].

Soient Ω un ouvert du plan de l'ensemble $\mathbb{C}$, b un élément de Ω et $f : \Omega \setminus \{b\} \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. On dit que b est un pôle de f s'il existe une autre fonction g holomorphe sur un voisinage $U \subset \Omega$ de b telle que $g(b) \neq 0$ et un entier $m \geq 1$ tels que pour tout z dans $U \setminus \{b\}$ on ait :

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-b)^m} \quad (1.4)$$

L'entier m est appelé ordre de pôle. Un pôle d'ordre 1 est parfois pôle simple.

Une fonction doublement périodique qui est analytique sauf à ses pôles, et qui n'a d'autres singularités que ces pôles dans une partie finie du plan complexe s'appelle fonction elliptique.

Tandis qu'un zéro d'une fonction holomorphe f est un nombre complexe a tel que $f(a) = 0$ .Toute fonction elliptique non constante a un nombre fini de pôles et de zéros dans un parallélogramme fondamental.

I.1.5.Notion d'intégrales elliptiques

Les intégrales elliptiques sont nées de la volonté de calculer la longueur d'un arc d'ellipse. Généralement, une intégrale elliptique est une intégrale de la forme suivante [10,13, 15] :

$$f(x) = \int_c^x R\left(t, \sqrt{G(t)}\right)dt \quad (1.5)$$

Où R est une fonction rationnelle à deux variables et $G(t)$ un polynôme de degré trois ou quatre avec des racines simples et c est une constante. Cette appellation intégrale elliptique est attribuée à Giulio Carlo Fagnano (1682-1766). Bien qu'il n'ait jamais réalisé lui-même l'inversion d'une telle intégrale, le travail de Fagnano était si important que Jacobi appelait le 23 décembre 1751 l'anniversaire des fonctions elliptiques. En général cette intégrale ne s'exprime pas au moyen des fonctions élémentaires c'est-à-dire celles que l'on obtient en appliquant à la variable t les opérations algébriques (addition, soustraction, multiplication, division) en nombre fini, ainsi que les fonctions logarithmiques, trigonométriques et leurs inverses.

A partir de ce type de forme, Adrien-Marie Legendre, qui en a offert la première étude systématique, dans son *traité des fonctions elliptiques* définit les intégrales elliptiques et les classe en trois catégories : partant d'une intégrale de la forme donnée par la relation (1.5),

avec des changements de variables adéquats, il réussit à les ramener aux trois types[10,16, 17,18]

$$\begin{array}{l}\int \frac{dt}{\sqrt{\left(1-t^2\right)\left(1-k^2t^2\right)}} \\ \int \sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}} \\ \int \frac{dt}{\left(1+lt^2\right)\sqrt{\left(1-t^2\right)\left(1-k^2t^2\right)}}\end{array} \qquad (1.6)$$

avec k et l des constantes. Ces intégrales sontrespectivement appelées intégrale elliptique de première, de deuxième et troisième espèce. Legendre appelait ces intégrales des fonctions elliptiques mais après les travaux d'Abel et de Jacobi, en 1827, le nom de fonction elliptique est maintenant réservé aux fonctions réciproques de ces intégrales.

Abel parvient à réaliser l'inversion des fonctions elliptiques de Legendre. En effet, en faisant le changement de variable $t=\sin\varphi$ dans les intégrales de la relation (1.6) on obtient $dt=\sqrt{1-\sin^2\varphi}d\varphi.$ Ce qui donne :

$$\begin{array}{l}\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \\ \int \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}d\varphi \\ \int \frac{d\varphi}{\left(1+l\sin^2\varphi\right)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\end{array} \qquad (1.7)$$

Considérons par exemple la première intégrale de la relation (1.7). On peut écrire cette intégrale sous une forme un peu différente [18] :

$$u(\varphi)=\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \quad (1.8)$$

d'où l'idée de chercher φ en fonction de u, en introduisant les nombres complexes.

Si k =0, la première intégrale de la relation (1.6) devient :

$$u(t)=\int_0^t\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\arcsin t \quad (1.9)$$

$$t=\sin u$$

Jacobi reprit le flambeau et tint le raisonnement suivant : on remarque que la relation (1.8) donne en dérivant

$$\frac{du}{d\varphi}=\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \qquad (1.10)$$
$$\left(\frac{d\varphi}{du}\right)^2=1-k^2\sin^2\varphi$$

D'où $\varphi(u)$est la solution d'une équation différentielle.

I.1.5.1. Intégrales elliptiques incomplètes

Considérons le changement de variable qui conduit à la relation (1.7).

L'intégrale elliptique incomplète de première espèce s'écrit comme suit :

$$F(k,\varphi)=\int_0^{\sin\varphi}\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} \quad (1.11)$$

Ce qui donne

$$F(k,\varphi)=\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \quad (1.12)$$

L'intégrale elliptique incomplètede deuxième espèce est définie avec les paramètres suivants : l'angle modulaire φ et module elliptique k.

$$E(k,\varphi)=\int_0^{\sin\varphi}\sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}}dt \quad (1.13)$$

Donc, on peut encore écrire

$$E(k,\varphi)=\int_0^{\varphi}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}d\varphi \quad (1.14)$$

On peut procéder de la même manière pour définirl'intégrale elliptique incomplète de troisième espèce

$$\Pi(k,l,\varphi)=\int_0^{\sin\varphi}\frac{dt}{(1+lt^2)\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} \quad (1.15)$$

La relation (1.15) peut s'écrire comme suit

$$\Pi(k,l,\varphi)=\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{(1+l\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\ (1.16)$$

I. 1.5.2. Intégrales elliptiques complètes

Lorsque la borne supérieure φ des intégrales des relations (1.12), (1.14), (1.16) vaut $\frac{\pi}{2}$[10], on note ces intégrales comme suit :

$$K(k)=F\left(k,\frac{\pi}{2}\right)=\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\ (1.17)$$

$$E(k)=E\left(k,\frac{\pi}{2}\right)=\int_0^1\sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}d\varphi\ (1.18)$$

$$\Pi(k,l,\varphi)=\int_0^1\frac{dt}{(1+lt^2)\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{(1+l\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\ (1.19)$$

Les intégrales des relations (1.17), (1.18) et (1.19)sont dites intégrales elliptiques complètes respectivement de première, de deuxième et de troisième espèce. Nous remarquons que les intégrales elliptiques sont caractérisées par les paramètres φ et$k$ respectivement appelés angle modulaire et module elliptique.

I.1.6. Lemniscate de Bernoulli

I.1.6.1 Définitions et équations

La lemniscate est une courbe algébrique célèbre découverte en 1694par le mathématicien physicien Jakob Bernoulli (1654-1705). C'est une courbe en forme de huit ou du symbole infini ∞et qui est le lieu géométrique des points tels le produit de leurs distances à deux points fixes est constant [19,20].

Soient $c$un réel positif quelconque, $F(c,O),F'(-c,O)$et $a=c\sqrt{2}$. On appelle lemniscate de Bernoulli le lieu ℓ des points M tels que

$MF.MF'=c^2$ (1.20)

Où F et F' sont les foyers de la lemniscate et O son centre.

La relation (1.20) s'appelle équation bipolaire de la lemniscate.

En coordonnées polaires, la lemniscate a l'équation de la forme :

$$r^2 = a^2 \cos 2\theta \quad (1.21)$$

Avec $a = c\sqrt{2}$

Passons des coordonnées polaires aux cordonnées cartésiennes comme suit :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (1.22)$$

Or, selon la formule d'addition en trigonométrie ordinaire, on a :

$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 \quad (1.23)$$

D'après ce qui précède, l'équation (1.21) devient :

$$x^2 + y^2 = a^2\left(\frac{2x^2}{x^2 + y^2} - 1\right)$$

$$= a^2\left(\frac{2x^2 - x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right)$$
$$= \frac{a^2\left(x^2 - y^2\right)}{x^2 + y^2}$$

Finalement, on trouve la relation suivante :

$$\left(x^2 + y^2\right)^2 = a^2\left(x^2 - y^2\right) \quad (1.24)$$

L'équation cartésienne de la lemniscate est :

$$\left(x^2 + y^2\right)^2 = a^2\left(x^2 - y^2\right)$$

$$= 2c^2\left(x^2 - y^2\right) \quad (1.25)$$

I.1.6.2. Une lemniscate de Bernoulli et ses deux foyers

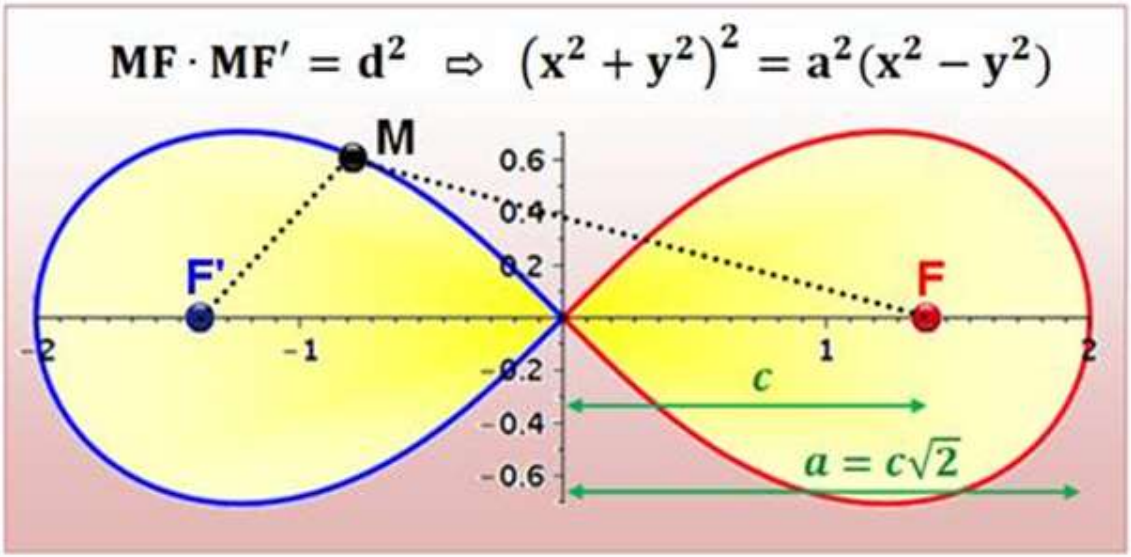


Fig.1. Exemple de la représentation d'une lemniscate de Bernoulli

Avec $d = OF$, d estla demi-distance entre les points F et F', foyers de la lemniscate.

I.1.6.3.La longueur de l'arc de la lemniscate de Bernoulli

Le problème du calcul de la longueur de l'arc de la lemniscate fournit une des premières motivations pour l'étude des intégrales elliptiques.

La longueur de l'arc de la lemniscate, comme celle de l'hyperbole ou celle de l'ellipse se calcule avec une intégrale transcendante. Autrement dit, aucune formule élémentaire ne permet de la calculer. Il existe bien l'égalité de Fagnano [21, 22] :

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}} = \int \sqrt{\frac{1+z^2}{1-z^2}}dz + \int \frac{t^2 dt}{\sqrt{1-t^4}} - zt \quad (1.26)$$

où z et t sont liées par l'expression

$$t = \sqrt{\frac{1+z^2}{1-z^2}} \quad (1.27)$$

L'égalité (1.26) est remarquable car elle met en relation géométrique un arc d'ellipse, un arc d'hyperbole et un arc de lemniscate. En effet, l'intégrale de gauche correspond à la longueur

d'un arc de lemniscate, la première intégrale du membre de droite est la longueur d'un arc d'ellipse, quant à la seconde c'est la longueur d'un arc d'hyperbole équilatère. Ces trois intégrales sont bien sûr transcendantes, c'est-à-dire inexprimables à partir des fonctions élémentaires et pourraient ne pas présenter plus d'intérêts qu'une somme quelconque d'intégrales incalculables, si n'apparaissaient que les deux irréductibles arcs d'ellipse et d'hyperbole, en plus, une référence à une courbe étonnante que les mathématiciens du 18ème siècle connaissaient comme étant la lemniscate et qui sera à l'origine de la célébrité de Fagnano auprès d'Euler et des mathématiciens qui s'intéressaient aux fonctions elliptiques.

I.2. Fonctions elliptiques de Jacobi

I.2.1. Définition

Alors que les fonctions trigonométriques sont définies en référence à un cercle, les fonctions elliptiques de Jacobi sont une généralisation qui se réfère à d'autres sections coniques, l'ellipse en particulier. Ces fonctions sont des fonctions elliptiques d'une grande importance historique et elles sont au nombre de douze. Au paramètre k, on associe deux nombres, définis par les intégrales elliptiquessuivantes [7,10] :

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \qquad K' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\varphi}} \qquad (1.28)$$

Avec $k' = \sqrt{1-k^2}$ appelé co-module ou complément du module elliptique.

I .2.2. Les douze fonctions elliptiques de Jacobi

En général, k est complexe ainsi que K et K' et on travaille à partir d'un parallélogramme. Si K et K' sont réels, alors les fonctions elliptiques de Jacobi prennent des valeurs réelles lorsqu'elles sont appliquées à une valeur réelle.

On dispose, dans un plan complexe, un rectangle dont les quatre sommets sont conventionnellement notés s,c,d et n de façon que s soit à l'origine, c au point d'abscisse K sur l'axe des réels, d au point d'affixe $K+iK'$ et n aupoint d'affixe iK' sur l'axe imaginaire selon le rectangle fondamental de Jacobi dans le plan complexe donné par la figure

suivante[7,11] :

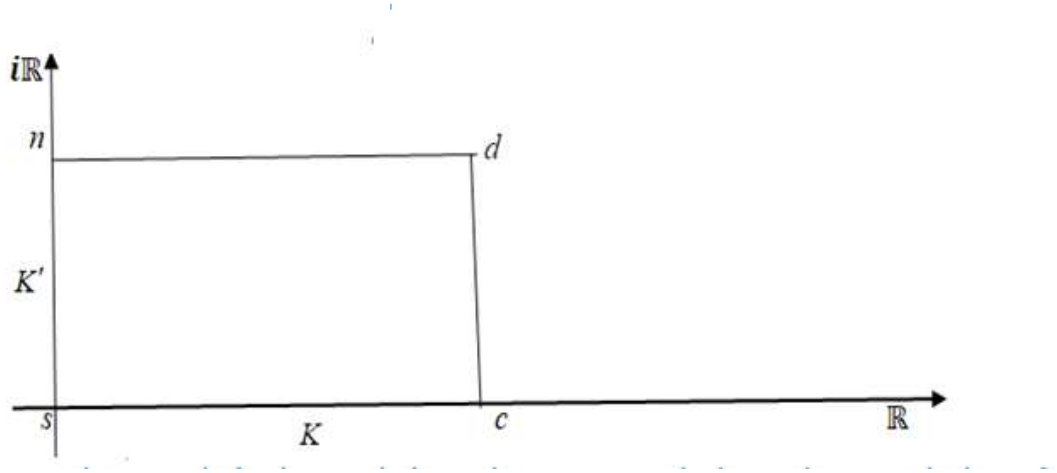


Fig.2. Le rectangle de Jacobi qui permet de trouver ses douze fonctions elliptiques

Le nom de chacune des fonctions elliptiques de Jacobi est alors associé à un couple de deux sommets du rectangle. Les douze fonctions elliptiques de Jacobi sont donc $sc, sd, sn, cd, cn, cs, dn, ds, dc, ns, nc$ et nd. Elles forment un réseau répétitif de simples pôles et zéros. Selon la fonction, un parallélogramme répétitif ou cellule unitaire, aura de côtés de longueur $2K$ ou $4K$ sur l'axe réel et $2K'$ ou $4K'$ sur l'axe imaginaire.

D'une façon générale, les fonctions elliptiques de Jacobi se notent $pq(u,m)$ où p et q sont l'une des lettres s,c,d,n. Les lettres u et m représentent respectivement l'argument et le paramètre, qui peuvent tous les deux être complexes.

I.2.2.1. Les trois fonctions elliptiques de base de Jacobi

Parmi les douze fonctions elliptiques de Jacobi, on distingue trois, appelées fonctions elliptiques de base de Jacobi. Ces fonctions sont sn, cn et dn.Considérons l'intégrale elliptique de la forme [10,15] :

$$u = \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} \quad , \ 0 \le k \le 1 \quad (1.29)$$

Nous allons voir avec peu de détail les propriétés de cette intégrale de première espèce tout en sachant que les propriétés des autres intégrales s'obtiennent de façon similaire. Nous avons vu dans les paragraphes précédents que si on opère le changement de variable $t = \sin\varphi$, cette intégrale prend la forme suivante :

$$u = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{1 - k^2 \sin^2 \varphi} \quad (1.30)$$

Elle possède donc un inverse, qu'on appelle amplitude de u et qui se note

$$\varphi = am(u) = am(u;k) \quad (1.31)$$

Si $k = 0$, alors l'intégrale de la relation (1.29) devient

$$u = \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t \quad (1.32)$$

d'où $t = \sin u$.

Pour $k \neq 0$, on note par analogie la fonction inverse de l'intégrale (1.30) par

$$t = sn(u) = sn(u;k) \quad (1.33)$$

que l'on nomme fonction elliptique de Jacobi. Lorsqu'il n'y a pas ambiguïté sur le module k, on écrit tout simplement snu au lieu de $sn(u;k)$. Cette première fonction elliptique de Jacobi s'appelle *sinus elliptique*.

La fonction $\varphi = am(u)$ est une fonction impaire strictement croissante de u. Tenant compte des relations (1.33) et de la relation $t = \sin\varphi$, on peut donc écrire

$$t = sn(u) = \sin(am(u)) \quad (1.34)$$

La deuxième et la troisième fonction elliptique de base de Jacobi sont définies respectivement par [15,22] :

$$\begin{aligned} cn(u) &= cn(u;k) = \cos(am(u)) \\ dn(u) &= dn(u;k) = \sqrt{1 - k^2 sn^2 u} \end{aligned} \quad (1.35)$$

Là aussi s'il n'y a pas ambiguïté sur le module k, on écrit tout simplement $cn(u)$ (respectivement $dn(u)$) au lieu de $cn(u;k)$ (respectivement $dn(u;k)$). Une notation alternative utilise un autre paramètre $m = k^2$, et donc les fonctions sont notées $sn(u\backslash m), cn(u\backslash m)$ et $dn(u\backslash m)$.

Lorsque $k = 0$, les fonctions $sn(u)$ et $cn(u)$ dégénèrent respectivement en fonctions circulaires $\sin(u)$ et $\cos(u)$ tandis que $dn(u)$ dégénère en 1. Cette notation $sn(u), cn(u)$ et $dn(u)$ a été introduite par Christoph Gurdermann(1798-1852) dans des conférences données en

1838.Dans sa *fundamenta nova theoriae functionumellipticarum, Jacobi* lui-même a utilisé $\sin(am(u)), \cos(am(u))$et $\Delta am(u)$.

I .2.3 Les propriétés algébriques des fonctions elliptiques

I.2.3.1. Relations entre les carrés des fonctions elliptiques de Jacobi

Les fonctions elliptiques de base de Jacobi, pour $x \in [-K, K]$ satisfont aux relations suivantes [10, 13,23, 24] :

$$\begin{aligned} sn^2(x;k) + cn^2(x;k) &= 1 \\ dn^2(x;k) + k^2 sn^2(x;k) &= 1 \end{aligned} \qquad (1.36)$$

Ces deux identités nous permettent de définir les fonctions cosinus elliptique et delta elliptique de Jacobi à partir de la fonction sinus elliptique de Jacobi.

En plus des relations (1.36)les fonctions elliptiques de Jacobi vérifient également les relations de la forme

$$\begin{aligned} k^2 cn^2(x;k) + k'^2 &= dn^2(x;k) \\ cn^2(x;k) + k'^2 sn^2(x;k) &= dn^2(x;k) \end{aligned} \qquad (1.37)$$

I.2.3.2. Formules d'addition

Les fonctions sn, cn, dn de Jacobi, pour $(u,t) \in [0;K]$telsque $u+t \in [-K;K]$, satisfont respectivement aux formules d'addition suivantes [17,24] :

$$\begin{aligned} sn(u+t) &= \frac{sn(u)cn(t)dn(t) + sn(t)cn(u)dn(u)}{1-k^2 sn^2(u)sn^2(t)} \\ cn(u+t) &= \frac{cn(u)cn(t) - sn(u)sn(t)dn(u)dn(t)}{1-k^2 sn^2(u)sn^2(t)} \\ dn(u+t) &= \frac{dn(u)dn(t) - k^2 sn(u)sn(t)cn(u)cn(t)}{1-k^2 sn^2(u)sn^2(t)} \end{aligned} \qquad (1.38)$$

Les formules d'angle double s'obtiennent en posant $u = t$ dans les expressions (1.38)

$$\begin{aligned} sn(2u) &= \frac{2sn(u)cn(u)dn(u)}{1-k^2 sn^4 u} \\ cn(2u) &= \frac{cn^2 u - sn^2 u dn^2 u}{1-k^2 sn^4 u} \\ dn(2u) &= \frac{dn^2 u - k^2 sn^2 u cn^2 u}{1-k^2 sn^4 u} \end{aligned} \qquad (1.39)$$

On peut également trouver les expressions équivalentes à celles de la relation (1.39) comme suit :

$$cn(2u)=\frac{cn^2u-sn^2udn^2u}{1-k^2sn^4u}$$

$$=\frac{cn^2u-sn^2u\left(1-k^2sn^2u\right)}{1-k^2sn^4u}$$
$$=\frac{cn^2u-sn^2u+k^2sn^4u}{1-k^2sn^4u}$$
$$=\frac{cn^2u-1+cn^2u+k^2sn^4u}{1-k^2sn^4u}$$
$$=\frac{2cn^2u-\left(1-k^2sn^4u\right)}{1-k^2sn^4u}$$
$$=\frac{2cn^2u}{1-k^2sn^4u}-1$$

De même, à partir de la deuxième formule d'addition, on peut déduire l'expression de la forme :

$$cn(2u)=\frac{cn^2u-sn^2udn^2u}{1-k^2sn^4u}$$

$$=\frac{1-sn^2u-sn^2udn^2u}{1-k^2sn^4u}$$
$$=\frac{1-sn^2u\left(dn^2u+k^2sn^2u\right)-sn^2udn^2u}{1-k^2sn^4u}$$
$$=\frac{1-k^2sn^4u-2sn^2udn^2u}{1-k^2sn^4u}$$
$$=1-\frac{2sn^2udn^2u}{1-k^2sn^4u}$$

Finalement, on obtient la relation suivante :

$$cn(2u)=\frac{2cn^2u}{1-k^2sn^4u}-1=1-\frac{2sn^2udn^2u}{1-k^2sn^4u}\ (1.40)$$

En procédant de la même manière on peut trouver une autre expression équivalente à la troisième expression de la relation (1.39).

D'une part, on trouve l'expression de la forme

$$dn(2u)=\frac{dn^2u-k^2sn^2ucn^2u}{1-k^2sn^4u}$$

$$=\frac{dn^2u-k^2sn^2u\left(1-sn^2u\right)}{1-k^2sn^4u}$$
$$=\frac{dn^2u-k^2sn^2u+k^2sn^4u}{1-k^2sn^4u}$$
$$=\frac{dn^2u-\left(1-dn^2u\right)+k^2sn^4u}{1-k^2sn^4u}$$
$$=\frac{2dn^2u}{1-k^2sn^4u}-1$$

D'autre part, on peut déduire l'expression suivante :

$$dn(2u)=\frac{dn^2u-k^2sn^2ucn^2u}{1-k^2sn^4u}$$

$$=\frac{1-k^2sn^2u-k^2sn^2ucn^2u}{1-k^2sn^4u}$$
$$=\frac{1-k^2sn^2u\left(sn^2u+cn^2u\right)-k^2sn^2ucn^2u}{1-k^2sn^4u}$$
$$=1-\frac{2k^2sn^2ucn^2u}{1-k^2sn^4u}$$

On a finalement la relation de la forme

$$dn(2u)=\frac{2dn^2u}{1-k^2sn^4u}-1=1-\frac{2k^2sn^2ucn^2u}{1-k^2sn^4u} \qquad (1.41)$$

Les expressions (1.39), (1.40) et (1.41) nous permettent de déduire les formules de réduction au carré comme suit :

De la relation (1.40), on tire l'expression suivante :

$$1-cn(2u)=\frac{2sn^2udn^2u}{1-k^2sn^4u} \qquad (1.42)$$

Ce qui donne la relation de la forme

$$\left(1-cn(2u)\right)\left(1-k^2sn^4u\right)=2sn^2udn^2u \qquad (1.43)$$

Or, tenant compte de la relation (1.41), on a :

$$2dn^2u=\left(1+dn(2u)\right)\left(1-k^2sn^4u\right) \qquad (1.44)$$

En introduisant l'expression (1.44) dans la relation (1.43), on obtient

$$sn^2u = \frac{1-cn(2u)}{1+dn(2u)} \qquad (1.45)$$

Ensuite, de la première expression de la (1.36) et celle de(1.45), on déduit que

$$cn^2u = \frac{cn(2u)+dn(2u)}{1+dn(2u)} \quad (1.46)$$

De la relation (1.40), on tire

$$2cn^2u = (1+cn2u)(1-k^2sn^4u) \quad (1.47)$$

Ensuite, de la relation (1.41), on déduit que

$$1-dn(2u) = \frac{2k^2sn^2ucn^2u}{1-k^2sn^4u} \quad (1.48)$$

Et en tenant compte de la relation (1.47), on tire de la relation (1.48) l'expression suivante :

$$1-dn(2u) = k^2sn^2u(1+cn(2u)) \quad (1.49)$$

Ce qui permet d'écrire

$$k^2sn^2u = \frac{1-dn(2u)}{1+cn(2u)} \quad (1.50)$$

De la deuxième relation de la relation (1.36), la relation (1.50) devient :

$$dn^2u = \frac{cn2u+dn2u}{1+cn2u} \quad (1.51)$$

Les périodes des fonctions elliptiques de Jacobi sont exprimées en terme des constantes K et K'.Alors, d'une façon générale, les périodes de la fonction $sn(u)$ sont $4K$ et $2iK'$.De même, les périodes $cn(u)$ sont $4K$ et $2K+2iK'$ et celles de $dn(u)$ sont $2K$ et $4iK'$.

Globalement, on peut écrire les relations suivantes [39, 40] :

$$\begin{aligned} sn(u+4K) &= sn(u+2iK') = sn(u) \\ cn(u+4K) &= cn(u+2K+2iK') = cn(u) \\ dn(u+2K) &= dn(u+4iK') = dn(u) \end{aligned} \quad (1.52)$$

La fonction $sn(u)$est impaire tandis que les fonctions $cn(u)$et $dn(u)$sont paires. Donc

$$\begin{aligned} sn(-u) &= -sn(u) \\ cn(-u) &= cn(u) \\ dn(-u) &= dn(u) \end{aligned} \quad (1.53)$$

En effet, par définition si

$$u = \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} \quad (1.54)$$

alors $t = sn(u)$.

La relation (1.54) nous permet d'écrire

$$-u = \int_0^{-t} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} \quad (1.55)$$

D'après ce qui précède, on peut écrire

$$sn(-u) = -t = -sn(u) \quad (1.56)$$

Dès relations (1.36), on déduit que :

$$\begin{aligned} cn(-u) &= \sqrt{1-sn^2(-u)} = \sqrt{1-sn^2(u)} = cn(u) \\ dn(-u) &= \sqrt{1-k^2sn^2(-u)} = \sqrt{1-k^2sn^2(u)} = dn(u) \end{aligned} \quad (1.57)$$

I.2.3.4. Dérivées des trois fonctions elliptiques de base de Jacobi

Les fonctions de Jacobi vérifient les formules de dérivation suivantes, analogues à celles des fonctions trigonométriques. Les dérivées des trois fonctions elliptiques de base de Jacobi, pour $u \in [-K;K]$,sont données par les expressions suivantes [10,25] :

$$\begin{aligned} am'(u) &= dn(u) \\ \frac{d}{du}[sn(u)] &= cn(u)dn(u) \\ \frac{d}{du}[cn(u)] &= -sn(u)dn(u) \\ \frac{d}{du}[dn(u)] &= -k^2sn(u)cn(u) \end{aligned} \quad (1.58)$$

I.2.3.5. Equations différentielles

Les fonctions elliptiques de Jacobi sn, cn et dn vérifient respectivement les équations différentielles suivantes [26] :

$$\left(\frac{d}{du}sn(u)\right)^2 = \left(1-sn^2(u)\right)\left(1-k^2sn^2(u)\right)$$
$$\left(\frac{d}{du}cn(u)\right)^2 = \left(1-cn^2(u)\right)\left(k'^2+k^2cn^2(u)\right) \quad (1.59)$$
$$\left(\frac{d}{du}dn(u)\right)^2 = \left(1-dn^2(u)\right)\left(dn^2(u)-k'^2\right)$$

Les relations (1.59) nous permettent de prouver que les fonctions elliptiques sn, cn et dn s'obtiennent par inversion respectivement des intégrales. Considérons les intégrales elliptiques de la forme

$$u = \int_0^{\omega} \frac{d\omega}{\sqrt{\left(1-\omega^2\right)\left(1-k^2\omega^2\right)}}$$
$$u = \int_0^{\omega} \frac{d\omega}{\sqrt{\left(1-\omega^2\right)\left(k'^2+k^2\omega^2\right)}} \quad (1.60)$$
$$u = \int_0^{\omega} \frac{dt}{\sqrt{\left(1-\omega^2\right)\left(\omega^2-k'^2\right)}}$$

En remplaçant $sn(u)$ par ω dans la première équation différentielle de la relation (1.59), on trouve

$$\frac{d\omega}{du} = \sqrt{\left(1-\omega^2\right)\left(1-k^2\omega^2\right)} \quad (1.61)$$

et par conséquent, on a :

$$\omega(0) = sn(0) = 0$$
$$\frac{d\omega}{du}(0) = sn'(0) = cn(0)dn(0) = 1\times 1 = 1 \quad (1.62)$$

De même, en remplaçant $cn(u)$par ω dans la seconde équation différentielle de la relation (1.59), on obtient

$$\frac{d\omega}{du} = \sqrt{\left(1-\omega^2\right)\left(k'^2+k^2\omega^2\right)} \quad (1.63)$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}&\omega(0)=cn(0)=1\\&\frac{d\omega}{du}(0)=cn'(0)=-sn(0)dn(0)=-0\times1=0\end{aligned}\quad(1.64)$$

Enfin, posons $\omega=dn(u)$ dans la troisième équation différentielle de la relation (1.59), on a :

$$\frac{d\omega}{du}=\sqrt{(1-\omega^2)(\omega^2-k'^2)}\quad(1.65)$$

D'où les relations de la forme

$$\begin{aligned}&\omega(0)=dn(0)=1\\&\frac{d\omega}{du}=dn'(0)=-k^2sn(0)cn(0)=0\end{aligned}\quad(1.66)$$

On retrouve les fonctions trigonométriques circulaires et hyperboliques pour les valeurs limites 0 et 1 de k.

Dans le cas où $k=0$, on retrouve la trigonométrie ordinaire :

$$\begin{aligned}&am(u;0)=u\\&sn(u;0)=\sin u\\&cn(u;0)=\cos u\\&dn(u;0)=1\end{aligned}\quad(1.67)$$

En effet, les deux premières relations s'obtiennent directement en utilisant la définition des intégrales de la relation (1.60) :

$$u=\int_0^{\omega}\frac{d\omega}{\sqrt{(1-\omega^2)(1-k^2\omega^2)}}$$

Dans le cas où $k=0$, cette intégrale devient

$$u=\int_0^{\omega}\frac{d\omega}{\sqrt{1-\omega^2}}=ar\sin\omega$$

d'où

$$\omega=sn(u)=sn(u;0)=\sin u$$

De la relation $sn^2u+cn^2u=1$ on tire

$$cn(u;0)=\sqrt{1-sn^2(u;0)}=\sqrt{1-\sin^2 u}=\cos u$$

De même, à partir de la relation $dn^2u+k^2sn^2u=1$, on peut tirer

$$dn(u;0)=\sqrt{1-k^2sn^2(u;0)}=\sqrt{1-0\times sn^2(u;0)}=\sqrt{1}=1$$

Si $k=1$ on voit apparaître les fonctions de la trigonométrie hyperbolique

$$sn(u;1)=\tanh u$$
$$cn(u;1)=\frac{1}{\cosh u} \quad (1.68)$$
$$dn(u;1)=\frac{1}{\cosh u}$$

En effet, tenant compte des intégrales de la relation (1.60), pour $k=1$, on

$$u=\int_0^{\omega}\frac{d\omega}{\sqrt{(1-\omega^2)^2}}=\int_0^{\omega}\frac{d\omega}{1-\omega^2}=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\omega}{1-\omega}\right)=\arg\tanh\omega \quad ,\omega^2\prec 1$$

et alors

$$\omega=sn(u)=\tanh u$$

Pour les autres relations, on a :

$$cn(u;1)=\sqrt{1-sn^2(u;1)}=\sqrt{1-\tanh^2 u}=\frac{1}{\cosh u}$$
$$dn(u;1)=\sqrt{1-sn^2(u;1)}=\sqrt{1-\tanh^2 u}=\frac{1}{\cosh u}$$

I.2.5. Les neuf autres fonctions elliptiques de Jacobi

On définit les neuf autres fonctions elliptiques de Jacobi à partir des fonctions elliptiques de base sn, cn et dn. Alors l'inversion de l'ordre des deux lettres du nom de la fonction entraîne l'inverse des trois fonctions ci-dessus :

$$ns(u;k)=\frac{1}{sn(u;k)}$$
$$nc(u;k)=\frac{1}{cn(u;k)} \quad (1.69)$$
$$nd(u;k)=\frac{1}{dn(u;k)}$$

De même, les rapports des trois fonctions elliptiques de base de Jacobi correspondent à la première lettre du numérateur suivie de la première lettre du dénominateur.

$$\begin{aligned} sc(u;k) &= \frac{sn(u;k)}{cn(u;k)} \\ cs(u;k) &= \frac{cn(u;k)}{sn(u;k)} \\ sd(u;k) &= \frac{sn(u;k)}{dn(u;k)} \\ ds(u;k) &= \frac{dn(u;k)}{sn(u;k)} \\ cd(u;k) &= \frac{cn(u;k)}{dn(u;k)} \\ dc(u;k) &= \frac{dn(u;k)}{cn(u;k)} \end{aligned} \quad (1.70)$$

De manière générale, on a la forme suivante:

$$pq(u) = \frac{pn(u)}{qn(u)} \quad (1.71)$$

Où p,q sont l'une des lettres s,c,d .

Fonctions circulaires	Fonctions elliptiques de Jacobi
$u = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ $x = \sin u$	$u = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$ $x = snu$
$\frac{1}{2}\pi = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$	$K = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$
$\cos u = \sin\left(\frac{1}{2}\pi - u\right)$	$cdu = sn(K-u)$
$\sin\frac{\pi}{2} = 1$	$snK = 1$
$\sin\pi = 0$	$sn2K = 0$
$\sin(\pi+u) = -\sin u$	$sn(2K+u) = -snu$
$\sin(-u) = -\sin u$	$sn(-u) = -snu$

Tableau.1. Comparaison entre les fonctions circulaires et les fonctions elliptiques de Jacobi

I.2.6.La trigonométrie lemniscatique et les fonctions elliptiques de Jacobi

Les fonctions lemniscatiques sont des fonctions elliptiques liées à la longueur d'arc d'une lemniscate de Bernoulli.

On note l'intégrale lemniscatique par[13]

$$\varphi = \int_0^x \frac{du}{\sqrt{1-u^4}}, \quad (1.72)$$

ce qui nous permet d'exprimer la relation entre φ et χ comme

$$x = sl(\varphi) \quad (1.73)$$

La fonction sl est appelé sinus lemniscatique.

Le cosinus lemniscatique $cl\varphi$ est défini comme suit :

$$\varphi = \int_x^0 \frac{du}{\sqrt{1-u^4}} \qquad (1.74)$$
$$x = cl(\varphi)$$

Fonctions circulaires	Fonctions lemniscatiques
$\varphi = \int_0^x \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$ $x = \sin\varphi$	$\varphi = \int_0^x \frac{du}{\sqrt{1-u^4}}$ $x = sl(\varphi)$
$\frac{1}{2}\pi = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$	$\frac{1}{2}\omega = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^4}}$
$\cos\varphi = \sin\left(\frac{1}{2}\pi - \varphi\right)$	$cl(\varphi) = sl\left(\frac{1}{2}\omega - \varphi\right)$
$\sin\frac{1}{2}\pi = 1$	$sl\frac{1}{2}\omega = 1$
$\sin\pi = 0$	$sl\omega = 0$
$\sin(\pi+\varphi) = -\sin\varphi$	$sl(\omega+\varphi) = -sl(\varphi)$
$\sin(-\varphi) = -\sin\varphi$	$sl(-\varphi) = -sl(\varphi)$

Tableau 2.Comparaison entre les fonctions circulaires et les fonctions lemniscatiques

La constante ω est appelée période des fonctions lemniscatiques et la demi-période se note $\varpi = \frac{\omega}{2}$. Le sinus lemniscatique et le cosinus lemniscatique sont des analogues des fonctions sinus et cosinus de la trigonométrie ordinaire, en remplaçant le cercle par la lemniscate de Bernoulli et elles sont liées à la longueur de l'arc de cette lemniscate.

On a entre le sinus lemniscatique et le cosinus lemniscatique la relation suivante :

$$\left(sl^2\varphi+1\right)\left(cl^2\varphi+1\right)=2 \quad (1.75)$$

En plus, ces fonctions lemniscatiques ont des dérivées suivantes :

$$\frac{d}{d\varphi}sl(\varphi) = cl\varphi\left(sl^2\varphi+1\right)$$
$$\frac{d}{d\varphi}cl(\varphi) = -sl\varphi\left(cl^2\varphi+1\right) \quad (1.76)$$

Les fonctions lemniscatiques peuvent également être exprimées en termes des fonctions elliptiques par les équations suivantes :

$$sl\varphi = \frac{1}{2}\sqrt{2}sd\left(\sqrt{2}\varphi, k\right) \quad (1.77)$$
$$cl\varphi = cn\left(\sqrt{2}\varphi, k\right)$$

où k est donné par la relation $k = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

La théorie des fonctions et d'intégrales elliptiques fut évidemment très importante pendant tout le 19ème siècle, mais cet engouement baissa fortement vers la fin du siècle. La tendance s'est inversée avec l'apparition des ordinateurs et le renouveau de certaines questions d'arithmétique ; la démonstration par Andrew John Wiles du théorème de Fermat a remis au jour les liens profonds entre la Théorie des Nombres et ces fonctions, la conjoncture de Birch et Swinnerton-Dyer, liée aux fonctions elliptiques, fait d'ailleurs l'objet d'un des prix de la fondation Clay.

CHAPITRE II : LA RESOLUBILITE PARTIELLE DU HAMILTONIEN MATRICIEL DEPENDANT DES FONCTIONS ELLIPTIQUES DE JACOBI

II.1. Introduction

Dans ce chapitre, nous allons prouver la résolubilité partielle d'un hamiltonien matriciel d'ordre 2×2 associé à un potentiel dépendant des fonctions méromorphes et doublement périodiques dites fonctions elliptiques de Jacobi. Par là, on applique la méthode analytique de résolubilité partielle pour déterminer trois conditions algébriques nécessaires et suffisantes pour qu'un tel hamiltonien laisse invariant un espace vectoriel polynômial de dimension finie. On traite ici deux cas c'est-à-dire le cas où $\delta = 1$ et celui où $\delta = 2$.

II.2. Opérateur Complètement Algébrique

Un opérateur A est dit complètement algébrique s'il préserve une infinité d'espaces vectoriels de polynômes V_n (sous-espaces vectoriels de l'espace de Hilbert), autrement dit, l'opérateur A vérifie la relation [5] :

$$AV_n \subset V_n \qquad (2.1)$$

Où V_n est un espace vectoriel de polynômes de dimension n+1 et $V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset ..... \subset V_n, n = 0,1,2,...$ (n est arbitraire).

En d'autres termes, l'action de l'opérateur *A* sur tout élément de l'espace vectoriel V_n donne un élément du même espace V_n.

Dans ce cas, on peut déterminer algébriquement toutes les valeurs propres associées à l'opérateur A. Pour prouver la résolubilité complète d'un opérateur, on va utiliser une méthode dite directe [6].

II.3. Opérateur partiellement algébrique

Un opérateur *A* est dit partiellement algébrique, s'il laisse invariant une famille de sous-espaces vectoriels de dimension finie de l'espace de Hilbert $\mathfrak{H}$, en d'autres termes, l'opérateur vérifie la relation (2.1) où n est fixé.Dans ce cas, seule une partie des valeurs propres de *A* peut être déterminée algébriquement. Cette définition peut être

naturellementétendue sur plusieurs cas généraux notamment sur des opérateurs matriciels différentiels, des opérateurs décrivant n corps.

Pour prouver la résolubilité partielle d'un opérateur, deux méthodes peuvent être utilisées à savoir : La méthode directe et la méthode algébrique de Lie.

II.4. Méthode analytique de résolubilité partielle

II.4.1. 1er cas : $\delta = 1$

Considérons l'opérateur matriciel d'ordre N de Schrödinger avec le potentiel dépendant des fonctions elliptiques de Jacobi de la forme [27, 28] :

$$H(z) = -\frac{d^2}{dz^2}1_N + V_D + V_I \quad (2.2)$$

avec

$$V_D = sn^2 diag(a_1, a_2, ..., a_N) + diag(b_1, b_2, ..., b_N)$$

Le cas où $N = 1$ correspond à l'équation de Lamé [28]. Nous allons traiter en détail le cas où $N = 2$ qui correspond à l'opérateur suivant :

$$H(z) = -\frac{d^2}{dz^2}1_2 + V_D + V_I \quad (2.3)$$

Ici,

$$V_D = \begin{pmatrix} a_1 sn^2 + b & 0 \\ 0 & a_2 sn^2 - b \end{pmatrix}, \quad V_I = \begin{pmatrix} 0 & \theta\, sndn \\ \theta\, sndn & 0 \end{pmatrix}$$

1_2 est une matrice identité d'ordre deux et a_1, a_2, b et θ sont des réels constants. Notons que $V_D + V_I$ est le potentiel associé au hamiltonien $H(z)$.

En opérant la transformation de jauge, on a[27] :

$$\tilde{H}(z) = h^{-1} H(z) h \quad (2.4)$$

$$\tilde{H}(z) = \begin{pmatrix} \tilde{H}_{11} & \tilde{H}_{12} \\ \tilde{H}_{21} & \tilde{H}_{22} \end{pmatrix}$$

où $\tilde{H}(z)$ est le hamiltonien de jauge

et pour notre cas h peut prendre la forme suivante :

$$h=\begin{pmatrix} h_1 & 0 \\ 0 & h_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} sn & 0 \\ 0 & dn \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

Déterminons les composantes du hamiltonien de jauge $\tilde{H}(z)$.

Calculons d'abord h^{-1}l'inverse de la matrice h.

$$h^{-1}=\frac{1}{\det h}t_{comh}=\frac{1}{sndn}\begin{pmatrix} dn & 0 \\ 0 & sn \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{sndn}dn & 0 \\ 0 & \frac{1}{sndn}sn \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{sn} & 0 \\ 0 & \frac{1}{dn} \end{pmatrix}$$

Où t_{comh} est la transposée de la comatrice de la matrice h.

$$\tilde{H}(z)=\begin{pmatrix} \frac{1}{sn} & 0 \\ 0 & \frac{1}{dn} \end{pmatrix}H(z)\begin{pmatrix} sn & 0 \\ 0 & dn \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \frac{1}{sn} & 0 \\ 0 & \frac{1}{dn} \end{pmatrix}\left[-\frac{d^2}{dz^2}1_2+V_D+V_I\right]\begin{pmatrix} sn & 0 \\ 0 & dn \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \frac{1}{sn} & 0 \\ 0 & \frac{1}{dn} \end{pmatrix}\left[-\frac{d^2}{dz^2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a_1sn^2+b & 0 \\ 0 & a_2sn^2-b \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & \theta\, sndn \\ \theta\, sndn & 0 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} sn & 0 \\ 0 & dn \end{pmatrix}$$

Après quelques manipulations algébriques, on trouve l'expression de la forme

$$\tilde{H}(z)=\begin{pmatrix} -\frac{sn''}{sn}-\frac{2sn'}{sn}\frac{d}{dz}-\frac{d^2}{dz^2}+a_1sn^2+b & \theta\, dn^2 \\ \theta\, sn^2 & -\frac{dn''}{dn}-\frac{2dn'}{dn}\frac{d}{dz}-\frac{d^2}{dz^2}+a_2sn^2-b \end{pmatrix}$$

Or $h=\begin{pmatrix} h_1 & 0 \\ 0 & h_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} sn & 0 \\ 0 & dn \end{pmatrix}$

$$\tilde{\tilde{H}}(z)=\begin{pmatrix} -\frac{d^2}{dz^2}-2\frac{h_1'}{h_1}\frac{d}{dz}-\frac{h_1''}{h_1}+a_1 sn^2+b & \theta\, dn^2 \\ \theta\, sn^2 & -\frac{d^2}{dz^2}-2\frac{h_2'}{h_2}\frac{d}{dz}-\frac{h_2''}{h_2}+a_2 sn^2-b \end{pmatrix}$$

D'où, d'après les relations (2.4), on a les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} \tilde{\tilde{H}}_{11} &= -\frac{d^2}{dz^2}-2\frac{h_1'}{h_1}\frac{d}{dz}-\frac{h_1''}{h_1}+a_1 sn^2+b \\ \tilde{\tilde{H}}_{12} &= \theta\, dn^2 \\ \tilde{\tilde{H}}_{21} &= \theta\, sn^2 \\ \tilde{\tilde{H}}_{22} &= -\frac{d^2}{dz^2}-2\frac{h_2'}{h_2}\frac{d}{dz}-\frac{h_2''}{h_2}+a_2 sn^2-b \end{aligned} \qquad (2.6)$$

Opérons les changements de variable $t=sn^2(z,k)$. Le paramètre k étant le module des fonctions de Jacobi.

$$\frac{d}{dz}=\frac{dt}{dz}\frac{d}{dt}=\frac{dsn^2}{dz}\frac{d}{dt}$$

Ce qui nous permet d'écrire

$$\frac{d^2}{dz^2}=\frac{d}{dz}\left(\frac{d}{dz}\right)=\frac{d}{dz}\left(2sncndn\frac{d}{dt}\right)$$

On trouve finalement la relation de la forme[28]

$$\frac{d^2}{dz^2}=4t(1-t)(1-k^2t)\frac{d^2}{dt^2}+2\left[3k^2t^2-2(1+k^2)t+1\right]\frac{d}{dt} \quad (2.7)$$

Tenant compte des relations (1.36) et (1.58), pour $h_1=sn$, le second et le troisième terme de l'opérateur $\tilde{\tilde{H}}_{11}$peuvent s'écrire comme suit :

$$2\frac{h_1'}{h_1}\frac{d}{dz}=2\frac{h_1'}{h_1}(2sncndn)\frac{d}{dt} \quad (2.8)$$

$$\frac{h_1''}{h_1}=\frac{(cndn)'}{sn}=2k^2t-(k^2+1) \quad (2.9)$$

De même pour $h_2=dn$, le second et le troisième terme de l'opérateur $\tilde{\tilde{H}}_{22}$ont les formes suivantes :

$$2\frac{h_2'}{h_2}\frac{d}{dz}=2\frac{h_2'}{h_2}(2sncndn)\frac{d}{dt}$$

$$=4\left(k^2t^2-k^2t\right)\frac{d}{dt}\ (2.10)$$

$$\frac{h_2''}{h_2}=\frac{\left(-k^2sncn\right)'}{dn}=2k^2t-k^2 \qquad (2.11)$$

En remplaçant les expressions (2.8), (2.9), (2.10), (2.11) dans les relations (2.6) et en tenant compte du changement de variable $t=sn^2(z,k)$, on obtient les expressions :

$$\begin{aligned}
&\tilde{H}_{11}=-4t(1-t)(1-k^2t)\frac{d^2}{dt^2}-2\left[5k^2t^2-4\left(1+k^2\right)t+3\right]\frac{d}{dt}+\left(a_1-2k^2\right)t+k^2+b+1\\
&\tilde{H}_{12}=\theta\left(1-k^2t\right)\\
&\tilde{H}_{21}=\theta t\\
&\tilde{H}_{22}=-4t(1-t)(1-k^2t)\frac{d^2}{dt^2}-2\left[5k^2t^2-4k^2t-2\left(1+2k^2\right)t+1\right]\frac{d}{dt}+\left(a_2-2k^2\right)t+k^2-b
\end{aligned} \qquad (2.12)$$

En développant les deuxièmes membres des relations (2.12), on trouve les expressions suivantes:

$$\begin{aligned}
&\tilde{H}_{11}=-4k^2t^3\frac{d^2}{dt^2}+4\left(1+k^2\right)t^2\frac{d^2}{dt^2}-4t\frac{d^2}{dt^2}-10k^2t^2\frac{d}{dt}+8\left(1+k^2\right)t\frac{d}{dt}-6\frac{d}{dt}+\left(a_1-2k^2\right)t+k^2+1+b\\
&\tilde{H}_{12}=\theta-\theta\,k^2t\\
&\tilde{H}_{21}=\theta t\\
&\tilde{H}_{22}=-4k^2t^3\frac{d^2}{dt^2}+4\left(1+k^2\right)t^2\frac{d^2}{dt^2}-4t\frac{d^2}{dt^2}-10k^2t^2\frac{d}{dt}+4\left(1+2k^2\right)t\frac{d}{dt}-2\frac{d}{dt}+2\left(a_2-2k^2\right)t+k^2-b
\end{aligned} \qquad (2.13)$$

La décomposition du hamiltonien $\tilde{H}$ de Jauge donne :

$$\tilde{H}=\tilde{H}_1+\tilde{H}_0+\tilde{H}_{-1} \qquad (2.14)$$

Des relations (2.13), on tire les composantes de $\tilde{H}$ comme suit :

$$\tilde{H}_1=\begin{pmatrix}-4k^2t^3\frac{d^2}{dt^2}-10k^2t^2\frac{d}{dt}+\left(a_1-2k^2\right)t & -\theta\,k^2t\\ \theta t & -4k^2t^3\frac{d^2}{dt^2}-10k^2t^2\frac{d}{dt}+\left(a_2-2k^2\right)t\end{pmatrix} \qquad (2.15)$$

$$\tilde{H}_0=\begin{pmatrix}4\left(1+k^2\right)t^2\frac{d^2}{dt^2}+8\left(1+k^2\right)t\frac{d}{dt}+k^2+1+b & \theta\\ 0 & 4\left(1+k^2\right)t^2\frac{d^2}{dt^2}+4\left(1+2k^2\right)t\frac{d}{dt}+k^2-b\end{pmatrix} \qquad (2.16)$$

$$\tilde{H}_{-1}=\begin{pmatrix} -4t\dfrac{d^2}{dt^2}-6\dfrac{d}{dt} & 0 \\ 0 & -4t\dfrac{d^2}{dt^2}-2\dfrac{d}{dt} \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

Le vecteur générique de l'espace vectoriel invariant sous l'action du hamiltonien $\tilde{H}$ a la forme suivante [27, 28] :

$$\psi=\begin{pmatrix} \alpha_0 t^n+\alpha_1 t^{n-1}+\ldots \\ \beta_0 t^{n-\delta+1}+\beta_1 t^{n-\delta}+\ldots \end{pmatrix} (2.18)$$

Comme $\delta=1$, la fonction d'onde ψ s'écrit comme suit :

$$\psi=\begin{pmatrix} \alpha_0 t^n+\alpha_1 t^{n-1}+\ldots \\ \beta_0 t^n+\beta_1 t^{n-1}+\ldots \end{pmatrix} (2.19)$$

$\tilde{H}_1$ fait monter le degré de la fonction d'onde ψ d'une unité, $\tilde{H}_0$ laisse intact le degré de ψ et $\tilde{H}_{-1}$ diminue le degré de ψ d'une unité.

Ce qui permet d'écrire les expressions suivantes :

$$\tilde{H}_1\begin{pmatrix} t^n \\ t^n \end{pmatrix}\cong\begin{pmatrix} t^{n+1} \\ t^{n+1} \end{pmatrix},$$
$$\tilde{H}_0\begin{pmatrix} t^n \\ t^n \end{pmatrix}\cong\begin{pmatrix} t^n \\ t^n \end{pmatrix}, \quad (2.20)$$
$$\tilde{H}_{-1}\begin{pmatrix} t^n \\ t^n \end{pmatrix}\cong\begin{pmatrix} t^{n-1} \\ t^{n-1} \end{pmatrix}$$

Vérifions l'action de l'opérateur $\tilde{H}$ sur la fonction d'onde de ψ. Le vecteur $\tilde{H}\psi$ peut être décomposé comme suit [29] :

$$\tilde{H}\psi=diag\left(t^{n+1},t^{n+1}\right)M_1\begin{pmatrix}\alpha_0\\ \beta_0\end{pmatrix}+diag\left(t^n,t^n\right)\tilde{M}_1\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \beta_1\end{pmatrix}+diag\left(t^n,t^n\right)M_0\begin{pmatrix}\alpha_0\\ \beta_0\end{pmatrix} (2.21)$$

Le vecteur $\tilde{H}\psi$ définit en particulier les matrices constantes d'ordre deux $M_1,\tilde{M}_1$ et M_0.

II.4.1.1. Détermination des matrices $M_1, \tilde{M}_1$ et M_0

On obtient ces trois matrices en partant des expressions suivantes :

$$\tilde{H}_1\begin{pmatrix}\alpha_0 t^n\\ \beta_0 t^n\end{pmatrix} = diag\left(t^{n+1}, t^{n+1}\right)M_1\begin{pmatrix}\alpha_0\\ \beta_0\end{pmatrix}$$
$$\tilde{H}_1\begin{pmatrix}\alpha_1 t^{n-1}\\ \beta_1 t^{n-1}\end{pmatrix} = diag\left(t^{n}, t^{n}\right)\tilde{M}_1\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \beta_1\end{pmatrix} \quad (2.22)$$
$$\tilde{H}_0\begin{pmatrix}\alpha_0 t^n\\ \beta_0 t^n\end{pmatrix} = diag\left(t^{n}, t^{n}\right)M_0\begin{pmatrix}\alpha_0\\ \beta_0\end{pmatrix}$$

Pour trouver ces matrices, on développe les premiers membres des relations (2.22).

$$\tilde{H}_1\begin{pmatrix}\alpha_0 t^n\\ \beta_0 t^n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4k^2t^3\frac{d^2}{dt^2} - 10k^2t^2\frac{d}{dt} + \left(a_1 - 2k^2\right)t & -\theta k^2 t\\ \theta t & -4k^2t^3\frac{d^2}{dt^2} - 10k^2t^2\frac{d}{dt} + \left(a_2 - 2k^2\right)t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_0 t^n\\ \beta_0 t^n\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -4k^2\alpha_O n(n-1)t^{n+1} - 10k^2 n\alpha_O t^2 t^{n+1} + \left(a_1 - 2k^2\right)\alpha_O t^{n+1} - \theta k^2\beta_O t^{n+1}\\ \theta\alpha_O t^{n+1} - 4k^2\beta_O n(n-1)t^3 t^{n+1} - 10k^2\beta_O n t^2 t^{n+1} + \left(a_2 - 2k^2\right)\beta_O t^{n+1}\end{pmatrix}$$

$$= \mathrm{diag}\left(\mathrm{t}^{n+1}, \mathrm{t}^{n+1}\right)\begin{pmatrix} -4k^2n(n-1) - 10nk^2 + a_1 - 2k^2 & -\theta k^2\\ \theta & -4k^2n(n-1) - 10nk^2 + a_2 - 2k^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_0\\ \beta_0\end{pmatrix}$$

D'où:

$$M_1 = \begin{pmatrix} -4k^2n(n-1) - 10nk^2 + a_1 - 2k^2 & -\theta k^2\\ \theta & -4k^2n(n-1) - 10nk^2 + a_2 - 2k^2\end{pmatrix} \quad (2.23)$$

$$\tilde{H}_1\begin{pmatrix}\alpha_1 t^{n-1}\\ \beta_1 t^{n-1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4k^2t^3\frac{d^2}{dt^2} - 10k^2t^2\frac{d}{dt} + \left(a_1 - 2k^2\right)t & -\theta k^2 t\\ \theta t & -4k^2t^3\frac{d^2}{dt^2} - 10k^2t^2\frac{d}{dt} + \left(a_2 - 2k^2\right)t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1 t^{n-1}\\ \beta_1 t^{n-1}\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -4k^2t^3\frac{d^2}{dt^2}\left(\alpha_1 t^{n-1}\right) - 10k^2t^2\frac{d}{dt}\left(\alpha_1 t^{n-1}\right) + \left(a_1 - 2k^2\right)\alpha_1 t^n - \theta k^2\beta_1 t^n\\ \theta\alpha_1 t^n - 4k^2t^3\frac{d^2}{dt^2}\left(\beta_1 t^{n-1}\right) - 10k^2t^2\frac{d}{dt}\left(\beta_1 t^{n-1}\right) + \left(a_2 - 2k^2\right)\beta_1 t^n\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -4k^2(n-1)(n-2)\alpha_1 t^n - 10k^2(n-1)\alpha_1 t^n + \left(a_1 - 2k^2\right)\alpha_1 t^n - \theta k^2\beta_1 t^n\\ \theta\alpha_1 t^n - 4k^2(n-1)(n-2)\beta_1 t^n - 10k^2(n-1)\beta_1 t^n + \left(a_2 - 2k^2\right)\beta_1 t^n\end{pmatrix}$$

$$= diag\left(t^n, t^n\right)\begin{pmatrix} -4k^2(n-1)(n-2)-10k^2(n-1)+a_1-2k^2 & -\theta k^2 \\ \theta & -4k^2(n-1)(n-2)-10k^2(n-1)+a_2-2k^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \beta_1\end{pmatrix}$$

D'où :

$$\tilde{M}_1 = \begin{pmatrix} -4k^2(n-1)(n-2)-10k^2(n-1)+a_1-2k^2 & -\theta k^2 \\ \theta & -4k^2(n-1)(n-2)-10k^2(n-1)+a_2-2k^2 \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

$$\tilde{H}_0\begin{pmatrix}\alpha_0 t^n\\ \beta_0 t^n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4(1+k^2)t^2\frac{d^2}{dt^2}+8(1+k^2)t\frac{d}{dt}+k^2+1+b & \theta \\ 0 & 4(1+k^2)t^2\frac{d^2}{dt^2}+4(1+2k^2)t\frac{d}{dt}+k^2-b \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_0 t^n\\ \beta_0 t^n\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4(1+k^2)t^2\frac{d^2}{dt^2}(\alpha_0 t^n)+8(1+k^2)t\frac{d}{dt}(\alpha_0 t^n)+(k^2+1+b)\alpha_0 t^n+\theta\beta_0 t^n \\ 4(1+k^2)t^2\frac{d^2}{dt^2}(\beta_0 t^n)+4(1+2k^2)t\frac{d}{dt}(\beta_0 t^n)(k^2-b)\beta_0 t^n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4(1+k^2)n(n-1)\alpha_0 t^n+8(1+k^2)n\alpha_0 t^n+(k^2+1+b)\alpha_0 t^n+\theta\beta_0 t^n \\ 4(1+k^2)\beta_0 n(n-1)t^n+4(1+2k^2)n\beta_0 t^n+(k^2-b)\beta_0 t^n \end{pmatrix}$$

$$= diag\left(t^n,\ t^n\right)\begin{pmatrix} 4(1+k^2)n(n-1)+8(1+k^2)n+k^2+1+b & \theta \\ 0 & 4(1+k^2)n(n-1)+4(1+2k^2)n+(k^2-b)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_0\\ \beta_0\end{pmatrix}$$

$$M_0 = \begin{pmatrix} 4(1+k^2)n(n-1)+8n(1+k^2)+k^2+1+b & \theta \\ 0 & 4(1+k^2)n(n-1)+4n(1+2k^2)+k^2-b\end{pmatrix}$$

(2.25)

II.4.1.2.Les trois conditions de résolubilité partielle de jauge $\tilde{H}$

La première condition est donnée par l'expression de la forme[29] :

$$M_1\begin{pmatrix}\alpha_0\\ \beta_0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

Cette expression est équivalente à :

$$dét M_1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} -4k^2n(n-1)-10nk^2+a_1-2k^2 & -\theta k^2 \\ \theta & -4k^2n(n-1)-10nk^2+a_2-2k^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[-4k^2n(n-1)-10nk^2+a_1-2k^2\right]\left[-4k^2n(n-1)-10nk^2+a_2-2k^2\right]+\theta^2k^2 = 0$$

Après quelques manipulations algébriques, on obtient l'expression de la forme :

$$\Leftrightarrow \theta^2k^2 = \left[4k^2n^2+6k^2n+2k^2\right](a_1+a_2)-a_1a_2-16k^4n^4-48k^4n^3-52n^2k^4-4k^4-24k^4n$$

$$\theta^2 = \frac{\left[4k^2n^2+6k^2n+2k^2\right](a_1+a_2)-a_1a_2-16k^4n^4-48k^4n^3-52n^2k^4-4k^4-24k^4n}{k^2} \quad (2.26)$$

L'expression (2.26) constitue la première condition de résolubilité partielle du hamiltonien de

Jauge $\tilde{H}$. Pour la deuxième condition de résolubilité partielle de $\tilde{H}$,on part de l'expression suivante :

$$\tilde{M}_1^t\begin{pmatrix}-\beta_0\\ \alpha_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

Cette expression est équivalente à

$$dét\tilde{M}_1=0$$

Ce qui donne :

$$\Leftrightarrow\begin{vmatrix}-4k^2(n-1)(n-2)-10(n-1)k^2+a_1-2k^2 & -\theta k^2\\ \theta & -4k^2(n-1)(n-2)-10k^2(n-1)+a_2-2k^2\end{vmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow\left[-4k^2(n-1)(n-2)-10(n-1)k^2+a_1-2k^2\right]\left[-4k^2(n-1)(n-2)-10k^2(n-1)+a_2-2k^2\right]+\theta^2k^2=0$$

En développant et en remplaçant θ^2k^2 par son expression, on obtient l'expression suivante

$$-64k^4n^3-48k^4n^2+8k^2na_1+8k^2na_2+2k^2a_1+4k^2a_2-24k^2n-4k^4=0$$

En mettant en évidence $2k^2$, on a:

$$-32k^2n^3-24k^2n^2-2k^2-12k^2n+4na_1+4na_2+a_1+a_2=0$$

$$a_1=\frac{32k^2n^3+24k^2n^2+12k^2n+2k^2-a_2(4n+1)}{4n+1}\ (2.27)$$

La relation (2.27) exprime la deuxième condition de résolubilité partielle du hamiltonien $\tilde{H}$

En fin, la troisième condition de la résolubilité partielle de $\tilde{H}$ est obtenue comme suit :

$$M_0\begin{pmatrix}1\\ \frac{\beta_0}{\alpha_0}\end{pmatrix}=\Lambda\begin{pmatrix}1\\ \frac{\beta_0}{\alpha_0}\end{pmatrix}$$

Calculons d'abord $\frac{\beta_0}{\alpha_0}$.

Ce rapport est donné par la première condition de résolubilité partielle de $\tilde{H}$

c'est-à-dire $M_1\begin{pmatrix}\alpha_0\\ \beta_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

En remplaçant M_1 par son expression, on obtient :

$$M_1\begin{pmatrix}\alpha_0\\ \beta_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4k^2n(n-1)-10nk^2+a_1-2k^2 & -\theta k^2\\ \theta & -4k^2n(n-1)-10nk^2+a_2-2k^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_0\\ \beta_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

On obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \left[-4k^2n(n-1)-10nk^2+a_1-2k^2\right]\alpha_0-\theta k^2\beta_0=0 & \text{(i)} \\ \theta\alpha_0+\left[-4k^2n(n-1)-10nk^2+a_2-2k^2\right]\beta_0=0 & \text{(ii)} \end{cases}$$

De la relation (ii), on déduit que

$$\frac{\beta_0}{\alpha_0}=\frac{\theta}{4k^2n^2+6k^2n-a_2+2k^2} \quad (2.28)$$

$$M_0\left(\frac{1}{\frac{\beta_0}{\alpha_0}}\right)=M_0\left(\frac{1}{\frac{\theta}{4k^2n^2+6k^2n-a_2+2k^2}}\right)=\Lambda\left(\frac{1}{\frac{\theta}{4k^2n^2+6k^2n-a_2+2k^2}}\right)$$

En remplaçant M_0 par son expression, on obtient le système suivant

$$\begin{cases} 4\left(1+k^2\right)n(n-1)+8n\left(1+k^2\right)+k^2+1+b+\dfrac{\theta^2}{4k^2n^2+6k^2n-a_2+2k^2}=\Lambda \\ \left[4\left(k^2+1\right)n(n-1)+4n\left(1+2k^2\right)n+k^2-b\right]\dfrac{\theta}{4k^2n^2+6k^2n-a_2+2k^2}=\Lambda\dfrac{\theta}{4k^2n^2+6k^2n-a_2+2k^2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} 4\left(1+k^2\right)n(n-1)+8n\left(1+k^2\right)+k^2+1+b+\dfrac{\theta^2}{4k^2n^2+6k^2n-a_2+2k^2}=\Lambda(i') \\ 4\left(k^2+1\right)n(n-1)+4n\left(1+2k^2\right)n+k^2-b=\Lambda(ii') \end{cases}$$

Les deuxièmes membres des relations (i')et (ii')sont égaux, d'où l'égalité des premiers membres.

$$4\left(1+k^2\right)n(n-1)+8n\left(1+k^2\right)+k^2+1+b+\frac{\theta^2}{4k^2n^2+6k^2n-a_2+2k^2}=4\left(k^2+1\right)n(n-1)+4n\left(1+2k^2\right)n+k^2-b$$

$$\Leftrightarrow\left(4+4k^2\right)\left(n^2-n\right)+8nk^2+8n+k^2+1+b+\frac{\theta^2}{4k^2n^2+6k^2n-a_2+2k^2}=4n^2k^2-4k^2n+4n^2-4n+4n+8nk^2+k^2-b$$

$$2b=\frac{-\theta^2}{4k^2n^2+6k^2n-a_2+2k^2}-4n-1$$

On trouve finalement que

$$b=\frac{-\theta^2-16k^2n^3-28k^2n^2-14k^2n-2k^2+a_2(4n+1)}{2\left(4k^2n^2+6k^2n-a_2+2k^2\right)} \quad (2.29)$$

La relation (2.29) exprime la troisième condition de résolubilité partielle du hamiltonien $\tilde{H}$.

Donc, en se référant aux trois conditions de résolubilité partielle données par les relations (2.27), (2.28) et (2.29), on peut conclure que l'opérateur $\tilde{H}$ (ici H) est partiellement algébrique. En d'autres mots, une partie du spectre de l'opérateur $\tilde{H}$ peut être calculée en utilisant des méthodes algébriques.

II.4.2. 2ème : $\delta = 2$

Considérons également le hamiltonien H donné par la relation (2.3).

La transformation de jauge nous donne :

$$\tilde{H}(z) = r^{-1}H(z)r\,,\ \tilde{H}(z) = \begin{pmatrix} \tilde{H}_{11} & \tilde{H}_{21} \\ \tilde{H}_{21} & \tilde{H}_{22} \end{pmatrix} \quad (2.30)$$

Pour notre cas $r = \begin{pmatrix} cn & 0 \\ 0 & sncndn \end{pmatrix}$

En utilisant le même raisonnement que pour le cas du calcul de h^{-1}, on trouve :

$$r^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{cn} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{sncndn} \end{pmatrix}$$

Calculons le hamiltonien $\tilde{H}(z)$ comme précédemment.

$$\tilde{H}(z) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{cn} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{sncndn} \end{pmatrix} H(z) \begin{pmatrix} cn & 0 \\ 0 & sncndn \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\dfrac{cn''}{cn} - \dfrac{2cn'}{cn}\dfrac{d}{dz} - \dfrac{d^2}{dz^2} + a_1 sn^2 + b & \theta\, sn^2 dn^2 \\ \theta & -\dfrac{(sncndn)''}{sncndn} - \dfrac{2(sncndn)'}{sncndn}\dfrac{d}{dz} - \dfrac{d^2}{dz^2} + a_2 sn^2 - b \end{pmatrix}$$

D'où, d'après les relations (2.28):

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{11} &= -\frac{cn''}{cn} - \frac{2cn'}{cn}\frac{d}{dz} - \frac{d^2}{dz^2} + a_1 sn^2 + b \\ \tilde{H}_{12} &= \theta\, sn^2 dn^2 \\ \tilde{H}_{21} &= \theta \\ \tilde{H}_{22} &= -\frac{d^2}{dz^2} - \frac{(sncndn)''}{sncndn} - \frac{2(sncndn)'}{sncndn}\frac{d}{dz} + a_2 sn^2 - b \end{aligned} \quad (2.31)$$

Or, $r = \begin{pmatrix} cn & 0 \\ 0 & sncndn \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix}$,

On obtient les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{11} &= -\frac{d^2}{dz^2} - \frac{2r_1'}{r_1}\frac{d}{dz} - \frac{r_1''}{r_1} + a_1 sn^2 + b \\ \tilde{H}_{12} &= \theta\, sn^2 dn^2 \\ \tilde{H}_{21} &= \theta \\ \tilde{H}_{22} &= -\frac{d^2}{dz^2} - \frac{2r_2'}{r_2}\frac{d}{dz} - \frac{r_2''}{r_2} + a_2 sn^2 - b \end{aligned} \qquad (2.32)$$

En se référant égalementaux relations trigonométriques données par les expressions (1.36), (1.58), le second et le troisième terme de l'opérateur $\tilde{H}_{11}$ pour $r_1 = cn$ sont exprimés comme suit :

$$\frac{2r_1'}{r_1}\frac{d}{dz} = \frac{2r_1'}{r_1}(2sncndn)\frac{d}{dt} = -4t(1-k^2t)\frac{d}{dt} \quad (2.33)$$

$$\frac{r_1''}{r_1} = \frac{cn'}{cn} = \frac{(-sndn)'}{cn} = -1 + 2k^2t \quad (2.34)$$

De même pour $r_2 = sncndn$, les mêmes expressions (1.41), (1.64) permettent d'exprimer le deuxième et le troisième terme de l'opérateur $\tilde{H}_{22}$ comme suit :

$$\frac{2r_2'}{r_2}\frac{d}{dz} = \frac{2r_2'}{r_2}(2sncndn)\frac{d}{dt} = (12k^2t^2 - 8k^2t - 8t + 4)\frac{d}{dt} \quad (2.35)$$

$$\frac{r_2''}{r_2} = \frac{(sncndn)''}{sncndn} = 12k^2t - 4(1+k^2) \quad (2.34)$$

En remplaçant les expressions (2.33), (2.34), (2.35) et (2.36) dans la relation (2.32) et tenant compte du changement de variable $t = sn^2(k,z)$, on obtient les équations de la forme

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{11} &= -4t(1-t)(1-k^2t)\frac{d^2}{dt^2} - 2\left[3k^2t^2 - 2(1+k^2)t + 1\right]\frac{d}{dt} + 4t(1-k^2t)\frac{d}{dt} + 1 - 2k^2t + a_1t + b \\ &= -4t(1-t)(1-k^2t)\frac{d^2}{dt^2} + (-10k^2t^2 + 4k^2t + 8t - 2)\frac{d}{dt} + 1 - 2k^2t + a_1t + b \\ \tilde{H}_{12} &= \theta\, t(1-k^2t) \\ \tilde{H}_{21} &= \theta \\ \tilde{H}_{22} &= -4t(1-t)(1-k^2t)\frac{d^2}{dt^2} - 2\left[3k^2t^2 - 2(1+k^2)t + 1\right]\frac{d}{dt} - (12k^2t^2 - 8k^2t - 8t + 4)\frac{d}{dt} - 12k^2t + 4(1+k^2) + a_2t - b \end{aligned} \qquad (2.35)$$

$$= -4t(1-t)(1-k^2t)\frac{d^2}{dt^2} + \left[-18k^2t^2 + 12k^2t + 12t - 6\right]\frac{d}{dt} - 12k^2t + 4(1+k^2) + a_2t - b$$

En développant les deuxièmes membres des relations (2.33), on a:

$$\begin{aligned}
\tilde{H}_{11} &= -4k^2t^3\frac{d^2}{dt^2} + 4(1+k^2)t^2\frac{d^2}{dt^2} - 4t\frac{d^2}{dt^2} - 10k^2t^2\frac{d}{dt} + 4k^2t\frac{d}{dt} + 8t\frac{d}{dt} - 2\frac{d}{dt} + (a_1 - 2k^2)t + 1 + b \\
\tilde{H}_{12} &= \theta t - \theta k^2t^2 \\
\tilde{H}_{21} &= \theta \\
\tilde{H}_{22} &= = -4k^2t^3\frac{d^2}{dt^2} + 4(1+k^2)t^2\frac{d^2}{dt^2} - 4t\frac{d^2}{dt^2} - 18k^2t^2\frac{d}{dt} + 12(1+k^2)t\frac{d}{dt} - 6\frac{d}{dt} + (a_2 - 12k^2)t + 4(1+k^2) - b
\end{aligned} \qquad (2.36)$$

La décomposition du hamiltonien $\tilde{H}$ de Jauge donne:

$$\tilde{H} = \tilde{H}_1 + \tilde{H}_0 + \tilde{H}_{-1}$$

Des relations (3.33), on tire les composantes de $\tilde{H}$ comme suit :

$$\tilde{\mathrm{H}}_1 = \begin{pmatrix} -4k^2t^3\frac{d^2}{dt^2} - 10k^2t^2\frac{d}{dt} + (a_1 - 2k^2)t & -\theta k^2t^2 \\ \theta & -4k^2t^3\frac{d^2}{dt^2} - 18k^2t^2\frac{d}{dt} + (a_2 - 12k^2)t \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\mathrm{H}}_0 = \begin{pmatrix} 4(1+k^2)t^2\frac{d^2}{dt^2} + 4(2+k^2)t\frac{d}{dt} + 1 + b & \theta t \\ 0 & 4(k^2+1)t^2\frac{d^2}{dt^2} + 12(1+k^2)t\frac{d}{dt} + 4(1+k^2) - b \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\mathrm{H}}_{-1} = \begin{pmatrix} -4t\frac{d^2}{dt^2} - 2\frac{d}{dt} & \theta \\ 0 & -4t\frac{d^2}{dt^2} - 6\frac{d}{dt} \end{pmatrix} \qquad (2.37)$$

II.4.2.1.Détermination des matrices M_1, $\tilde{M}_1$ et M_0

Les opérateurs donnés par les relations (2.37) sont respectivement des opérateurs matriciels qui augmente, conserve et réduit le degré du vecteur générique donné par la relation (2.16).

Comme $\delta = 2$, la fonction d'onde ψ s'écrit comme suit :

$$\psi = \begin{pmatrix} \alpha_0t^n + \alpha_1t^{n-1} + \ldots \\ \beta_0t^{n-1} + \beta_1t^{n-2} + \ldots \end{pmatrix}$$

En procédant de la même manière que précédemment, ces trois matrices s'obtiennent comme suit :

$$\tilde{H}_1\begin{pmatrix}\alpha_0 t^n\\ \beta_0 t^{n-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4k^2t^3\frac{d^2}{dt^2}-10k^2t^2\frac{d}{dt}+\left(a_1-2k^2\right)t & -\theta k^2t^2\\ \theta & -4k^2t^3\frac{d^2}{dt^2}-18k^2t^2\frac{d}{dt}+\left(a_2-12k^2\right)t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_0 t^n\\ \beta_0 t^{n-1}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-4k^2t^3\frac{d^2}{dt^2}\left(\alpha_0 t^n\right)-10k^2t^2\frac{d}{dt}\left(\alpha_0 t^n\right)+\left(a_1-2k^2\right)t\left(\alpha_0 t^n\right)-\theta k^2t^2\left(\beta_0 t^{n-1}\right)\\ \theta\alpha_0 t^n-4k^2t^3\frac{d^2}{dt^2}\left(\beta_0 t^{n-1}\right)-18k^2t^2\frac{d}{dt}\left(\beta_0 t^{n-1}\right)+\left(a_2-12k^2\right)t\left(\beta_0 t^{n-1}\right)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-4k^2\alpha_0 n(n-1)t^3t^{n-2}-10k^2\alpha_0 nt^2t^{n-1}+\left(a_1-2k^2\right)\alpha_0 t^{n+1}-\theta k^2\beta_0 t^{n-1}t^2\\ \theta\alpha_0 t^n-4k^2\beta_0(n-1)(n-2)t^3t^{n-3}-18k^2\beta_0(n-1)t^2t^{n-2}+\left(a_2-12k^2\right)\beta_0 t^n\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-4k^2\alpha_0 n(n-1)t^{n+1}-10k^2\alpha_0 nt^{n+1}+\left(a_1-2k^2\right)\alpha_0 t^{n+1}-\theta k^2\beta_0 t^{n+1}\\ \theta\alpha_0 t^n-4k^2\beta_0(n-1)(n-2)t^n-18k^2\beta_0(n-1)t^n+\left(a_2-12k^2\right)\beta_0 t^n\end{pmatrix}$$

$$=diag\left(t^{n+1},t^n\right)\begin{pmatrix}-4k^2n(n-1)-10k^2n+a_1-2k^2 & -\theta k^2\\ \theta & -4k^2(n-1)(n-2)-18k^2(n-1)+a_2-12k^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_0\\ \beta_0\end{pmatrix}$$

$$M_1=\begin{pmatrix}-4k^2n(n-1)-10k^2n+a_1-2k^2 & -\theta k^2\\ \theta & -4k^2(n-1)(n-2)-18k^2(n-1)+a_2-12k^2\end{pmatrix}\qquad(2.38)$$

$$\tilde{H}_1=\begin{pmatrix}\alpha_1 t^{n-1}\\ \beta_1 t^{n-2}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-4k^2t^3\frac{d^2}{dt^2}-10k^2t^2\frac{d}{dt}+\left(a_1-2k^2\right)t & -\theta k^2t^2\\ \theta & -4k^2t^3\frac{d^2}{dt^2}-18k^2t^2\frac{d}{dt}+\left(a_2-12k^2\right)t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1 t^{n-1}\\ \beta_1 t^{n-2}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-4k^2t^3\frac{d^2}{dt^2}\left(\alpha_1 t^{n-1}\right)-10k^2t^2\frac{d}{dt}\left(\alpha_1 t^{n-1}\right)+ & -\theta k^2t^2\left(\beta_1 t^{n-2}\right)\\ \left(a_1-2k^2\right)t\left(\alpha_1 t^{n-1}\right) & \\ \theta & -4k^2t^3\frac{d^2}{dt^2}\left(\beta_1 t^{n-2}\right)-18k^2t^2\frac{d}{dt}\left(\beta_1 t^{n-2}\right)\\ & +\left(a_2-12k^2\right)t\left(\beta_1 t^{n-2}\right)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-4k^2\alpha_1(n-1)(n-2)t^3t^{n-3}-10k^2\alpha_1(n-1)t^{n-2}t^2+\left(a_1-2k^2\right)\alpha_1 t^n-\theta k^2t^n\\ \theta\alpha_1 t^{n-1}-4k^2\beta_1(n-2)(n-3)t^3t^{n-4}-18k^2\beta_1(n-2)t^2t^{n-3}+\left(a_2-12k^2\right)\beta_1 t^{n-1}\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -4k^2\alpha_1(n-1)(n-2)t^n - 10k^2\alpha_1(n-1)t^n + \left(a_1 - 2k^2\right)\alpha_1 t^n - \theta k^2 t^n \\ \theta\alpha_1 t^{n-1} - 4k^2\beta_1(n-2)(n-3)t^3 t^{n-1} - 18k^2\beta_1(n-2)t^{n-1} + \left(a_2 - 12k^2\right)\beta_1 t^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$= diag\left(t^n, t^{n-1}\right)\begin{pmatrix} -4k^2(n-1)(n-2) - 10k^2(n-1) & -\theta k^2 \\ +a_1 - 2k^2 & \\ \theta & -4k^2(n-2)(n-3) - 18k^2(n-2) \\ & +a_2 - 12k^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix}$$

où :

$$\tilde{M}_1 = \begin{pmatrix} -4k^2(n-1)(n-2) - 10k^2(n-1) + a_1 - 2k^2 & -\theta k^2 \\ \theta & -4k^2(n-2)(n-3) - 18k^2(n-2) + a_2 - 12k^2 \end{pmatrix} \qquad (2.39)$$

$$\tilde{H}_0\begin{pmatrix} \alpha_0 t^n \\ \beta_0 t^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\left(1+k^2\right)t^2\frac{d^2}{dt^2} + 4\left(2+k^2\right)t\frac{d}{dt} + 1 + b & \theta t \\ 0 & 4\left(1+k^2\right)t^2\frac{d^2}{dt^2} + 12\left(1+k^2\right)t\frac{d}{dt} + 4\left(1+k^2\right) - b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_0 t^n \\ \beta_0 t^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4\left(1+k^2\right)t^2\frac{d^2}{dt^2}\left(\alpha_0 t^n\right) + 4\left(2+k^2\right)t\frac{d}{dt}\left(\alpha_0 t^n\right) + (1+b)\alpha_0 t^n + \theta t\beta_0 t^{n-1} \\ 4\left(k^2+1\right)t^2\frac{d^2}{dt^2}\left(\beta_0 t^{n-1}\right) + 12\left(1+k^2\right)t\frac{d}{dt}\left(\beta_0 t^{n-1}\right) + \left[4\left(1+k^2\right) - b\right]\beta_0 t^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4\left(1+k^2\right)n(n-1)t^2 t^{n-2} + 4\left(2+k^2\right)n\alpha_0 t t^{n-1} + (1+b)\alpha_0 t^n + \theta\beta_0 t^n \\ 4\left(k^2+1\right)(n-1)(n-2)\beta_0 t^2 t^{n-3} + 12\left(1+k^2\right)(n-1)\beta_0 t t^{n-2} + \left[4\left(1+k^2\right) - b\right]\beta_0 t^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4\left(1+k^2\right)n(n-1)\alpha_0 t^n + 4\left(2+k^2\right)n\alpha_0 t^n + (1+b)\alpha_0 t^n + \theta\beta_0 t^n \\ 4\left(k^2+1\right)(n-1)(n-2)\beta_0 t^{n-1} + 12\left(1+k^2\right)(n-1)\beta_0 t^{n-1} + \left[4\left(1+k^2\right) - b\right]\beta_0 t^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$= diag\left(t^n, t^{n-1}\right)$$

$$\begin{pmatrix} 4\left(1+k^2\right)n(n-1) + 4n\left(2+k^2\right) + 1 + b & \theta \\ 0 & 4\left(k^2+1\right)(n-1)(n-2) + 12\left(1+k^2\right)(n-1) + 4\left(1+k^2\right) - b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \end{pmatrix}$$

$$M_0 = \begin{pmatrix} 4\left(1+k^2\right)n(n-1) + 4n\left(2+k^2\right) + 1 + b + k^2 & \theta \\ 0 & 4\left(k^2+1\right)(n-1)(n-2) + 12\left(1+k^2\right)(n-1) + 4\left(1+k^2\right) - b \end{pmatrix}$$

(2.40)

II.4.2.2. Les trois conditions de résolubilité partielle du hamiltonien de jauge $\tilde{H}$

Comme pour le premier cas, la première condition de résolubilité partielle du hamiltonien deJauge $\tilde{H}$ est donnée par la relation :

$$M_1\begin{pmatrix}\alpha_0\\ \beta_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

Cette expression est équivalente à:

$$\det M_1=0$$

$$\Rightarrow\begin{vmatrix}-4k^2n(n-1)-10k^2n+a_1-2k^2 & -\theta k^2\\ \theta & -4k^2(n-1)(n-2)-18k^2(n-1)+a_2-12k^2\end{vmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow\left[-4k^2n(n-1)-10k^2n+a_1-2k^2\right]\left[-4k^2(n-1)(n-2)-18k^2(n-1)+a_2-12k^2\right]+\theta^2k^2=0$$

$$\Leftrightarrow\left[-4k^2(n^2-n)-10k^2n+a_1-2k^2\right]\left[-4k^2(n^2-2n-n+2)-18k^2n+18k^2+a_2-12k^2\right]+\theta^2k^2=0$$

$$\Leftrightarrow\left(-4k^2n^2+4k^2n-10k^2n+a_1-2k^2\right)\left(-4k^2n^2+12k^2n-8k^2-18k^2n+18k^2+a_2-12k^2\right)+\theta^2k^2=0$$

$$\Leftrightarrow\left(-4k^2n^2-6k^2n+a_1-2k^2\right)\left(-4k^2n^2-6k^2n+a_2-2k^2\right)+\theta^2k^2=0$$

$$\Leftrightarrow 16k^4n^4+24k^4n^3-4k^2n^2a_2+8k^4n^2+24k^4n^3+36k^4n^2-6k^2na_2+12k^4n-4k^2n^2a_1-6k^2na_1+a_1a_2-2k^2a_1+8k^4n^2+12k^4n-2k^2a_2+4k^4+\theta^2k^2=0$$

$$\Leftrightarrow\theta^2k^2=-16k^4n^4-48k^4n^3-a_1a_2-52k^4n^2-24k^4n-4k^4+4k^2n^2(a_1+a_2)+6k^2n(a_1+a_2)+2k^2(a_1+a_2)$$

$$\Leftrightarrow\theta^2k^2=\left[4k^2n^2+6k^2n+2k^2\right](a_1+a_2)-a_1a_2-16k^4n^4-48k^4n^3-52k^4n^2-24k^4n-4k^4$$

$$\Leftrightarrow\theta^2=\frac{\left[4k^2n^2+6k^2n+2k^2\right](a_1+a_2)-a_1a_2-16k^4n^4-48k^4n^3-52k^4n^2-24k^4n-4k^4}{k^2}$$

Après simplification, on obtient l'expression suivante :

$$\theta^2=-(16n^4+48n^3+52n^2+16n)k^2-2n(3a_1+a_2)-2(a_1+a_2)+4k^2+\frac{a_1a_2}{k^2}\qquad(2.41)$$

La relation (2.41) constitue la première condition de résolubilité partielle du hamiltonien $\tilde{H}$.

La deuxième relation de résolubilité partielle de $\tilde{H}$ est obtenue comme suit :

$$\tilde{M}_1^t\begin{pmatrix}-\beta_0\\ \alpha_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\text{dét}\,\tilde{M}_1=0$$

$$\Rightarrow$$

$$\begin{vmatrix}-4k^2(n-1)(n-2)-10k^2(n-1)+a_1-2k^2 & -\theta k^2\\ \theta & -4k^2(n-2)(n-3)-18k^2(n-2)+a_2-12k^2\end{vmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow\left[-4k^2(n-1)(n-2)-10k^2(n-1)+a_1-2k^2\right]\left[-4k^2(n-2)(n-3)-18k^2(n-2)+a_2-12k^2\right]+\theta^2k^2=0$$

$$\Leftrightarrow\left[-4k^2(n^2-2n-n+2)-10k^2n+10k^2+a_1-2k^2\right]\left[-4k^2(n^2-3n-2n+6)-18k^2n+36k^2+a_2-12k^2\right]+\theta^2k^2=0$$

$$\Leftrightarrow \left[-4k^2n^2+12k^2n-8k^2-10k^2n+10k^2+a_1-2k^2\right]\left[-4k^2n^2+20k^2n+24k^2-18k^2n+36k^2+a_2-12k^2\right]$$
$$+\theta^2k^2=0$$

$$\Leftrightarrow \left[-4k^2n^2+2k^2n+a_1\right]\left[-4k^2n^2+2k^2n+a_2\right]+\theta^2k^2=0$$
$$\Leftrightarrow 16k^4n^4-8k^4n^3-4k^2n^2a_2-8k^2n^3+4k^4n^2+2k^2na_2-4k^2n^2a_1+2k^2na_1+a_1a_2+\theta^2k^2=0$$
$$\Leftrightarrow 16k^4n^4-16k^4n^3+4k^4n^2-4k^2n^2(a_1+a_2)+2k^2n(a_1+a_2)+a_1a_2+\theta^2k^2=0$$

En remplaçant θ^2k^2 par son expression, on a :

$$\Leftrightarrow 16k^4n^4-16k^4n^3+4k^4n^2-4k^2n^2(a_1+a_2)+2k^2n(a_1+a_2)+a_1a_2-16k^4n^4-48k^4n^3-52k^4n^2$$
$$+4k^2n^2(a_1+a_2)+6k^2n(a_1+a_2)-a_1a_2-4k^4-24k^4n+2k^2(a_1+a_2)=0$$

$$\Leftrightarrow -64k^4n^3-48k^4n^2+8k^2n(a_1+a_2)-4k^4+2k^2a_1+2k^2a_2-24k^4n=0$$
$$\Leftrightarrow -64k^4n^3-48k^4n^2-24k^4n-4k^4+8k^2na_1+8k^2na_2+2k^2a_1+2k^2a_2=0$$

En mettant en évidence $2k^2$, on obtient :

$$-32k^2n^3-24k^2n^2-12k^2n-2k^2+4na_1+4na_2+a_1+a_2=0$$
$$\Leftrightarrow -32k^2n^3-24k^2n^2-12k^2n-2k^2+a_1(4n+1)+a_2(4n+1)=0$$
$$a_1(4n+1)=32k^2n^3+24k^2n^2+12k^2n+2k^2-a_2(4n+1)$$

D'où :

$$a_1=\frac{32k^2n^3+24k^2n^2+12k^2n+2k^2-a_2(4n+1)}{(4n+1)} \qquad (2.42)$$

Enfin, la troisième condition de résolubilité partielle du hamiltonien $\tilde{H}$ est obtenue comme suit :

$$M_0\begin{pmatrix}1\\ \frac{\beta_0}{\alpha_0}\end{pmatrix}=\Lambda\begin{pmatrix}1\\ \frac{\beta_0}{\alpha_0}\end{pmatrix}$$

Calculons d'abord $\frac{\beta_0}{\alpha_0}$

$$M_1\begin{pmatrix}\alpha_0\\ \beta_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$M_1\begin{pmatrix}\alpha_0\\ \beta_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4k^2n(n-1)-10k^2n+a_1-2k^2 & -\theta k^2\\ \theta & -4k^2(n-1)(n-2)-18k^2(n-1)+a_2-12k^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_0\\ \beta_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

On obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \left[-4k^2n(n-1)-10k^2n+a_1-2k^2\right]\alpha_0-\theta k^2\beta_0=0 & \text{(a)} \\ \theta\alpha_0+\left[-4k^2(n-1)(n-2)-18k^2(n-1)+a_2-12k^2\right]\beta_0=0 & \text{(b)} \end{cases}$$

De la relation (a), on a :

$$\left[-4k^2n(n-1)-10k^2n+a_1-2k^2\right]\alpha_0=\theta k^2\beta_0$$

$$\frac{\beta_0}{\alpha_0}=\frac{-4k^2n(n-1)-10k^2n+a_1-2k^2}{\theta k^2}$$

$$=\frac{-4k^2\left(n^2-n\right)-10k^2n+a_1-2k^2}{\theta k^2}$$

$$=\frac{-4k^2n^2+4k^2n-10k^2n+a_1-2k^2}{\theta k^2}$$

$$\frac{\beta_0}{\alpha_0}=\frac{-4k^2n^2-6k^2n+a_1-2k^2}{\theta k^2}$$

$$M_0\begin{pmatrix}1\\ \frac{\beta_0}{\alpha_0}\end{pmatrix}=M_0\left(\frac{1}{\frac{-4k^2n^2-6k^2n+a_1-2k^2}{\theta k^2}}\right)=\Lambda\left(\frac{1}{\frac{-4k^2n^2-6k^2n+a_1-2k^2}{\theta k^2}}\right)$$

En remplaçant M_0 par son expression, on a:

$$\begin{pmatrix} 4\left(1+k^2\right)n(n-1)+4n\left(2+k^2\right)+1+b & \theta \\ 0 & 4\left(k^2+1\right)(n-1)(n-2)+12\left(1+k^2\right)(n-1)+4\left(1+k^2\right)-b \end{pmatrix}$$

$$\left(\frac{1}{\frac{-4k^2n^2-6k^2n+a_1-2k^2}{\theta k^2}}\right)=\Lambda\left(\frac{1}{\frac{-4k^2n^2-6k^2n+a_1-2k^2}{\theta k^2}}\right)$$

On obtient le système suivant :

$$\begin{cases} 4\left(1+k^2\right)n(n-1)+4n\left(2+k^2\right)+1+b+\dfrac{-4k^2n^2-6k^2n+a_1-2k^2}{k^2}=\Lambda \\ \left[4\left(k^2+1\right)(n-1)(n-2)+12\left(1+k^2\right)(n-1)+4\left(1+k^2\right)-b\right]\dfrac{-4k^2n^2-6k^2n+a_1-2k^2}{\theta k^2} \\ =\Lambda\dfrac{-4k^2n^2-6k^2n+a_1-2k^2}{\theta k^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(4+4k^2\right)\left(n^2-n\right)+\left(8n+4nk^2\right)+1+b+\dfrac{-4k^2n^2-6k^2n+a_1-2k^2}{k^2}=\Lambda & (a') \\ \left(4k^2+4\right)\left(n^2-2n-n+2\right)+\left(12+12k^2\right)(n-1)+4+4k^2-b=\Lambda & (b') \end{cases}$$

Les relations (a') et (b')ont des deuxièmes membres identiques.

Donc :

$$\left(4+4k^2\right)\left(n^2-n\right)+8n+4nk^2+1+b+\frac{-4k^2n^2-6k^2n+a_1-2k^2}{k^2}=\left(4+4k^2\right)\left(n^2-3n+2\right)+12n$$

$$-12+12k^2n-12k^2+4k^2+4-b$$

$$\Leftrightarrow 4n^2-4n+4k^2n^2-4nk^2+8n+4nk^2+1+b+\frac{-4k^2n^2-6k^2n+a_1-2k^2}{k^2}=4n^2-12n+8+4k^2n^2$$

$$-12k^2n+8k^2+12n-12+12k^2n-12k^2+4k^2+4-b$$

$$\Leftrightarrow 4n^2-4n+4k^2n^2+8n+1+b+\frac{-4k^2n^2-6k^2n+a_1-2k^2}{k^2}=4n^2+4k^2n^2-b$$

$$\Leftrightarrow 4n+1+2b+\frac{-4k^2n^2-6k^2n+a_1-2k^2}{k^2}=0$$

$$\Leftrightarrow 2b=\frac{4k^2n^2+6k^2n-a_1+2k^2-\left(4n+1\right)k^2}{k^2}=0$$

$$=\frac{4k^2n^2+6k^2n-a_1+2k^2-4k^2n-k^2}{k^2}$$

$$=\frac{4k^2n^2+2k^2n+k^2-a_1}{k^2}$$

$$b=\frac{4k^2n^2+2k^2n+k^2-a_1}{2k^2}\ (2.43)$$

La relation (2.43) constitue la troisième condition de résolubilité partielle du hamiltonien $\tilde{H}$

CHAPITREIII : QUELQUES APPLICATIONS DES FONCTIONS ELLIPTIQUES DE JACOBI EN PHYSIQUE

Les fonctions elliptiques de Jacobi sont plus souvent utilisées dans des situations pratiques que les fonctions elliptiques de Weierstrass car elles ne nécessitent pas de notions d'analyse complexe pour être définies et/ou comprises. Les applications des fonctions elliptiques de Jacobi dans divers domaines de la physique sont nombreuses. Dans le présent travail, on traite certaines situations comme la résolution de l'équation différentielle du mouvement d'un pendule simple pour des oscillations de grande amplitude, le mouvement à la Poinsot d'un solide, la propagation des ondes de surface appelées ondes cnoïdales et l'étude des propriétés de la spirale sphérique de Seiffert.

III.1. Le pendule simple

III.1.1.Quelques rappels importants sur le pendule simple

III.1.1.1.Définition

Le pendule simple est le modèle de pendule pesant le plus simple constitué d'une masse ponctuelle fixée à l'extrémité d'un fil de masse négligeable, inextensible et sans raideur, oscillant sous l'effet de la pesanteur. Le fil inextensible peut être remplacé par une tige de masse nulle pouvant tourner sans frottements dans un plan vertical autour de son extrémité [30].

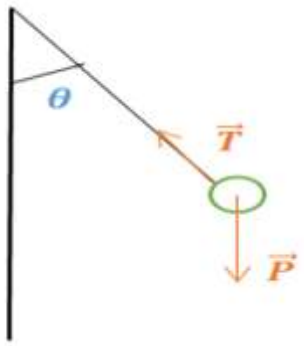


Fig.3. Un pendule simple écarté de sa position d'équilibre d'un angle θ.

III.1.1.2. Différentes techniques pour établir l'équation différentielle du mouvement

Pour établir l'équation du mouvement d'un pendule simple, on peut utiliser trois théories à savoir la théorie de Newton, la théorie de Lagrange et la théorie de Hamilton. Ces trois formalismes vont nous conduire absolument au même résultat.

III.1.1.2.1. Le formalisme newtonien

Lorsqu'on écarte le pendule de sa position d'équilibre et qu'on le libère sans vitesse initiale, on remarque qu'il effectue un mouvement oscillatoire, c'est-à-dire un mouvement de va et vient autour de sa position d'équilibre [31, 32, 33].

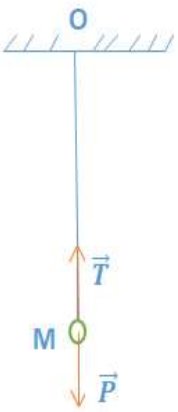


Fig.4 Un pendule simple à l'équilibre

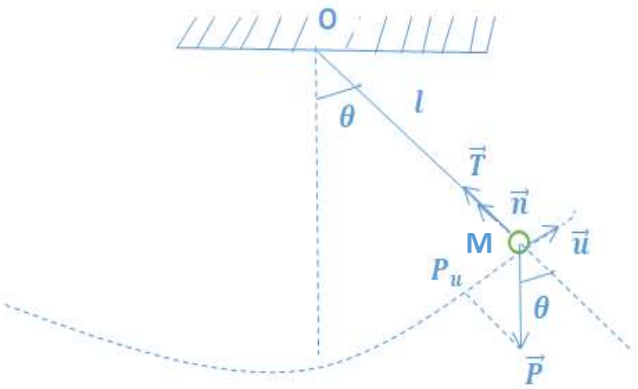


Fig.5. L'état de mouvement d'un pendule simple

En appliquant la relation fondamentale de la dynamique sur un pendule simple en mouvement, on a la relation :

$$\vec{P}+\vec{T}=m\vec{a}_M \quad (3.1)$$

La projection de la relation vectorielle (3.1) sur l'axe $(M,\vec{u})$ du repère de Frenet donne :

$$-P_u+T_u=ma_u \quad (3.2)$$

Or, $T_u=0$ car la tension $\vec{T}$ du fil est perpendiculaire au vecteur unitaire $\vec{u}$. En plus, en tenant compte du triangle rectangle MPP_u, on trouve la relation :

$$-mg\sin\theta=ma_u \quad (3.3)$$

Le point matériel effectue un mouvement oscillatoire circulaire de rayon l, donc la vitesse linéaire v a pour expression :

$v = l\dot{\theta}$ (3.4)

La composante tangentielle a_u du vecteur accélération a pour expression :

$$a_u = \frac{dv}{dt} = l\ddot{\theta} \quad (3.5)$$

En substituant la relation (3.5) dans la relation (3.3), après simplification on obtient la relation suivante :

$$l\ddot{\theta} + g\sin\theta = 0 \quad (3.6)$$

Finalement, on a la relation

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0 \quad (3.7)$$

L'équation (3.7) est l'équation différentielle qui détermine les oscillations du pendule simple. Cette équation différentielle, dont le second membre comporte $\sin\theta$ et non θ, n'admet pas comme solution $\theta(t)$ une fonction sinusoïdale.

Pour les faibles oscillations, c'est -à-dire $\theta \prec 10^{\circ}$, à condition que l'angle soit exprimé en radians, on peut confondre $\sin\theta$ et θ. Dans ces conditions l'équation (3.7) devient :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0 \quad (3.8)$$

La solution $\theta = f(t)$ de l'équation différentielle (3.8) est sous la forme :

$$\theta = \theta_m \cos(\omega t + \varphi) \quad (3.9)$$

θ_m est l'amplitude du mouvement.

La vitesse angulaire et l'accélération angulaire sont données respectivement par les expressions suivantes :

$$\dot{\theta} = -\theta_m \omega \sin(\omega t + \varphi)$$
$$\ddot{\theta} = -\theta_m \omega^2 \cos(\omega t + \varphi)$$

$$= -\omega^2\theta \quad (3.10)$$

En remplaçant $\ddot{\theta}$ par son expression, la relation (3.8) prend la forme

$$-\omega^2\theta+\frac{g}{l}\theta=0 \quad (3.11)$$

De la relation (3.11), on tire les expressions de la pulsation propre et de la période propre du mouvement du pendule simple qui sont respectivement données par

$$\omega_0=\sqrt{\frac{g}{l}}$$
$$T_0=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad (3.12)$$

Pour que la relation (3.9) soit la solution de l'équation différentielle (3.8), il faut la valeur de la pulsation propre ω_0 donnée par la relation (3.12). La période propre du pendule simple dépend de la longueur l du pendule et de l'intensité de la pesanteur g .

III.1.1.2.2 Le formalisme de Lagrange

Les paramètres de configuration sont θ et r car le mouvement se fait dans un plan. Les liaisons ou contraintes : $r=l=cte$ où l est la longueur du fil. Le nombre de ddl est $N=2-1$ c'est-à-dire le nombre de paramètres de configuration moins le nombre de liaisons. Si θ ne varie pas le système n'évolue plus c'est-à-dire qu'il n'y a pas de mouvement. Donc on va choisir θ comme coordonnée généralisée.

Le lagrangien est généralement défini par la différence entre l'énergie cinétique $E_c=T$ et de l'énergie potentielle $E_p=V$ [33,34] :

$$L=T-V \quad (3.13)$$

L'énergie cinétique et l'énergie potentielle du système sont respectivement données par les expressions suivantes :

$$T=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$$
$$V=-mgy_M \quad (3.14)$$

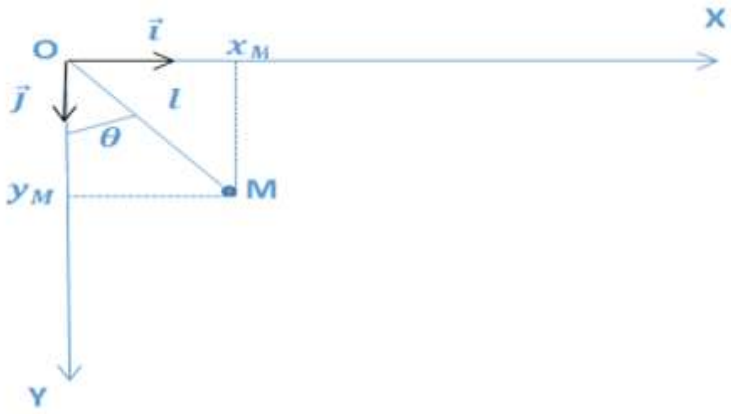


Fig.6. La représentation dans un repère orthonormé du pendule simple en mouvement

Selon la figure 6, l'ordonnée du point matériel M est donnée par la relation suivante :

$$y_M = l\cos\theta \quad (3.15)$$

Donc tenant compte de la relation (3.15) l'expression de l'énergie potentielle du système prend la forme

$$V = -mgl\cos\theta \quad (3.16)$$

Tenant compte également des relations (3.14), (3.15) et (3.16), lagrangien devient alors :

$$L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl\cos\theta \quad (3.17)$$

L'équation d'Euler- Lagrange s'écrit donc :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \quad (3.18)$$

Les différents termes de l'équation d'Euler-Lagrange sont définis comme suit :

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = ml^2\ddot{\theta} \\ &\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mgl\sin\theta \end{aligned} \quad (3.19)$$

En remplaçant les relations (3.19) dans l'expression (3.18), on trouve l'expression

$$ml^2\ddot{\theta} + mgl\sin\theta = 0 \quad (3.20)$$

Après simplification la relation (3.20) prend la forme suivante :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0 \quad (3.21)$$

On retrouve exactement la relation (3.7) du paragraphe précédent qui exprime l'équation différentielle du mouvement du pendule simple.

III.1.1.2.3. Le formalisme de Hamilton

Le hamiltonien H est donné par la relation suivante [31] :

$$H(q_i, p_i, t) = \sum_k^N \dot{q}_k p_k - L \quad (3.22)$$

Les équations qui définissent les coordonnées généralisées sont indépendantes du temps t, alors H est égal à l'énergie totale E du système.

$$H = E = T + V \quad (3.23)$$

Le moment conjugué est donné par l'expression

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta} \quad (3.24)$$

De la relation (3.24), on tire l'expression de la vitesse angulaire comme suit :

$$\dot{\theta} = \frac{p}{ml^2} \quad (3.25)$$

Tenant compte de la relation (3.25), l'expression de l'énergie cinétique du système devient

$$T = \frac{p^2}{2ml^2} \quad (3.26)$$

Les relations (3.16) et (3.26) permettent d'écrire le hamiltonien de la manière suivante :

$$H = \frac{p^2}{2ml^2} - mgl\cos\theta \quad (3.27)$$

Les équations canoniques de Hamilton sont données par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial \theta} = -mgl\sin\theta \\ \dot{\theta} &= \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{ml^2} \end{aligned} \quad (3.28)$$

De la relation (3.24), on tire l'expression suivante :

$$\dot{p} = ml^2\ddot{\theta} \quad (3.29)$$

En comparant les relations (3.28) et (3.29), on obtient facilement l'expression

$$ml^2\ddot{\theta} = -mgl\sin\theta \quad (3.30)$$

Finalement, on retrouve la relation (3.7) de la forme

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

On constate qu'avec les trois techniques développées ci-haut, on trouve absolument la même équation différentielle.

III. 1.2. Résolution de l'équation différentielle du mouvement du pendule simple

La résolution de l'équation différentielle du mouvement du pendule simple n'est étudiée ordinairement que dans le cas de petites oscillations car la résolution dans le cas général n'est pas aisée. Nous allons voir que dans le cas général cette équation est résoluble sous forme explicite au moyen d'intégrales elliptiques, donc sa résolution s'obtient à l'aide des fonctions elliptiques de Jacobi.

Considérons un pendule constitué d'un point matériel suspendu à l'extrémité d'un fil (ou une tige théoriquement sans masse) astreint à se mouvoir sans frottement sur un cercle vertical. On désigne par l la longueur du fil (rayon du cercle), g l'accélération de la pesanteur et θ l'angle instantané que font le fil et la verticale. L'équation du mouvement s'écrit [10,35] :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0 \quad (3.31)$$

Cette équation peut prendre la forme suivante :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{d\theta}{dt}\right) + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

Or, si on pose

$$\alpha = \frac{d\theta}{dt}$$

L'équation (3.31) devient, si on multiplie membre à membre par $d\theta$:

$$\alpha d\alpha + \frac{g}{l}\sin\theta d\theta = 0 \quad (3.32)$$

En intégrant les deux termes du premier membre de l'équation (3.32), on obtient l'équation

$$\frac{\alpha^2}{2} = \frac{g}{l}\cos\theta + C \quad (3.33)$$

Où C est une constante.

Pour déterminer cette constante, notons que lorsque $t = 0$, $\theta = \theta_0$ (angle initial), alors $\alpha = 0$ et par conséquent la vitesse angulaire est nulle, d'où :

$$C = -\frac{g}{l}\cos\theta_0 \quad (3.34)$$

En remplaçant la relation (3.34) dans l'expression (3.33), on obtient :

$$\frac{\alpha^2}{2} = \frac{g}{l}\cos\theta - \frac{g}{l}\cos\theta_0$$

$$= \frac{g}{l}\left(\cos\theta - \cos\theta_0\right)$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{\alpha^2}{2} = \frac{g}{l}\left(\cos\theta - \cos\theta_0\right)$$

D'où la relation de la forme

$$\frac{l}{2g}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \cos\theta - \cos\theta_0 \quad (3.35)$$

Considérons d'abord le cas d'un mouvement oscillatoire, le cas où la masse passe de $\theta = \theta_0$ à $\theta = 0$ .or, selon les formules d'addition de la trigonométrie ordinaire, on a la relation de la forme :

$$\cos\theta = 1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2} \quad (3.36)$$

Par conséquent, la relation (3.35) devient :

$$\frac{l}{2g}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2} - 1 + 2\sin^2\frac{\theta_0}{2}$$

Après simplification, on trouve la relation de la forme

$$\frac{l}{4g}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \sin^2\frac{\theta_0}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2} \quad (3.37)$$

Posons encore

$$\sin\frac{\theta}{2} = \sin\frac{\theta_0}{2}\sin\varphi \quad (3.38)$$

En dérivant membre à membre les termes de la relation (3.38), on obtient

$$\frac{1}{2}\cos\frac{\theta}{2}d\theta = \sin\frac{\theta_0}{2}\cos\varphi d\varphi \quad (3.39)$$

La relation (3.39) est équivalente à la relation suivante :

$$\frac{1}{2}\sqrt{1-\sin^2\frac{\theta}{2}}d\theta = \sin\frac{\theta_0}{2}\sqrt{1-\sin^2\varphi}d\varphi$$

Compte tenu de la relation (3.38), on trouve facilement la relation de la forme

$$\frac{1}{2}\sqrt{1-\sin^2\frac{\theta_0}{2}\sin^2\varphi}d\theta = \sin\frac{\theta_0}{2}\sqrt{1-\sin^2\varphi}d\varphi$$

Par conséquent, on tire l'expression

$$d\theta = \frac{2\sin\frac{\theta_0}{2}\sqrt{1-\sin^2\varphi}}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\theta_0}{2}\sin^2\varphi}}d\varphi \quad (3.40)$$

En remplaçant $d\theta$ par son expression dans la relation (3. 37), on a :

$$\frac{l}{4g}\frac{4\sin^2\frac{\theta_0}{2}\left(1-\sin^2\varphi\right)}{\left(1-\sin^2\frac{\theta_0}{2}\sin^2\varphi\right)}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \sin^2\frac{\theta_0}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}$$

Après simplification des termes semblables, on obtient l'expression suivante :

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{g}{l}\left(1-\sin^2\frac{\theta}{2}\right) = \frac{g}{l}\left(1-\sin^2\frac{\theta_0}{2}\sin^2\varphi\right)$$

Cette relation peut s'écrire sous la forme

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{g}{l}\left(1-k^2\sin^2\varphi\right)$$

Où $k = \sin\frac{\theta_0}{2}$ est le module des fonctions elliptiques et $\frac{\theta_0}{2}$ l'angle modulaire.

Soulignons que pour $\theta = 0$ on a $\varphi = o$ et dès lors

$$t = \pm\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \quad (3.41)$$

On obtient une intégrale elliptique dont la fonction réciproque $\varphi(t)$ est une fonction elliptique de Jacobi.

En effet, on obtient les expressions suivantes :

$$\varphi = \pm am\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right)$$

$$\sin\varphi = \pm\sin\left[am\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right)\right] \quad (3.42)$$

Ce qui nous permet d'écrire

$$\sin\varphi = \pm sn\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right) \quad (3.43)$$

On obtient également en substituant l'équation (3.43) dans la relation (3.38) une expression de la forme :

$$\sin\frac{\theta}{2} = \pm\sin\frac{\theta_0}{2}sn\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right) \quad (3.44)$$

Ensuite, considérons le cas d'un mouvement circulaire. L'équation (3.35) peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{l}{2g}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 1-2\sin^2\frac{\theta}{2}-\cos\theta_0$$

Cette relation peut également prendre la forme

$$\frac{l}{2g}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = (1-\cos\theta_0)\left(1-k^2\sin^2\frac{\theta}{2}\right) \quad (3.45)$$

où $k^2 = \frac{2}{1-\cos\theta_0}$ et $0 \prec k \prec 1$

Avec de la condition initiale $\theta(0) = 0$, on peut obtenir l'expression de la forme [10]

$$dt = \pm\sqrt{\frac{2l}{g(1-\cos\theta_0)}}\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \quad (3.46)$$

où $\varphi = \frac{\theta}{2}$

Tenant compte de l'expression (3.46), on obtient les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}\varphi &= \pm am\left(\sqrt{\frac{g(1-\cos\theta_0)}{2l}}t\right)\\ \theta &= \pm 2am\left(\sqrt{\frac{g(1-\cos\theta_0)}{2l}}t\right)\end{aligned} \quad (3.47)$$

Ce qui nous permet d'écrire que

$$\sin\varphi = \pm\sin\left(am\left(\sqrt{\frac{g(1-\cos\theta_0)}{2l}}t\right)\right) \quad (3.48)$$

La relation (3.48) est équivalente à

$$\sin\varphi = \pm sn\left(\sqrt{\frac{g(1-\cos\theta_0)}{2l}}t\right) \quad (3.49)$$

De plus, on a les expressions suivantes

$$\begin{aligned}\sin\theta &= \pm\sin\left(2am\left(\sqrt{\frac{g(1-\cos\theta_0)}{2l}}t\right)\right)\\ \sin\theta &= \pm sn\left(2\sqrt{\frac{g(1-\cos\theta_0)}{2l}}t\right)\end{aligned} \quad (3.50)$$

Enfin, considérons le cas d'un mouvement asymptotique c'est-à-dire le cas où $\theta_0 = \pm\pi$. La relation (3.35) devient :

$$\frac{l}{2g}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \cos\theta + 1 = 2\cos^2\frac{\theta}{2} \quad (3.51)$$

D'où

$$t = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\theta}\frac{d\theta}{\cos\frac{\theta}{2}}$$

Ce qui donne

$$t = \pm\sqrt{\frac{l}{g}}\ln\tan\left(\frac{\theta}{\pi} + \frac{\pi}{4}\right) \quad (3.52)$$

et

$$\theta = 4\arctan e^{\pm\sqrt{\frac{g}{l}}t} - \pi \quad (3.53)$$

Pour des petites oscillations, l'équation (3.31) prend la forme

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

La période du pendule (le temps nécessaire pour une oscillation complète ; un aller-retour) est alors

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad (3.54)$$

Pour le cas des oscillations de grande amplitude, la période vaut, d'après ce qui précède

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} \quad (3.55)$$

Avec $k = \sin\frac{\theta_0}{2}$

Soulignons également que dans le cas d'un pendule animé d'une vitesse suffisamment grande pour le faire tourner irrégulièrement plusieurs fois sur soi-même, l'équation du mouvement du pendule devient :

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{l^2}(\eta - l + l\cos\theta) \quad (3.56)$$

Où η est une constante homogène à une longueur et strictement supérieure à $2l$.

La solution $\theta(t)$ de l'équation (3.56) s'exprime au moyen de la fonction amplitude de Jacobi sous la forme :

$$\theta = 2am\left(\sqrt{\frac{\eta g}{2l^2}}t, k\right) \quad (3.57)$$

Ici on donne au module de la fonction de Jacobi la valeur $k = \sqrt{\frac{2l}{\eta}}$.

Réciproquement, à partir de la relation (3.57), on peut retrouver facilement l'équation du mouvement du pendule simple, soit la relation (3.56).

En effet, si on calcule la dérivée première par rapport au temps de θ, la relation (3.57) prend la forme

$$\dot{\theta} = 2\sqrt{\frac{\eta g}{2l^2}}dn\left(\sqrt{\frac{\eta g}{2l^2}}t, k\right) \quad (3.58)$$

La relation (2.57) nous permet également d'écrire

$$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sin\left[am\left(\sqrt{\frac{\eta g}{2l^2}}t\right)\right] \quad (3.59)$$

En élevant au carré la relation (2.58) et tenant compte de la relation (2.59), on obtient

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2\eta g}{l^2}dn^2\left(\sqrt{\frac{\eta g}{2l^2}}t, k\right)$$

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2\eta g}{2l^2}\left[1 - k^2 sn^2\left(\sqrt{\frac{\eta g}{2l^2}}t, k\right)\right]$$

$$= \frac{2\eta g}{2l^2}\left[1 - k^2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{2\eta g}{2l^2}\left[1 - \frac{2l}{C}\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{2g}{l^2}\left[\eta - l(1-\cos\theta)\right]$$

Finalement, on trouve l'expression de la forme

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{l^2}\left[\eta - l + l\cos\theta\right]$$

On retrouve exactement la relation (3.56).

III.2. Le mouvement à la Poinsot d'un solide

III.2.1. Définition

Le mouvement à la Poinsot est le mouvement d'un solide dont un point, noté O, est soit fixe dans un référentiel du laboratoire, soit confondu avec le centre de gravité et soumis à des forces localisées en O et dont le moment en O est donc nul et la puissance nulle.

Ce mouvement est caractérisé par la conservation du moment cinétique et de l'énergie cinétique de rotation. Le solide peut être soumis à une résultante des forces extérieures non nulle. C'est elle qui assurera le mouvement du centre d'inertie.

On cite comme exemples ; tout satellite d'un astre, toute planète, tout corps en chute libre à vitesse faible (permettant d'oublier les forces aérodynamiques), etc.

III.2.2.Le mouvement du corps rigide d'Euler

Les équations de mouvement d'Euler-Poinsot du solide autour d'un point fixe, pris comme origine du repère lié au solide, lorsqu'aucune force extérieure n'est appliquée au système, peuvent s'écrire sous la forme [10, 13,36].

$$\begin{aligned}
&\frac{dX}{dt} + (C-B)YZ = 0 \\
&\frac{dY}{dt} + (A-C)XZ = 0 \quad (3.60) \\
&\frac{dZ}{dt} + (B-A)XY = 0
\end{aligned}$$

Où $X\ Y,Z$ sont les composantes du vecteur de rotation instantanée $\vec{\Omega}$ et $A = I_1^{-1}, B = I_2^{-1}, C = I_3^{-1}$ avec I_i les moments d'inertie. Les composantes du moment cinétique $\vec{L}_0$ sont (AX, BY, CZ). L'énergie cinétique de rotation est le demi-produit scalaire du moment cinétique et du vecteur de rotation instantanée. Son expression s'écrit comme suit :

$$E_c = \frac{1}{2}(AX + BY + CZ) \quad (3.61)$$

Le module du vecteur de rotation instantanée s'écrit :

$$\Omega^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 \quad (3.62)$$

On suppose ici que A, B, C sont tous différents de 0 c'est-à- dire que le solide n'est pas réduit à un point et n'est pas non plus concentré sur une droite. Lorsque $A = B = C$, le mouvement se réduit à une simple rotation uniforme d'axe le moment cinétique. Dans ce cas les (3.60) montrent que X, Y, Z sont des constantes. On parle de solide à symétrie sphérique. Supposons par exemple que $A = B$, alors les équations (3.60) deviennent:

$$\begin{aligned} &\frac{dX}{dt} + (C - B)YZ = 0 \\ &\frac{dY}{dt} + (A - C)XZ = 0 \quad (3.63) \\ &\frac{dZ}{dt} = 0 \end{aligned}$$

Dans ce cas Z =constante=c et les deux premières équations de la relation (3.63) prennent la forme

$$\begin{aligned} &\frac{dX}{dt} + c(C - B)Y = 0 \\ &\frac{dY}{dt} + c(A - C)X = 0 \end{aligned} \quad (3.64)$$

On ne parle que le solide est à symétrie de révolution. Ce mouvement est équivalent à celui d'un cône roulant sans glisser sur un autre cône fixe. Le mouvement de la terre est un exemple.

Notons que [10]

$$\frac{d}{dt}(X + iY) = ic(A - C)(X + iY) \quad (3.65)$$

On obtient

$$X + iY = De^{ic(A-C)t} \quad (3.66)$$

Où D est une constante et donc

$$\begin{aligned} X &= D\cos c(A-C)t \\ Y &= D\sin c(A-C)t \end{aligned} \quad (3.67)$$

Dans le cas général où A,B,C sont tous différents, le solide est quelconque. L'intégration des équations d'Euler est délicate par rapport aux cas précédents et les solutions s'expriment en fonction des fonctions elliptiques de Jacobi. Pour fixer les idées, on supposera que $A \succ B \succ C$ .Tenant compte des relations (3.61) et (3.62), on a:

$$\begin{aligned} AX^2 + BY^2 + CZ^2 &= 2E_c \\ X^2 + Y^2 + Z^2 &= \Omega^2 = r^2 \end{aligned} \quad (2.68)$$

Les équations différentielles (3.60) d'Euler s'intègrent au moyen des fonctions elliptiques de Jacobi. Pour le prouver, à partir des expressions (3.68), on exprime d'abord ω_1 et ω_3 en fonction de Y .En effet, des expressions (3.68), on tire les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} Z^2 &= r^2 - X^2 - Y^2 \\ CZ^2 &= -AX^2 - BY^2 + 2E_c \end{aligned} \quad (3.69)$$

En comparant les relations les expressions de la relation (3.69), on trouve

$$-CX^2 - CY^2 + Cr^2 = -AX^2 - BY^2 + 2E_c$$

$$\Rightarrow (A-C)X^2 = -Cr^2 - (B-C)Y^2 + 2E_c \quad (3.70)$$

D'où

$$X^2 = \frac{2E_c - Cr^2 - (B-C)Y^2}{A-C} \quad (3.71)$$

Par le même raisonnement, on trouve

$$Z^2 = \frac{Ar^2 - 2E_c - (A-B)Y^2}{A-C} \quad (3.72)$$

On introduit les relations (3.71) et (3.72) dans la deuxième équation des expressions (3.60)

$$\frac{dY}{dt} = (A-C)\frac{\sqrt{\left(2E_c - Cr^2 - (B-C)Y^2\right)\left(Ar^2 - 2E_c - (A-B)Y^2\right)}}{(A-C)}$$

Après simplification on a l'expression suivante :

$$\frac{dY}{dt}=\sqrt{\left(2E_c-Cr^2-(B-C)Y^2\right)\left(Ar^2-2E_c-(A-B)Y^2\right)} \quad (3.73)$$

En intégrant l'équation (3.73), on montre qu'on obtient une fonction $t(Y)$ sous la forme d'intégrale elliptique.

$$\frac{dY}{dt}=\sqrt{\left(2E_c-Cr^2-(B-C)Y^2\right)\left(Ar^2-2E_c-(A-B)Y^2\right)}$$

$$=\sqrt{\left(2E_c-r^2C\right)\left(1-\frac{(B-C)}{2E_c-r^2C}Y^2\right)\left(Ar^2-2E_c\right)\left(1-\frac{A-B}{Ar^2-2E_c}Y^2\right)}$$

$$=\sqrt{\left(2E_c-r^2C\right)\left(Ar^2-2E_c\right)}\sqrt{\left(1-\frac{A-C}{2E_c-r^2C}Y^2\right)\left(1-\frac{A-B}{Ar^2-2E_c}Y^2\right)}$$

$$\frac{dY}{\sqrt{\left(2E_c-r^2C\right)\left(Ar^2-2E_c\right)}dt}=\sqrt{\left(1-\frac{A-C}{2E_c-r^2C}Y^2\right)\left(1-\frac{A-B}{Ar^2-2E_c}Y^2\right)}$$

En posant

$$\tau=t\sqrt{(B-C)\left(r^2A-2E_c\right)} \quad (3.74)$$

$$s=Y\sqrt{\frac{B-C}{2E_c-r^2C}} \quad (3.75)$$

On peut écrire

$$\frac{ds}{d\tau}=\frac{\sqrt{\frac{B-C}{2E_c-r^2C}}dY}{\sqrt{(B-C)\left(r^2A-2E_c\right)}dt}$$

$$=\frac{dY}{dt}\sqrt{\frac{B-C}{2E_c-r^2C}}\times\frac{1}{\sqrt{(B-C)\left(r^2A-2E_c\right)}}$$

$$=\frac{dY}{\sqrt{\left(2E_c-r^2C\right)\left(r^2A-2E_c\right)}dt}$$

$$=\sqrt{\left(1-s^2\right)\left(1-\frac{B-C}{r^2A-2E_c}Y^2\right)}$$

$$=\sqrt{\left(1-s^2\right)\left(1-\frac{(A-B)\left(2E_c-r^2C\right)}{\left(r^2A-2E_c\right)(B-C)}s^2\right)}$$

$$\frac{ds}{d\tau}=\sqrt{\left(1-s^2\right)\left(1-\frac{\left(A-B\right)\left(2E_c-r^2A\right)}{\left(r^2A-2E_c\right)\left(B-C\right)}s^2\right)} \quad (3.76)$$

Pour réduire l'intégrale elliptique à la forme standard, on peut poser que $r^2 \succ \frac{2E_c}{A}$ sinon, il suffit d'intervertir les indices 1 et 3 dans toutes les formules précédentes. Le module des fonctions elliptiques ici s'écrit comme suit :

$$k^2=\frac{\left(A-B\right)\left(2E_c-r^2C\right)}{\left(r^2A-2E_c\right)\left(B-C\right)} \quad (3.77)$$

En substituant l'expression (3.77) dans l'expression (3.76), on obtient :

$$\frac{ds}{d\tau}=\sqrt{\left(1-s^2\right)\left(1-k^2s^2\right)} \quad (3.78)$$

L'équation différentielle (3.76) admet la solution

$$\tau=\int_0^s\frac{ds}{\sqrt{\left(1-s^2\right)\left(1-k^2s^2\right)}} \quad (3.79)$$

L'intégrale donnée par la relation (3.79) est une intégrale elliptique de première espèce. La fonction inverse $s(\tau)$ constitue l'une des fonctions elliptiques de Jacobi $s=sn\tau$.

En tenant compte de la relation (3.73), on obtient l'expression de Y en fonction temps.

$$Y=\sqrt{\frac{2E_c-r^2C}{B-C}}sn\tau \quad (3.80)$$

Les expressions (3.71) et (3.72) nous permettent de trouver respectivement les expressions de ω_1 et de ω_3 comme suit :

$$X=\sqrt{\frac{2E_c-r^2C}{A-C}}\sqrt{1-sn^2\tau} \quad (3.81)$$

$$Z=\sqrt{\frac{2E_c-r^2C}{A-C}}\sqrt{1-k^2sn^2\tau} \quad (3.82)$$

Compte tenu des définitions données au premier chapitre des deux autres fonctions elliptiques de Jacobi et de la relation (3.74), on obtient finalement les expressions suivantes :

$$X = \sqrt{\frac{2E_c - r^2C}{A-C}}\, cn\left(t\sqrt{(B-C)(r^2A-2E_c)}\right)$$
$$Y = \sqrt{\frac{2E_c - r^2A}{A-C}}\, sn\left(t\sqrt{(B-C)(r^2A-2E_c)}\right) \quad (3.83)$$
$$Z = \sqrt{\frac{2E_c - r^2C}{A-C}}\, dn\left(t\sqrt{(B-C)(r^2A-2E_c)}\right)$$

Les expressions (3.83) montrent que l'intégration des équations d'Euler données par les relations (3.60) s'effectue au moyen des fonctions elliptiques de base de Jacobi.

Signalons que pour $A = B$, on a $k^2 = 0$. Dans ce cas, les fonctions elliptiques $cn\tau, sn\tau, dn\tau$ se réduisent respectivement aux fonctions $\sin\tau, \cos\tau, 1$. Par conséquent, les relations (3.83) deviennent :

$$X = \sqrt{\frac{2E_c - r^2C}{A-C}}\, \cos\left(\sqrt{(A-C)(r^2A-2E_c)}\right)$$
$$Y = \sqrt{\frac{2E_c - r^2C}{A-C}}\, \sin\left(\sqrt{(A-C)(r^2A-2E_c)}\right) \quad (3.84)$$
$$Z = \sqrt{\frac{r^2A-2E_c}{A-C}}$$

III.3. La propagation d'une onde de surface: les ondes cnoïdales

III.3.1.La Formation des vagues

Les vagues sont des oscillations à l'interface air-eau générées par un transfert d'énergie de l'écoulement de l'air à l'eau. En un lieu, elles se traduisent par des fluctuations du niveau de l'eau. On les appelle des ondes de surface car elles se propagent à l'interface entre deux fluides différents, ici l'interface eau-atmosphère, et sont pour la plus grande majorité issues de l'action du vent sur l'eau. Le transfert de quantité de mouvements et d'énergie de l'air vers l'eau est à l'origine de la formation des vagues. Signalons que le vent est un phénomène résultant de la différence de pression entre deux masses d'air, et de la rotation de la terre.

Il existe une infinité de vagues différentes : la déferlante qui est une vague dont la crête se déplace plus vite que le creux et qui est donc vouée à se briser, le soliton qui est une vague non-linéaire qui se propage sans changer de forme, le mascaret qui est un ressaut qui va remonter les fleuves et les rivières[37]. La première théorie de vagues a été proposée par Sir George Biddell Airy en 1845. Elle est encore la théorie de vagues la plus utilisée car elle est la

plus simple d'entre toutes les théories et répond à la majorité des besoins routiniers, mais faillit à décrire correctement les vagues dans certaines situations. Il y a eu ensuite plusieurs théories de vagues, mais dues à la complexité des formulations, elles ont été placées au deuxième plan, par rapport aux applications pratiques.



Fig.7. La production des vagues à la surface de l'eau

Les traits de vagues engendrés par un vent local constituent la mer de vent. Cette mer de vent est d'autant plus forte que le vent est fort ou souffle longtemps, ou sur une distance importante. Ces vagues se transforment en*houle* lorsque le vent faiblit ou lorsqu'elles se propagent en dehors de l'aire génératrice. Elle existe encore lorsque le vent générateur a disparu et peut se propager très loin de la zone où elle a été générée.Par effet dispersif, chaque composante d'un trait de houle se propage avec sa célérité propre qui croît avec la période [38].

La vague est liée à un vent local tandis que la houle est liée à une perturbation lointaine. Pour les vagues, la crête n'est pas arrondie mais une fois elles sont créées, elles vont s'arrondir au niveau de la partie supérieure petit à petit en se propageant et elles vont finalement prendre la forme de la houle comme le montre la figure suivante :

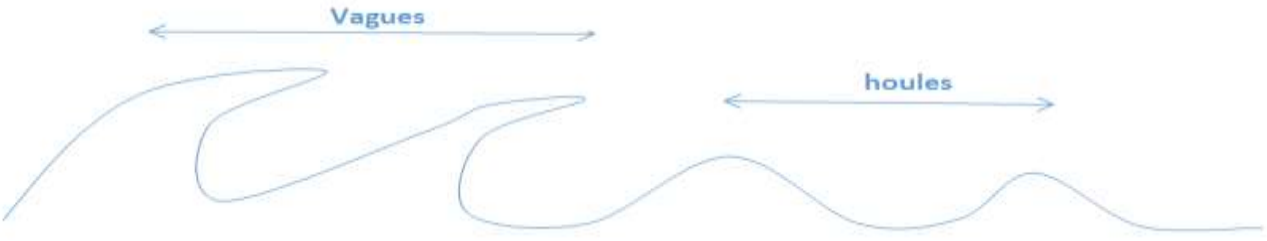


Fig.8. Le passage de la vague à la houle.

La houle qu'on observe ici, est due à ce qui s'était passé précédemment dans un endroit où il y a du vent.



Fig.9. Les vagues transformées en houles en dehors de la zone génératrice

Les équations qui gouvernent les vagues de surface sont non-linéaires et ne sont pas intégrables. La résolution approchée de ces équations nécessite des méthodes d'approximation.

III.3.2. Ondes de gravité à la surface d'un fluide

Une onde de gravité est une onde qui se déplace sur la surface d'un fluide soumis à la gravité. La gravité est responsable de plusieurs manifestations naturelles. Les marées, l'orbite des planètes autour du soleil en sont quelques exemples. Les vagues et la houle à la surface de la mer sont les exemples les plus connus d'ondes de gravité (onde de gravité océanique). Lorsque la surface horizontale (correspondant à l'état d'équilibre), est perturbée, deux forces (la gravité et la tension superficielle), agissent pour rappeler la surface vers l'état d'équilibre. Lorsqu'une onde de gravité se propage, il n'y a pas de flux de matière (ceci au moins dans l'approximation linéaire), les de volumes élémentaires du fluide décrivent des orbites fermées. En fait, seules se propagent la quantité de mouvement et l'énergie [39].La vitesse de propagation de l'état dynamique est la vitesse de phase donnée par [40,41] :

$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k} = \frac{g}{\omega} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}} = \sqrt{\frac{g}{k}} \quad (3.85)$$

où ω désigne la pulsation et $k = \frac{\omega^2}{g}$ le nombre d'onde.

Si la vitesse de phase dépend de la longueur d'onde, l'onde est dite dispersive.

La vitesse à laquelle l'énergie est transférée, appelée vitesse de groupe, est donnée par :

$v_g = \frac{d\omega}{dk}$ (3.86)

III.3.3. Les modèles de houle

III.3.3.1. Différents modèles de houle

Les houles simples se classent en cinq grandes catégories, qui sont caractérisées par les fonctions ou les méthodes mathématiques qui servent à les décrire[39,40,42].

- Les houles simples sinusoïdales : une onde sinusoïdale est onde crée par une source ayant un mouvement périodique sinusoïdal dans le temps. La houle (l'onde) est onde mécanique transversale.
- Les houles de Miche dont la découverte et l'étude théorique sont dues à R. Miche (1944).
- Les houles conoïdales qui empruntent leur nom aux fonctions elliptiques de Jacobi dont le cosinus elliptique noté″ cn".
- Les ondes solitaires qui correspondent au cas limites des houles conoïdales de période et de longueur d'onde infinies.
- Les modèles numériques de houle sont obtenus à partir de méthodes d'optimisation numérique.

III.3.3.2. Paramètres de description de la houle

Considérons d'abord un fluide parfait, de densité ρ constante, incompressible et en écoulement irrotationnel. Ici, t désigne le temps, x et y les coordonnées horizontales et z la coordonnée verticale orientée vers le haut. La surface libre du liquide a pour équation[39] $z = \eta(x,y,t)$. Le niveau moyen (au repos) est situé en $z = 0$ et le fond, imperméable et horizontal, est en $z = -h$ On note le champ de vitesse $\vec{u} = (u,v,w)$ et la pression $p(x,y,z,t)$. L'accélération de la gravité g est orientée dans la direction z négative. On note $\vec{j}$ le vecteur unitaire suivant Oz orienté vers le haut.La surface de l'eau oscille de manière sinusoïdale (en

première approximation). On peut donc modéliser le niveau de l'eau par une fonction sinusoïdale.

Tous les modèles de la houle sont définis à partir des paramètres reproduits sur la figure suivante [43, 44] :

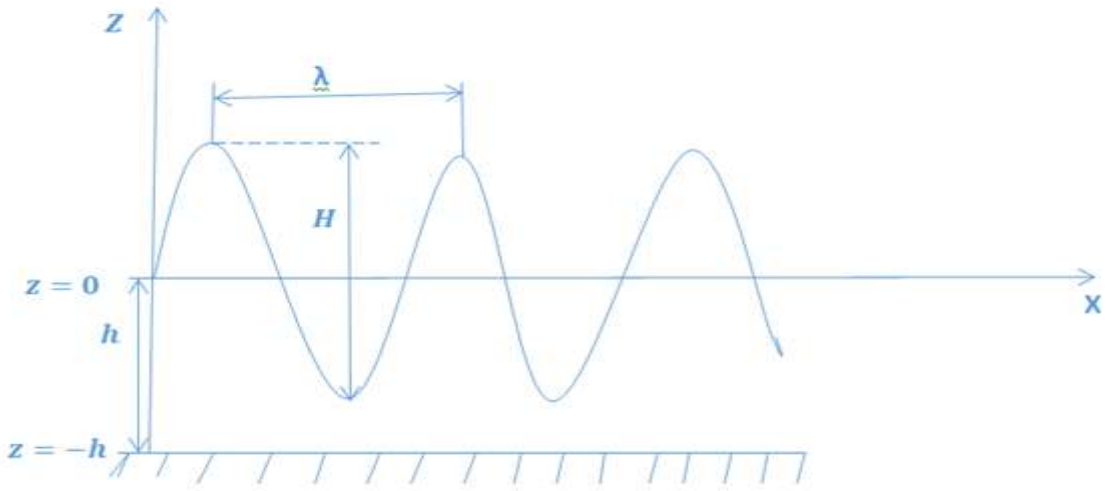


Fig.10. Illustration des paramètres caractéristiques des vagues

Dans l'étude des vagues, il est souvent nécessaire d'utiliser d'autres paramètres comme :

- La cambrure ε_c de la houle qui est le rapport entre sa hauteur crête à creux H et sa longueur d'onde λ , soit $\varepsilon_c = H/\lambda$
- La hauteur relative ε_H de la houle qui est le rapport entre sa hauteur crête à creux et la profondeur h, soit $\varepsilon_H = H/h$
- La longueur d'onde relative de la houle ε_λ qui le rapport entre sa longueur d'onde λ et la profondeur h, soit $\varepsilon_\lambda = \lambda/h$
- Le paramètre d'Ursell $\varepsilon_U = \varepsilon_c.\varepsilon_\lambda^3$ défini par $H\lambda^2/h^3$

III.3.4. Ondescnoïdales et ondes solitaires dans l'approximation de Korteweg-de Vries

III.3.4.1. Equation de Korteweg-de Vries

L'équation de Korteweg-de Vries (KdV en abrégé) est un modèle mathématique pour les vagues de faible profondeur.L'expression empirique de la vitesse de déplacement de la vague figure dans le rapport [45] :

$$v^2 = g(h + A) \quad (3.86)$$

où v est vitesse de la vague, h la profondeur de l'eau, A l'amplitude maximale de la vague et g la constante gravitationnelle. L'expression (3.86) rend compte d'une propriété importante de l'onde solitaire : il s'agit d'une vague gravitationnelle dont la vitesse augmente en fonction de son amplitude.

L'équation gouvernant la dynamique de cette onde solitaire fut finalement découverte indépendamment par Boussinesq en 1877 et par Korteweg et de Vries en 1895.

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{g}{h}}\left(\frac{3}{2}k\frac{\partial \zeta}{\partial \xi} + \zeta\frac{\partial \zeta}{\partial \xi} + \frac{1}{3}\sigma\frac{\partial^3 \zeta}{\partial \xi^3}\right) \quad (3.87)$$

où ξ est une variable se déplaçant quasiment à la même vitesse que la vague, σ est un paramètre incluant la tension surfacique et k est un paramètre arbitraire. L'équation de Korteweg-de Vries s'écrit donc comme suit[39,45] :

$$\frac{1}{\sqrt{gh}}\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{h^2}{6}\frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} + \frac{3\eta}{2h}\frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \quad (3.88)$$

C'est une équation aux dérivées partielles non linéaire et dispersive pour une fonction η de deux variables réelles, x et t.

L'équation porte le nom de Diederik Korteweg et Gustav de Vries qui l'ont étudiée, bien que l'équation ait été traitée par Joseph Boussinesq auparavant.

III.3.4.2.Les ondes cnoïdales et ondes solitaires

Les effets non-linéaires doivent être pris en compte lorsque l'élévation de la surface n'est plus très petite devant la longueur caractéristique de l'onde. Lorsque la longueur d'onde est grande devant la profondeur, la prise en compte des effets non-linéaires et dispersifs à l'ordre le plus bas amène à l'équation de Korteweg-de Vries (KdV) [39]. Les ondes cnoïdales sont donc solutions des équations de Korteweg et de Vries où interviennent les fonctions elliptiques de Jacobi notées *cn*, d'où le nom d'ondes *cn-oïdales.*

La première solution cnoïdale était celle du premier ordre proposé par Korteweg et de Vries (1895), en supposant une distribution hydrostatique des pressions, avec de faibles accélérations verticales et en imposant que la vitesse horizontale sous le creux de la vague soit permanente par rapport au système de référence en mouvement. Cette solution a été nommée

cnoïdale, parce qu'elle utilise pour décrire la surface d'eau la fonction cosinus elliptique (*cn*) [46].

Les théories d'onde cnoïdales ont la particularité d'être capables de donner une bonne solution entre les deux extrêmes des solutions de vagues : la théorie linéaire (la fonction cosinus elliptique devient cosinus trigonométrique, $k=0$), et la théorie d'onde solitaire (la fonction cosinus elliptique devient sécante hyperbolique, $k=1$).

L'équation KdV admet deux types de solutions. Une solution périodique, dite cnoïdale, de la forme

$$\eta = z_1 - h + Hcn^2\left[2K(k)\left(\frac{x}{\lambda}-\frac{t}{T}\right),k\right] \quad (3.89)$$

où k est le module de l'intégrale elliptique de premier ordre, $K(k)$ l'intégrale elliptique complète de premier ordre, cn est le cosinus elliptique de Jacobi.

La longueur d'onde de la vague est donnée par :

$$\lambda = \sqrt{\frac{16h^3}{3H}}kK(k) \quad (3.90)$$

Et la distance entre le fond et le creux de la vague z_1 est donnée par l'expression :

$$\frac{z_1-h}{H} = \frac{16h^3}{3\lambda^2 H}K(k)[K(k)-E(k)] \quad (3.91)$$

où $E(k)$ est l'intégrale elliptique complète de deuxième ordre.

La théorie d'onde solitaire est un cas particulier de la théorie d'onde cnoïdale. Quand le module de l'intégrale elliptique est égal à l'unité, l'intégrale elliptique complète de premier ordre est infinie et la fonction cosinus elliptique devient sécante hyperbolique.

En posant $k^2=1$, $K(k)=K(1)=\infty$ dans les formulations d'onde cnoïdale, les définitions suivantes sont proposées :

La célérité de la vague :

$$v = \sqrt{g(H+h)} = \sqrt{gh\left(1+\frac{H}{h}\right)} \quad (3.92)$$

La longueur d'onde :

$\lambda = vT$ (3.93)

La surface d'eau :

$$\eta = H \sec h^2 \left[\sqrt{\frac{3H}{4h^3}} (x - ct) \right] (3.94)$$

La relation (3.94) est la solution de type onde solitaire de l'équation KdV.

III.4. La spirale sphérique de Seiffert

III.4.1.Définition

La spirale sphérique de Seiffert est une courbe sur une sphèreréalisée en se déplaçant sur la sphère avec une vitesse linéaire et une vitesse angulaire constantes par rapport à un diamètre fixe. Si le diamètre sélectionné est la ligne allant du pôle nord au pôle sud, alors l'exigence d'une vitesse angulaire constante signifie que la longitude du point mobile change à un rythme constant. Les coordonnées cylindriques du point variable sur cette courbe sont données par les fonctions elliptiques de Jacobi.

Supposons que nous avons une particule se déplaçant sur une surface d'une sphère unité avec une vitesse constante v et une vitesse constante ω. La courbe tracée lors de ce mouvement est connue sous le nom de spirale sphérique de Seiffert.

Si φ est la longitude de la position de la particule, alors il résulte, de la définition que[13, 47, 48, 49].

$\theta = \omega t$ (3.95)

En fixant $t = \frac{s}{v}$, on peut éliminer t pour trouver l'équation de la forme

$\theta = ks$ (3.96)

avec k une constante donnée par la relation $k = \frac{\omega}{v}$ et s est la longueur de l'arc mesurée à partir du pôle nord.

La constante k est le seul paramètre qui détermine le comportement de la spirale de Seiffert.

III.4.2.Equations paramétriques d'une spirale de Seiffert en coordonnées cylindriques

Pour étudier les propriétés d'une spirale de Seiffert, on introduit les coordonnées cylindriques (r,θ,z) de la particule à une position donnée P.

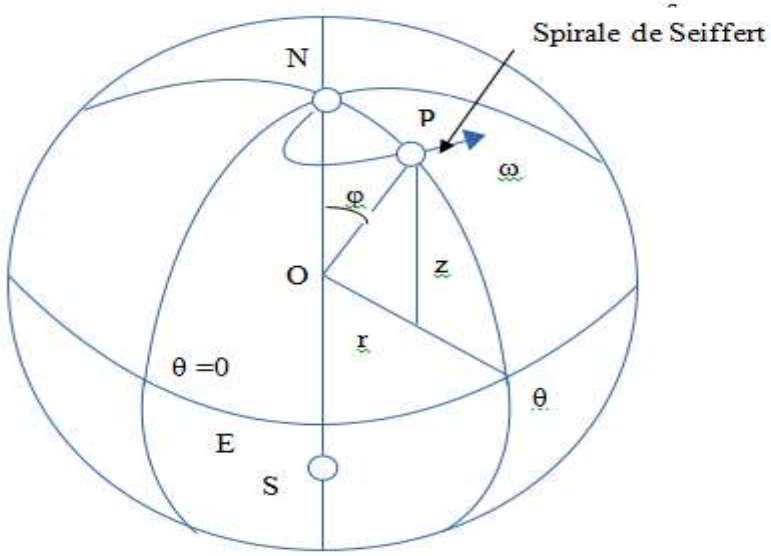


Fig.11. Illustration du début de traçage de la spirale sphérique de Seiffert

On définit r comme le rayon ou module, θ la longitude du point P et z est la hauteur du point P au-dessus du plan équatorial. On définit aussi φ comme un angle entre les rayons du centre de la sphère à P et à N. Si r et z sont considérés comme des coordonnées cartésiennes dans le plan méridien de P, alors r change de signe si le chemin passe par un pôle N ou S.

Considérons l'élément de longueur infinitésimale ds sur la sphère, donnée par l'expression suivante [47, 48, 49]:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2 \quad (3.97)$$

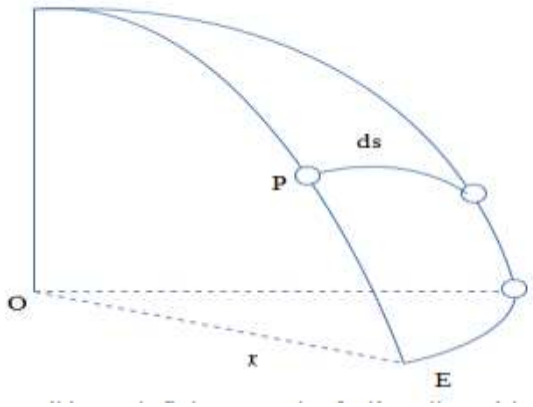


Fig.12. Un élément infiniment petit d'une ligne à la surface d'une sphère

Comme on a une sphère unité, alors $r^2 + z^2 = 1$, et on peut éliminer dz^2 dans la relation (3.97) comme suit :

$$ds^2 = r^2 d\theta^2 + dz^2 + dr^2 = r^2 d\theta^2 + dr^2 + \frac{r^2 dr^2}{1-r^2}$$

Après quelques manipulations, on obtient la relation de la forme

$$ds^2 = r^2 d\theta^2 + \frac{1}{1-r^2} dr^2 \quad (3.98)$$

Tenant compte de la relation (3.96), on peut écrire

$$d\theta^2 = k^2 ds^2 \quad (3.99)$$

Pour $r \neq 1$, en remplaçant la relation (3.99) dans (3.98), on trouve l'expression

$$\left(1-k^2 r^2\right) ds^2 = \frac{1}{1-r^2} dr^2 \quad (3.100)$$

De la relation (3.100), on tire l'expression suivante :

$$ds = \frac{dr}{\sqrt{\left(1-r^2\right)\left(1-k^2 r^2\right)}} \quad (3.101)$$

où $|r| \prec \frac{1}{k}$. Donc, la distance totale s parcourue le long de la courbe N à P peut être exprimée en terme de la distance ρ de ce point à partir de l'axe NS par l'intégrale de la forme

$$s(r,k) = \int_0^{\rho} \frac{dr}{\sqrt{\left(1-r^2\right)\left(1-k^2 r^2\right)}} \quad (3.102)$$

La relation (3.102) définit une intégrale elliptique de premier type de module k. Comme le carré de k apparaît, alors, lors de la description des spirales de Seiffert, on peut utiliser la notation $m = k^2$ ou bien la notation de Christoph Gurdermann, qu'on a utilisé précédemment pour représenter le paramètre de l'intégrale elliptique.

De la relation (3.102), on retrouve la fonction sinus elliptique de Jacobi.

$$r = sn(s, \mathrm{k}) \quad (3.103)$$

Compte tenu de la relation $r^2 + z^2 = 1$, de la $sn^2 x + cn^2 x = 1$ et de la relation (3.103), on en déduit que

$$z = cn(s, \mathrm{k}) \quad (3.104)$$

où k est une constante positive appelée module des fonctions elliptiques et $cn(s)$ est la fonction cosinus elliptique de Jacobi.

Donc, les équations paramétriques d'une spirale de Seiffert en coordonnées cylindrique sont

$$\begin{aligned} r &= sn(s, k) \\ \theta &= ks \qquad (3.105) \\ z &= cn(s, k) \end{aligned}$$

Pour résumer, on prend la relation (3.105) comme définition d'une spirale de Seiffert sur la surface d'une sphère unité, de longueur s mesurée à partir du pôle nord N auquel $\theta = 0, r = 0$ and $z = 0$.

CONCLUSION GENERALE

D'une manière générale, mon travail de mémoire a traité la construction d'un nouveau type d'hamiltonien partiellement algébrique matriciel d'ordre deux associé à un potentiel dépendant des fonctions elliptiques de Jacobi et le développement de quelques applications des fonctions elliptiques de Jacobi dans différents domaines de la physique. Dans ces deux parties de mon travail de recherche, j'ai fait recours aux calculs pour arriver aux résultants de la recherche. Ces deux parties ont été introduites par quelques généralités sur les fonctions elliptiques dans le cas général et sur celles de Jacobi en particulier.

Dans le premier chapitre, après avoir traité les notions de base et les propriétésdes fonctions elliptiques dans le cas général, j'ai insisté avec intérêt sur les fonctions elliptiques de Jacobi plus particulièrement les trois fonctions elliptiques de base. A partir des fonctions elliptiques de base, j'ai défini neuf autres fonctions elliptiques de Jacobi. Pour rendre cette étude beaucoup plus compréhensible, j'ai pu développer les notions d'intégrale elliptique et celle de lemniscate de Bernoulli. Comme les fonctions elliptiques de Jacobi et fonctions lemniscatiques présentent des analogies avec les fonctions de la trigonométrie ordinaire, une comparaison entre elles a été établie.

Le deuxième chapitre a été consacré à la détermination de trois conditions algébriques nécessaires et suffisantes pour qu'un hamiltonien matriciel dépendant des fonctions méromorphes et doublement périodique de Jacobi, après avoir subi une transformation de jauge, puisse laisser invariant l'espace vectoriel V_n de polynômes de dimension finie.Pour ce type d'hamiltonien, seule une partie de valeurs propres peut être déterminée algébriquement. Pour déterminer ces conditions, on a appliqué la méthode analytique de résolubilité partielle. Ici on a traité deux cas : le cas où $\delta = 1$ et celui où $\delta = 2$. δ étant un paramètre réel.

Dans le troisième et dernier chapitre, j'ai développé quelques applications des fonctions elliptiques en physique. Les fonctions elliptiques de Jacobi interviennent dans la résolution des problèmes pratiques dans plusieurs domaines de la physique. A part la mécanique quantique non relativiste,ces fonctions interviennent dans la résolution de l'équation du mouvementd'un pendule simple pour des oscillations de grande amplitude etdans la résolution de l'équation du mouvement du corps rigide d'Euler en mécanique newtonienne. En hydrodynamique, les fonctions elliptiques de Jacobi interviennent dans la résolution des équations non-linéaires qui régissent la propagation d'une catégorie d'onde de surface communément appelées ondes cnoïdales.En mécanique analytique, la résolution des

équationsparamétriques en coordonnées cylindriques d'une spirale sphérique de Seiffert fait intervenir les trois fonctions elliptiques de base de Jacobi.

Mon travail n'est pas une fin en soi, mais presque un commencement. J'interpelle d'autres chercheurs à pousser encore plus loin la présente étude et de contribuer davantage à son enrichissement. Ils peuvent par exemples retoucher le potentiel du hamiltonien donné par la relation (2.1) et appliquer la méthode analytique de résolubilité partielle afin de construire de nouveaux hamiltoniens partiellement algébriques. Ils peuvent également présenterd'autres situations pratiques de la physique où interviennent les fonctions elliptiques de Jacobi car toutes ces situations ne sont pas traitées dans le présent travail.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] O.Mustafa, S .M. Habib, weak-pseudo-Hermiticity generators and exact solvability, Eastern Mediterranean University, 2018.

[2] A. V. Turbiner, One-Dimensional Quasi-Exactly Solvable Schrodinger Equations, Stony Brook University, Stony Brook, NY11794-3800, USA, 2016.

[3] A. NININAHAZWE, Matrix Quasi-Exactly Solvable Jacobi Elliptic Hamiltonian, University of Burundi, 2013.

[4] V. M. Tkachuk, Quasi-Exactly Solvable Potentials with Two Known Eigenstates, Ivan Franko Lviv State University, 1998.

[5] A. NININAHAZWE, Quasi-exactly solvable extensions of someintegrable quantummodels, Thèse de doctorat, Université de Mons-Hainaut, 2007-2008.

[6] Y.Brihaye, A. NININAHAZWE and B. P. Mandal; J. Phys. A: Math. Theor. 40, 13063-13073 (2007).

[7] L.Vessot, on the direct numerical calculation of elliptic functions and integrals, Cambridge University press, 1924.

[8] J. C. Feauveau, fonctions elliptiques revisitées.2017.hal-01447504.

[9] A. Lesfari, Fonctions et intégrales elliptiques, ISS 1842-6298 (electronic), 1843-7265 (print) volume 3 (2008), 27-65.

[10] B.Olivier, Fonctions elliptiques .Découverte d'un monde périodique, université Paris – sud XI. Travail d'étude et de recherche.

[11] A.Fontaine , Fonctions holomorphes et méromorphes sur un ouvert de $\mathbb{C}$. Exemples et applications.

[12] M.RENAUD, les intégrales et fonctions elliptiques, Université de Toulouse, France, 2014.

[13] J.Snape, Applications of elliptic functions in classical and algebraic geometry, Dissertation submitted for Master of Mathematics at the University of Durham.

[14] E.H.NEVILLE, Elliptic Functions, England, University of Reading, 1919-1954.

[15] N.I.Akhiezer, Elements of the theory of elliptic Functions, AMS Translation of mathematical monographs, 79(1990).MR1054205 (91K: 33016).zbl 0694.33001.

[16] A.Weil, Euler and Jacobian elliptic curves, progress in Math., vol 36,353-359, Birkhauser, 1983.MR0717601 (85d:14060).zbl 0554.01014.

[17] Krell Stella, MinjeaudSebatian, Dunand Clément, Intégales elliptiques, 2005

[18] Réunion APMEP, Fonctions elliptiques, une pensée pour chronomath…., 19 avril 2016.

[19] P-J. Hormière, la lemniscate de Bernoulli, été 2007.

[20] H. Khelif, coup d'œil sur la lemniscate de Bernoulli, 2010.

[21] G. Villemin, lemniscate de Bernoulli, Edition du vingt-quatre janvier 2019.

[22] A.J.Brizard, A primer on elliptic functions with applications in classical mechanics , Saint Michael's college , VT05439, USA, November 26, 2007.

[23] W.P.Reinhardt, P.L. Walker, JacobianEllipticFunctions, sur dlmf.nist.gov, §22.15, Inverse Functions.

[24] B.Olivier, Fonctions elliptiques .Découverte d'un monde périodique, université Paris – sud XI. Travail d'étude et de recherche.

[25] M. Abramowitz, I.A Stegun, Handbook of MathematicalFunctions, 1972.

[26] H. Laurent, Théories élémentaires des fonctions elliptiques, Gauthier-Villars, Paris, 1880.

[27]A.Ninihazwe, Matrix Quasi-Exactly Solvable Jacobi Elliptic Hamiltonian, University of Burundi, 2013.

[28] Y. Brihaye and B. Hartmann, "Quasi-Exactly Solvable N × N-Matrix Schrödinger Operators," Modern Physics Letters A, Vol. 16, No. 29, 2001, pp. 1895-1906. doi:10.1142/S0217732301005242.

[29] Y. Brihaye, A. Nininahazwe and B. P. Mandal, "PTSymmetric, Quasi-Exactly Solvable Matrix Hamiltonians," Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, Vol. 40, No. 43, 2007, pp. 13063-13073 doi:10.1088/1751-8113/40/43/014.

[30] L. Landau et E. Lifchitz, Physique Théorique - Tome 1: Mécanique, Ellipses Marketing (2012).

[31] D. Sénéchal, Mécanique II, PHQ414, Université De Sherbrooke, juin 2018.

[32] H. Goldstein, Classical Mechanics, Addison Wesley (1980). H. Goldstein, Mécanique Classique (traduit par Annette et Charles Moubacher), Presses universitaires de France (1964).

[33] T. W. B. Kibble, Classical Mechanics, World Scienti_c Publishing Company (2004).

[34] F.Halbwachs et J.M.Souriau, Mécanique analytique, encyclopediauniversalis, 1989, t.14, pp.764-767.

[35] D.F. Lawden, Elliptic Functions and Applications, Applied Mathematical Sciences, Vol. 80,Springer-Verlag, 1989.

[36] E.T.Whittaker et Watson, A course of Modern Analysis, New York, Mac Milan, 1943, p.515.

[37]M.PEYRARD et T.DAUXOIS, Physique des solitons, Ecole Normale Supérieure de Lyon, 17juillet 2007.

[38] N. Jarry, Etudes expérimentales et numériques de la propagation des vagues au-dessus de bathymetries complexes en milieu côtier, thèse de doctorat. Université du sud Toulon-Var (2009).

[39] A. Leroux, Mise en évidence de nouveau types de vagues de très grandes amplitudes, thèse de doctorat, Université de Nice Sophia Antipolis (2014).

[40] J.BOUGIS, les houles périodiques simples, Université de Toulon et du Var, 1993.

[41] E.Laffite, Modélisation de la propagation de la houle en présence de courants cisaillés et par bathymétrie variable, thèse de doctorat, université de Toulon, 2018.

[42] Jeffreys, Harold, Sur certaines solutions approchées d'équations différentielles linéaires du second ordre, actes de la London Mathematical society (1924).

[43] ARISTAGHES C.et ARISTAGHES P. « Théories de la houle réelle-propagation de la houle », Rapport S.T.C.P.M.V.N numéro 85.1, Compiègne (1985).

[44]. BONNEFILE R." Cours d'hydraulique maritime"E.N.S.T.A. Editions Masson, Paris (1985).

[45] L.Gagnon, Etude de l'équation de Korteweg-de Vries en variables lagrangiennes et sa contrôlabilité, stabilisation rapide d'une équation de Schrödinger et méthodes spectrales pour le calcul du contrôle optimal, thèse de doctorat , Université Pierre et Marie Curie, Paris (2016).

[46] L.T. Gonzalez, Calculs exacts des paramètres des principales théories non linéaires des vagues et proposition d'outil simplifié de calculs, thèse de doctorat, Université Laval Québec (2009).

[47] P.Erdös, Spiraling the Earth with C.G.J.Jacobi. The American Journal of Physics 68 (10) 888-895.

[48] Greenhill, A.G.(1892).The applications of elliptic Functions. Macmillan, London, United Kingdom.

[49]. Dutta, M. & Debnath, L.(1965). Elements of Theory of elliptic and Associated Functions with Applications. The World Press Private, Calcutta (Kolkata), India