UNIVERSITÉ DU BURUNDI
GRENIER DU SAVOIR DU BURUNDI
Dépôt institutionnel officiel
https://repository.ub.edu.bi

Expansion d’ordre trois pour lamoyenne studentisée de Hall

NTIRAMPEBA, Euphraïm

2020-04
UB
https://repository.ub.edu.bi/handle/123456789/261

Document téléchargé depuis le **Grenier du Savoir du Burundi** — https://repository.ub.edu.bi

UNIVERSITÉ DU BURUNDI



FACULTÉ DES SCIENCES
Département de Mathématiques

Expansion d'ordre trois pour la moyenne studentisée de Hall

Euphraïm NTIRAMPEBA

MÉMOIRE
présenté et défendu publiquement en vue d'obtenir le
Diplôme de Mastère en Mathématiques Fondamentales et Appliquées

---

Sous la direction de : **Prof. ém. Lea VERMEIRE (directeur)**
Prof. Servat NYANDWI (co-directeur)

Bujumbura, avril 2020

Dédicaces

A Dieu tout-puissant

A mon regretté Père

A ma chère Mère

A mes chers frères et sœurs

A mes camarades étudiants

Remerciements

Pour l'aboutissement de ce travail, mes sincères remerciements s'adressent au promoteur professeur Lea VERMEIRE (KU Leuven) qui a accepté de diriger ce mémoire et dont les orientations et excellents conseils ont été d'importance capitale. Je remercie également le co-promoteur professeur Servat NYANDWI (Université du Burundi) qui a généreusement accepté de soutenir ce mémoire. Avec reconnaissance je cite aussi monsieur Menus NKURUNZIZA (enseignant à l'Université du Burundi) qui s'est donné corps et âme et dont les interventions ont été d'une grande nécessité.

Je remercie les membres du jury pour avoir soulevé des questions qui ont contribué à une amélioration du texte du mémoire.

Je saisis aussi cette occasion pour remercier tous les enseignants qui m'ont formé depuis l'école primaire jusqu'à l'université en passant par l'école secondaire. Un tout particulier sentiment de gratitude s'adresse à tous les professeurs du Département de Mathématiques de l'Université du Burundi et ses partenaires pour leur dévouement et leur détermination dans la formation de la jeunesse.

Un mot spécifique de remerciements s'adresse au projet de Coopération Institutionnelle VLIR-UOS Belgique/Burundi qui a substantiellement contribué à notre formation, en particulier en facilitant la mobilité de professeurs-visiteurs.

Je remercie mes parents, mes frères et sœurs pour leur soutien moral et matériel tout au long de ma formation depuis l'école primaire jusqu'à présent.

Pour finir, je remercie mes camarades étudiants pour le soutien qu'ils m'ont témoigné durant tout le cursus ensemble.

Sigles et abréviations

fca : fonction caractéristique
fde : fonction de densité
fdi : fonction de distribution
fgm : fonction génératrice des moments
iid : indépendant(es) et identiquement distribué(es)
MM : méthode des moments
logfca : log fonction caractéristique
TCL : Théorème Central Limite
UB : Université du Burundi
va : variable aléatoire

$A_{k,\ell} = \mathrm{E}\{(\sum X_i)^k \, [\sum (X_j^2 - 1)]^\ell\}$: moment mixte d'échantillon
S_n : la moyenne studentisée de Hall, la moyenne studentisée MM

Résumé

Pour la fonction de distribution de la moyenne studentisée de Hall – aussi moyenne studentisée MM – le mémoire présente l'expansion d'Edgeworth jusqu'à l'ordre 3, à partir de son approximation par la fdi normale. L'expression obtenue est en accord avec l'expansion à l'ordre 2 présentée par Hall, et y ajoute une extension à l'ordre suivant. L'extension offre une correction plus précise pour l'approximation normale et une identification hiérarchique des paramètres de population qui dominent l'erreur de cette approximation. En supplément, plusieurs moments mixtes d'échantillon et une propriété générale de ces moments sont obtenus.

Mots clés : moyenne studentisée, moyenne studentisée de Hall, moyenne studentisée MM, expansion d'Edgeworth, expansion asymptotique, moment mixte d'échantillon.

Abstract

For the cumulative distribution function of Hall's studentized mean – also studentized mean MM – the memoir presents the Edgeworth expansion up to order 3, with the normal cdf as germ. The present expression matches the expansion to order 2 presented by Hall, and provides an extension with an extra order. The extension offers a more precise correction on the normal approximation and a hierarchical identification of the population parameters that affect the error of this approximation. As a positive side-effect several mixed sample moments and a general property of these moments are obtained.

Keywords : studentized mean, Hall's studentized mean, studentized mean MM, Edgeworth expansion, asymptotic expansion, mixed sample moment.

Table des matières

Dédicaces **i**

Remerciements **ii**

Sigles et abréviations **iii**

Résumé – Abstract **iv**

Table des matières **v**

Avant-propos **vii**

Introduction **1**

1 Préliminaires **3**
1.1 La moyenne studentisée en pratique 3
1.1.1 Exemples de tests pour une moyenne 3
1.1.2 Pratique dans l'éducation en statistique appliquée 6
1.1.3 Relation avec l'étude de la moyenne studentisée de Hall 6
1.2 Notions d'ordre, o et O, o_p et O_p 6
1.3 Série binomiale 10
1.4 Multinomium 10
1.5 Expressions pour des moments mixtes d'échantillon 11
1.6 Méthodes de calcul pour $\mathrm{E}(\overline{X}^k \overline{Y}^\ell)$ 12
1.7 Restriction à une population standardisée 14

2 Premiers moments de S_n **16**
2.1 Expansions pour S_n et ses premières puissances 16
2.2 Expansions pour les premiers moments de S_n 18
2.3 Expressions pour $A_{1,0}$ à $A_{4,0}$ 24
2.4 Expression pour $A_{5,0}$ 24
2.5 Expression pour $A_{6,0}$ 26
2.6 Expression pour $A_{1,1}$ 28
2.7 Expression pour $A_{2,1}$ 29

2.8 Expression pour $A_{3,1}$ . . . 29
2.9 Expression pour $A_{4,1}$ . . . 30
2.10 Expression pour $A_{5,1}$ . . . 31
2.11 Expression pour $A_{6,1}$ . . . 32
2.12 Expression pour $A_{1,2}$ . . . 34
2.13 Expression pour $A_{2,2}$ . . . 35
2.14 Expression pour $A_{3,2}$ . . . 36
2.15 Expression pour $A_{4,2}$ . . . 37
2.16 Expression pour $A_{1,3}$ . . . 39
2.17 Expression pour $A_{2,3}$ . . . 40
2.18 Expression pour $A_{3,3}$ . . . 41
2.19 Expression pour $A_{4,3}$ . . . 42

3 Cinquième moment de S_n **46**
3.1 Expansion pour S_n^5 . . . 46
3.2 Expansion pour le cinquième moment de S_n . . . 47
3.3 Expression pour $A_{7,0}$ . . . 50
3.4 Expression pour $A_{7,1}$ . . . 52
3.5 Expression pour $A_{5,2}$ . . . 54
3.6 Expression pour $A_{5,3}$ . . . 57
3.7 Propriété générale des moments mixtes $A_{k,\ell}$ . . . 63

4 Fonction de distribution de S_n **66**
4.1 Cumulants et Moments . . . 66
4.2 Expansion d'Edgeworth pour la moyenne standardisée . . . 71
4.3 Expansion d'Edgeworth pour une statistique asymptotiquement normale . . . 76
4.4 Expansion d'Edgeworth pour la moyenne studentisée de Hall . . . 79

Conclusion **82**

Bibliographie **83**

Avant-propos

Ce mémoire de fin d'études est l'aboutissement de mon parcours dans l'enseignement supérieur. Je le présente afin d'obtenir le degré de Mastère en Mathématiques Fondamentales et Appliquées de l'Université du Burundi (UB). Il est présenté en accord avec les connaissances accumulées lors de ma formation universitaire et d'expériences personnelles.

Le mémoire «Expansion d'ordre trois pour la moyenne studentisée de Hall » se situe dans le domaine de la statistique mathématique, en particulier la statistique inférentielle, qui étudie un paramètre de population à l'aide d'un échantillon aléatoire de cette population. Dans la pratique, pour l'analyse de la moyenne d'une population, à base d'un échantillon de taille n, la statistique à test courante est la moyenne d'échantillon studentisée. En cas d'un échantillon modéré ou grand, l'approximation normale pour la fonction de distribution de cette statistique est acceptée dans la littérature. La qualité de l'approximation dépend de l'erreur de cette approximation. Hall (1992, 2013) a étudié cette erreur dans le cas d'une statistique variante équivalente, que nous avons appelée la moyenne studentisée de Hall, alors que post-hoc, la moyenne studentisée MM aurait été un terme plus adéquat. Hall présente pour la vraie fonction de distribution de cette statistique l'expansion d'Edgeworth en puissances de $n^{-1/2}$ jusqu'à l'ordre 2, à partir de l'approximation normale. Nous étudions et appliquons la méthode de Hall afin d'obtenir l'expansion avec une précision d'ordre 3. Cela permet, non seulement une plus haute précision dans la correction de l'approximation normale, mais aussi une identification des paramètres de population qui sont à la base de l'erreur de cette approximation.

Afin d'obtenir l'expansion d'Edgeworth à l'ordre 3 pour la fonction de distribution de la moyenne studentisée de Hall, la moyenne studentisée MM, nous avions besoin des moments d'ordre 1 à 5 de cette statistique, avec une précision d'ordre 3. Dans ce contexte nous avons obtenu les expressions complètes pour plusieurs moments mixtes d'échantillon en fonction de n et les premiers moments de la population initiale. Puis une propriété générale de ces moments est dérivée.

Introduction

Considérons la statistique inférentielle de la moyenne d'une population à variance inconnue. Soient une population X, à moyenne $\mu = \mathrm{E}(X)$ et variance $\sigma^2 = \mathrm{V}(X) < \infty$ c'est-à-dire variance finie, et $X_1, \ldots, X_n$ un échantillon indépendant identiquement distribué (iid) de la population X. Comme la moyenne d'échantillon, $\overline{X} = \sum_i X_i/n$, a la moyenne μ et la variance σ^2/n, on appelle

$$S_{n,\sigma} = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = n^{1/2}\,\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma}$$

la moyenne standardisée. Si la population X est normale, alors $\bar{X} \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2/n)$ et $S_{n,\sigma} \sim \mathrm{N}(0,1)$. Pour une population générale, si $n \to \infty$ on a $S_{n,\sigma} \xrightarrow{d} \mathrm{N}(0,1)$ par le théorème central limite (TCL) [17],[15].

Si σ^2 est inconnu, une approche intuitive consiste à l'estimer. En utilisant la variance d'échantillon non-biaisée, $S^2 = \sum_i (X_i - \overline{X})^2/(n-1)$, la statistique à test pour le paramètre μ est

$$T_n = n^{1/2}\,\frac{\overline{X} - \mu}{S}\,.$$

Si l'échantillon provient d'une population normale, la distribution de T_n est appelée distribution t de Student avec $n-1$ degrés de liberté [1], [4], [5]. Pour une population générale et $n \to \infty$ on sait que $T_n \xrightarrow{d} \mathrm{N}(0,1)$, comme corollaire du TCL et le théorème de Slutsky [15]. On appelle la statistique T_n la **moyenne studentisée**.

On peut aussi estimer σ^2 par la variance MM, $\hat{\sigma}^2 = \sum_i (X_i - \overline{X})^2/n$, qui est l'estimateur de la variance de population obtenue par la méthode des moments, ou la variance d'échantillon non-corrigée pour biais. Alors la statistique à test pour μ est

$$S_n = n^{1/2}\,\frac{\overline{X} - \mu}{\hat{\sigma}}$$

que nous avons appelé la **moyenne studentisée de Hall**. Post-hoc, la **moyenne studentisée MM** aurait été un terme plus adéquat. Pour une population générale on a $S_n \xrightarrow{d} \mathrm{N}(0,1)$, comme corollaire du TCL et le théorème de Slutsky [15].

Notant $Z :\sim \mathrm{N}(0,1)$ on obtient pour n grand les trois approximations $S_{n,\sigma} \approx Z,$, $T_n \approx Z$, $S_n \approx Z$. Pour chacun se pose la question : est-ce que l'erreur de l'approximation Z est acceptable en pratique ?

Le mémoire étudie l'approximation Z pour S_n. Ce choix est inspiré par le fait que la littérature offre une base et un contrôle [3],[2, chapitre 2]. En plus, de l'analyse de l'erreur de Z pour S_n, on peut déduire celle de l'erreur de Z pour T_n [10]. Le but est d'étudier la qualité de l'approximation Z pour la fdi de S_n. Pour y arriver, trois approches sont envisageables :

- l'analyse mathématique (la théorie) : comprendre l'erreur de l'approximation, son origine ;
- l'analyse numérique (des simulations) : taille numérique de l'erreur ;
- la pratique (des règles pratiques) : application en Statistique appliquée.

C'est la première approche qui fait l'objet de cette étude dans le cas d'une population X continue. Hall [3],[2, chapitre 2], donne pour la fdi de S_n l'expansion d'Edgeworth à l'ordre 2, c'est-à-dire une expansion asymptotique de $F_{S_n}(x) = \mathrm{P}(S_n \leq x)$ de germe $\Phi(x) = \mathrm{P}(Z \leq x)$ et en puissances de $n^{-1/2}$ jusqu'à l'ordre 2 : $F_{S_n}(x) = \Phi(x) + n^{-1/2}\ q_1(x)\phi(x) + n^{-1}\ q_2(x)\phi(x) + o(n^{-1})$, où les $q_i(x)$ sont des polynômes. Etant donnée la convergence $S_n \xrightarrow{d} Z$ $(n \to \infty)$, il est légitime de recourir à cette méthode d'expansion asymptotique en puissances de n. Se référant au travail de Hall nous voulons obtenir l'expansion à l'ordre 3. En d'autres termes nous voulons suivre la méthode de Hall pour expliciter les polynômes $q_1(x)$ et $q_2(x)$, et obtenir le polynôme $q_3(x)$, dans l'expansion d'Edgeworth pour la fdi de la moyenne studentisée de Hall, S_n.

La contribution de cette étude est une meilleure approximation de la vraie fdi de S_n et une identification des paramètres de population qui sont à l'origine de la non-normalité de S_n.

Une vaste partie du mémoire sera dédiée aux expressions pour les moments de la statistique studentisée de Hall, S_n.

Hormis l'Introduction et la Conclusion, le travail est constitué de quatre chapitres :

- le premier, intitulé ***Préliminaires***, présente des notions et différentes méthodes qui seront utiles pour l'étude.
- dans le second, ***Les premiers moments***, nous obtenons les expansions pour les premiers quatre moments $\mathrm{E}(S_n^r),\ r = 1, 2, 3, 4$, jusqu'à l'ordre 1, 2 et 3 en puissances de $n^{-1/2}$, c'est-à-dire les expansions à erreur d'ordre $n^{-1}, n^{-3/2}, n^{-2}$.
- le troisième, ***Cinquième moment***, est une extension du chapitre précédent en obtenant l'expansion du cinquième moment de la moyenne studentisée de Hall, $\mathrm{E}(S_n^5)$.
- le dernier, ***Fonction de distribution***, présente l'expansion d'Edgeworth, jusqu'à l'ordre 3, pour la fonction de distribution de la moyenne studentisée de Hall, F_{S_n}.

Chapitre 1

Préliminaires

Ce chapitre présente des notions et des méthodes qui seront utiles pour la recherche envisagée. En particulier la restriction à une population standardisée est explicitée. Nous commençons avec la pratique des deux tests Z et t pour une moyenne en cas de variance non-connue, ce qui a conduit à l'étude de S_n dans ce mémoire.

Dans la suite il est toujours sous-entendu que les espérances utilisés dans les formules existent.

1.1 La moyenne studentisée en pratique

1.1.1 Exemples de tests pour une moyenne

Cette section présente des exemples de tests pour une moyenne dans les trois cas typiques : variance connue, variance estimée et population normale, variance estimée et population générale mais grand échantillon.

Exemple 1.1.1. *Niveau des pluies.*
Cet exemple est tiré de [13].
Des relevés effectués pendant de nombreuses années ont permis d'établir que le niveau naturel des pluies dans Beauce en millimètres par an suit une loi normale $\mathrm{N}(600, 100^2)$. Des entrepreneurs, surnommés faiseurs de pluies, prétendaient pouvoir augmenter de 50mm le niveau moyen de pluie, ceci par insémination des nuages au moyen d'iodure d'argent. Leur procédé fut mis à l'essai entre 1951 et 1959 et on releva les hauteurs des pluies dans la table suivante. Que peut-on conclure ?

Année	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957	1958	1959
mm	510	614	780	512	501	534	603	788	650

Comme souvent, une question de recherche est traduite en une question statistique.
Soit μ la moyenne du niveau de pluie sous le procédé, en mm.
Question de recherche : est-ce que $\mu = 650$?
Question statistique : décidez entre les hypothèses
$H_0 : \mu =$600 contre $H_1 : \mu =$650, avec niveau de signification $\alpha = 5\%$.
Comment décider ? Puisqu'il s'agit de tester la valeur μ, il est naturel de s'intéresser à l'observation $\overline{X}$, moyenne des observations qui nous apporte le plus de renseignement sur μ. Alors $\overline{X}$ est la statistique de décision, et la règle de décision sera : rejetez H_0 si $\overline{X}$ est trop grande.
Si H_0 est vraie, comme l'expérience a porté sur $n = 9$ans, et la variance est connue,
$\overline{X} \sim \mathrm{N}(600, \frac{100^2}{9})$ soit $Z = \frac{\overline{X}-600}{100/3} \sim \mathrm{N}(0,1)$.
Région de rejet : $Z \geq z_{1-\alpha} = 1,64$.
La moyenne d'échantillon observée est $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_i X_i = 610,2$, et $Z = \frac{610,2-600}{100/3} = 0,306$.
Donc on accepte H_0 car $Z < 1,64$.

On peut aussi rejeter H_0 si $\overline{X} \geq \mu_0 + z_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, d'où $\overline{X} \geq (600 + 1,64\frac{100}{\sqrt{9}})$ soit $\overline{X} \geq 655$.
D'après les données on a $\overline{X} = 610,2$.
Conclusion : acceptez H_0, les données ne supportent pas significativement H_1.

Remarqons que la procédure du test est la même pour les hypothèses $H_0 : \mu = 600$ contre $H_1 : \mu > 600$. La conclusion est : acceptez H_0, la moyenne n'a pas augmenté, c'est-à-dire que l'insémination était sans effet positif notable sur le niveau des pluies.

Exemple 1.1.2. *Sécurité de l'eau d'une plage.*
Cet exemple est tiré de [5].
Un service de santé de la ville souhaite déterminer si l'eau d'une plage de lac est dans le niveau de sécurité de 200 bactéries par unité de volume. Un chercheur a prélevé 10 échantillons d'eau d'un volume unitaire et a découvert le nombre de bactéries noté ci-après.

175, 190, 215, 198, 184, 207, 210, 193, 196, 180.

Les données indiquent-elles fortement qu'il n'y a pas de motif de préoccupation ?

Soit μ le nombre moyen actuel de bactéries par unité de volume d'eau. L'affirmation *pas de motif de préoccupation* se traduit par $\mu < 200$, et le chercheur cherche des preuves solides à l'appui de cette hypothèse. Donc, la formulation du problème de test pourrait être :
$H_0 : \mu = 200$ contre $H_1 : \mu < 200$ avec niveau de signification $\alpha = 1\%$.
Etant donné que la variable de population X est le nombre de bactéries dans une unité de volume, un modèle typique pour la distribution de X est une distribution de Poisson à moyenne μ. Comme cette moyenne est grande (au moins sous l'hypothèse nulle), l'approximation normale pour la distribution de Poisson est acceptable. On peut donc traiter la population X comme normale à moyenne μ. Nous utilisons le test t de Student avec statistique à test $T = \frac{\overline{X}-200}{S/\sqrt{10}}$ à 9 degrés de liberté.

Puisque H_1 est du côté gauche, nous définissons la région de rejet $T \leq t_{0,01}$. D'après la table de t, nous trouvons que la valeur de $t_{0,01}$ à 9 degrés de liberté est égale à $2,821$. Région de rejet : $R : T \leq -2,821$.
Les calculs à partir d'échantillon donnent
$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_i X_i$ soit $\overline{X} = 194,8$
$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum(X_i - \overline{X})^2$ soit $S = 13,14$
$T = \frac{194,8-200}{13,14/\sqrt{10}} = \frac{-5,26}{4,156} = -1,25$.
La valeur observée $T = -1,25$ est supérieure à $-2,821$, l'hypothèse nulle n'est pas rejetée à $\alpha = 0,01$. Sur la base des données obtenues à partir de ces 10 mesures, il ne semble pas y avoir de forte preuve que la moyenne réelle se situe dans les limites du niveau de sécurité. Alors que la moyenne observée satisfait le seuil de sécurité, 196,8 $<$ 200, le test statistique conclut tout de même que la condition de sécurité, $\mu < 200$, n'est pas satisfaite. Une explication est une trop grande variance dans les données.

Exemple 1.1.3. *Contrôle du processus de remplissage des paquets de café.*
Une fabrique de torréfaction fournit du café en grains en paquets de contenu nominal 250g. Comme le système de remplissage a une variance, le producteur prévoit une marge et organise le système pour un contenu d'au moins 260g. Comme contrôle de qualité du processus de remplissage on vérifie un échantillon de 25 paquets pris au hasard dans la production d'une demi-journée, et leurs contenus donnent une moyenne de $\bar{X}$=257g, avec écart-type S=10g. Peut-on conclure que le remplissage est sous contrôle, ou faut-il intervenir dans le système pour rehausser le remplissage ?

Paramètre μ : le contenu moyen d'un paquet de la production, en g.
Question de recherche : est-ce que $\mu < 260$?
Problème pour un test statistique :
$H_0 : \mu = 260$ (ou $\mu \geq 260$, la production satisfait)
$H_1 : \mu < 260$ (la production ne satisfait pas, reréglez le système)
$\alpha = 5\%$.
Statistique à test : $T = \frac{\bar{X}-260}{S/\sqrt{n}}\Big|_{H_0} \approx Z \sim \mathrm{N}(0,1)$.
Règle de décision : rejetez H_0 si $\bar{X}$ est trop petit, c'est-à-dire si T est trop petit.
Statistique à test observée : $T_{\text{obs}} = \frac{257-260}{10/\sqrt{25}} = -1,500$.
Valeur p : $p = \mathrm{P}(T \leq -1,500|H_0) = 0,067 = 6,7\% > 5\%$.
Conclusion : on peut acceptez l'hypothèse nulle, le système satisfait pour le contenu moyen, il n'y a pas suffisamment d'indication pour intervenir dans le système.

Remarquons que, indépendamment du fait que le système satisfait la règle du producteur, on peut formuler une critique de cette règle. Si le système satisfait la règle, avec le contenu $X \sim \mathrm{N}(260, 10^2)$, alors la proportion de paquets non-satisfaisants le contenu nominal sera $\mathrm{P}(X \leq 250) = 0,159 = 15,9\% > 1/7$. En moyenne plus que 1 sur 7 clients ne recevra pas les 250g marqué sur le paquet. Il faudrait ou bien diminuer la variance du système, ou bien rehausser la marge de contenu.

Remarque 1.1.4. *Tests t et Z ou seulement le test t.*
Pour le cas de variance estimée, nous avons illustré deux tests, t et Z, qui sont largement acceptés dans la littérature. Ils sont basés sur les deux théorèmes :

$T \sim t :\sim t_{n-1}$ si X est normale

$T \approx Z :\sim \mathrm{N}(0,1)$ si X est générale et n grand, parce que $T \xrightarrow{d} Z$.

Quelques auteurs présentent un seul test : $T \sim t$ dans le cas d'une population normale, et dans le cas d'une population non-normale on peut utiliser le même test à condition que l'échantillon est grand.
La section suivante présente une petite recherche bibliographique de la pratique pour le test basé sur T.

1.1.2 Pratique dans l'éducation en statistique appliquée

La table 1.1 donne un aperçu des protocoles pour le test pour une moyenne dans le cas de variance estimée, comme présentés dans une collection de livres de type *Introduction à la statistique* ou *Un premier cours en statistique appliquée*. Nous avons considéré une collection de livres disponibles à la Faculté des Sciences à l'UB ou sur des sites internet ou communiqués par les directeurs du mémoire. Il n'y a pas de homogénéité pour le test T : on propose parfois les deux distributions t et Z, parfois une distribution t.
La table 1.1 oblige à constater que *la présentation du test pour une moyenne dans le cas de variance estimée* dans la littérature éducative n'est pas uniforme.

1.1.3 Relation avec l'étude de la moyenne studentisée de Hall

Suite au résultat bibliographique de la section précédente, se pose la question : lequel des deux protocoles, t et Z, ou seulement t, est préférable pour la vraie distribution de la moyenne studentisée T ? Le promoteur en collaboration avec Menus Nkurunziza m'ont introduit dans leur approche et leur étude (Nkurunziza & Vermeire [10]) de cette question : comparer les erreurs des approximations Z et t pour la vraie distribution de T. Ils se sont inspirés de la méthode et les résultats de Hall [3],[2, chapter 2], qui présente une étude de l'approximation Z pour la moyenne studentisée de Hall, S_n, à l'aide d'expansions d'Edgeworth. Le mémoire étudie et continu l'étude de Hall pour l'aspect erreur de la fonction de distribution $F_Z = \Phi$ par rapport à la vraie fdi F_{S_n}.

1.2 Notions d'ordre, o et O, o_p et O_p

Les notions d'ordre sont utiles pour décrire la précision ou la taille de l'erreur d'une série coupée comme approximation d'une fonction ou d'une statistique.

Pour une étude générale de ces notions nous référons à la littérature, par exemple le livre de Mittelhammer. Nous reprenons ici les définitions d'*ordre en probabilité*, ainsi que quelques propriétés et exemples.

Table 1.1 – Le test T dans la littérature de base.

Livre	*Présentation du test pour une moyenne, cas de variance estimée - la distribution de la statistique studentisée T*
Barrow M. (2009) *Statistics for Economics, Accounting and Business Studies.* 5th Ed., Prentice Hall, Pearson, Harlow (England).	1. Grand échantillon : Z 2. Petit échantillon, population normale : t
Johnson R., Freund J., Miller I. (2011) *Miller and Freund's Probability and Statistics for Engineers.* 8th Ed., Pearson, Boston.	1. Grand échantillon : Z 2. Petit échantillon, population normale : t
Lefebvre M. (2011) *Probabilités, statistique et applications.* Presses internationales Polytechnique, Canada.	1. Grand échantillon : Z 2. Petit échantillon, population normale : t
Moore D.S., McCabe G.P. (2014) *Introduction to the Practice of Statistics.* 8th Ed., Freeman, New York.	Pour une population normale ou grand échantillon : t
Vermeire L. (2019) *Probabilités et statistique inférentielle.* Texte du cours, KU Leuven et Université du Burundi.	1. Grand échantillon : Z 2. Petit échantillon, population normale : t
Thomas H. Wonnacott & Ronald J. Wonnacott (1990) *Introduction Statistics for Business and Economics .* 4th ed., Wiley, Canada	1. Grand échantillon : Z 2. Petit échantillon, population normale : t
Bernard Rosner (2006) *Fundamentals of Biostatistics.* 6th Ed.,Thomson Brooks/Cole, Canada	1. Grand échantillon : Z 2. Petit échantillon, population normale : t
Saporta G. (2006) *Probabilités, Analyse des données et Statistique.* 3e Ed. Réviséé, Editions Technip, Paris	Pour une population normale ou grand échantillon : t
Saporta G. (2011) *Probabilités, Analyse des données et Statistique.* 3e Ed. Réviséé, Editions Technip, Paris	Pour une population normale ou grand échantillon : t
Richard A. Johnson and Gouri K. Bhattacharyya (1987) *Statistics Principles and Methods.* 3e ed., Wiley	1. Grand échantillon : Z 2. Petit échantillon, population normale : t
Dennis D.Wackerly, William Mendenhall III, Richard L. Scheaffer (2008) *Mathematical Statistics with Applications.* 7th Ed.,Thomson Brooks/Cole, Canada	1. Grand échantillon : Z 2. Petit échantillon, population normale : t

Définition 1.2.1. *Les notions d'ordre en probabilité.* Considérez $a_n \in \mathbb{R}$, $n \to \infty$.

1. Une va X_n est **d'un ordre plus petit que** a_n **en probabilité**, noté $X_n = o_p(a_n)$, si
$$\frac{X_n}{a_n} \xrightarrow{p} 0\,.$$
2. Une va X_n est **d'un ordre (au plus)** a_n **en probabilité**, noté $X_n = O_p(a_n)$, si pour toute $\epsilon > 0$ il existe un $M > 0$ et $N > 0$ telle que
$$\mathrm{P}\left(\left|\frac{X_n}{a_n}\right| > M\right) < \epsilon \qquad \text{pour tout } n > N\,.$$

Exemple 1.2.2. Quelques exemples pour récapituler o et O, et pour illustrer o_p et O_p, pour $n \to \infty$.

1. Si $a_n/b_n \to c$, où c est une constante, alors $a_n = O(b_n)$.
Si $c \neq 0$ alors on dit que a_n est exactement du même ordre que b_n.
Si $c = 0$ alors on a même $a_n = o(b_n)$.
2. Souvent O est plus informatif que o. Par exemple
$$a_n := 2n^3 - 3n^2 + 2 = o(n^4)$$
mais
$$a_n := 2n^3 - 3n^2 + 2 = O(n^3)$$
donne l'ordre exact de la taille de a_n.
3. De la série de Taylor
$$e^{1/n} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{2!\,n^2} + \frac{1}{3!\,n^3} + \dots$$
on obtient
$$e^{1/n} = 1 + \frac{1}{n} + o(n^{-1})$$
$$e^{1/n} = 1 + \frac{1}{n} + O(n^{-2})\,.$$
4. Pour une va X_n à variance finie, on a
$$X_n - \mathrm{E}(X_n) = O_p\Big(\sqrt{\mathrm{V}(X_n)}\Big) \tag{1.1}$$
comme corollaire de l'inégalité de Tchebychev.
En effet pour $Y_n = (X_n - \mathrm{E}(X_n))/\sqrt{\mathrm{V}(X_n)}$ et une $\epsilon > 0$ donnée, il faut trouver $M = M(\epsilon)$ tel que $\mathrm{P}(|Y_n| > M) \leq \epsilon$. L'inégalité de Tchebichev procure $\mathrm{P}(|Y_n| > M) \leq \mathrm{E}(Y_n^2)/M^2 = 1/M^2$. Il suffit de choisir $1/M^2 = \epsilon$, c'est-à-dire $M = \epsilon^{-1/2}$.
5. Soit $X_n \sim \mathrm{N}(0,1)$, alors $X_n = O_p(1)$.

6. Les propriétés d'ordre de type

$$\begin{aligned} a_n = o(n^{-1/2}),\ b_n = o(n^{-1}) &\implies a_n + b_n = o(n^{-1/2}),\ a_n b_n = o(n^{-3/2}), \\ a_n = O(n^{-1/2}),\ b_n = O(n^{-1}) &\implies a_n + b_n = O(n^{-1/2}),\ a_n b_n = O(n^{-3/2}), \end{aligned}$$

passent pour l'ordre en probabilité :

$$\begin{aligned} X_n = o_p(n^{-1/2}),\ Y_n = o_p(n^{-1}) &\implies X_n + Y_n = o_p(n^{-1/2}),\ X_n Y_n = o_p(n^{-3/2}), \\ X_n = O_p(n^{-1/2}),\ Y_n = O_p(n^{-1}) &\implies X_n + Y_n = O_p(n^{-1/2}),\ X_n Y_n = O_p(n^{-3/2}). \end{aligned}$$

7. Si $a_n = O(n^{-1/2}),\ X_n = O_p(n),\ Y_n = O_p(n^3)$, alors $a_n X_n Y_n = O_p(n^{7/2})$.
8. On connait la propriété :
   si $b_n/a_n \to c$ pour une constante c, alors $b_n = O(a_n)$.
   Elle passe pour l'ordre en probabilité :
   si $X_n/a_n \xrightarrow{d} X$ pour une variable aléatoire X_n à variance finie, alors $X_n = O_p(a_n)$.
9. $X_n = O_p(a_n) \iff |X_n| = O_p(a_n)$.
10. Pour la moyenne d'échantillon d'une population X a moyenne μ et variance finie on a

$$\overline{X} - \mu = o_p(1), \qquad \overline{X} = O_p(n^{-1/2})\,. \tag{1.2}$$

    La première égalité suit de la loi des grands nombres, $\overline{X} \xrightarrow{p} \mathrm{E}(X) = \mu$. La deuxième égalité est un corollaire de l'inégalité de Tchebychev. Alors pour la population X à moyenne 0 et variance 1 du problème initial de ce mémoire on a

$$\overline{X} = o_p(1), \qquad \overline{X} = O_p(n^{-1/2})\,. \tag{1.3}$$

11. Comme dans le livre de Hall, nous utiliserons des propriétés du type :
    si $S_n = U_n + O_p(n^{-1/2})$ alors $\mathrm{E}(S_n) = \mathrm{E}(U_n) + O(n^{-1/2})$.
    Remarquons que cette propriété peut donner un résultat faible ou un ordre exact. Par exemple de $\overline{X} = O_p(n^{-1/2})$ on obtient $\mathrm{E}(\overline{X}) = O(n^{-1/2})$, alors que nous connaissons le résultat plus fort $\mathrm{E}(\overline{X}) = 0$. On obtient aussi $\overline{X}^2 = O_p(n^{-1})$ et $\mathrm{E}(\overline{X}^2) = O(n^{-1})$ qui donne l'ordre exact, puisque $\mathrm{E}(\overline{X}^2) = \mathrm{V}(\overline{X}) = \mathrm{V}(X)/n = 1/n$.
12. Des deux items précédents, et $r \geq 1$, on obtient

$$\overline{X}^r = O_p(n^{-r/2}), \qquad \mathrm{E}(\overline{X}^r) = O(n^{-r/2})\,.$$

    Ceci confirme une propriété du livre de Serfling (2002), p.68 : si $\mathrm{E}|X|^r < \infty$ alors

$$\mathrm{E}\Big|\sum_i X_i\Big|^r = O(n^{r/2})\,. \tag{1.4}$$

1.3 Série binomiale

Pour des nombres $\alpha \in \mathbb{C}$, $x \in \mathbb{C}$, la série binomiale est

$$(1+x)^{\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$$

et la série est sûrement convergente si $|x| < 1$. En particulier,

$$(1+x)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4 + \ldots \quad (|x| < 1)$$

et, pour $x \to 0$,

$$(1+x)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + O(x^4) \tag{1.5}$$

1.4 Multinomium

La forme générale du multinomium est

$$(x_1 + \ldots + x_r)^n = \sum_{\substack{k_1 \geq 0, \ldots, k_r \geq 0 \\ \sum_i k_i = n}} \binom{n}{k_1, \ldots, k_r} x_1^{k_1} \ldots x_r^{k_r} \tag{1.6}$$

où le coefficient multinomial, avec $n \in \mathbb{N}$, chaque $k_i \in \mathbb{N}$, $\sum_i k_i = n$, est

$$\binom{n}{k_1, \ldots, k_r} = \frac{n!}{k_1! \ldots k_r!} .$$

Quelques applications pour $\sum_i X_i = X_1 + \ldots X_n$:

$$\Big(\sum_i X_i\Big)^2 = \sum_i X_i^2 + \sum_{k \neq \ell} X_k X_\ell \tag{1.7}$$

$$= \sum_i X_i^2 + 2 \sum_{k < \ell} X_k X_\ell \tag{1.8}$$

$$\Big(\sum_i X_i\Big)^3 = \sum_i X_i^3 + 3 \sum_{k \neq \ell} X_k^2 X_\ell + 6 \sum_{k < \ell < r} X_k X_\ell X_r \tag{1.9}$$

$$\Big(\sum_i X_i\Big)^4 = \sum_i X_i^4 + 4 \sum_{k \neq \ell} X_k^3 X_\ell + 6 \sum_{k < \ell} X_k^2 X_\ell^2 + 12 \sum_{\substack{\ell < r \\ \ell \neq k, r \neq k}} X_k^2 X_\ell X_r + 24 \sum_{k < \ell < r < s} X_k X_\ell X_r X_s \tag{1.10}$$

$$\Big(\sum_i X_i\Big)^5 = \sum_i X_i^5 + 5\sum_{k\neq\ell} X_k^4 X_\ell + 10\sum_{k\neq\ell} X_k^3 X_\ell^2 + 20\sum_{\substack{\ell<r\\ \ell\neq k, r\neq k}} X_k^3 X_\ell X_r + 30\sum_{\substack{k<\ell\\ r\neq k, r\neq\ell}} X_k^2 X_\ell^2 X_r + 60\sum_{\substack{\ell<r<s\\ \ell\neq k, r\neq k, s\neq k}} X_k^2 X_\ell X_r X_s + 120\sum_{k<\ell<r<s<t} X_k X_\ell X_r X_s X_t\,. \tag{1.11}$$

1.5 Expressions pour des moments mixtes d'échantillon

Soit X une population à moyenne 0 et variance 1, et notons son asymétrie γ et sa kurtosis κ.
Quelques moments des variables aléatoires X et X^2-1 :

$$\mathrm{E}(X)=0,\ \mathrm{E}(X^2)=\mathrm{V}(X)=1,\ \mathrm{E}(X^3)=\gamma,\ \mathrm{E}(X^4)=\kappa+3,\ \alpha_r=\mathrm{E}(X^r), \tag{1.12}$$

$$\mathrm{E}(X^2-1)=0,\ \mathrm{V}(X^2-1)=\mathrm{V}(X^2)=\kappa+2\,. \tag{1.13}$$

Deux expressions générales de moments mixtes :

$$\mathrm{E}(X_i^r X_j^s) = \begin{cases} \mathrm{E}(X_i^r)\mathrm{E}(X_j^s)=\alpha_r\alpha_s, & j\neq i\\ \mathrm{E}(X_i^{r+s})=\alpha_{r+s}, & j=i \end{cases}$$

$$\mathrm{E}(X_k^r X_\ell^s X_j^t)\big|_{k\neq\ell} = \begin{cases} \alpha_r\alpha_s\alpha_t, & j\neq k,\ j\neq\ell\\ \alpha_{r+t}\alpha_s, & j=k\neq\ell\\ \alpha_r\alpha_{s+t}, & j=\ell\neq k\,. \end{cases}$$

Quelques expressions spécifiques qui seront utiles dans la suite :

$$\mathrm{E}(X_iX_k) = \begin{cases} 0, & k\neq i\\ 1, & k=i \end{cases}$$

$$\mathrm{E}(X_iX_k^2) = \begin{cases} 0, & k\neq i\\ \gamma, & k=i \end{cases}$$

$$\mathrm{E}(X_iX_k^3) = \begin{cases} 0, & k\neq i\\ \kappa+3, & k=i \end{cases}$$

$$\mathrm{E}(X_i^2X_k^2) = \begin{cases} 1, & k\neq i\\ \kappa+3, & k=i \end{cases}$$

$$\mathrm{E}(X_i X_k^r) = \begin{cases} 0, & k \neq i \\ \alpha_{r+1}, & k = i \end{cases}$$

$$\mathrm{E}(X_k X_\ell X_i^r)\big|_{k\neq\ell} = 0$$

$$\mathrm{E}\Big(X_k(X_\ell^2 - 1)X_i^r\Big)\big|_{k\neq\ell} = 0$$

$$\mathrm{E}(X_i X_k^2 X_\ell^2)\big|_{k\neq\ell} = \begin{cases} 0, & \ell \neq i, k \neq i \\ \gamma, & k = i \neq \ell \\ \gamma, & \ell = i \neq k \end{cases}$$

$$\mathrm{E}(X_k X_\ell X_r^2 X_s^2)\big|_{k\neq\ell, r\neq s} = \begin{cases} \gamma^2, & (r,s) = (k,\ell) \\ \gamma^2, & (r,s) = (\ell,k) \\ 0, & \text{autrement.} \end{cases}$$

Prouvons par exemple ce dernier. Supposez $k \neq \ell$ fixées, puis considérez $r \neq s$. Utilisez la factorisation de l'espérance pour des variables indépendantes.
Si $(r,s) = (k,\ell)$ alors $\mathrm{E}(X_k X_\ell X_r^2 X_s^2) = \mathrm{E}(X_k^3 X_\ell^3) = \mathrm{E}(X_k^3)\,\mathrm{E}(X_\ell^3) = \gamma^2$. Pareillement si $(r,s) = (\ell,k)$. Si $r = k, s \neq \ell$ alors $\mathrm{E}(X_k X_\ell X_r^2 X_s^2) = \mathrm{E}(X_k^3 X_\ell X_s^2) = \mathrm{E}(X_k^3)\mathrm{E}(X_\ell)\mathrm{E}(X_s^2)$ $= \gamma \times 0 \times 1 = 0$. Pareillement pour les cas $r = \ell, s \neq k$ ou si $\{r,s\}$ a un seul élément en commun avec $\{k,\ell\}$. Si $\{r,s\} \cap \{k,\ell\} = \emptyset$ alors $\mathrm{E}(X_k X_\ell X_r^2 X_s^2) = \mathrm{E}(X_k)\mathrm{E}(X_\ell)\mathrm{E}(X_r^2)\mathrm{E}(X_s^2)$ $= 0 \times 0 \times 1 \times 1 = 0$..

1.6 Méthodes de calcul pour $\mathbf{E}(\overline{X}^k\,\overline{Y}^\ell)$

Dans le calcul de $\mathrm{E}(S_n)$, $\mathrm{E}(S_n^2)$, etc. nous rencontrerons des espérances du type $\mathrm{E}(\overline{X}^k\,\overline{Y}^\ell)$ où X et $Y = X^2 - 1$ ont chacune moyenne zéro. Comme inspiration pour de tels calculs, nous illustrons plusieurs méthodes pour calculer en particulier

$$\mathrm{E}(\overline{X}^3) = n^{-2}\gamma \tag{1.14}$$

ou l'expression équivalente

$$\mathrm{E}\Big[\Big(\sum_i X_i\Big)^3\Big] = n\gamma\,. \tag{1.15}$$

Méthode 1. Par le multinomium

$$\Big(\sum_i X_i\Big)^3 = \sum_i X_i^3 + 3\sum_{k\neq\ell} X_k^2 X_\ell + 6\sum_{k<\ell<r} X_k X_\ell X_r$$

$$\mathrm{E}\Big[\Big(\sum_i X_i\Big)^3\Big] = n\gamma + 0 + 0 = n\gamma\,.$$

Méthode 2. Obtenir la récurrence et exploiter l'indépendance des X_i
Notons les indices $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, n-1$, et $A_n = \mathrm{E}\Big[\Big(\sum_i X_i\Big)^3\Big]$. Considérez l'expansion

$$\begin{aligned}\Big(\sum_i X_i\Big)^3 &= \Big(\sum_j X_j + X_n\Big)^3 \quad \text{où } \sum_j X_j \text{ et } X_n \text{ sont indépendantes} \\ &= \Big(\sum_j X_j\Big)^3 + 3\Big(\sum_j X_j\Big)^2 X_n + 3\Big(\sum_j X_j\Big) X_n^2 + X_n^3 .\end{aligned}$$

Pour les espérances des termes à droite, notons par exemple le deuxième :
$\mathrm{E}[(\sum_j X_j)^2 X_n] = \mathrm{E}(\sum_j X_j)^2 \mathrm{E}(X_n) = 0$ parce que $\mathrm{E}(X_n) = 0$. On obtient

$$A_n = \mathrm{E}\Big[\Big(\sum_i X_i\Big)^3\Big] = A_{n-1} + 0 + 0 + \gamma$$

c.-à-d. la formule de récurrence

$$A_n = \gamma + A_{n-1} .$$

Par récurrence on calcule $A_n = (n-1)\gamma + A_1$, où $A_1 = \mathrm{E}(X_1^3) = \gamma$, et donc
$A_n = \mathrm{E}\Big[\Big(\sum_i X_i\Big)^3\Big] = n\gamma$.

Méthode 3. Par la fonction génératrice des moments
Soit $M(t)$ la fgm pour $\sum_i X_i$, alors $\mathrm{E}\Big[\Big(\sum_i X_i\Big)^3\Big] = D^3 M(0)$. On calcule facilement

$$\begin{aligned} M(t) &= \mathrm{E}\big[e^{t\sum_i X_i}\big] = [M_X(t)]^n \\ DM(t) &= n\,[M_X(t)]^{n-1} DM_X(t) \\ D^3M(t) &= n(n-1)(n-2)[M_X(t)]^{n-3}[DM_X(t)]^3 \\ &\quad + 3n(n-1)[M_X(t)]^{n-2}[DM_X(t)]^2 D2M_X(t) + n[M_X(t)]^{n-1} D^3 M_X(t) .\end{aligned}$$

En utilisant $M_X(0) = 1$, $DM_X(0) = \mathrm{E}(X) = 0$, $D^2M_X(0) = \mathrm{E}(X^2) = 1$,
$D^3M_X(0) = \mathrm{E}(X^3) = \gamma$ on obtient $D^3M(0) = n\gamma$.

Méthode 4. Factoriser et utiliser la covariance, et l'indépendance des X_i

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\Big[\Big(\sum_i X_i\Big)^3\Big] &= \mathrm{E}\Big[\Big(\sum_i X_i\Big)^2 \sum_j X_j\Big] \\
&= \mathrm{C}\Big[\Big(\sum_i X_i\Big)^2, \sum_j X_j\Big] \\
&= \mathrm{C}\Big[\sum_i X_i^2 + \sum_{k\neq\ell} X_k X_\ell, \sum_j X_j\Big] \\
&= \sum_j \sum_i \mathrm{C}(X_i^2, X_j) + \sum_j \sum_{k\neq\ell} \mathrm{C}(X_k X_\ell, X_j) \\
&= n\gamma + 0\,.
\end{aligned}$$

1.7 Restriction à une population standardisée

Cette section montrera que pour les calculs concernant la moyenne studentisée de Hall S_n, qui est au cœur de ce mémoire, on pourra se limiter au cas d'une population standardisée.

Lemme 1.7.1. Lemme de la standardisation. Soit une population X et notons les moments $\alpha_k = \alpha_{k,X} = \mathrm{E}(X^k)$ et les moments centrés $\mu_k = \mu_{k,X} = \mathrm{E}(X-\mu)^k$, $k = 1, 2, \ldots$. Alors la moyenne, la variance, l'asymétrie et le kurtosis sont respectivement $\mu = \alpha_1$, $\sigma^2 = \mu_2$, $\gamma = \mu_3/\sigma^3$ et $\kappa = \mu_4/\sigma^4 - 3$. Pour un échantillon iid $X_1, \ldots, X_n$ de X, notons la moyenne d'échantillon et la variance d'échantillon (non corrigée pour biais)

$$\overline{X} = n^{-1}\sum_i X_i, \qquad \hat{\sigma^2} = n^{-1}\sum_i \Big(X_i - \overline{X}\Big)^2 = n^{-1}\sum_i X_i^2 - \overline{X}^2\,,$$

les moments d'échantillon, les moments centrées d'échantillon, et les moments centrés d'échantillon à moyenne estimée respectivement

$$a_k = \hat{\alpha_k} = \frac{\sum_i X_i^k}{n}, \quad b_k = \frac{\sum_i (X_i-\mu)^k}{n}, \quad m_k = \hat{\mu}_k = \frac{\sum_i (X_i - \overline{X})^k}{n}\,,$$

et la moyenne d'échantillon studentisée de type Hall (la moyenne studentisée MM)

$$S_n = n^{1/2}\,\frac{\overline{X}-\mu}{\hat{\sigma}}\,.$$

Notons la variable standardisée $Y = (X-\mu)/\sigma$. Alors $Y_1, \ldots, Y_n$, avec $Y_i = (X_i - \mu)/\sigma$, est un échantillon iid de Y, et on a les relations suivantes entre les moments de population et les moments d'échantillon des deux variables X et Y :

1. Relation entre les moments de population. Y a la moyenne 0 et la variance 1, la standardisation ne change ni l'asymétrie ni le kurtosis, mais cela n'est pas le cas pour les moments :

$$\mu_Y = 0, \quad \sigma_Y^2 = 1, \quad \alpha_{k,Y} = \mu_{k,Y} = \frac{\mu_k}{\sigma^k}, \quad \gamma_Y = \gamma_X = \gamma, \quad \kappa_Y = \kappa_X = \kappa\,. \tag{1.16}$$

   En particulier, pour le cinquième moment,

$$\alpha_{5,Y} = \frac{\mu_5}{\sigma^5} = \frac{1}{\sigma^5}\left(\alpha_5 - 5\mu\alpha_4 + 10\mu^2\alpha_3 - 10\mu^3\alpha_2 + 4\mu^5\right)\,. \tag{1.17}$$

2. Relation entre les moments d'échantillon.

$$\bar{Y} = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma}, \quad \hat{\sigma}_Y^2 = \frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}, \quad a_{k,Y} = b_{k,Y} = \frac{b_k}{\sigma^k}, \quad m_{k,Y} = \frac{m_k}{\sigma^k} \tag{1.18}$$

3. En particulier, la distribution de la moyenne studentisée de Hall pour X est la même que celle pour Y :

$$S_{n,Y} = S_{n,X} \tag{1.19}$$

   et donc, $F_{S_n,X} = F_{S_n,Y}$.

Preuve. Des calculs simples. Par exemple, de $Y = (X - \mu)/\sigma$, on a $\mu_Y = 0$, $\sigma_Y^2 = 1$, et on calcule facilement $Y_i - \overline{Y} = (X_i - \overline{X})/\sigma$ et

$$b_{k,Y} = \frac{\sum_i (Y_i - \mu_Y)^k}{n} = \frac{\sum_i Y_i^k}{n} = \frac{\sum_i (X_i - \mu)^k}{n\sigma^k} = \frac{b_k}{\sigma^k}$$

$$\hat{\sigma}_Y^2 = \frac{\sum_i (Y_i - \bar{Y})^2}{n} = \frac{\sum_i (X_i - \bar{X})^2}{n\sigma^2} = \frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}$$

$$S_{n,Y} = n^{1/2}\,\frac{\overline{Y} - \mu_Y}{\hat{\sigma}_Y} = n^{1/2}\,\frac{\overline{Y}}{\hat{\sigma}_Y} = n^{1/2}\,\frac{\overline{X} - \mu}{\hat{\sigma}} = S_{n,X}\,.$$

Corollaires pour la moyenne studentisée S_n

- La distribution de la moyenne studentisée S_n pour une population X ne dépend pas de la moyenne ou la variance de population, mais uniquement des propriétés de sa variable standardisée $(X - \mu)/\sigma$.
- Pour les calculs de l'expansion d'Edgeworth de la fdi de la statistique studentisée

$$S_n = n^{1/2}\,\frac{\overline{X} - \mu}{\hat{\sigma}}$$

  d'une population X on peut supposer X standardisée, et donc

$$S_n = n^{1/2}\,\frac{\overline{X}}{\hat{\sigma}}\,,$$

  à condition de substituer dans ces résultats X par la variable standardisée $(X - \mu)/\sigma$, en particulier à condition de lire le moment $\alpha_k = \mathrm{E}(X^k)$ comme le **moment standard** $\alpha_k = \mathrm{E}[(X - \mu)/\sigma]^k$.

Chapitre 2

Premiers moments de S_n

Ce chapitre débouchera sur les expansions pour les premiers quatre moments de la moyenne studentisée de Hall, $\mathrm{E}(S_n^r),\ r = 1, 2, 3, 4$ jusqu'à l'ordre 1, 2 et 3 en puissances de $n^{-1/2}$, c'est-à-dire les expansions à erreur d'ordre $n^{-1}, n^{-3/2}, n^{-2}$. Nous obtenons les expansions à l'ordre 2, donc jusqu'au terme en n^{-1} ou à erreur d'ordre $n^{-3/2}$, énoncés dans le livre de Hall, p. 72-73. Nous élargissons ces expansions jusqu'à l'ordre 3, donc à erreur d'ordre n^{-2}. En plus, nos calculs offrent des expressions complètes pour plusieurs moments mixtes d'échantillon.

2.1 Expansions pour S_n et ses premières puissances

Du problème initial, nous considérons la moyenne studentisée de type Hall,

$$S_n = n^{1/2}\overline{X}/\hat{\sigma} = n^{1/2}\overline{X}\Big(n^{-1}\sum_i (X_i - \overline{X})^2\Big)^{-1/2} = n^{1/2}\overline{X}\Big(n^{-1}\sum_i X_i^2 - \overline{X}^2\Big)^{-1/2} \quad (2.1)$$

où X peut être traitée comme une variable standardisée, à moyenne 0 et variance 1. Cette section développe les expansions pour S_n à erreur d'ordre n^{-1}, $n^{-3/2}$, n^{-2} respectivement. Puis pareillement pour les puissances $S_n^2,\ S_n^3,\ S_n^4$. Nous insistons sur la structure des expressions à l'aide d'abréviations, pour bien révéler l'ordre des termes.

Dans le livre de Hall on passe vers l'expression modifiée

$$S_n = n^{1/2}\overline{X}\Big(1 + n^{-1}\sum_i (X_i^2 - 1) - \overline{X}^2\Big)^{-1/2}. \quad (2.2)$$

Ce choix permettra de voir facilement l'ordre des termes : sachant que $\overline{X} = O_p(n^{-1/2})$ pour toute population X à moyenne zéro, alors $n^{-1}\sum_i \Big(X_i^2 - 1\Big) = O_p(n^{-1/2})$ comme moyenne d'échantillon d'une population $X^2 - 1$ à moyenne zéro.

Le membre droit a la structure suivante, avec explicitation de l'ordre de ses termes :

$$\begin{aligned} S_n &= A(1+B+C)^{-1/2} \\ &= A(1+x)^{-1/2}, \quad x := B+C, \end{aligned} \tag{2.3}$$

où

$$\begin{aligned} A &:= n^{1/2}\overline{X} = n^{-1/2}\Big(\sum X_i\Big) = O_p(1) \\ B &:= n^{-1}\sum (X_i^2 - 1) = O_p(n^{-1/2}) \\ C &:= -\overline{X}^2 = -n^{-2}\Big(\sum X_i\Big)^2 = O_p(n^{-1})\,. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Comme $x = B + C = O_p(n^{-1/2})$, la série binomiale est valable :

$$\begin{aligned} &S_n = A(1+x)^{-1/2}, && (1+x)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + O(x^4) \\ &S_n^2 = A^2(1+x)^{-1}, && (1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + O(x^4) \\ &S_n^3 = A^3(1+x)^{-3/2}, && (1+x)^{-3/2} = 1 - \frac{3}{2}x + \frac{15}{8}x^2 - \frac{35}{16}x^3 + O(x^4) \\ &S_n^4 = A^4(1+x)^{-2}, && (1+x)^{-2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + O(x^4) \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} &x = B + C, \qquad B = O_p(n^{-1/2}),\ C = O_p(n^{-1}) \\ &x^2 = (B+C)^2 = B^2 + 2BC + O_p(n^{-2}) \\ &x^3 = (B+C)^3 = B^3 + O_p(n^{-2}). \end{aligned}$$

Alors, on obtient le lemme suivant.

Lemme 2.1.1. Pour S_n et ses puissances 1 à 4, on obtient les équations de structure par rapport aux puissances de $n^{-1/2}$:

$$\begin{aligned} S_n &= A\Big\{1 - \frac{1}{2}B - \frac{1}{2}C + \frac{3}{8}B^2 + \frac{3}{4}BC - \frac{5}{16}B^3\Big\} + O_p(n^{-2}) \\ &= A\Big\{1 - \frac{1}{2}B - \frac{1}{2}C + \frac{3}{8}B^2\Big\} + O_p(n^{-3/2}) \\ &= A\Big\{1 - \frac{1}{2}B\Big\} + O_p(n^{-1}) \end{aligned} \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned} S_n^2 &= A^2\Big\{1 - B - C + B^2 + 2BC - B^3\Big\} + O_p(n^{-2}) \\ &= A^2\Big\{1 - B - C + B^2\Big\} + O_p(n^{-3/2}) \\ &= A^2\Big\{1 - B\Big\} + O_p(n^{-1}) \end{aligned} \tag{2.6}$$

$$
\begin{aligned}
S_n^3 &= A^3\Big\{1 - \frac{3}{2}B - \frac{3}{2}C + \frac{15}{8}B^2 + \frac{15}{4}BC - \frac{35}{16}B^3\Big\} + O_p(n^{-2}) \\
&= A^3\Big\{1 - \frac{3}{2}B - \frac{3}{2}C + \frac{15}{8}B^2\Big\} + O_p(n^{-3/2}) \qquad (2.7) \\
&= A^3\Big\{1 - \frac{3}{2}B\Big\} + O_p(n^{-1})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S_n^4 &= A^4\Big\{1 - 2B - 2C + 3B^2 + 6BC - 4B^3\Big\} + O_p(n^{-2}) \\
&= A^4\Big\{1 - 2B - 2C + 3B^2\Big\} + O_p(n^{-3/2}) \qquad (2.8) \\
&= A^4\Big\{1 - 2B\Big\} + O_p(n^{-1})
\end{aligned}
$$

tous avec A, B, C de (2.4).

2.2 Expansions pour les premiers moments de S_n

Théorème 2.2.1. Pour le premier jusqu'au quatrième moment de S_n les expansions en puissances de $n^{-1/2}$ à l'ordre 1, 2 et 3 sont données par les expressions suivantes.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(S_n) &= -\frac{1}{2}n^{-1/2}\gamma + O(n^{-1}) && (2.9)\\
&= -\frac{1}{2}n^{-1/2}\gamma + O(n^{-3/2}) && (2.10)\\
&= -\frac{1}{2}n^{-1/2}\gamma + \frac{1}{8}n^{-3/2}\Big(3\alpha_5 - \frac{15}{2}\kappa\gamma - 35\gamma\Big) + O(n^{-2}) && (2.11)\\
\mathrm{E}(S_n^2) &= 1 + O(n^{-1}) && (2.12)\\
&= 1 + n^{-1}(2\gamma^2 + 3) + O(n^{-3/2}) && (2.13)\\
&= 1 + n^{-1}(2\gamma^2 + 3) + O(n^{-2}) && (2.14)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(S_n^3) &= -\frac{7}{2}n^{-1/2}\gamma + O(n^{-1}) && (2.15)\\
&= -\frac{7}{2}n^{-1/2}\gamma + O(n^{-3/2}) && (2.16)\\
&= -\frac{7}{2}n^{-1/2}\gamma + \frac{1}{8}n^{-3/2}\Big(33\alpha_5 - \frac{105}{2}\kappa\gamma - 105\gamma^3 - 477\gamma\Big) + O(n^{-2}) && (2.17)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(S_n^4) &= 3 + O(n^{-1}) && (2.18)\\
&= 3 + n^{-1}(28\gamma^2 - 2\kappa + 24) + O(n^{-3/2}) && (2.19)\\
&= 3 + n^{-1}(28\gamma^2 - 2\kappa + 24) + O(n^{-2})\,. && (2.20)
\end{aligned}
$$

où interviennent les moments $\alpha_k = \mathrm{E}(X^k)$, $k = 1, 2, \ldots$, et en particulier l'asymétrie $\gamma = \mathrm{E}(X^3)$ et le kurtosis $\kappa = \mathrm{E}(X^4) - 3$.

Pour une population initiale X générale à moyenne μ et variance σ^2, la moyenne studentisée de Hall est $S_n = n^{1/2}(\overline{X} - \mu)/\hat{\sigma}$, et les expressions ci-dessus restent valables, à condition de lire X dans ces expressions comme la variable standardisée $(X - \mu)/\sigma$, donc le moment $\alpha_k = \mathrm{E}(X^k)$ comme le moment standard $\alpha_k = \mathrm{E}[(X - \mu)/\sigma]^k = \mu_k/\sigma^k$; en particulier on a γ et κ sont l'asymétrie et le kurtosis de X et $\alpha_5 = \mathrm{E}[(X - \mu)/\sigma]^5 = \mu_5/\sigma^5$ est le cinquième moment standard.

Interprétation. Pour les moments $\mathrm{E}(S_n^k)$ d'ordre $k = 1, 2, \ldots$ de la statistique studentisée S_n, on peut analyser leurs expansions en puissances de $n^{-1/2}$ d'ordre 1 à 3 sous deux points de vue :

- Quels facteurs de population faut-il inclure dans l' expansion d'un moment afin d'atteindre une précision d'ordre 1, 2, 3 respectivement ?
- Quels facteurs de population sont dominants pour ces moments ?

Du thèorème, pour les moments d'ordre 1 à 4, on peut conclure :

1. L'expansion asymptotique de chaque moment de S_n dépend uniquement des moments standards de population.
2. Globalement, pour une précision d'ordre 1 à 3, il faut inclure les moments de population d'ordre 3 à 5, respectivement l'asymétrie γ, le kurtosis κ, et le moment standard α_5.
3. Effet des moments de population :
   - Le premier facteur est l'asymétrie γ, et elle a un effet dès l'ordre 1 pour les moments impairs, et dès l'ordre 2 pour les moments pairs.
   - Le deuxième facteur est le kurtosis κ, et il a un effet que dès l'ordre 2 et seulement pour le quatrième moment.
   - Le cinquième moment a un effet seulement dès l'ordre 3, et cela que pour les moments impairs.
4. Pour obtenir dans l'expansion des moments de S_n une précision progressante à partir de l'ordre 1, il faut typiquement inclure des moments de population d'ordre progressif à partir de l'asymétrie :
   - pour une précision à l'ordre 1, au maximum l'asymétrie intervient ;
   - à l'ordre 2, au maximum l'asymétrie et le kurtosis interviennent ;
   - à l'ordre 3, au maximum l'asymétrie, le kurtosis et le moment standard d'ordre 5 interviennent.
5. Les expansions montrent des paires d'expansions égales :
   - Les expansions d'ordre 1 et 2 sont égales pour les moments impairs.
   - Les expansions d'ordre 2 et 3 sont égales pour les moments pairs.

Preuve pour le théorème. Pour calculer les moments $\mathrm{E}(S_n)$, $\mathrm{E}(S_n^2)$, $\mathrm{E}(S_n^3)$, $\mathrm{E}(S_n^4)$, les équations de structure (2.5)-(2.8) indiquent le calcul des espérances des termes à droite,

comme $\mathrm{E}(A)$, $\mathrm{E}(AB)$, etc. Il faudra essentiellement les espérances suivantes, des moments mixtes d'échantillon de la forme

$$A_{k,\ell} = \mathrm{E}\Big\{ \Big(\sum X_i\Big)^k \Big[\sum (X_j^2 - 1)\Big]^\ell \Big\}, \tag{2.21}$$

que nous prouverons après. Chaque sommation se fait de 1 à n, sauf marquée autrement.

$$\mathrm{E}\Big\{\sum X_i\Big\} = 0 \tag{2.22}$$

$$\mathrm{E}\Big\{\Big(\sum X_i\Big)^2\Big\} = n \tag{2.23}$$

$$\mathrm{E}\Big\{\Big(\sum X_i\Big)^3\Big\} = n\gamma \tag{2.24}$$

$$\mathrm{E}\Big\{\Big(\sum X_i\Big)^4\Big\} = 3n^2 + n\kappa \tag{2.25}$$

$$\mathrm{E}\Big\{\Big(\sum X_i\Big)^5\Big\} = 10n^2\gamma + n(\alpha_5 - 10\gamma) \tag{2.26}$$

$$\mathrm{E}\Big\{\Big(\sum X_i\Big)^6\Big\} = 15n^3 + n^2(10\gamma^2 + 15\kappa) + n(\alpha_6 - 10\gamma^2 - 15\kappa - 15) \tag{2.27}$$

$$\mathrm{E}\Big\{\Big(\sum X_i\Big)\Big[\sum\Big(X_j^2 - 1\Big)\Big]\Big\} = n\gamma \tag{2.28}$$

$$\mathrm{E}\Big\{\Big(\sum X_i\Big)^2\Big[\sum\Big(X_j^2 - 1\Big)\Big]\Big\} = n(\kappa + 2) \tag{2.29}$$

$$\mathrm{E}\Big\{\Big(\sum X_i\Big)^3\Big[\sum\Big(X_j^2 - 1\Big)\Big]\Big\} = 3n^2\gamma + n(\alpha_5 - 4\gamma) \tag{2.30}$$

$$\mathrm{E}\Big\{\Big(\sum X_i\Big)^4\Big[\sum\Big(X_j^2 - 1\Big)\Big]\Big\} = n^2(4\gamma^2 + 6\kappa + 12) + n(\alpha_6 - 4\gamma^2 - 7\kappa - 15) \tag{2.31}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\Big\{\Big(\sum X_i\Big)^5\Big[\sum\Big(X_j^2 - 1\Big)\Big]\Big\} &= 15\gamma\ n^3 + n^2(10\alpha_5 + 15\kappa\gamma - 20\gamma) \\ &\quad + n(\alpha_7 - 11\alpha_5 - 15\kappa\gamma + 5\gamma)\end{aligned} \tag{2.32}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\Big\{\Big(\sum X_i\Big)^6\Big[\sum\Big(X_j^2 - 1\Big)\Big]\Big\} &= n^3(60\gamma^2 + 45\kappa + 90) + n^2(15\alpha_6 + 26\alpha_5\gamma + 15\kappa^2 \\ &\quad - 75\kappa - 200\gamma^2 - 225) + n(\alpha_8 - 16\alpha_6 - 26\alpha_5\gamma \\ &\quad - 15\kappa^2 + 30\kappa + 140\gamma^2 + 135)\end{aligned} \tag{2.33}$$

$$\mathrm{E}\Big\{\Big(\sum X_i\Big)\Big[\sum\Big(X_j^2 - 1\Big)\Big]^2\Big\} = n(\alpha_5 - 2\gamma) \tag{2.34}$$

$$\mathrm{E}\Big\{\Big(\sum X_i\Big)^2\Big[\sum\Big(X_j^2 - 1\Big)\Big]^2\Big\} = n^2(2\gamma^2 + \kappa + 2) + n(\alpha_6 - 2\gamma^2 - 3\kappa - 7) \tag{2.35}$$

$$\mathrm{E}\Big\{\Big(\sum X_i\Big)^3\Big[\sum\Big(X_j^2 - 1\Big)\Big]^2\Big\} = n^2(3\alpha_5 + 7\kappa\gamma + 8\gamma) + n(\alpha_7 - 5\alpha_5 - 7\kappa\gamma - 7\gamma) \tag{2.36}$$

$$\mathrm{E}\Big\{\Big(\sum X_i\Big)^4\Big[\sum\Big(X_j^2-1\Big)\Big]^2\Big\} = n^3(12\gamma^2+3\kappa+6)+n^2(6\alpha_6+12\gamma\alpha_5-52\gamma^2 + 7\kappa^2+8\kappa-18)+n(\alpha_8-8\alpha_6-12\gamma\alpha_5 + 40\gamma^2-7\kappa^2-10\kappa+15) \tag{2.37}$$

$$\mathrm{E}\Big\{\Big(\sum X_i\Big)\Big[\sum\Big(X_j^2-1\Big)\Big]^3\Big\} = 3n^2(\kappa\gamma+2\gamma)+n(\alpha_7-3\alpha_5-3\kappa\gamma-3\gamma) \tag{2.38}$$

$$\mathrm{E}\Big\{\Big(\sum X_i\Big)^2\Big[\sum\Big(X_j^2-1\Big)\Big]^3\Big\} = n^2(\alpha_6+6\alpha_5\gamma+3\kappa^2+9\kappa-12\gamma^2+5) + n(\alpha_8-4\alpha_6-6\alpha_5\gamma-3\kappa^2-6\kappa+12\gamma^2+3) \tag{2.39}$$

$$\mathrm{E}\Big\{\Big(\sum X_i\Big)^3\Big[\sum\Big(X_j^2-1\Big)\Big]^3\Big\} = n^3(9\kappa\gamma+6\gamma^3+18\gamma)+n^2(3\alpha_7+10\alpha_6\gamma+12\alpha_5\kappa + 15\alpha_5-69\kappa\gamma-18\gamma^3-139\gamma)+n(\alpha_9-6\alpha_7-10\alpha_6\gamma - 12\alpha_5\kappa-12\alpha_5+60\kappa\gamma+12\gamma^3+120\gamma) \tag{2.40}$$

$$\mathrm{E}\Big\{\Big(\sum X_i\Big)^4\Big[\sum(X_j^2-1)\Big]^3\Big\} = n^3(3\alpha_6+36\alpha_5\gamma+120\kappa\gamma^2+18\kappa^2+63\kappa+168\gamma^2+51) + n^2(6\alpha_8+16\alpha_7\gamma+22\alpha_6\kappa+18\alpha_6-180\alpha_5\gamma+12\alpha_5^2 - 96\kappa^2-360\kappa\gamma^2-364\kappa-456\gamma^2-324)+n(\alpha_{10} - 9\alpha_8-16\alpha_7\gamma-22\alpha_6\kappa-18\alpha_6+144\alpha_5\gamma-12\alpha_5^2 + 78\kappa^2+240\kappa\gamma^2+300\kappa+288\gamma^2+270)\,. \tag{2.41}$$

Alors

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(A) &= n^{1/2}\mathrm{E}(\overline{X}) = n^{-1/2}\mathrm{E}\Big(\sum X_i\Big)\\
&= 0\\
\mathrm{E}(AB) &= n^{-3/2}\mathrm{E}\Big\{\Big(\sum X_i\Big)\Big(\sum(X_j^2-1)\Big)\Big\}\\
&= n^{-1/2}\gamma\\
\mathrm{E}(AC) &= -n^{1/2}\mathrm{E}(\overline{X}^3) = -n^{-5/2}\mathrm{E}\Big\{\Big(\sum X_i\Big)^3\Big\}\\
&= -n^{-3/2}\gamma\\
\mathrm{E}(AB^2) &= n^{-5/2}\mathrm{E}\Big\{\Big(\sum X_i\Big)\Big[\sum(X_j^2-1)\Big]^2\Big\}\\
&= n^{-3/2}(\alpha_5-2\gamma)\\
\mathrm{E}(ABC) &= -n^{-7/2}\mathrm{E}\Big\{\Big(\sum X_i\Big)^3\sum\Big(X_j^2-1\Big)\Big\}\\
&= -3n^{-3/2}\gamma+O(n^{-5/2})
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(AB^3) &= n^{-7/2}\mathrm{E}\Big\{\Big(\sum X_i\Big)\Big[\sum (X_j^2-1)\Big]^3\Big\} \\
&= 3n^{-3/2}(\kappa\gamma+2\gamma)+0(n^{-5/2}) \\
\mathrm{E}(A^2) &= n\mathrm{E}(\overline{X}^2) = n\mathrm{V}(\overline{X}) = \mathrm{V}(X) \\
&= 1 \\
\mathrm{E}(A^2B) &= n^{-2}\mathrm{E}\Big\{\Big(\sum X_i\Big)^2\sum (X_j^2-1)\Big\} \\
&= n^{-1}(\kappa+2) \\
\mathrm{E}(A^2C) &= -n^{-3}\mathrm{E}\Big\{\Big(\sum X_i\Big)^4\Big\} \\
&= -3n^{-1}+O(n^{-2}) \\
\mathrm{E}(A^2B^2) &= n^{-3}\mathrm{E}\Big\{\Big(\sum X_i\Big)^2\Big[\sum (X_j^2-1)\Big]^2\Big\} \\
&= n^{-1}(2\gamma^2+\kappa+2)+O(n^{-2}) \\
\mathrm{E}(A^2BC) &= -n^{-4}\mathrm{E}\Big\{\Big(\sum X_i\Big)^4\sum\Big(X_j^2-1\Big)\Big\} \\
&= O(n^{-2}) \\
\mathrm{E}(A^2B^3) &= n^{-4}\mathrm{E}\Big\{\Big(\sum X_i\Big)^2\Big[\sum (X_j^2-1)\Big]^3\Big\} \\
&= O(n^{-2}) \\
\mathrm{E}(A^3) &= n^{-3/2}\mathrm{E}\Big\{\Big[\sum X_i\Big]^3\Big\} \\
&= n^{-1/2}\gamma \\
\mathrm{E}(A^3B) &= n^{-5/2}\mathrm{E}\Big\{\Big(\sum X_i\Big)^3\sum (X_j^2-1)\Big\} \\
&= 3n^{-1/2}\gamma+n^{-3/2}(\alpha_5-4\gamma) \\
\mathrm{E}(A^3C) &= -n^{-7/2}\mathrm{E}\Big\{\Big(\sum X_i\Big)^5\Big\} \\
&= -10n^{-3/2}\gamma+O(n^{-5/2}) \\
\mathrm{E}(A^3B^2) &= n^{-7/2}\mathrm{E}\Big\{\Big(\sum X_i\Big)^3\Big[\sum (X_j^2-1)\Big]^2\Big\} \\
&= n^{-3/2}(3\alpha_5+7\kappa\gamma+8\gamma)+O(n^{-5/2}) \\
\mathrm{E}(A^3BC) &= -n^{-9/2}\mathrm{E}\Big\{\Big(\sum X_i\Big)^5\sum\Big(X_j^2-1\Big)\Big\} \\
&= -15n^{-3/2}\gamma+O(n^{-5/2}) \\
\mathrm{E}(A^3B^3) &= n^{-9/2}\mathrm{E}\Big\{\Big(\sum X_i\Big)^3\Big[\sum (X_j^2-1)\Big]^3\Big\} \\
&= (9\kappa\gamma+6\gamma^3+18\gamma)n^{-3/2}+O(n^{-5/2})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(A^4) &= n^{-2}\mathrm{E}\Big\{\Big[\sum X_i\Big]^4\Big\} \\
&= 3 + n^{-1}\kappa \\
\mathrm{E}(A^4B) &= n^{-3}\mathrm{E}\Big\{\Big(\sum X_i\Big)^4 \sum (X_j^2 - 1)\Big\} \\
&= n^{-1}(4\gamma^2 + 6\kappa + 12) + O(n^{-2}) \\
\mathrm{E}(A^4C) &= -n^{-4}\mathrm{E}\Big\{\Big(\sum X_i\Big)^6\Big\} \\
&= -15n^{-1} + O(n^{-2}) \\
\mathrm{E}(A^4B^2) &= n^{-4}\mathrm{E}\Big\{\Big(\sum X_i\Big)^4\Big[\sum (X_j^2 - 1)\Big]^2\Big\} \\
&= n^{-1}(12\gamma^2 + 3\kappa + 6) + O(n^{-2}) \\
\mathrm{E}(A^4BC) &= -n^{-5}\mathrm{E}\Big\{\Big(\sum X_i\Big)^6 \sum \Big(X_j^2 - 1\Big)\Big\} \\
&= O(n^{-2}) \\
\mathrm{E}(A^4B^3) &= n^{-5}\mathrm{E}\Big\{\Big(\sum X_i\Big)^4\Big[\sum (X_j^2 - 1)\Big]^3\Big\} \\
&= O(n^{-2})\,.
\end{aligned}
$$

Alors, par exemple, pour le premier et le deuxième moment, à erreur d'ordre $n^{-3/2}$, on obtient

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(S_n) &= \mathrm{E}\Big\{A\Big[1 - \frac{1}{2}B - \frac{1}{2}C + \frac{3}{8}B^2\Big] + O_p(n^{-3/2})\Big\} \\
&= \mathrm{E}(A) - \frac{1}{2}\mathrm{E}(AB) - \frac{1}{2}\mathrm{E}(AC) + \frac{3}{8}\mathrm{E}(AB^2) + O(n^{-3/2}) \\
&= 0 - \frac{1}{2}n^{-1/2}\gamma + \frac{1}{2}n^{-3/2}\gamma + \frac{3}{8}n^{-3/2}(\alpha_5 - 2\gamma) + O(n^{-3/2}) \\
&= -\frac{1}{2}n^{-1/2}\gamma + O(n^{-3/2}) \\
\mathrm{E}(S_n^2) &= \mathrm{E}(A^2) - \mathrm{E}(A^2B) - \mathrm{E}(A^2C) + \mathrm{E}(A^2B^2) + O(n^{-3/2}) \\
&= 1 - n^{-1}(\kappa + 2) + \Big[3n^{-1} + O(n^{-2})\Big] + \Big[n^{-1}(2\gamma^2 + \kappa + 2) + O(n^{-2})\Big] + O(n^{-3/2}) \\
&= 1 + n^{-1}(2\gamma^2 + 3) + O(n^{-3/2})\,.
\end{aligned}
$$

Les autres moments aux ordres notés se vérifient aussi.

Reste a prouver les équations (2.22)-(2.41) pour des moments mixtes de type $A_{k,\ell} = \mathrm{E}\{(\sum X_i)^k\,[\sum (X_j^2 - 1)]^\ell\}$. Nous utilisons systématiquement le multinomium et les propriétés de la linéarité et la factorisation de l'espérance (la factorisation pour des va indépendantes). Notons qu'il y a une élégance en gardant $(X_j^2 - 1)$ ensemble, comme une variable à espérance 0. Les preuves sont données dans les sections suivantes de ce chapitre.

2.3 Expressions pour $A_{1,0}$ à $A_{4,0}$

Calcul pour (2.22) , $A_{1,0} = \mathrm{E}\big(\sum X_i\big)$.
$\mathrm{E}\Big(\sum X_i\Big) = \sum \mathrm{E}(X_i) = 0\,.$

Calcul pour (2.23) , $A_{2,0} = \mathrm{E}\big\{\big(\sum X_i\big)^2\big\}$.
$\mathrm{E}\Big\{\big(\sum X_i\big)^2\Big\} = n^2\mathrm{E}\Big(\overline{X}^2\Big) = n^2\mathrm{V}(\overline{X}) = n^2\mathrm{V}(X)/n = n\,.$

Calcul pour (2.24) , $A_{3,0} = \mathrm{E}\big\{\big(\sum X_i\big)^3\big\}$.
Voir (1.15).

Calcul pour (2.25) , $A_{4,0} = \mathrm{E}\big\{\big(\sum X_i\big)^4\big\}$.
Nous écrivons le multinomium de puissance 4 :

$$\begin{aligned}\Big(\sum_i X_i\Big)^4 = \sum_i X_i^4 + 4\sum_{k\neq\ell} X_k^3 X_\ell + 6\sum_{k<\ell} X_k^2 X_\ell^2 \\ + 12\sum_{\substack{\ell<r\\ \ell\neq k, r\neq k}} X_k^2 X_\ell X_r + 24\sum_{k<\ell<r<s} X_k X_\ell X_r X_s\,.\end{aligned}$$

Pour obtenir l'espérance $\mathrm{E}\Big(\sum_i X_i\Big)^4$, on calcule l'espérance de chaque terme à droite :

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\Big(X_i^4\Big) &= \kappa + 3\\ \sum_i \mathrm{E}\Big(X_i^4\Big) &= n(\kappa+3)\\ \mathrm{E}\Big(X_k^2X_\ell^2\Big)\Big|_{k<\ell} &= \mathrm{E}\Big(X_k^2\Big)\mathrm{E}\Big(X_\ell^2\Big)\\ &= 1\\ \sum_{k<\ell}\mathrm{E}\Big(X_k^2X_\ell^2\Big) &= (n-1)+(n-2)+\ldots+1\\ &= \frac{1}{2}n(n-1)\,.\end{aligned}$$

Les autres termes ont une espérance nulle. Alors on obtient l'expression (2.25).
Remarque : Le calcul par récurrence se fait aussi facilement.

2.4 Expression pour $A_{5,0}$

Preuve pour (2.26), $A_{5,0} = \mathrm{E}\big\{\big(\sum X_i\big)^5\big\}$.

Méthode 1. Par le multinomium

$$\Big(\sum_i X_i\Big)^5 = \sum_i X_i^5 + 5\sum_{k\neq\ell} X_k^4 X_\ell + 10\sum_{k\neq\ell} X_k^3 X_\ell^2 + 20\sum_{\substack{\ell<r\\ \ell\neq k, r\neq k}} X_k^3 X_\ell X_r \; + 30$$
$$\sum_{\substack{k<\ell\\ r\neq k, r\neq\ell}} X_k^2 X_\ell^2 X_r + 60\sum_{\substack{\ell<r<s\\ \ell\neq k, r\neq k, s\neq k}} X_k^2 X_\ell X_r X_s + 120\sum_{k<\ell<r<s<t} X_k X_\ell X_r X_s X_t\,.$$

Calculons l'espérance des termes à droite :

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\Big(X_i^5\Big) &= \alpha_5\\
\sum_i \mathrm{E}\Big(X_i^5\Big) &= n\alpha_5\\
\mathrm{E}\Big(X_k^3 X_\ell^2\Big)\Big|_{k\neq\ell} &= \gamma\\
\sum_{k\neq\ell} \mathrm{E}\Big(X_k^3 X_\ell^2\Big) &= n(n-1)\gamma\,.
\end{aligned}$$

Les autres termes ont une espérance nulle. Alors on obtient l'expression (2.26) :

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\Big(\sum_i X_i\Big)^5 &= n\alpha_5 + 10n(n-1)\gamma\\
&= 10\gamma\; n^2 + n(\alpha_5 - 10\gamma)\,.
\end{aligned}$$

Méthode 2. Obtenir la récurrence et exploiter l'indépendance des X_i

Notons les indices $i = 1,\ldots,n$, $j = 1,\ldots,n-1$, et $A_n = \mathrm{E}\Big[\Big(\sum_i X_i\Big)^5\Big]$. Considérez l'expansion $\Big(\sum_i X_i\Big)^5 = \Big(\sum_j X_j + X_n\Big)^5$ où $\sum_j X_j$ et X_n sont indépendantes, on obtient la récurrence

$$\begin{aligned}
A_n = \mathrm{E}\Big[\Big(\sum_i X_i\Big)^5\Big] &= A_{n-1} + 10\mathrm{E}\Big[\Big(\sum_j X_j\Big)^3 X_n^2\Big] + 10\mathrm{E}\Big[\Big(\sum_j X_j\Big)^2 X_n^3\Big] + \alpha_5\\
&= 20(n-1)\gamma + \alpha_5 + A_{n-1}\,,
\end{aligned}$$

et la solution donne le même résultat que la Méthode 1.

2.5 Expression pour $A_{6,0}$

Prouvons (2.27), $A_{6,0} = \mathrm{E}\big\{\big(\sum X_i\big)^6\big\}$. Le multinomium pour puissance 6 :

$$\begin{aligned}\Big(\sum_i X_i\Big)^6 = \sum_i X_i^6 + 6\sum_{k\neq\ell} X_k^5 X_\ell + 15\sum_{k\neq\ell} X_k^4 X_\ell^2 + 30\sum_{\substack{\ell<r\\ \ell\neq k, r\neq k}} X_k^4 X_\ell X_r + 20\sum_{k<\ell} X_k^3 X_\ell^3 \\ + 60\sum_{\substack{k,\ell,r\\ \text{tous diff.}}} X_k^3 X_\ell^2 X_r + 120\sum_{\substack{l<r<s\\ \text{tous}\neq k}} X_k^3 X_\ell X_r X_s + 90\sum_{k<\ell<r} X_k^2 X_\ell^2 X_r^2 \\ + 180\sum_{\substack{k<\ell, r<s\\ \text{tous diff.}}} X_k^2 X_\ell^2 X_r X_s + 360\sum_{\substack{\ell<r<s<t\\ \text{tous}\neq k}} X_k^2 X_\ell X_r X_s X_t \\ + 720\sum_{k<\ell<r<s<t<u} X_k X_\ell X_r X_s X_t X_u\,.\end{aligned}$$

Espérance par terme à droite :

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X_i^6) &= \alpha_6\\ \sum_i \mathrm{E}(X_i^6) &= n\alpha_6\\ \mathrm{E}(X_k^4 X_\ell^2)\big|_{k\neq\ell} &= \mathrm{E}(X_k^4)\mathrm{E}(X_\ell^2) = \kappa + 3\\ \sum_{k\neq\ell} \mathrm{E}(X_k^4 X_\ell^2) &= n(n-1)(\kappa+3) = (n^2-n)(\kappa+3)\\ \mathrm{E}(X_k^3 X_\ell^3)\big|_{k<\ell} &= \gamma^3\\ \sum_{k<\ell} \mathrm{E}(X_k^3 X_\ell^3) &= \frac{1}{2}n(n-1)\gamma^2 = \frac{1}{2}(n^2-n)\gamma^2\\ \mathrm{E}(X_k^2 X_\ell^2 X_r^2)\big|_{k<\ell<r} &= 1\\ \sum_{k<\ell<r} \mathrm{E}(X_k^2 X_\ell^2 X_r^2) &= \#\big\{k,\ell,r = 1,\dots,n : k<\ell<r\big\}\\ &= \frac{1}{6}n^3 - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n \qquad \text{(lemme 2.5.1)}\end{aligned}$$

Autres termes : 0 .

Il en résulte l'expression (2.27).

Lemme 2.5.1.

$$\#\big\{k,\ell,r = 1,\dots,n : k<\ell<r\big\} = \frac{1}{6}n^3 - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n\,. \tag{2.42}$$

Preuve 1. Nous calculons

$$a_n := \#\big\{k,\ell,r = 1,\dots,n : k<\ell<r\big\}$$

à l'aide de la table des valeurs $k < \ell < r$ possibles, table 2.1, où $a(k,l)$ est le nombre de valeurs r possible pour une paire $k < \ell$ donnée, $a(k)$ est le nombre de paires $\ell < r$ possible pour un k donné.

Table 2.1 – Table des valeurs $1 \leq k < \ell < r \leq n$

k	ℓ	r	$a(k,\ell)$	$a(k) = \sum_\ell a(k,\ell)$
1	2	$3,\ldots,n$	$n-2$	$\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$
	3	$4,\ldots,n$	$n-3$	
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
	$n-1$	n	1	
2	3	$4,\ldots,n$	$n-3$	$\frac{1}{2}(n-2)(n-3)$
	4	$5,\ldots,n$	$n-4$	
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
	$n-1$	n	1	
$\vdots$				$\vdots$
k	$k+1$	$k+2,\ldots,n$	$n-k-1$	$\frac{1}{2}(n-k)(n-k-1)$
	$k+2$	$k+3,\ldots,n$	$n-k-2$	
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
	$n-1$	n	1	
$\vdots$				$\vdots$
$n-3$	$n-2$	$n-1,\ n$	2	$3 = \frac{1}{2}3.2$
	$n-1$	n	1	
$n-2$	$n-1$	n	1	$1 = \frac{1}{2}.1$
				$a_n = \sum_{k=1}^{n-2} a(k)$

Comme

$$\begin{aligned} a(k) &= \frac{1}{2}(n-k)(n-k-1) \\ &= \frac{1}{2}\big\{k^2 - 2nk + k + n^2 - n\big\} \end{aligned}$$

on obtient

$$a_n = \sum_{k=1}^{n-2} a(k) = \frac{1}{2}\left\{ \sum_{k=1}^{n-2} k^2 - 2n \sum_{k=1}^{n-2} k + \sum_{k=1}^{n-2} k + (n-2)(n^2-n) \right\}.$$

Des sommes connues

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1), \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

on obtient

$$\sum_{k=1}^{n-2} k = \frac{1}{2}(n-2)(n-1) = \frac{1}{2}(n^2-3n+2)$$

$$\sum_{k=1}^{n-2} k^2 = \frac{1}{6}(n-2)(n-1)(2n-3) = \frac{1}{6}(2n^3-9n^2+13n-6)$$

et finalement on obtient (2.5.1).

Preuve 2.

$$a_n = \#\big\{k,\ell,r = 1,\dots,n : k<\ell<r\big\} = \sum_{r=1}^{n}\sum_{\ell=2}^{r-1} \ell - 1$$

$$= \sum_{r=1}^{n}\Big\{\frac{1}{2}(r+1)(r-2) - (r-2)\Big\} = \sum_{r=1}^{n}\Big\{\frac{1}{2}r^2 - \frac{3}{2}r + 1\Big\}$$

où

$$\sum_{r=1}^{n} r^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$$

$$\sum_{r=1}^{n} r = \frac{1}{2}n(n+1) = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n\,.$$

Alors on obtient (2.5.1).

2.6 Expression pour $A_{1,1}$

Calcul pour (2.28), $A_{1,1} = \mathrm{E}\big\{\big(\sum X_i\big)\big[\sum(X_j^2-1)\big]\big\}$.

$$\mathrm{E}\Big\{\Big(\sum_i X_i\Big)\Big(\sum_j (X_j^2-1)\Big)\Big\} = \sum_i\sum_j \mathrm{E}[X_i(X_j^2-1)]$$

$$\mathrm{E}[X_i(X_j^2-1)] = \begin{cases}\gamma, & j=i\\ 0, & j\neq i\end{cases}$$

$$\sum_j \mathrm{E}[X_i(X_j^2-1)] = \gamma$$

$$\sum_i\sum_j \mathrm{E}[X_i(X_j^2-1)] = n\gamma$$

$$\mathrm{E}\Big\{\Big(\sum_i X_i\Big)\Big(\sum_j (X_j^2-1)\Big)\Big\} = n\gamma$$

2.7 Expression pour $A_{2,1}$

Calcul pour (2.29), $A_{2,1} = \mathrm{E}\big\{\big(\sum X_i\big)^2\big[\sum\big(X_j^2-1\big)\big]\big\}$. De l'expansion

$$\begin{aligned}\Big(\sum_i X_i\Big)^2\Big(\sum_j\big(X_j^2-1\big)\Big) &= \Big(\sum_i X_i^2+\sum_{k\neq\ell}X_kX_\ell\Big)\Big(\sum_j\big(X_j^2-1\big)\Big)\\ &= \sum_i\sum_j X_i^2\big(X_j^2-1\big)+\sum_j\sum_{k\neq\ell}\big(X_j^2-1\big)X_kX_\ell\end{aligned}$$

on obtient :

$$\mathrm{E}\Big\{\Big(\sum_i X_i\Big)^2\Big(\sum_j\big(X_j^2-1\big)\Big)\Big\} = \sum_i\sum_j\mathrm{E}\Big[X_i^2\big(X_j^2-1\big)\Big]+\sum_j\sum_{k\neq\ell}\mathrm{E}\Big[\big(X_j^2-1\big)X_kX_\ell\Big]\,.$$

On calcule successivement :

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\Big[X_i^2\big(X_j^2-1\big)\Big] &= \begin{cases}\kappa+2, & j=i\\ 0, & j\neq i\end{cases}\\ \sum_j\mathrm{E}\Big[X_i^2\big(X_j^2-1\big)\Big] &= \kappa+2\\ \sum_i\sum_j\mathrm{E}\Big[X_i^2\big(X_j^2-1\big)\Big] &= n(\kappa+2)\\ \mathrm{E}\Big[\big(X_j^2-1\big)X_kX_\ell\Big]\Big|_{k\neq\ell} &= 0\,.\end{aligned}$$

On obtient l'expression (2.29).

2.8 Expression pour $A_{3,1}$

Preuve pour (2.30), $A_{3,1} = \mathrm{E}\big\{\big(\sum X_i\big)^3\big[\sum\big(X_j^2-1\big)\big]\big\}$. Ecrivons l'expansion

$$\begin{aligned}&\Big(\sum_i X_i\Big)^3\Big(\sum_j\big(X_j^2-1\big)\Big)\\ &= \Big(\sum_i X_i^3+3\sum_{k\neq\ell}X_k^2X_\ell+6\sum_{k<\ell<r}X_kX_\ell X_r\Big)\Big(\sum_j\big(X_j^2-1\big)\Big)\\ &= \sum_j\Big[\sum_i X_i^3\big(X_j^2-1\big)+3\sum_{k\neq\ell}X_k^2X_\ell\big(X_j^2-1\big)+6\sum_{k<\ell<r}X_kX_\ell X_r\big(X_j^2-1\big)\Big]\,.\end{aligned}$$

Appliquons l'espérance pour les termes à droite :

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\Big[X_i^3\Big(X_j^2-1\Big)\Big] &= \begin{cases}\alpha_5-\gamma, & j=i\\ 0, & j\neq i\end{cases}\\
\sum_i \mathrm{E}\Big[\sum_i X_i^3\Big(X_j^2-1\Big)\Big] &= \alpha_5-\gamma\\
\sum_j\sum_i \mathrm{E}\Big[\sum_i X_i^3\Big(X_j^2-1\Big)\Big] &= n(\alpha_5-\gamma)\\
\mathrm{E}\Big[X_k^2X_\ell\Big(X_j^2-1\Big)\Big]\Big|_{k\neq\ell} &= \begin{cases}\gamma, & j=\ell\neq k\\ 0, & j\neq\ell\end{cases}\\
\sum_{k\neq\ell} \mathrm{E}\Big[X_k^2X_\ell\Big(X_j^2-1\Big)\Big] &= (n-1)\gamma\\
\sum_j\sum_{k\neq\ell} \mathrm{E}\Big[X_k^2X_\ell\Big(X_j^2-1\Big)\Big] &= (n^2-n)\gamma\,.
\end{aligned}$$

Les autres termes ont une espérance nulle. Et on calcule l'expression (2.30).

2.9 Expression pour $A_{4,1}$

Preuve pour (2.31), $A_{4,1} = \mathrm{E}\big\{\big(\sum X_i\big)^4\big[\sum\big(X_j^2-1\big)\big]\big\}$. Avec le multinomium pour puissance 4 on obtient :

$$\begin{aligned}
\Big(\sum_i X_i\Big)^4\Big(\sum_j\big(X_j^2-1\big)\Big) = \sum_j\Big(\sum_i X_i^4 + 4\sum_{k\neq\ell} X_k^3X_\ell + 6\sum_{k<\ell} X_k^2X_\ell^2 + 12\\
\sum_{\substack{\ell<r\\ \ell\neq k, r\neq k}} X_k^2X_\ell X_r + 24\sum_{k<\ell<r<s} X_kX_\ell X_rX_s\Big)\big(X_j^2-1\big)\,.
\end{aligned}$$

Calcul des espérance pour les termes à droite :

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\Big[X_i^4\Big(X_j^2-1\Big)\Big] &= \begin{cases}\alpha_6-\kappa-3, & j=i\\ 0, & j\neq i\end{cases}\\
\sum_i \mathrm{E}\Big[X_i^4\Big(X_j^2-1\Big)\Big] &= \alpha_6-\kappa-3\\
\sum_j\sum_i \mathrm{E}\Big[X_i^4\Big(X_j^2-1\Big)\Big] &= n(\alpha_6-\kappa-3)\\
\mathrm{E}\Big[X_k^3X_\ell\Big(X_j^2-1\Big)\Big]\Big|_{k\neq\ell} &= \begin{cases}\gamma^2, & j=\ell\\ 0, & j\neq\ell\end{cases}\\
\sum_{k\neq\ell} \mathrm{E}\Big[X_k^3X_\ell\Big(X_j^2-1\Big)\Big] &= (n-1)\gamma^2
\end{aligned}$$

$$\sum_j \sum_{k\neq\ell} \mathrm{E}\Big[X_k^3 X_\ell \Big(X_j^2-1\Big)\Big] = (n^2-n)\gamma^2$$

$$\mathrm{E}\Big[X_k^2 X_\ell^2 \Big(X_j^2-1\Big)\Big]\Big|_{k<\ell} = \begin{cases} \kappa+2, & k=j<\ell \\ \kappa+2, & k<\ell=j \\ 0, & k\neq j, \ell\neq j \end{cases}$$

$$\sum_{k<\ell} \mathrm{E}\Big[X_k^2 X_\ell^2 \Big(X_j^2-1\Big)\Big] = 2(n-1)(\kappa+2)$$

$$\sum_j \sum_{k<\ell} \mathrm{E}\Big[X_k^2 X_\ell^2 \Big(X_j^2-1\Big)\Big] = (n^2-n)(\kappa+2)\,.$$

Les autres termes ont une espérance nulle. L'expression (2.31) suit.

2.10 Expression pour $A_{5,1}$

Preuve pour (2.32), $A_{5,1} = \mathrm{E}\big\{\big(\sum X_i\big)^5 \big[\sum \big(X_j^2-1\big)\big]\big\}$. En utilisant le multinomium pour puissance 5, on obtient :

$$\begin{aligned}
&\Big(\sum_i X_i\Big)^5 \Big[\sum_j \Big(X_j^2-1\Big)\Big] \\
&= \Bigg(\sum_i X_i^5 + 5\sum_{k\neq\ell} X_k^4 X_\ell + 10\sum_{k\neq\ell} X_k^3 X_\ell^2 \; + 20 \sum_{\substack{\ell<r \\ \ell\neq k, r\neq k}} X_k^3 X_\ell X_r + 30 \sum_{\substack{k<\ell \\ r\neq k, r\neq\ell}} X_k^2 X_\ell^2 X_r \\
&\quad + 60 \sum_{\substack{\ell<r<s \\ \ell\neq k, r\neq k, s\neq k}} X_k^2 X_\ell X_r X_s + 120 \sum_{k<\ell<r<s<t} X_k X_\ell X_r X_s X_t \Bigg) \Big[\sum_j \Big(X_j^2-1\Big)\Big]\,.
\end{aligned}$$

Calculons l'espérance des termes à droite :

$$\mathrm{E}\Big[X_i^5 \Big(X_j^2-1\Big)\Big] = \begin{cases} \alpha_7-\alpha_5, & j=i \\ 0, & j\neq i \end{cases}$$

$$\sum_j \mathrm{E}\Big[X_i^5 \Big(X_j^2-1\Big)\Big] = \alpha_7-\alpha_5$$

$$\sum_i \sum_j \mathrm{E}\Big[X_i^5 \Big(X_j^2-1\Big)\Big] = n(\alpha_7-\alpha_5)$$

$$\mathrm{E}\Big[X_k^4 X_\ell \Big(X_j^2-1\Big)\Big]\Big|_{k\neq\ell} = \begin{cases} \gamma(\kappa+3), & j=\ell \\ 0, & j\neq\ell \end{cases}$$

$$\sum_{k\neq\ell} \mathrm{E}\Big[X_k^4 X_\ell \Big(X_j^2-1\Big)\Big] = (n-1)\gamma(\kappa+3)$$

$$\sum_j \sum_{k\neq\ell} \mathrm{E}\Big[X_k^4 X_\ell \Big(X_j^2-1\Big)\Big] = n(n-1)\gamma(\kappa+3)$$

$$\mathrm{E}\Big[X_k^3 X_\ell^2 \Big(X_j^2-1\Big)\Big]\Big|_{k\neq\ell} = \begin{cases} \gamma(\kappa+2), & \ell = j \neq k \\ \alpha_5-\gamma, & k=j\neq\ell \\ 0, & \ell\neq j, k\neq j \end{cases}$$

$$\sum_{k\neq\ell} \mathrm{E}\Big[X_k^3 X_\ell^2 \Big(X_j^2-1\Big)\Big] = (n-1)(\alpha_5-\gamma) + (n-1)\gamma(\kappa+2)$$

$$\sum_j \sum_{k\neq\ell} \mathrm{E}\Big[X_k^3 X_\ell^2 \Big(X_j^2-1\Big)\Big] = (n^2-n)(\alpha_5-\gamma) + (n^2-n)\gamma(\kappa+2)$$

$$\mathrm{E}\Big[X_k^2 X_l^2 X_r \Big(X_j^2-1\Big)\Big]\Big|_{k<\ell, r\neq k, r\neq\ell} = \begin{cases} \gamma, & j=r \\ 0, & \text{autrement} \end{cases}$$

$$\sum_j \mathrm{E}\Big[X_k^2 X_\ell^2 X_r \Big(X_j^2-1\Big)\Big]\Big|_{k<\ell, r\neq k, r\neq\ell} = \gamma$$

$$\sum_{r\neq k, r\neq\ell} \sum_j \mathrm{E}\Big[X_k^2 X_\ell^2 X_r \Big(X_j^2-1\Big)\Big]\Big|_{k<\ell} = (n-2)\gamma$$

$$\sum_{k<\ell} \sum_{r\neq k, r\neq\ell} \sum_j \mathrm{E}\Big[X_k^2 X_\ell^2 X_r \Big(X_j^2-1\Big)\Big] = \frac{1}{2} n(n-1)(n-2)\gamma$$

$$= \frac{1}{2}(n^3-3n^2+2n)\gamma\,.$$

Les autres termes ont une espérance nulle. Ainsi, on obtient l'expression (2.32).

2.11 Expression pour $A_{6,1}$

Preuve pour (2.33), $A_{6,1} = \mathrm{E}\big\{\big(\sum X_i\big)^6 \big[\sum \big(X_j^2-1\big)\big]\big\}$. Utilisons le multinomium pour puissance 6 :

$$\Big(\sum_i X_i\Big)^6 \sum_j \Big(X_j^2-1\Big)$$

$$= \Bigg(\sum_i X_i^6 + 6\sum_{k\neq\ell} X_k^5 X_\ell + 15 \sum_{k\neq\ell} X_k^4 X_\ell^2 + 30 \sum_{\substack{\ell<r \\ \ell\neq k, r\neq k}} X_k^4 X_\ell X_r + 20 \sum_{k<\ell} X_k^3 X_\ell^3 + 60$$

$$\sum_{\substack{k,\ell,r \\ \text{tous diff.}}} X_k^3 X_\ell^2 X_r + 120 \sum_{\substack{l<r<s \\ \text{tous}\neq k}} X_k^3 X_\ell X_r X_s + 90 \sum_{k<\ell<r} X_k^2 X_\ell^2 X_r^2 + 180 \sum_{\substack{k<\ell, r<s \\ \text{tous diff.}}} X_k^2 X_\ell^2 X_r X_s$$

$$+ 360 \sum_{\substack{\ell<r<s<t \\ \text{tous}\neq k}} X_k^2 X_\ell X_r X_s X_t + 720 \sum_{k<\ell<r<s<t<u} X_k X_\ell X_r X_s X_t X_u \Bigg) \sum_j \left(X_j^2 - 1 \right).$$

Calculons l'espérance des termes à droite :

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\Big[X_i^6\Big(X_j^2-1\Big)\Big] &= \begin{cases}\alpha_8-\alpha_6, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}\\
\sum_i \mathrm{E}\Big[X_i^6\Big(X_j^2-1\Big)\Big] &= \alpha_8-\alpha_6\\
\sum_j\sum_i \mathrm{E}\Big[X_i^6\Big(X_j^2-1\Big)\Big] &= n(\alpha_8-\alpha_6)\\
\mathrm{E}\Big[X_k^5X_\ell\Big(X_j^2-1\Big)\Big]\Big|_{k\neq\ell} &= \begin{cases}\alpha_5\gamma, & j=\ell\\ 0, & j=k\end{cases}\\
\sum_{k\neq\ell} \mathrm{E}\Big[X_k^5X_\ell\Big(X_j^2-1\Big)\Big] &= (n-1)\alpha_5\gamma\\
\sum_j\sum_{k\neq\ell} \mathrm{E}\Big[X_k^5X_\ell\Big(X_j^2-1\Big)\Big] &= (n^2-n)\alpha_5\gamma\\
\mathrm{E}\Big[X_k^4X_\ell^2\Big(X_j^2-1\Big)\Big]\Big|_{k\neq\ell} &= \begin{cases}(\kappa+3)(\kappa+2), & j=\ell\\ \alpha_6-\kappa-3, & j=k\\ 0, & j\neq\ell, j\neq k\end{cases}\\
\sum_{k\neq\ell} \mathrm{E}\Big[X_k^4X_\ell^2\Big(X_j^2-1\Big)\Big] &= (n-1)\big[(\kappa+3)(\kappa+2)+(\alpha_6-\kappa-3)\big]\\
\sum_j\sum_{k\neq\ell} \mathrm{E}\Big[X_k^4X_\ell^2\Big(X_j^2-1\Big)\Big] &= (n^2-n)(\alpha_6+\kappa^2+4\kappa+3)\\
\mathrm{E}\Big[X_k^3X_\ell^3\Big(X_j^2-1\Big)\Big]\Big|_{k<\ell} &= \begin{cases}\gamma(\alpha_5-\gamma), & j=k<\ell\\ \gamma(\alpha_5-\gamma), & k<\ell=j\\ 0, & j\neq\ell, j\neq k\end{cases}\\
\sum_{k<l} \mathrm{E}\Big[X_k^3X_\ell^3\Big(X_j^2-1\Big)\Big] &= 2(n-1)(\gamma(\alpha_5-\gamma))\\
\sum_j\sum_{k<l} \mathrm{E}\Big[X_k^3X_\ell^3\Big(X_j^2-1\Big)\Big] &= \frac{1}{2}n(n-1)2(\alpha_5\gamma-\gamma^2)\\
&= (n^2-n)(\alpha_5\gamma-\gamma^2)\\
\mathrm{E}\Big[X_k^3X_\ell^2X_r\Big(X_j^2-1\Big)\Big]\Big|_{\substack{k,\ell,r\\ \text{tous diff}}} &= \begin{cases}\gamma^2, & j=r\\ 0, & \text{autrement}\end{cases}\\
\sum_j \mathrm{E}\Big[X_k^3X_\ell^2X_r\Big(X_j^2-1\Big)\Big]\Big|_{\substack{k,\ell,r\\ \text{tous diff}}} &= \gamma^2
\end{aligned}$$

$$\sum_{\substack{k,\ell,r\\ \text{tous diff}}} \sum_j \mathrm{E}\Big[X_k^3 X_\ell^2 X_r \Big(X_j^2 - 1\Big)\Big] = n(n-1)(n-2)\gamma^2$$

$$= \gamma^2 n^3 - 3\gamma^2 n^2 + 2\gamma^2 n$$

$$\mathrm{E}\Big[X_k^2 X_\ell^2 X_r^2 \Big(X_j^2 - 1\Big)\Big]\Big|_{k<\ell<r} = \begin{cases} \kappa + 2, & k < \ell < r = j \\ \kappa + 2, & k < \ell = j < r \\ \kappa + 2, & k = j < \ell < r \\ 0, & j \neq k, j \neq \ell, j \neq r \end{cases}$$

$$\sum_j \mathrm{E}\Big[X_k^2 X_\ell^2 X_r^2 \Big(X_j^2 - 1\Big)\Big]\Big|_{k<\ell<r} = 3(\kappa + 2)$$

$$\sum_{k<\ell<r} \sum_j \mathrm{E}\Big[X_k^2 X_\ell^2 X_r^2 \Big(X_j^2 - 1\Big)\Big] = (\frac{1}{6}n^3 - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n)3(\kappa + 2) \qquad \text{par lemme 2.5.1}$$

$$= \frac{n^3}{2}(\kappa + 2) - \frac{3}{2}n^2(\kappa + 2) + n(\kappa + 2)\,.$$

Les autres termes ont une espérance nulle. On obtient l'expression (2.33).

2.12 Expression pour $A_{1,2}$

Preuve pour (2.34), $A_{1,2} = \mathrm{E}\big\{\big(\sum X_i\big)\big[\sum\big(X_j^2 - 1\big)\big]^2\big\}$.
Dans l'expansion

$$\Big(\sum_i X_i\Big)\Big[\sum_j (X_j^2 - 1)\Big]^2 = \Big(\sum_i X_i\Big)\Big[\sum_j (X_j^2 - 1)^2 + \sum_{k\neq\ell} (X_k^2 - 1)(X_\ell^2 - 1)\Big]$$

$$= \sum_i \sum_j X_i (X_j^2 - 1)^2 + \sum_i \sum_{k\neq\ell} X_i (X_k^2 - 1)(X_\ell^2 - 1)\,.$$

nous calculons l'espérance de chaque terme à droite,

$$\mathrm{E}\Big[X_i (X_j^2 - 1)^2\Big] = \mathrm{E}\Big[X_i (X_j^4 - 2X_j^2 + 1)\Big]$$

$$= \begin{cases} \alpha_5 - 2\gamma, & j = i \\ 0, & j \neq i \end{cases}$$

$$\sum_j \mathrm{E}\Big[X_i (X_j^2 - 1)^2\Big] = \alpha_5 - 2\gamma$$

$$\sum_i \sum_j \mathrm{E}\Big[X_i (X_j^2 - 1)^2\Big] = n(\alpha_5 - 2\gamma)$$

$$\mathrm{E}\Big[X_i (X_k^2 - 1)(X_\ell^2 - 1)\Big]\Big|_{k\neq\ell} = 0$$

et on obtient (2.34).

2.13 Expression pour $A_{2,2}$

Preuve pour (2.35), $A_{2,2} = \mathrm{E}\{\left(\sum X_i\right)^2\left[\sum\left(X_j^2-1\right)\right]^2\}$. Dans l'expansion

$$\begin{aligned}\Big(\sum_i X_i\Big)^2\Big[\sum_j (X_j^2-1)\Big]^2 &= \Big[\Big(\sum_i X_i\Big)\sum_j (X_j^2-1)\Big]^2\\ &= \Big[\sum_{i,j} X_i(X_j^2-1)\Big]^2\\ &= \sum_{i,j}\Big[X_i^2\big(X_j^2-1\big)^2\Big] + \sum_{(k,\ell)\neq(i,j)} X_i\big(X_j^2-1\big)X_k\big(X_\ell^2-1\big),\end{aligned}$$

il faut encore l'espérance de chaque terme à droite. Notons que dans la dernière somme il s'agit de paires (k,ℓ) et (i,j) et $k,\ell,i,j = 1,...,n$. Nous calculons

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\Big[X_i^2\Big(X_j^2-1\Big)^2\Big] &= \mathrm{E}\Big[X_i^2\Big(X_j^4-2X_j^2+1\Big)\Big]\\ &= \begin{cases}\alpha_6-2\kappa-5, & j=i\\ \kappa+2, & j\neq i\end{cases}\\ \sum_j \mathrm{E}\Big[X_i^2\Big(X_j^2-1\Big)^2\Big] &= (\alpha_6-2\kappa-5)+(n-1)(\kappa+2)\\ \sum_i\sum_j \mathrm{E}\Big[X_i^2\Big(X_j^2-1\Big)^2\Big] &= n^2(\kappa+2)+n(\alpha_6-3\kappa-7)\\ \mathrm{E}\Big[X_i\big(X_j^2-1\big)X_k\big(X_\ell^2-1\big)\Big]\Big|_{(k,\ell)\neq(i,j)} &= \begin{cases}\gamma^2, & j=i\neq\ell=k\\ \gamma^2, & k=j\neq\ell=i\\ 0, & \text{autrement}\end{cases}\\ \sum_{(k,\ell)\neq(i,j)} \mathrm{E}\Big[X_i\big(X_j^2-1\big)X_k\big(X_\ell^2-1\big)\Big] &= 2n(n-1)\gamma^2\\ &= 2\gamma^2n^2-2\gamma^2n\,.\end{aligned}$$

Alors on obtient l'expression (2.35).

2.14 Expression pour $A_{3,2}$

Preuve pour (2.36), $A_{3,2} = \mathrm{E}\{\left(\sum X_i\right)^3 \left[\sum \left(X_j^2 - 1\right)\right]^2\}$. Avec l'expansion pour les puissances 3 et 2, on a :

$$\Big(\sum_i X_i\Big)^3 \Big[\sum_j \big(X_j^2 - 1\big)\Big]^2 = \Big[\sum_i X_i^3 + 3 \sum_{k \neq \ell} X_k^2 X_\ell + 6 \sum_{k<\ell<r} X_k X_\ell X_r\Big] \Big[\sum_j \big(X_j^2 - 1\big)^2 + \sum_{u \neq s} \big(X_u^2 - 1\big)\big(X_s^2 - 1\big)\Big] .$$

Espérance pour les termes à droite :

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\Big[X_i^3\big(X_j^2 - 1\big)^2\Big] &= \mathrm{E}\Big[X_i^3\Big(X_j^4 - 2X_j^2 + 1\Big)\Big] \\
&= \begin{cases} \alpha_7 - 2\alpha_5 + \gamma, & j = i \\ \gamma(\kappa + 2), & j \neq i \end{cases} \\
\sum_j \mathrm{E}\Big[X_i^3\big(X_j^2 - 1\big)^2\Big] &= \alpha_7 - 2\alpha_5 + \gamma + (n-1)(\kappa\gamma + 2\gamma) \\
\sum_i \sum_j \mathrm{E}\Big[X_i^3\big(X_j^2 - 1\big)^2\Big] &= n(\alpha_7 - 2\alpha_5 + \gamma) + (n^2 - n)(\kappa\gamma + 2\gamma) \\
&= n^2(\kappa\gamma + 2\gamma) + n(\alpha_7 - 2\alpha_5 - \kappa\gamma - \gamma) \\
\mathrm{E}\Big[X_k^2 X_\ell\big(X_j^2 - 1\big)^2\Big]\Big|_{k \neq \ell} &= \mathrm{E}\Big[X_k^2 X_\ell\Big(X_j^4 - 2X_j^2 + 1\Big)\Big]\Big|_{k \neq \ell} \\
&= \begin{cases} \alpha_5 - 2\gamma, & j = \ell \\ 0, & j \neq \ell \end{cases} \\
\sum_{k \neq \ell} \mathrm{E}\Big[X_k^2 X_\ell\big(X_j^2 - 1\big)^2\Big] &= (n-1)(\alpha_5 - 2\gamma) \\
\sum_j \sum_{k \neq \ell} \mathrm{E}\Big[X_k^2 X_\ell\big(X_j^2 - 1\big)^2\Big] &= (n^2 - n)(\alpha_5 - 2\gamma) \\
\mathrm{E}\Big[X_k^2 X_\ell\big(X_u^2 - 1\big)\big(X_s^2 - 1\big)\Big]\Big|_{\substack{k \neq \ell \\ u \neq s}} &= \begin{cases} \gamma(\kappa + 2), & (k,\ell) = (u,s) \\ (\kappa + 2)\gamma, & (k,\ell) = (s,u) \\ 0, & \text{autrement} \end{cases} \\
\sum_{u \neq s} \mathrm{E}\Big[X_k^2 X_\ell\big(X_u^2 - 1\big)\big(X_s^2 - 1\big)\Big]\Big|_{k \neq \ell} &= 2\gamma(\kappa + 2) \\
\sum_{k \neq \ell} \sum_{u \neq s} \mathrm{E}\Big[X_k^2 X_\ell\big(X_u^2 - 1\big)\big(X_s^2 - 1\big)\Big] &= 2(n^2 - n)\gamma(\kappa + 2) .
\end{aligned}$$

Les autres termes ont une espérance nulle. Puis la somme donne l'expression (2.36).

2.15 Expression pour $A_{4,2}$

Preuve pour (2.37), $A_{4,2} = \mathrm{E}\{\left(\sum X_i\right)^4 [\sum \left(X_j^2 - 1\right)]^2\}$. Avec le multinomium on a :

$$\begin{aligned}
&\Big(\sum_i X_i\Big)^4 \Big[\sum_j \big(X_j^2 - 1\big)\Big]^2 \\
&= \Bigg[\sum_i X_i^4 + 4\sum_{k\neq\ell} X_k^3 X_\ell + 6\sum_{k<\ell} X_k^2 X_\ell^2 + 12 \sum_{\substack{\ell<r \\ \ell\neq k, r\neq k}} X_k^2 X_\ell X_r \\
&\quad + 24 \sum_{k<\ell<r<s} X_k X_\ell X_r X_s\Bigg] \Bigg[\sum_j \Big(X_j^2 - 1\Big)^2 + \sum_{u\neq t} \Big(X_u^2 - 1\Big)\Big(X_t^2 - 1\Big)\Bigg]
\end{aligned}$$

et on peut calculer l'espérance de chaque terme à droite comme suit :

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\Big[X_i^4\big(X_j^2 - 1\big)^2\Big] &= \mathrm{E}\Big[X_i^4\Big(X_j^4 - 2X_j^2 + 1\Big)\Big] \\
&= \begin{cases} \alpha_8 - 2\alpha_6 + \kappa + 3, & j = i \\ (\kappa+3)(\kappa+2), & j \neq i \end{cases} \\
\sum_j \mathrm{E}\Big[X_i^4\big(X_j^2 - 1\big)^2\Big] &= (\alpha_8 - 2\alpha_6 + \kappa + 3) + (n-1)(\kappa+3)(\kappa+2) \\
\sum_i \sum_j \mathrm{E}\Big[X_i^4\big(X_j^2 - 1\big)^2\Big] &= n(\alpha_8 - 2\alpha_6 + \kappa + 3) + (n^2 - n)(\kappa+3)(\kappa+2) \\
&= n^2(\kappa^2 + 5\kappa + 6) + n(\alpha_8 - 2\alpha_6 - \kappa^2 - 4\kappa - 3) \\
\mathrm{E}\Big[X_k^3 X_\ell\big(X_j^2 - 1\big)^2\Big]\Big|_{k\neq\ell} &= \mathrm{E}\Big[X_k^3 X_\ell\Big(X_j^4 - 2X_j^2 + 1\Big)\Big]\Big|_{k\neq\ell} \\
&= \begin{cases} \gamma(\alpha_5 - 2\gamma), & j = \ell \\ 0, & j \neq \ell \end{cases} \\
\sum_j \mathrm{E}\Big[X_k^3 X_\ell\big(X_j^2 - 1\big)^2\Big]\Big|_{k\neq\ell} &= \alpha_5\gamma - 2\gamma^2 \\
\sum_{k\neq\ell}\sum_j \mathrm{E}\Big[X_k^3 X_\ell\big(X_j^2 - 1\big)^2\Big] &= n(n-1)(\alpha_5\gamma - 2\gamma^2) \\
&= (n^2 - n)(\alpha_5\gamma - 2\gamma^2) \\
\mathrm{E}\Big[X_k^2 X_\ell^2\big(X_j^2 - 1\big)^2\Big]\Big|_{k<\ell} &= \mathrm{E}\Big[X_k^2 X_\ell^2\Big(X_j^4 - 2X_j^2 + 1\Big)\Big]\Big|_{k<\ell} \\
&= \begin{cases} \alpha_6 - 2\kappa - 5, & j = k \\ \alpha_6 - 2\kappa - 5, & j \neq \ell \\ \kappa + 2 & \text{autrement} \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\sum_j \mathrm{E}\Big[X_k^2 X_\ell^2 \big(X_j^2-1\big)^2\Big]\Big|_{k<\ell} = 2(\alpha_6 - 2\kappa - 5) + (n-2)(\kappa+2)$$

$$\sum_{k<\ell}\sum_j \mathrm{E}\Big[X_k^2 X_\ell^2 \big(X_j^2-1\big)^2\Big] = \frac{1}{2}n(n-1)[n(\kappa+2) + 2(\alpha_6 - 3\kappa - 7)]$$

$$= \frac{1}{2}n^3(\kappa+2) + n^2(\alpha_6 - \frac{7}{2}\kappa - 8)$$
$$- n(\alpha_6 - 3\kappa - 7)$$

$$\mathrm{E}\Big[X_k^3 X_\ell \big(X_t^2-1\big)\big(X_u^2-1\big)\Big]\Big|_{\substack{k\neq\ell\\ t\neq u}} = \begin{cases} \gamma(\alpha_5-\gamma), & (k,\ell)=(t,u) \\ \gamma(\alpha_5-\gamma), & (k,\ell)=(u,t) \\ 0, & \text{autrement} \end{cases}$$

$$\sum_{t\neq u} \mathrm{E}\Big[X_k^3 X_\ell \big(X_t^2-1\big)\big(X_u^2-1\big)\Big]\Big|_{k\neq\ell} = 2\gamma(\alpha_5-\gamma)$$

$$\sum_{k\neq\ell}\sum_{t\neq u} \mathrm{E}\Big[X_k^3 X_\ell \big(X_t^2-1\big)\big(X_u^2-1\big)\Big] = 2n(n-1)(\alpha_5\gamma - \gamma^2)$$

$$= 2n^2(\alpha_5\gamma-\gamma^2) - 2n(\alpha_5\gamma-\gamma^2)$$

$$\mathrm{E}\Big[X_k^2 X_\ell^2 \big(X_t^2-1\big)\big(X_u^2-1\big)\Big]\Big|_{\substack{k<\ell\\ t\neq u}} = \begin{cases} (\kappa+2)^2, & (k,\ell)=(t,u) \\ (\kappa+2)^2, & (k,\ell)=(u,t) \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

$$\sum_{t\neq u} \mathrm{E}\Big[X_k^2 X_\ell^2 \big(X_t^2-1\big)\big(X_u^2-1\big)\Big]\Big|_{k<\ell} = 2(\kappa+2)^2$$

$$\sum_{k<\ell}\sum_{t\neq u} \mathrm{E}\Big[X_k^2 X_\ell^2 \big(X_t^2-1\big)\big(X_u^2-1\big)\Big] = \frac{1}{2}n(n-1)2(\kappa+2)^2$$

$$= (n^2-n)(\kappa^2+4\kappa+4)$$

$$\mathrm{E}\Big[X_k^2 X_\ell X_r \big(X_t^2-1\big)\big(X_u^2-1\big)\Big]\Big|_{\substack{\ell<r\\ \ell\neq k\\ r\neq k\\ t\neq u}} = \begin{cases} \gamma^2, & (\ell,r)=(t,u) \\ \gamma^2, & (\ell,r)=(u,t) \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

$$\sum_{t\neq u} \mathrm{E}\Big[X_k^2 X_\ell X_r \big(X_t^2-1\big)\big(X_u^2-1\big)\Big]\Big|_{\substack{\ell<r\\ \ell\neq k\\ r\neq k}} = 2\gamma^2$$

$$\sum_{\substack{k\neq\ell\\ k\neq r}}\sum_{t\neq u} \mathrm{E}\Big[X_k^2 X_\ell X_r \big(X_t^2-1\big)\big(X_u^2-1\big)\Big]\Big|_{\ell<r} = 2(n-2)\gamma^2$$

$$\sum_{\ell<r}\sum_{\substack{k\neq\ell\\ k\neq r}}\sum_{t\neq u} \mathrm{E}\Big[X_k^2 X_\ell X_r \big(X_t^2-1\big)\big(X_u^2-1\big)\Big] = \frac{1}{2}n(n-1)2(n-2)\gamma^2$$

$$= (n^3-3n^2+2n)\gamma^2\,.$$

Pour les autres termes l'espérance est nulle. L'expression (2.37) suit.

2.16 Expression pour $A_{1,3}$

Preuve pour (2.38), $A_{1,3} = \mathrm{E}\{(\sum X_i)[\sum (X_j^2-1)]^3\}$. A partir de

$$\Big(\sum_i X_i\Big)\Big[\sum_j \Big(X_j^2-1\Big)\Big]^3 = \sum_i X_i\Big[\sum_j \Big(X_j^2-1\Big)^3 + 3\sum_{k\neq\ell}\Big(X_k^2-1\Big)^2\Big(X_\ell^2-1\Big) + 6\sum_{k<\ell<r}\Big(X_k^2-1\Big)\Big(X_\ell^2-1\Big)\Big(X_r^2-1\Big)\Big],$$

on calcule l'espérance des termes à droite :

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\Big[X_i\Big(X_j^2-1\Big)^3\Big] &= \mathrm{E}\Big[X_i\Big(X_j^6-3X_j^4+3X_j^2-1\Big)\Big] \\
&= \begin{cases} 0, & j\neq i \\ \alpha_7-3\alpha_5+3\gamma, & j=i \end{cases} \\
\sum_j \mathrm{E}\Big[X_i\Big(X_j^2-1\Big)^3\Big] &= \alpha_7-3\alpha_5+3\gamma \\
\sum_i\sum_j \mathrm{E}\Big[X_i\Big(X_j^2-1\Big)^3\Big] &= n(\alpha_7-3\alpha_5+3\gamma) \\
\mathrm{E}\Big[X_i\Big(X_k^2-1\Big)^2\Big(X_\ell^2-1\Big)\Big]\Big|_{k\neq\ell} &= \mathrm{E}\Big[X_i\Big(X_k^4-2X_k^2+1\Big)\Big(X_\ell^2-1\Big)\Big]\Big|_{k\neq\ell} \\
&= \begin{cases} 0, & \ell\neq i \\ \gamma(\kappa+2), & \ell=i \end{cases} \\
\sum_{k\neq\ell} \mathrm{E}\Big[X_i\Big(X_k^2-1\Big)^2\Big(X_\ell^2-1\Big)\Big] &= (n-1)\gamma(\kappa+2) \\
\sum_i\sum_{k\neq\ell} \mathrm{E}\Big[X_i\Big(X_k^2-1\Big)^2\Big(X_\ell^2-1\Big)\Big] &= n(n-1)\gamma(\kappa+2) \\
&= (n^2-n)(\kappa\gamma+2\gamma) \\
\mathrm{E}\Big[X_i\big(X_k^2-1\big)\big(X_\ell^2-1\big)\big(X_r^2-1\big)\Big]\Big|_{k<\ell<r} &= 0\,.
\end{aligned}$$

Donc on obtient l'expression (2.38).

2.17 Expression pour $A_{2,3}$

Preuve pour (2.39), $A_{2,3} = \mathrm{E}\{\left(\sum X_i\right)^2\left[\sum\left(X_j^2-1\right)\right]^3\}$. Utilisons l'expansion pour les puissances 2 et 3

$$\Big(\sum_i X_i\Big)^2\sum_j\Big(X_j^2-1\Big)^3 = \Big[\sum_i X_i^2+\sum_{k\neq\ell}X_kX_\ell\Big]\Big[\sum_j\Big(X_j^2-1\Big)^3+3\sum_{r\neq s}\Big(X_r^2-1\Big)^2 \Big(X_s^2-1\Big)+6\sum_{r<s<u}\Big(X_r^2-1\Big)\Big(X_s^2-1\Big)\Big(X_u^2-1\Big)\Big].$$

Appliquons l'espérance pour les termes à droite

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\Big[X_i^2\Big(X_j^2-1\Big)^3\Big] &= \mathrm{E}\Big[X_i^2\Big(X_j^6-3X_j^4+3X_j^2-1\Big)\Big]\\
&= \begin{cases}\alpha_6-3\kappa-7, & j\neq i\\ \alpha_8-3\alpha_6+3\kappa+8, & j=i\end{cases}\\
\sum_i \mathrm{E}\Big[X_i^2\Big(X_j^2-1\Big)^3\Big] &= (n-1)(\alpha_6-3\kappa-7)+(\alpha_8-3\alpha_6+3\kappa+8)\\
\sum_j\sum_i \mathrm{E}\Big[X_i^2\Big(X_j^2-1\Big)^3\Big] &= n^2(\alpha_6-3\kappa-7)+n(\alpha_8-4\alpha_6+6\kappa+15)\\
\mathrm{E}\Big[X_i^2\Big(X_r^2-1\Big)^2\Big(X_s^2-1\Big)\Big]\Big|_{r\neq s} &= \mathrm{E}\Big[X_i^2\Big(X_r^4-2X_r^2+1\Big)\Big(X_s^2-1\Big)\Big]\Big|_{r\neq s}\\
&= \begin{cases}0, & i=r\\ (\kappa+2)^2, & i=s\end{cases}\\
\sum_{r\neq s}\mathrm{E}\Big[X_i^2\Big(X_r^2-1\Big)^2\Big(X_s^2-1\Big)\Big] &= (n-1)(\kappa+2)^2\\
\sum_i\sum_{r\neq s}\mathrm{E}\Big[X_i^2\Big(X_r^2-1\Big)^2\Big(X_s^2-1\Big)\Big] &= (n^2-n)(\kappa+2)^2\\
\mathrm{E}\Big[X_kX_\ell\Big(X_r^2-1\Big)^2\Big(X_s^2-1\Big)\Big]\Big|_{\substack{k\neq\ell\\ r\neq s}} &= \mathrm{E}\Big[X_kX_\ell\Big(X_r^4-2X_r^2+1\Big)\Big(X_s^2-1\Big)\Big]\Big|_{\substack{k\neq\ell\\ r\neq s}}\\
&= \begin{cases}\gamma(\alpha_5-2\gamma), & (k,\ell)=(r,s)\\ \gamma(\alpha_5-2\gamma), & (k,\ell)=(s,r)\\ 0, & \text{autrement}\end{cases}\\
\sum_{r\neq s}\mathrm{E}\Big[X_kX_\ell\Big(X_r^2-1\Big)^2\Big(X_s^2-1\Big)\Big]\Big|_{k\neq\ell} &= 2\gamma(\alpha_5-2\gamma)\\
\sum_{k\neq\ell}\sum_{r\neq s}\mathrm{E}\Big[X_kX_\ell\Big(X_r^2-1\Big)^2\Big(X_s^2-1\Big)\Big] &= 2(n^2-n)(\alpha_5\gamma-2\gamma^2)\,.
\end{aligned}$$

Les autres termes ont une espérance nulle. Ainsi, on obtient l'expression (2.39).

2.18 Expression pour $A_{3,3}$

Preuve pour (2.40), $A_{3,3} = \mathrm{E}\{(\sum X_i)^3[\sum (X_j^2-1)]^3\}$. Utilisons le multinomium pour puissance 3 :

$$\begin{aligned}
&\Big(\sum_i X_i\Big)^3\Big[\sum_j \Big(X_j^2-1\Big)\Big]^3 \\
&= \Big\{\sum_i X_i^3 + 3\sum_{k\neq\ell} X_k^2 X_\ell + 6\sum_{k<\ell<r} X_k X_\ell X_r\Big\} \\
&\quad \Big\{\sum_j (X_j^2-1)^3 + 3\sum_{s\neq u}(X_s^2-1)^2(X_u^2-1) + 6\sum_{s<u<t}(X_s^2-1)(X_u^2-1)(X_t^2-1)\Big\}.
\end{aligned}$$

Calculons l'espérance des termes à droite :

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\Big[X_i^3\Big(X_j^2-1\Big)^3\Big] &= \begin{cases}\alpha_9 - 3\alpha_7 + 3\alpha_5 - \gamma, & j=i\\ \gamma(\alpha_6 - 3\kappa - 7), & j\neq i\end{cases}\\
\sum_j \mathrm{E}\Big[X_i^3\Big(X_j^2-1\Big)^3\Big] &= (\alpha_9 - 3\alpha_7 + 3\alpha_5 - \gamma) + (n-1)(\gamma(\alpha_6 - 3\kappa - 7))\\
\sum_i\sum_j \mathrm{E}\Big[X_i^3\Big(X_j^2-1\Big)^3\Big] &= n(\alpha_9 - 3\alpha_7 + 3\alpha_5 - \gamma) + (n^2-n)(\alpha_6\gamma - 3\kappa\gamma - 7\gamma)\\
\mathrm{E}\Big[X_k^2 X_\ell\Big(X_j^2-1\Big)^3\Big]\Big|_{k\neq\ell} &= \begin{cases}0, & j\neq\ell\\ \alpha_7 - 3\alpha_5 + 3\gamma, & j=\ell\end{cases}\\
\sum_{k\neq\ell} \mathrm{E}\Big[X_k^2 X_\ell\Big(X_j^2-1\Big)^3\Big] &= (n-1)(\alpha_7 - 3\alpha_5 + 3\gamma)\\
\sum_j\sum_{k\neq\ell} \mathrm{E}\Big[X_k^2 X_\ell\Big(X_j^2-1\Big)^3\Big] &= (n^2-n)(\alpha_7 - 3\alpha_5 + 3\gamma)\\
\mathrm{E}\Big[X_i^3\Big(X_s^2-1\Big)^2\Big(X_u^2-1\Big)\Big]\Big|_{s\neq u} &= \mathrm{E}\Big[X_i^3\Big(X_s^4-2X_s^2+1\Big)\Big(X_u^2-1\Big)\Big]\Big|_{s\neq u}\\
&= \begin{cases}0, & i=s\\ (\kappa+2)(\alpha_5-\gamma), & i=u\end{cases}\\
\sum_{s\neq u} \mathrm{E}\Big[X_i^3\Big(X_s^2-1\Big)^2\Big(X_u^2-1\Big)\Big] &= (n-1)(\kappa+2)(\alpha_5-\gamma)\\
\sum_i\sum_{s\neq u} \mathrm{E}\Big[X_i^3\Big(X_s^2-1\Big)^2\Big(X_u^2-1\Big)\Big] &= (n^2-n)(\kappa+2)(\alpha_5-\gamma)
\end{aligned}$$

$$\mathrm{E}\Big[X_k^2 X_\ell \Big(X_s^2-1\Big)^2\Big(X_u^2-1\Big)\Big]\Big|_{\substack{k\neq\ell\\ s\neq u}} = \begin{cases}\gamma(\alpha_6-2\kappa-5), & (k,\ell)=(s,u)\\ (\alpha_5-2\gamma)(\kappa+2), & (k,\ell)=(u,s)\\ \gamma(\kappa+2), & u=\ell, s\neq k\\ 0, & \text{autrement}\end{cases}$$

$$\begin{aligned}\sum_{s\neq u}\mathrm{E}\Big[X_k^2 X_\ell \Big(X_s^2-1\Big)^2\Big(X_u^2-1\Big)\Big]\Big|_{k\neq\ell} &= \gamma(\alpha_6-2\kappa-5)+(\alpha_5-2\gamma)(\kappa+2)\\ &\quad +(n-2)\gamma(\kappa+2)\\ \sum_{k\neq\ell}\sum_{s\neq u}\mathrm{E}\Big[X_k^2 X_\ell \Big(X_s^2-1\Big)^2\Big(X_u^2-1\Big)\Big] &= (n^2-n)(\alpha_6\gamma+\alpha_5\kappa+2\alpha_5-4\kappa\gamma\\ &\quad -9\gamma)+(n^2-n)(n-2)(\kappa\gamma+2\gamma)\\ &= n^3(\kappa\gamma+2\gamma)+n^2(\alpha_6\gamma+\alpha_5\kappa+2\alpha_5\\ &\quad -7\kappa\gamma-15\gamma)+n(-\alpha_6\gamma-\alpha_5\kappa\\ &\quad -2\alpha_5+6\kappa\gamma+13\gamma)\end{aligned}$$

$$\mathrm{E}\Big[X_kX_\ell X_r\Big(X_s^2-1\Big)\Big(X_u^2-1\Big)\Big(X_t^2-1\Big)\Big]\Big|_{\substack{k<\ell<r\\ s<u<t}} = \begin{cases}\gamma^3, & (k,\ell,r)=(s,u,t)\\ 0, & \text{autrement}\end{cases}$$

$$\sum_{s<u<t}\mathrm{E}\Big[X_kX_\ell X_r\Big(X_s^2-1\Big)\Big(X_u^2-1\Big)\Big(X_t^2-1\Big)\Big]\Big|_{k<\ell<r} = \gamma^3$$

$$\sum_{k<\ell<r}\sum_{s<u<t}\mathrm{E}\Big[X_kX_\ell X_r\Big(X_s^2-1\Big)\Big(X_u^2-1\Big)\Big(X_t^2-1\Big)\Big] = \frac{1}{6}\gamma^3n^3-\frac{1}{2}\gamma^3n^2+\frac{1}{3}\gamma^3n\,.$$

Les autres termes ont une espérance nulle. Ainsi, on obtient l'expression (2.40).

2.19 Expression pour $A_{4,3}$

Preuve pour (2.41), $A_{4,3} = \mathrm{E}\big\{\big(\sum X_i\big)^4\big[\sum\big(X_j^2-1\big)\big]^3\big\}$. Utilisons l'expansion pour les puissances 4 et 3. On peut écrire :

$$\begin{aligned}&\Big(\sum_i X_i\Big)^4\Big[\sum_j\Big(X_j^2-1\Big)\Big]^3\\ &=\Big\{\sum_i X_i^4+4\sum_{k\neq\ell}X_k^3X_\ell+6\sum_{k<\ell}X_k^2X_\ell^2+12\sum_{\substack{\ell<r\\ \ell\neq k,r\neq k}}X_k^2X_\ell X_r+24\sum_{k<\ell<r<s}X_kX_\ell X_rX_s\Big\}\\ &\quad\Big\{\sum_j\big(X_j^2-1\big)^3+3\sum_{u\neq t}\big(X_u^2-1\big)^2\big(X_t^2-1\big)+6\sum_{u<t<p}\big(X_u^2-1\big)\Big(X_t^2-1\big)\big(X_p^2-1\big)\Big\}.\end{aligned}$$

Appliquons l'espérance pour les termes à droite

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\Big[X_i^4\Big(X_j^2-1\Big)^3\Big] &= \mathrm{E}\Big[X_i^4\Big(X_j^6-3X_j^4+3X_j^2-1\Big)\Big] \\
&= \begin{cases} \alpha_{10}-3\alpha_8+3\alpha_6-\kappa-3, & j=i \\ (\kappa+3)(\alpha_6-3\kappa-7), & j\neq i \end{cases} \\
\sum_j \mathrm{E}\Big[X_i^4\Big(X_j^2-1\Big)^3\Big] &= (\alpha_{10}-3\alpha_8+3\alpha_6-\kappa-3)+(n-1)(\kappa+3)(\alpha_6-3\kappa-7) \\
\sum_i\sum_j \mathrm{E}\Big[X_i^4\Big(X_j^2-1\Big)^3\Big] &= n^2(\alpha_6\kappa+3\alpha_6-3\kappa^2-16\kappa-21)+n(\alpha_{10}-3\alpha_8-\alpha_6\kappa \\
&\quad +3\kappa^2+15\kappa+18) \\
\mathrm{E}\Big[X_k^3X_\ell\Big(X_j^2-1\Big)^3\Big]\Big|_{k\neq\ell} &= \mathrm{E}\Big[X_k^3X_\ell\Big(X_j^6-3X_j^4+3X_j^2-1\Big)\Big]\Big|_{k\neq\ell} \\
&= \begin{cases} 0, & j\neq\ell \\ \gamma(\alpha_7-3\alpha_5+3\gamma), & j=\ell \end{cases} \\
\sum_{k\neq\ell} \mathrm{E}\Big[X_k^3X_\ell\Big(X_j^2-1\Big)^3\Big] &= (n-1)\gamma(\alpha_7-3\alpha_5+3\gamma) \\
\sum_j\sum_{k\neq\ell} \mathrm{E}\Big[X_k^3X_\ell\Big(X_j^2-1\Big)^3\Big] &= (n^2-n)(\alpha_7\gamma-3\alpha_5\gamma+3\gamma^2) \\
\mathrm{E}\Big[X_k^2X_\ell^2\Big(X_j^2-1\Big)^3\Big]\Big|_{k<\ell} &= \mathrm{E}\Big[X_k^2X_\ell^2\Big(X_j^6-3X_j^4+3X_j^2-1\Big)\Big]\Big|_{k<\ell} \\
&= \begin{cases} \alpha_8-3\alpha_6+3\kappa+8, & j=k<\ell \\ \alpha_8-3\alpha_6+3\kappa+8, & k<\ell=j \\ \alpha_6-3\kappa-7, & j\neq k, j\neq\ell \end{cases} \\
\sum_j \mathrm{E}\Big[X_k^2X_\ell^2\Big(X_j^2-1\Big)^3\Big]\Big|_{k<\ell} &= 2(\alpha_8-3\alpha_6+3\kappa+8)+(n-2)(\alpha_6-3\kappa-7) \\
\sum_j\sum_{k<\ell} \mathrm{E}\Big[X_k^2X_\ell^2\Big(X_j^2-1\Big)^3\Big] &= \frac{1}{2}n(n-1)2(\alpha_8-3\alpha_6+3\kappa+8) \\
&\quad +\frac{1}{2}n(n-1)(n-2)(\alpha_6-3\kappa-7) \\
&= \frac{1}{2}n^3(\alpha_6-3\kappa-7)+n^2(\alpha_8-\frac{9}{2}\alpha_6+\frac{15}{2}\kappa+\frac{37}{2}) \\
&\quad +n(4\alpha_6-\alpha_8-6\kappa-15) \\
\mathrm{E}\Big[X_i^4\Big(X_u^2-1\Big)^2\Big(X_t^2-1\Big)\Big]\Big|_{u\neq t} &= \mathrm{E}\Big[X_i^4\Big(X_u^4-2X_u^2+1\Big)\Big(X_t^2-1\Big)\Big]\Big|_{u\neq t} \\
&= \begin{cases} 0, & i=u \\ (\kappa+2)(\alpha_6-\kappa-3), & i=t \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\sum_{u\neq t}\mathrm{E}\Big[X_i^4\Big(X_u^2-1\Big)^2\Big(X_t^2-1\Big)\Big] = (n-1)(\kappa+2)(\alpha_6-\kappa-3)$$

$$\sum_{i}\sum_{u\neq t}\mathrm{E}\Big[X_i^4\Big(X_u^2-1\Big)^2\Big(X_t^2-1\Big)\Big] = (n^2-n)(\alpha_6\kappa+2\alpha_6-\kappa^2-5\kappa-6)$$

$$\mathrm{E}\Big[X_k^3X_\ell\Big(X_u^2-1\Big)^2\Big(X_t^2-1\Big)\Big]\Big|_{\substack{k\neq\ell\\u\neq t}} = \mathrm{E}\Big[X_k^3X_\ell\Big(X_u^4-2X_u^2+1\Big)\Big(X_t^2-1\Big)\Big]\Big|_{\substack{k\neq\ell\\u\neq t}}$$
$$= \begin{cases}\gamma(\alpha_7-2\alpha_5+\gamma), & (k,\ell)=(u,t)\\ (\alpha_5-2\gamma)(\alpha_5-\gamma), & (k,\ell)=(t,u)\\ \gamma^2(\kappa+2), & t=\ell, u\neq k\\ 0, & \text{autrement}\end{cases}$$

$$\sum_{u\neq t}\mathrm{E}\Big[X_k^3X_\ell\Big(X_u^2-1\Big)^2\Big(X_t^2-1\Big)\Big]\Big|_{k\neq\ell} = \gamma(\alpha_7-2\alpha_5+\gamma)+(\alpha_5-2\gamma)(\alpha_5-\gamma)$$
$$+(n-2)\gamma^2(\kappa+2)$$
$$=(\alpha_7\gamma-5\alpha_5\gamma+\alpha_5^2+3\gamma^2)+(n-2)\gamma^2(\kappa+2)$$

$$\sum_{k\neq\ell}\sum_{u\neq t}\mathrm{E}\Big[X_k^3X_\ell\Big(X_u^2-1\Big)^2\Big(X_t^2-1\Big)\Big] = n(n-1)(\alpha_7\gamma-5\alpha_5\gamma+\alpha_5^2+3\gamma^2)$$
$$+(n^2-n)(n-2)\gamma^2(\kappa+2)$$
$$=(n^2-n)(\alpha_7\gamma-5\alpha_5\gamma+\alpha_5^2+3\gamma^2)$$
$$+(n^3-3n+2n)(\kappa\gamma^2+2\gamma^2)$$
$$=n^3(\kappa\gamma^2+2\gamma^2)+n^2(\alpha_7\gamma-5\alpha_5\gamma-3\kappa\gamma^2+\alpha_5^2$$
$$-3\gamma^2)+n(5\alpha_5\gamma-\alpha_7\gamma-\alpha_5^2+2\kappa\gamma^2+\gamma^2)$$

$$\mathrm{E}\Big[X_k^2X_\ell^2\Big(X_u^2-1\Big)^2\Big(X_t^2-1\Big)\Big]\Big|_{\substack{k<\ell\\u\neq t}} = \mathrm{E}\Big[X_k^2X_\ell^2\Big(X_u^4-2X_u^2+1\Big)\Big(X_t^2-1\Big)\Big]\Big|_{\substack{k<\ell\\u\neq t}}$$
$$= \begin{cases}(\alpha_6-2\kappa-5)(\kappa+2), & (k,\ell)=(u,t)\\ (\alpha_6-2\kappa-5)(\kappa+2), & (k,\ell)=(t,u)\\ (\kappa+2)^2, & t=k, \ell\neq u\\ (\kappa+2)^2, & t=\ell, u\neq k\\ 0, & \text{autrement}\end{cases}$$

$$\sum_{u\neq t}\mathrm{E}\Big[X_k^2X_\ell^2\Big(X_u^2-1\Big)^2\Big(X_t^2-1\Big)\Big]|_{k<\ell} = 2(\kappa+2)(\alpha_6-2\kappa-5)+2(n-2)(\kappa+2)^2$$

$$\sum_{k<\ell}\sum_{u\neq t}\mathrm{E}\Big[X_k^2X_\ell^2\Big(X_u^2-1\Big)^2\Big(X_t^2-1\Big)\Big] = \frac{1}{2}n(n-1)2(\kappa+2)(\alpha_6-2\kappa-5)$$
$$+(n^2-n)(n-2)(\kappa+2)^2$$
$$=n^3(\kappa+2)^2+n^2(\alpha_6\kappa+2\alpha_6-5\kappa^2-21\kappa$$
$$-22)+n(-\alpha_6\kappa-2\alpha_6+4\kappa^2+17\kappa+18)$$

$$\mathrm{E}\Big[X_k^2X_\ell X_r\Big(X_u^2-1\Big)^2\Big(X_t^2-1\Big)\Big]\Big|_{\substack{\ell<r\\ \ell\neq k\\ r\neq k\\ u\neq t}} = \mathrm{E}\Big[X_k^2X_\ell X_r\Big(X_u^4-2X_u^2+1\Big)\Big(X_t^2-1\Big)\Big]\Big|_{\substack{\ell<r\\ \ell\neq k\\ r\neq k\\ u\neq t}}$$

$$= \begin{cases} \gamma(\alpha_5-2\gamma), & (\ell,r)=(u,t)\\ \gamma(\alpha_5-2\gamma), & (\ell,r)=(t,u)\\ 0, & \text{autrement}\end{cases}$$

$$\sum_{u\neq t}\mathrm{E}\Big[X_k^2X_\ell X_r\Big(X_u^2-1\Big)^2\Big(X_t^2-1\Big)\Big]\Big|_{\substack{\ell<r\\ \ell\neq k\\ r\neq k}} = 2\gamma(\alpha_5-2\gamma)$$

$$\sum_{\substack{k\neq\ell,\\ k\neq r}}\sum_{u\neq t}\mathrm{E}\Big[X_k^2X_\ell X_r\Big(X_u^2-1\Big)^2\Big(X_t^2-1\Big)\Big]\Big|_{\ell<r} = 2(n-2)\gamma(\alpha_5-2\gamma)$$

$$\sum_{\ell<r}\sum_{\substack{k\neq\ell,\\ k\neq r}}\sum_{u\neq t}\mathrm{E}\Big[X_k^2X_\ell X_r\Big(X_u^2-1\Big)^2\Big(X_t^2-1\Big)\Big] = \frac{1}{2}n(n-1)2(n-2)(\alpha_5\gamma-2\gamma^2)$$

$$= (n^3-3n^2+2n)(\alpha_5\gamma-2\gamma^2)$$

$$\mathrm{E}\Big[X_k^2X_\ell X_r\Big(X_u^2-1\Big)\Big(X_t^2-1\Big)\Big(X_p^2-1\Big)\Big]\Big|_{\substack{\ell<r\\ \ell\neq k,r\neq k\\ u<t<p}} = \begin{cases}(\kappa+2)\gamma^2, & (u,t,p)=(k,\ell,r)\\ \gamma(\kappa+2)\gamma, & (u,t,p)=(\ell,k,r)\\ \gamma^2(\kappa+2), & (u,t,p)=(\ell,r,k)\\ 0, & \text{autrement}\end{cases}$$

$$\sum_{u<t<p}\mathrm{E}\Big[X_k^2X_\ell X_r\Big(X_u^2-1\Big)\Big(X_t^2-1\Big)\Big(X_p^2-1\Big)\Big]\Big|_{\substack{\ell<r\\ \ell\neq k,r\neq k}} = 3\gamma^2(\kappa+2)$$

$$\sum_{\substack{k\neq\ell,\\ k\neq r}}\sum_{u<t<p}\mathrm{E}\Big[X_k^2X_\ell X_r\Big(X_u^2-1\Big)\Big(X_t^2-1\Big)\Big(X_p^2-1\Big)\Big]\Big|_{\ell<r} = 3(n-2)\gamma^2(\kappa+2)$$

$$\sum_{\ell<r}\sum_{\substack{k\neq\ell,\\ k\neq r}}\sum_{u<t<p}\mathrm{E}\Big[X_k^2X_\ell X_r\Big(X_u^2-1\Big)\Big(X_t^2-1\Big)\Big(X_p^2-1\Big)\Big] = \frac{1}{2}n(n-1)3(n-2)\gamma^2(\kappa+2)$$

$$= \frac{3}{2}(n^3-3n^2+2n)(\kappa\gamma^2+2\gamma^2)\,.$$

Les autres termes ont une espérance nulle. Ainsi on obtient l'expression (2.41).

Chapitre 3

Cinquième moment de S_n

Dans ce chapitre nous présentons une extension au chapitre précédent en obtenant l'expansion asymptotique pour le cinquième moment de la moyenne studentisée de Hall, $\mathrm{E}(S_n^5)$, en puissances de $n^{-1/2}$ jusqu'à l'ordre 3. Cette extension s'est imposée en fonction de l'objectif de ce mémoire, l'expansion de la fdi de S_n qui sera le sujet du chapitre suivant.

3.1 Expansion pour S_n^5

De la relation (2.3), on a pour S_n^5 :

$$S_n^5 = A^5(1+x)^{-5/2}, \qquad (1+x)^{-5/2} = 1 - \frac{5}{2}x + \frac{35}{8}x^2 - \frac{105}{16}x^3 + O(x^4)$$

avec S_n donné par (2.1) ou (2.2) avec A, x de (2.4). Alors, on obtient le lemme suivant :

Lemme 3.1.1. Pour S_n^5, on obtient l'équation de structure par rapport aux puissances de $n^{-1/2}$:

$$\begin{aligned} S_n^5 &= A^5\Big\{1 - \frac{5}{2}B - \frac{5}{2}C + \frac{35}{8}B^2 + \frac{35}{4}BC - \frac{105}{16}B^3\Big\} + O_p(n^{-2}) \\ &= A^5\Big\{1 - \frac{5}{2}B - \frac{5}{2}C + \frac{35}{8}B^2\Big\} + O_p(n^{-3/2}) \\ &= A^5\Big\{1 - \frac{5}{2}B\Big\} + O_p(n^{-1}) \end{aligned} \tag{3.1}$$

avec A, B, C de (2.4).

3.2 Expansion pour le cinquième moment de S_n

Théorème 3.2.1. Pour le cinquième moment de S_n, les expansions en puissances de $n^{-1/2}$ à l'ordre 1, 2 et 3 sont données par les expressions suivantes

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(S_n^5) &= -\frac{55}{2}n^{-1/2}\gamma + O(n^{-1}) && (3.2)\\ &= -\frac{55}{2}n^{-1/2}\gamma + O(n^{-3/2}) && (3.3)\\ &= -\frac{55}{2}n^{-1/2}\gamma + \frac{1}{8}n^{-3/2}\Big(333\alpha_5 - 2575\kappa\gamma - 2450\gamma^3 - 10530\gamma\Big) + O(n^{-2}) && (3.4) \end{aligned}$$

où interviennent les moments $\alpha_k = \mathrm{E}(X^k)$, $k = 1, 2, \ldots$, et en particulier l'asymétrie $\gamma = \mathrm{E}(X^3)$ et le kurtosis $\kappa = \mathrm{E}(X^4) - 3$.

Pour une population initiale X générale, à moyenne μ et variance σ^2, et sa moyenne studentisée de Hall $S_n = n^{1/2}(\overline{X} - \mu)/\hat{\sigma}$, les expressions ci-dessus restent valables, à condition de lire X dans ces expressions comme la variable standardisée $(X - \mu)/\sigma$, donc $\alpha_k = \mathrm{E}[(X - \mu)/\sigma]^k = \mu^k/\sigma^k$ comme le moment standard, et en particulier γ et κ sont l'asymétrie et le kurtosis de X et $\alpha_5 = \mathrm{E}[(X - \mu)/\sigma]^5 = \mu^5/\sigma^5$ est le cinquième moment standard.

Interprétation. L'interprétation du théorème 2.2.1 pour les moments d'ordre 1 à 4 de S_n se continue pour le moment d'ordre 5.
Pour les moments d'ordre 1 à 5 de la statistique studentisée S_n, et une précision d'ordre 1 à 3 dans l'expansion en puissances de $n^{-1/2}$ on peut conclure :

1. L'expansion asymptotique de chaque moment de S_n dépend uniquement des moments standards de population.
2. Globalement, pour une précision d'ordre 1 à 3, il faut inclure les moments de population d'ordre 3 à 5, respectivement l'asymétrie γ, le kurtosis κ, et le moment standard α_5.
3. Effet des moments de population :
   - Le premier facteur est l'asymétrie γ, et elle a un effet dès l'ordre 1 pour les moments impairs, et dès l'ordre 2 pour les moments pairs.
   - Le deuxième facteur est le kurtosis κ, et il a un effet que dès l'ordre 2 et seulement pour le quatrième moment.
   - Le cinquième moment standard a un effet seulement dès l'ordre 3, et cela que pour les moments impairs.
4. Pour obtenir dans l'expansion des moments de S_n une précision progressante à partir de l'ordre 1, il faut typiquement inclure des moments standards de population d'ordre progressif à partir de l'asymétrie :
   - pour une précision à l'ordre 1, au maximum l'asymétrie intervient ;
   - à l'ordre 2, au maximum l'asymétrie et le kurtosis interviennent ;

- à l'ordre 3, au maximum l'asymétrie, le kurtosis et le moment standard d'ordre 5 interviennent.

5. Les expansions montrent des paires d'expansions égales :
   - Les expansions d'ordre 1 et 2 sont égales pour les moments impairs.
   - Les expansions d'ordre 2 et 3 sont égales pour les moments pairs.

Preuve pour le théorème. Pour calculer le moment $\mathrm{E}(S_n^5)$, l'équation de structure (3.1) indique le calcul des espérances des termes à droite, comme $\mathrm{E}(A^5)$, $\mathrm{E}(A^5B)$, etc. Il faudra essentiellement les espérances suivantes, tous des moments mixtes d'échantillon de type (2.21),

$$A_{k,\ell} = \mathrm{E}\Big\{ \Big(\sum X_i\Big)^k \Big[\sum \Big(X_j^2 - 1\Big)\Big]^\ell \Big\}$$

que nous prouverons après. Chaque sommation se fait de 1 à n, sauf marquée autrement.

$$\mathrm{E}\Big\{ \Big(\sum X_i\Big)^5 \Big\} = 10\gamma\ n^2 + n(\alpha_5 - 10\gamma) \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\Big\{ \Big(\sum X_i\Big)^7 \Big\} &= 105\gamma\ n^3 + n^2(21\alpha_5 + 35\kappa\gamma - 210\gamma) \\ &\quad + n(\alpha_7 - 21\alpha_5 - 35\kappa\gamma + 105\gamma)\end{aligned} \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\Big\{ \Big(\sum X_i\Big)^7 \Big[\sum \Big(X_j^2 - 1\Big)\Big] \Big\} &= 105\gamma\ n^4 + n^3(105\alpha_5 + 315\kappa\gamma + 70\gamma^3) \\ &\quad + n^2(21\alpha_7 + 42\alpha_6\gamma + 56\alpha_5\kappa - 189\alpha_5 - 1015\kappa\gamma \\ &\quad - 210\gamma^3 - 945\gamma) + n(\alpha_9 - 22\alpha_7 - 42\alpha_6\gamma - 56\alpha_5\kappa \\ &\quad + 84\alpha_5 + 700\kappa\gamma + 140\gamma^3 + 840\gamma)\end{aligned} \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\Big\{ \Big(\sum X_i\Big)^5 \Big[\sum \Big(X_j^2 - 1\Big)\Big] \Big\} &= 15\gamma\ n^3 + n^2(10\alpha_5 + 15\kappa\gamma - 20\gamma) \\ &\quad + n(\alpha_7 - 11\alpha_5 - 15\kappa\gamma + 5\gamma)\end{aligned} \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\Big\{ \Big(\sum X_i\Big)^5 \Big[\sum \Big(X_j^2 - 1\Big)\Big]^2 \Big\} &= n^3(15\alpha_5 + 70\kappa\gamma + 20\gamma^3 + 110\gamma) + n^2(10\alpha_7 + 20\alpha_6\gamma \\ &\quad + 26\alpha_5\kappa - 8\alpha_5 - 270\kappa\gamma - 470\gamma - 60\gamma^3) + n(\alpha_9 - 12\alpha_7 \\ &\quad - 20\alpha_6\gamma - 26\alpha_5\kappa - 6\alpha_5 + 200\kappa\gamma + 360\gamma + 40\gamma^3)\end{aligned} \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\Big\{ \Big(\sum X_i\Big)^5 \Big[\sum (X_j^2 - 1)\Big]^3 \Big\} &= n^4(90\kappa\gamma + 60\gamma^3 + 180\gamma) + n^3(15\alpha_7 + 100\alpha_6\gamma + 120\alpha_5\kappa \\ &\quad + 240\alpha_5\gamma^2 + 195\alpha_5 + 315\kappa^2\gamma + 405\kappa\gamma - 660\gamma^3 - 505\gamma) \\ &\quad + n^2(10\alpha_9 + 25\alpha_8\gamma + 38\alpha_7\kappa + 6\alpha_7 + 46\alpha_6\alpha_5 - 420\alpha_6\gamma \\ &\quad - 516\alpha_5\kappa - 720\alpha_5\gamma^2 - 928\alpha_5 - 945\kappa^2\gamma - 1665\kappa\gamma \\ &\quad + 1560\gamma^3 + 715\gamma) + n(\alpha_{11} - 13\alpha_9 - 25\alpha_8\gamma - 38\alpha_7\kappa \\ &\quad - 18\alpha_7 - 46\alpha_6\alpha_5 + 320\alpha_6\gamma + 396\alpha_5\kappa + 480\alpha_5\gamma^2 \\ &\quad + 732\alpha_5 + 630\kappa^2\gamma + 1170\kappa\gamma - 960\gamma^3 - 390\gamma)\,.\end{aligned} \tag{3.10}$$

Alors

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(A^5) &= n^{-5/2}\ \mathrm{E}\Big\{\Big[\sum X_i\Big]^5\Big\} \\
&= 10n^{-1/2}\gamma + n^{-3/2}(\alpha_5 - 10\gamma) && (3.11)\\
\mathrm{E}(A^5B) &= n^{-5/2}n^{-1}\ \mathrm{E}\Big\{\Big(\sum X_i\Big)^5 \sum (X_j^2-1)\Big\} \\
&= n^{-7/2}\ \mathrm{E}\Big\{\Big(\sum X_i\Big)^5 \sum (X_j^2-1)\Big\} \\
&= 15\gamma\ n^{-1/2} + n^{-3/2}(10\alpha_5 + 15\kappa\gamma - 20\gamma) + O(n^{-5/2}) && (3.12)\\
\mathrm{E}(A^5C) &= -n^{-5/2}n^{-2}\ \mathrm{E}\Big\{\Big(\sum X_i\Big)^7\Big\} \\
&= -n^{-9/2}\ \mathrm{E}\Big\{\Big(\sum X_i\Big)^7\Big\} \\
&= -105\gamma\ n^{-3/2} + O(n^{-5/2}) && (3.13)\\
\mathrm{E}(A^5B^2) &= n^{-5/2}n^{-2}\ \mathrm{E}\Big\{\Big(\sum X_i\Big)^5\Big[\sum (X_j^2-1)\Big]^2\Big\} \\
&= n^{-9/2}\ \mathrm{E}\Big\{\Big(\sum X_i\Big)^5\Big[\sum (X_j^2-1)\Big]^2\Big\} \\
&= (15\alpha_5 + 70\kappa\gamma + 20\gamma^3 + 110\gamma)n^{-3/2} + O(n^{-5/2}) && (3.14)\\
\mathrm{E}(A^5BC) &= -n^{-5/2}n^{-3}\ \mathrm{E}\Big\{\Big(\sum X_i\Big)^7 \sum \Big(X_j^2-1\Big)\Big\} \\
&= -n^{-11/2}\ \mathrm{E}\Big\{\Big(\sum X_i\Big)^7 \sum \Big(X_j^2-1\Big)\Big\} \\
&= -105\gamma n^{-3/2} + O(n^{-5/2}) && (3.15)\\
\mathrm{E}(A^5B^3) &= n^{-5/2}n^{-3}\ \mathrm{E}\Big\{\Big(\sum X_i\Big)^5\Big[\sum (X_j^2-1)\Big]^3\Big\} \\
&= n^{-11/2}\ \mathrm{E}\Big\{\Big(\sum X_i\Big)^5\Big[\sum (X_j^2-1)\Big]^3\Big\} \\
&= (90\kappa\gamma + 60\gamma^3 + 180\gamma)\ n^{-3/2} + O(n^{-5/2})\,. && (3.16)
\end{aligned}$$

Puis de l'équation de structure (3.1) pour le moment $\mathrm{E}\Big(S_n^5\Big)$, et les expressions (3.11) –

(3.16) on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(S_n^5) &= 10n^{-1/2}\gamma + n^{-3/2}(\alpha_5 - 10\gamma) - \frac{5}{2}\Big\{15\gamma\ n^{-1/2} + n^{-3/2}(10\alpha_5 + 15\kappa\gamma - 20\gamma)\Big\} \\
&\quad - \frac{5}{2}\Big\{ - 105\gamma\ n^{-3/2} + O(n^{-5/2})\Big\} + \frac{35}{8}\Big\{(15\alpha_5 + 70\kappa\gamma + 20\gamma^3 + 110\gamma)n^{-3/2}\Big\} \\
&\quad + \frac{35}{4}\Big\{ - 105\gamma\ n^{-3/2}\Big\} - \frac{105}{16}\Big\{\big(90\kappa\gamma + 60\gamma^3 + 180\gamma\big)\ n^{-3/2} + O(n^{-5/2})\Big\} + O(n^{-2}) \\
&= \ n^{-1/2}\ \big(- \frac{75}{2}\gamma + 10\gamma\big) + \frac{1}{8}\ n^{-3/2}\big\{8\alpha_5 - 80\gamma - 200\alpha_5 - 300\kappa\gamma + 400\gamma + 2100\gamma \\
&\quad + 525\alpha_5 + 2450\kappa\gamma + 700\gamma^3 + 3850\gamma - 7350\gamma - 4725\kappa\gamma - 9450\gamma - 3150\gamma^3\Big\} + O(n^{-2}) \\
&= -\frac{55}{2}\gamma\ n^{-1/2} + \frac{1}{8}\ n^{-3/2}\Big\{333\alpha_5 - 2575\kappa\gamma - 2450\gamma^3 - 10530\gamma\Big\} + O(n^{-2}) \\
&= -\frac{55}{2}\gamma\ n^{-1/2} + O(n^{-3/2}) \\
&= -\frac{55}{2}\gamma\ n^{-1/2} + O(n^{-1})\,.
\end{aligned}$$

Reste à prouver (3.5)-(3.10). De cette séquence, les équations (3.5) et (3.8) ont été obtenues comme (2.26) et (2.32) au chapitre précédent. Pour les autres équations, nous appliquons encore systématiquement le multinomium, les propriétés de la linéarité et la factorisation de l'espérance. Les preuves sont données dans les sections suivantes.

3.3 Expression pour $A_{7,0}$

Calculons $A_{7,0} = \mathrm{E}\big\{\big(\sum X_i\big)^7\big\}$.

Méthode 1. Par le multinomium pour puissance 7

$$\begin{aligned}
\Big(\sum_i X_i\Big)^7 &= \sum_i X_i^7 + 7\sum_{k\neq\ell} X_k^6 X_\ell + 21\sum_{k\neq\ell} X_k^5 X_\ell^2 + 35\sum_{k\neq\ell} X_k^4 X_\ell^3 + 42\sum_{\substack{\ell<r\\ \ell\neq k, r\neq k}} X_k^5 X_\ell X_r \\
&\quad + 105\sum_{\substack{k,\ell,r\\ \text{tous diff.}}} X_k^4 X_\ell^2 X_r + 140\sum_{\substack{k<\ell\\ r\neq k, r\neq\ell}} X_k^3 X_\ell^3 X_r + 210\sum_{\substack{\ell<r\\ \ell\neq k, r\neq k}} X_k^3 X_\ell^2 X_r^2 \\
&\quad + 210\sum_{\substack{l<r<s\\ \text{tous}\neq k}} X_k^4 X_\ell X_r X_s + 420\sum_{\substack{k,\ell,r<s\\ \text{all diff.}}} X_k^3 X_\ell^2 X_r X_s + 630\sum_{\substack{k<l<r\\ \text{tous}\neq s}} X_k^2 X_\ell^2 X_r^2 X_s \\
&\quad + 840\sum_{\substack{l<r<s<t\\ \text{tous}\neq k}} X_k^3 X_\ell X_r X_s X_t + 1260\sum_{\substack{k<\ell, r<s<t\\ \text{tous diff.}}} X_k^2 X_\ell^2 X_r X_s X_t \\
&\quad + 2520\sum_{\substack{\ell<r<s<t<u\\ \text{tous}\neq k}} X_k^2 X_\ell X_r X_s X_t X_u + 5040\sum_{k<\ell<r<s<t<u<v} X_k X_\ell X_r X_s X_t X_u X_v\,.
\end{aligned}$$

Calculons l'espérance pour les termes à droite :

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X_i^7) &= \alpha_7 \\
\sum_i \mathrm{E}(X_i^7) &= n\alpha_7 \\
\mathrm{E}(X_k^5 X_\ell^2)\big|_{k\neq\ell} &= \mathrm{E}(X_k^5)\mathrm{E}(X_\ell^2) = \alpha_5 \\
\sum_{k\neq\ell} \mathrm{E}(X_k^5 X_\ell^2) &= n(n-1)\alpha_5 = (n^2-n)\alpha_5 \\
\mathrm{E}(X_k^4 X_\ell^3)\big|_{k\neq\ell} &= \mathrm{E}(X_k^4)\mathrm{E}(X_\ell^3) = \gamma(\kappa+3) \\
\sum_{k\neq\ell} \mathrm{E}(X_k^4 X_\ell^3) &= n(n-1)\gamma(\kappa+3) = (n^2-n)(\kappa\gamma+3\gamma)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X_k^3 X_\ell^2 X_r^2)\big|_{\ell<r,k\neq r,k\neq\ell} &= \gamma \\
\sum_{k\neq r,k\neq\ell} \mathrm{E}(X_k^3 X_\ell^2 X_r^2)\big|_{\ell<r} &= (n-2)\gamma \\
\sum_{\ell<r}\sum_{k\neq r,k\neq\ell} \mathrm{E}(X_k^3 X_\ell^2 X_r^2) &= \frac{1}{2}n(n-1)(n-2)\gamma \\
&= \frac{1}{2}(n^3-3n^2+2n)\gamma
\end{aligned}$$

Autres termes : 0 .

Alors on obtient l'expression (3.6).

Méthode 2. Obtenir la récurrence et exploiter l'indépendance des X_i

Notons les indices $i = 1,\dots,n$, $j = 1,\dots,n-1$, et $A_n = \mathrm{E}\Big[\Big(\sum_i X_i\Big)^7\Big]$. Par l'expansion $\Big(\sum_i X_i\Big)^7 = \Big(\sum_j X_j + X_n\Big)^7$ où $\sum_j X_j$ et X_n sont indépendantes, on obtient la récurrence

$$\begin{aligned}
A_n = \mathrm{E}\Big[\Big(\sum_i X_i\Big)^7\Big] &= A_{n-1} + 21\mathrm{E}\Big[\Big(\sum_j X_j\Big)^5 X_n^2\Big] + 35\mathrm{E}\Big[\Big(\sum_j X_j\Big)^4 X_n^3\Big] \\
&\quad + 35\mathrm{E}\Big[\Big(\sum_j X_j\Big)^3 X_n^4\Big] + 21\mathrm{E}\Big[\Big(\sum_j X_j\Big)^2 X_n^5\Big] + \alpha_7 \\
&= 315\gamma\ n^2 + n(42\alpha_5 + 70\kappa\gamma - 735\gamma) + (\alpha_7 - 42\alpha_5 - 70\kappa\gamma + 420\gamma) + A_{n-1}
\end{aligned}$$

et la solution donne le même résultat que la Méthode 1.

3.4 Expression pour $A_{7,1}$

Preuve pour (3.7), $A_{7,1} = \mathrm{E}\big\{\big(\sum X_i\big)^7\big[\sum(X_j^2-1)\big]\big\}$. Utilisons le multinomium pour puissance 7 :

$$
\begin{aligned}
&\Big(\sum_i X_i\Big)^7\big[\sum(X_j^2-1)\big] \\
&= \Big\{\sum_i X_i^7 + 7\sum_{k\neq\ell} X_k^6 X_\ell + 21\sum_{k\neq\ell} X_k^5 X_\ell^2 + 35\sum_{k\neq\ell} X_k^4 X_\ell^3 + 42\sum_{\substack{\ell<r\\ \ell\neq k, r\neq k}} X_k^5 X_\ell X_r \\
&\quad + 105\sum_{\substack{k,\ell,r\\ \text{tous diff.}}} X_k^4 X_\ell^2 X_r + 140\sum_{\substack{k<\ell\\ r\neq k, r\neq\ell}} X_k^3 X_\ell^3 X_r + 210\sum_{\substack{\ell<r\\ \ell\neq k, r\neq k}} X_k^3 X_\ell^2 X_r^2 \\
&\quad + 210\sum_{\substack{l<r<s\\ \text{tous}\neq k}} X_k^4 X_\ell X_r X_s + 420\sum_{\substack{k,\ell,r<s\\ \text{all diff.}}} X_k^3 X_\ell^2 X_r X_s + 630\sum_{\substack{k<l<r\\ \text{tous}\neq s}} X_k^2 X_\ell^2 X_r^2 X_s \\
&\quad + 840\sum_{\substack{l<r<s<t\\ \text{tous}\neq k}} X_k^3 X_\ell X_r X_s X_t + 1260\sum_{\substack{k<\ell, r<s<t\\ \text{tous diff.}}} X_k^2 X_\ell^2 X_r X_s X_t + 2520 \\
&\quad \sum_{\substack{\ell<r<s<t<u\\ \text{tous}\neq k}} X_k^2 X_\ell X_r X_s X_t X_u + 5040\sum_{k<\ell<r<s<t<u<v} X_k X_\ell X_r X_s X_t X_u X_v\Big\}\Big[\sum_j (X_j^2-1)\Big].
\end{aligned}
$$

Appliquons l'éspérance pour les termes à droite :

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}\Big[X_i^7\Big(X_j^2-1\Big)\Big] &= \begin{cases}\alpha_9-\alpha_7, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}\\
\sum_i \mathrm{E}\Big[X_i^7\Big(X_j^2-1\Big)\Big] &= \alpha_9-\alpha_7\\
\sum_j\sum_i \mathrm{E}\Big[X_i^7\Big(X_j^2-1\Big)\Big] &= n(\alpha_9-\alpha_7)\\
\mathrm{E}\Big[X_k^6 X_\ell\Big(X_j^2-1\Big)\Big]\Big|_{k\neq\ell} &= \begin{cases}\alpha_6\gamma, & j=\ell\\ 0, & \text{autrement}\end{cases}\\
\sum_{k\neq\ell} \mathrm{E}\Big[X_k^6 X_\ell\Big(X_j^2-1\Big)\Big] &= (n-1)\alpha_6\gamma\\
\sum_j\sum_{k\neq\ell} \mathrm{E}\Big[X_k^6 X_\ell\Big(X_j^2-1\Big)\Big] &= (n^2-n)\alpha_6\gamma\\
\mathrm{E}\Big[X_k^5 X_\ell^2\Big(X_j^2-1\Big)\Big]\Big|_{k\neq\ell} &= \begin{cases}\alpha_5(\kappa+2), & j=\ell\\ \alpha_7-\alpha_5, & j=k\\ 0, & j\neq\ell, j\neq k\end{cases}
\end{aligned}
$$

$$\sum_{k\neq\ell} \mathrm{E}\Big[X_k^5 X_\ell^2\Big(X_j^2-1\Big)\Big] = (n-1)\Big[\alpha_5(\kappa+2)+\alpha_7-\alpha_5\Big]$$

$$\sum_j \sum_{k\neq\ell} \mathrm{E}\Big[X_k^5 X_\ell^2\Big(X_j^2-1\Big)\Big] = (n^2-n)(\alpha_7+\alpha_5\kappa+\alpha_5)$$

$$\mathrm{E}\Big[X_k^4 X_\ell^3\Big(X_j^2-1\Big)\Big]\Big|_{k\neq\ell} = \begin{cases}(\kappa+3)(\alpha_5-\gamma), & j=\ell\\ \gamma(\alpha_6-\kappa-3), & j=k\\ 0, & j\neq\ell, j\neq k\end{cases}$$

$$\sum_{k\neq\ell} \mathrm{E}\Big[X_k^4 X_\ell^3\Big(X_j^2-1\Big)\Big] = (n-1)\Big[(\kappa+3)(\alpha_5-\gamma)+\gamma(\alpha_6-\kappa-3)\Big]$$

$$\sum_j \sum_{k\neq\ell} \mathrm{E}\Big[X_k^4 X_\ell^3\Big(X_j^2-1\Big)\Big] = (n^2-n)(\alpha_6\gamma+\alpha_5\kappa+3\alpha_5-2\kappa\gamma-6\gamma)$$

$$\mathrm{E}\Big[X_k^4 X_\ell^2 X_r\Big(X_j^2-1\Big)\Big]\Big|_{\substack{k,\ell,r\\ \text{tous diff}}} = \begin{cases}\gamma(\kappa+3), & j=r\\ 0, & \text{autrement}\end{cases}$$

$$\sum_j \mathrm{E}\Big[X_k^4 X_\ell^2 X_r\Big(X_j^2-1\Big)\Big]\Big|_{\substack{k,\ell,r\\ \text{tous diff}}} = \gamma(\kappa+3)$$

$$\sum_{\substack{k,\ell,r\\ \text{tous diff}}} \sum_j \mathrm{E}\Big[X_k^4 X_\ell^2 X_r\Big(X_j^2-1\Big)\Big] = n(n-1)(n-2)\gamma(\kappa+3)$$

$$= (n^3-3n^2+2n)(\kappa\gamma+3\gamma)$$

$$\mathrm{E}\Big[X_k^3 X_\ell^3 X_r\Big(X_j^2-1\Big)\Big]\Big|_{\substack{k<\ell\\ r\neq k, r\neq\ell}} = \begin{cases}\gamma^3, & j=r\\ 0, & \text{autrement}\end{cases}$$

$$\sum_j \mathrm{E}\Big[X_k^3 X_\ell^3 X_r\Big(X_j^2-1\Big)\Big]\Big|_{\substack{k<\ell\\ r\neq k, r\neq\ell}} = \gamma^3$$

$$\sum_{r\neq k, r\neq\ell} \sum_j \mathrm{E}\Big[X_k^3 X_\ell^3 X_r\Big(X_j^2-1\Big)\Big]\Big|_{k<\ell} = (n-2)\gamma^3$$

$$\sum_{k<\ell} \sum_{r\neq k, r\neq\ell} \sum_j \mathrm{E}\Big[X_k^3 X_\ell^3 X_r\Big(X_j^2-1\Big)\Big] = \frac{1}{2}n(n-1)(n-2)\gamma^3$$

$$= \frac{1}{2}(n^3-3n^2+2n)\gamma^3$$

$$\mathrm{E}\Big[X_k^3 X_\ell^2 X_r^2\Big(X_j^2-1\Big)\Big]\Big|_{\substack{\ell<r\\ \ell\neq k, r\neq k}} = \begin{cases}\gamma(\kappa+2), & j=r\\ \gamma(\kappa+2), & j=\ell\\ \alpha_5-\gamma, & j=k\neq\ell, j=k\neq r\\ 0, & \text{autrement}\end{cases}$$

$$\sum_j \mathrm{E}\Big[X_k^3X_\ell^2X_r^2\Big(X_j^2-1\Big)\Big]\Big|_{\substack{\ell<r\\ \ell\neq k, r\neq k}} = \alpha_5-\gamma+2\gamma(\kappa+2)$$

$$\sum_{k\neq r,k\neq\ell}\sum_j \mathrm{E}\Big[X_k^3X_\ell^2X_r^2\Big(X_j^2-1\Big)\Big]\Big|_{\ell<r} = (n-2)(\alpha_5+2\kappa\gamma+3\gamma)$$

$$\sum_{\ell<r}\sum_{k\neq r,k\neq\ell}\sum_j \mathrm{E}\Big[X_k^3X_\ell^2X_r^2\Big(X_j^2-1\Big)\Big] = \frac{1}{2}n(n-1)(n-2)(\alpha_5+2\kappa\gamma+3\gamma)$$

$$= \frac{1}{2}(n^3-3n^2+2n)(\alpha_5+2\kappa\gamma+3\gamma)$$

$$\mathrm{E}\Big[X_k^2X_\ell^2X_r^2X_s\Big(X_j^2-1\Big)\Big]\Big|_{\substack{k<l<r\\ \text{tous}\neq s}} = \begin{cases}\gamma, & j=s\\ 0, & \text{autrement}\end{cases}$$

$$\sum_j \mathrm{E}\Big[X_k^2X_\ell^2X_r^2X_r\Big(X_j^2-1\Big)\Big]\Big|_{\substack{k<l<r\\ \text{tous}\neq s}} = \gamma$$

$$\sum_{s\neq k,s\neq\ell,s\neq r}\sum_j \mathrm{E}\Big[X_k^2X_\ell^2X_r^2X_s\Big(X_j^2-1\Big)\Big]\Big|_{k<l<r} = (n-3)\gamma)$$

$$\sum_{k<\ell<r}\sum_{s\neq k,s\neq\ell,s\neq r}\sum_j \mathrm{E}\Big[X_k^2X_\ell^2X_r^2X_s\Big(X_j^2-1\Big)\Big] = (\frac{1}{6}n^3-\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{3}n)(n-3)\gamma$$

$$= (\frac{1}{6}n^4-n^3+\frac{11}{6}n^2-n)\gamma$$

Autres termes : 0 .

Puis on calcule l'expression (3.7).

3.5 Expression pour $A_{5,2}$

Preuve pour (3.9), $A_{5,2} = \mathrm{E}\big\{\big(\sum X_i\big)^5\big[\sum(X_j^2-1)\big]^2\big\}$. A l'aide du multinomium, on obtient :

$$\Big(\sum_i X_i\Big)^5\Big[\sum_j(X_j^2-1)\Big]^2 = \Big\{\sum_i X_i^5+5\sum_{k\neq\ell}X_k^4X_\ell+10\sum_{k\neq\ell}X_k^3X_\ell^2+20\sum_{\substack{\ell<r\\ \ell\neq k,r\neq k}}X_k^3X_\ell X_r$$
$$+30\sum_{\substack{k<\ell\\ r\neq k,r\neq\ell}}X_k^2X_\ell^2X_r+60\sum_{\substack{\ell<r<s\\ \ell\neq k,r\neq k,s\neq k}}X_k^2X_\ell X_rX_s+120$$
$$\sum_{k<\ell<r<s<t}X_kX_\ell X_rX_sX_t\Big\}\Big\{\sum_j\big(X_j^2-1\big)^2+\sum_{p\neq q}\big(X_p^2-1\big)$$
$$\big(X_q^2-1\big)\Big\}.$$

Calculons l'espérance pour les termes à droite, on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\Big[X_i^5\big(X_j^2-1\big)^2\Big] &= \mathrm{E}\Big[X_i^5\Big(X_j^4-2X_j^2+1\Big)\Big]\\
&= \begin{cases}\alpha_9-2\alpha_7+\alpha_5, & j=i\\ \alpha_5(\kappa+2), & j\neq i\end{cases}\\
\sum_j \mathrm{E}\Big[X_i^5\big(X_j^2-1\big)^2\Big] &= (\alpha_9-2\alpha_7+\alpha_5)+(n-1)(\alpha_5\kappa+2\alpha_5)\\
\sum_i\sum_j \mathrm{E}\Big[X_i^5\big(X_j^2-1\big)^2\Big] &= n(\alpha_9-2\alpha_7+\alpha_5)+n(n-1)(\alpha_5\kappa+2\alpha_5)\\
&= n^2(\alpha_5\kappa+2\alpha_5)+n(\alpha_9-2\alpha_7-\alpha_5\kappa-\alpha_5)\\
\mathrm{E}\Big[X_k^4X_\ell\big(X_j^2-1\big)^2\Big]\Big|_{k\neq\ell} &= \mathrm{E}\Big[X_k^4X_\ell\Big(X_j^4-2X_j^2+1\Big)\Big]\Big|_{k\neq\ell}\\
&= \begin{cases}(\kappa+3)(\alpha_5-2\gamma), & j=\ell\\ 0, & \text{autrement}\end{cases}\\
\sum_j \mathrm{E}\Big[X_k^4X_\ell\big(X_j^2-1\big)^2\Big]\Big|_{k\neq\ell} &= (\kappa+3)(\alpha_5-2\gamma)\\
&= (\alpha_5\kappa+3\alpha_5-2\kappa\gamma-6\gamma)\\
\sum_{k\neq\ell}\sum_j \mathrm{E}\Big[X_k^4X_\ell\big(X_j^2-1\big)^2\Big] &= n(n-1)(\alpha_5\kappa+3\alpha_5-2\kappa\gamma-6\gamma)\\
&= (n^2-n)(\alpha_5\kappa+3\alpha_5-2\kappa\gamma-6\gamma)\\
\mathrm{E}\Big[X_k^3X_\ell^2\big(X_j^2-1\big)^2\Big]\Big|_{k\neq\ell} &= \mathrm{E}\Big[X_k^3X_\ell^2\Big(X_j^4-2X_j^2+1\Big)\Big]\Big|_{k\neq\ell}\\
&= \begin{cases}\gamma(\alpha_6-2\kappa-5), & j=\ell\\ \alpha_7-2\alpha_5+\gamma, & j=k\\ \gamma(\kappa+2), & \text{autrement}\end{cases}\\
\sum_j \mathrm{E}\Big[X_k^3X_\ell^2\big(X_j^2-1\big)^2\Big]\Big|_{k\neq\ell} &= \alpha_6\gamma-2\kappa\gamma-5\gamma+\alpha_7-2\alpha_5+\gamma+(n-2)(\kappa\gamma+2\gamma)\\
&= \alpha_7+\alpha_6\gamma-2\kappa\gamma-2\alpha_5-4\gamma+(n-2)(\kappa\gamma+2\gamma)\\
\sum_{k\neq\ell}\sum_j \mathrm{E}\Big[X_k^3X_\ell^2\big(X_j^2-1\big)^2\Big] &= n(n-1)(\alpha_7+\alpha_6\gamma-2\kappa\gamma-2\alpha_5-4\gamma)\\
&\quad +n(n-1)(n-2)(\kappa\gamma+2\gamma)\\
&= n^3(\kappa\gamma+2\gamma)+n^2(\alpha_7+\alpha_6\gamma-2\alpha_5-5\kappa\gamma-10\gamma)\\
&\quad +n(2\alpha_5-\alpha_7-\alpha_6\gamma+4\kappa\gamma+8\gamma)\\
\mathrm{E}\Big[X_k^2X_\ell^2X_r\big(X_j^2-1\big)^2\Big]\Big|_{\substack{k<\ell\\ k\neq r,\ell\neq r}} &= \mathrm{E}\Big[X_k^2X_\ell^2X_r\Big(X_j^4-2X_j^2+1\Big)\Big]\Big|_{\substack{k<\ell\\ k\neq r,\ell\neq r}}\\
&= \begin{cases}\alpha_5-2\gamma, & j=r\\ 0 & \text{autrement}\end{cases}
\end{aligned}$$

$$\sum_j \mathrm{E}\Big[X_k^2 X_\ell^2 X_r \big(X_j^2-1\big)^2\Big]\Big|_{\substack{k<\ell\\ k\neq r,\ell\neq r}} = \alpha_5 - 2\gamma$$

$$\sum_{r\neq k,r\neq \ell}\sum_j \mathrm{E}\Big[X_k^2 X_\ell^2 X_r \big(X_j^2-1\big)^2\Big]\Big|_{k<\ell} = (n-2)(\alpha_5-2\gamma)$$

$$\sum_{k<\ell}\sum_{r\neq k,r\neq \ell}\sum_j \mathrm{E}\Big[X_k^2 X_\ell^2 X_r \big(X_j^2-1\big)^2\Big] = \frac{1}{2}n(n-1)(n-2)(\alpha_5-2\gamma)$$

$$= \frac{1}{2}(n^3-3n^2+2n)(\alpha_5-2\gamma)$$

$$\mathrm{E}\Big[X_k^4 X_\ell \big(X_p^2-1\big)\big(X_q^2-1\big)\Big]\Big|_{\substack{k\neq\ell\\ p\neq q}} = \begin{cases}\gamma(\alpha_6-\kappa-3), & (k,\ell)=(p,q)\\ \gamma(\alpha_6-\kappa-3), & (k,\ell)=(q,p)\\ 0, & \text{autrement}\end{cases}$$

$$\sum_{p\neq q}\mathrm{E}\Big[X_k^4 X_\ell \big(X_p^2-1\big)\big(X_q^2-1\big)\Big]\Big|_{k\neq\ell} = 2\gamma(\alpha_6-\kappa-3)$$

$$\sum_{k\neq\ell}\sum_{p\neq q}\mathrm{E}\Big[X_k^4 X_\ell \big(X_p^2-1\big)\big(X_q^2-1\big)\Big] = 2n(n-1)(\alpha_6\gamma-\kappa\gamma-3\gamma)$$

$$= (n^2-n)(2\alpha_6\gamma-2\kappa\gamma-6\gamma)$$

$$\mathrm{E}\Big[X_k^3 X_\ell^2 \big(X_p^2-1\big)\big(X_q^2-1\big)\Big]\Big|_{\substack{k\neq\ell\\ p\neq q}} = \begin{cases}(\kappa+2)(\alpha_5-\gamma), & (k,\ell)=(p,q)\\ (\kappa+2)(\alpha_5-\gamma), & (k,\ell)=(q,p)\\ 0, & \text{autrement}\end{cases}$$

$$\sum_{p\neq q}\mathrm{E}\Big[X_k^3 X_\ell^2 \big(X_p^2-1\big)\big(X_q^2-1\big)\Big]\Big|_{k\neq\ell} = 2(\kappa+2)(\alpha_5-\gamma)$$

$$\sum_{k\neq\ell}\sum_{p\neq q}\mathrm{E}\Big[X_k^3 X_\ell^2 \big(X_p^2-1\big)\big(X_q^2-1\big)\Big] = 2n(n-1)(\kappa+2)(\alpha_5-\gamma)$$

$$= (n^2-n)(2\alpha_5\kappa+4\alpha_5-2\kappa\gamma-4\gamma)$$

$$\mathrm{E}\Big[X_k^3 X_\ell X_r \big(X_p^2-1\big)\big(X_q^2-1\big)\Big]\Big|_{\substack{\ell<r\\ k\neq\ell,k\neq r\\ p\neq q}} = \begin{cases}\gamma^3, & (\ell,r)=(p,q)\\ \gamma^3, & (\ell,r)=(q,p)\\ 0, & \text{autrement}\end{cases}$$

$$\sum_{p\neq q}\mathrm{E}\Big[X_k^3 X_\ell X_r \big(X_p^2-1\big)\big(X_q^2-1\big)\Big]\Big|_{\substack{\ell<r\\ k\neq\ell,k\neq r}} = 2\gamma^3$$

$$\sum_{k\neq\ell,k\neq r}\sum_{p\neq q}\mathrm{E}\Big[X_k^3 X_\ell X_r \big(X_p^2-1\big)\big(X_q^2-1\big)\Big]\Big|_{\ell<r} = 2(n-2)\gamma^3$$

$$\sum_{\ell<r}\sum_{k\neq\ell,k\neq r}\sum_{p\neq q}\mathrm{E}\Big[X_k^3 X_\ell X_r \big(X_p^2-1\big)\big(X_q^2-1\big)\Big] = \frac{1}{2}n(n-1)2(n-2)\gamma^3$$

$$= (n^3-3n^2+2n)\gamma^3$$

$$\mathrm{E}\Big[X_k^2X_\ell^2X_r\big(X_p^2-1\big)\big(X_q^2-1\big)\Big]\Big|_{\substack{k<\ell\\ k\neq r,\ell\neq r\\ p\neq q}} = \begin{cases}\gamma(\kappa+2), & p=r, q=k<\ell\\ \gamma(\kappa+2), & p=r, k<\ell=q\\ \gamma(\kappa+2), & q=r, p=k<\ell\\ \gamma(\kappa+2), & q=r, k<\ell=p\\ 0, & \text{autrement}\end{cases}$$

$$\sum_{p\neq q}\mathrm{E}\Big[X_k^2X_\ell^2X_r\big(X_p^2-1\big)\big(X_q^2-1\big)\Big]\Big|_{\substack{k<\ell\\ k\neq r,\ell\neq r}} = 4\gamma(\kappa+2)$$

$$\sum_{r\neq\ell,r\neq k}\sum_{p\neq q}\mathrm{E}\Big[X_k^2X_\ell^2X_r\big(X_p^2-1\big)\big(X_q^2-1\big)\Big]\Big|_{k<\ell} = 4(n-2)(\kappa\gamma+2\gamma)$$

$$\sum_{k<\ell}\sum_{r\neq\ell,r\neq k}\sum_{p\neq q}\mathrm{E}\Big[X_k^2X_\ell^2X_r\big(X_p^2-1\big)\big(X_q^2-1\big)\Big] = \frac{1}{2}n(n-1)4(n-2)(\kappa\gamma+2\gamma)$$

$$= (n^3-3n^2+2n)(2\kappa\gamma+4\gamma)$$

Autres termes : 0 .

Avec ces espérances on obtient (3.9).

3.6 Expression pour $A_{5,3}$

Preuve pour (3.10), $A_{5,3} = \mathrm{E}\big\{\big(\sum X_i\big)^5\big[\sum(X_j^2-1)\big]^3\big\}$. Utilisons le multinomium pour puissances 5 et 3 :

$$\Big(\sum_i X_i\Big)^5\Big[\sum_j(X_j^2-1)\Big]^3$$

$$= \Bigg\{\sum_i X_i^5 + 5\sum_{k\neq\ell}X_k^4X_\ell + 10\sum_{k\neq\ell}X_k^3X_\ell^2 + 20\sum_{\substack{\ell<r\\ \ell\neq k,r\neq k}}X_k^3X_\ell X_r + 30\sum_{\substack{k<\ell\\ r\neq k,r\neq\ell}}X_k^2X_\ell^2X_r$$

$$+ 60\sum_{\substack{\ell<r<s\\ \ell\neq k,r\neq k,s\neq k}}X_k^2X_\ell X_rX_s + 120\sum_{k<\ell<r<s<t}X_kX_\ell X_rX_sX_t\Bigg\}$$

$$\Bigg[\sum_j(X_j^2-1)^3 + 3\sum_{p\neq q}\Big(X_p^2-1\Big)^2\Big(X_q^2-1\Big) + 6\sum_{p<q<u}\Big(X_p^2-1\Big)\Big(X_q^2-1\Big)\Big(X_u^2-1\Big)\Bigg].$$

Calculons l'espérance pour des termes à droite, on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\Big[X_i^5\Big(X_j^2-1\Big)^3\Big] &= \mathrm{E}\Big[X_i^5\Big(X_j^6-3X_j^4+3X_j^2-1\Big)\Big]\\
&= \begin{cases}\alpha_{11}-3\alpha_9+3\alpha_7-\alpha_5, & j=i\\ \alpha_5(\alpha_6-3\kappa-7), & j\neq i\end{cases}\\
\sum_j \mathrm{E}\Big[X_i^5\Big(X_j^2-1\Big)^3\Big] &= \alpha_{11}-3\alpha_9+3\alpha_7-\alpha_5+(n-1)\alpha_5(\alpha_6-3\kappa-7)\\
\sum_i\sum_j \mathrm{E}\Big[X_i^5\Big(X_j^2-1\Big)^3\Big] &= n(\alpha_{11}-3\alpha_9+3\alpha_7-\alpha_5)+n(n-1)\alpha_5(\alpha_6-3\kappa-7)\\
&= n^2(\alpha_6\alpha_5-3\alpha_5\kappa-7\alpha_5)\\
&\quad + n(\alpha_{11}-3\alpha_9+3\alpha_7-\alpha_6\alpha_5+3\alpha_5\kappa+6\alpha_5)\\
\mathrm{E}\Big[X_k^4X_\ell\Big(X_j^2-1\Big)^3\Big]\Big|_{k\neq\ell} &= \mathrm{E}\Big[X_k^4X_\ell\Big(X_j^6-3X_j^4+3X_j^2-1\Big)\Big]\Big|_{k\neq\ell}\\
&= \begin{cases}0, & \text{autrement}\\ (\kappa+3)(\alpha_7-3\alpha_5+3\gamma), & j=\ell\end{cases}\\
\sum_{k\neq\ell} \mathrm{E}\Big[X_k^4X_\ell\Big(X_j^2-1\Big)^3\Big] &= (n-1)(\kappa+3)(\alpha_7-3\alpha_5+3\gamma)\\
\sum_j\sum_{k\neq\ell} \mathrm{E}\Big[X_k^4X_\ell\Big(X_j^2-1\Big)^3\Big] &= (n^2-n)(\alpha_7\kappa+3\alpha_7-3\alpha_5\kappa-9\alpha_5+3\kappa\gamma+9\gamma)\\
\mathrm{E}\Big[X_k^3X_\ell^2\Big(X_j^2-1\Big)^3\Big]\Big|_{k\neq\ell} &= \mathrm{E}\Big[X_k^3X_\ell^2\Big(X_j^6-3X_j^4+3X_j^2-1\Big)\Big]\Big|_{k\neq\ell}\\
&= \begin{cases}\gamma(\alpha_8-3\alpha_6+3\kappa+8), & j=\ell\\ \alpha_9-3\alpha_7+3\alpha_5-\gamma, & j=k\\ \gamma(\alpha_6-3\kappa-7), & j\neq k, j\neq\ell\end{cases}\\
\sum_j \mathrm{E}\Big[X_k^3X_\ell^2\Big(X_j^2-1\Big)^3\Big]\Big|_{k\neq\ell} &= \gamma(\alpha_8-3\alpha_6+3\kappa+8)+\alpha_9-3\alpha_7+3\alpha_5-\gamma\\
&\quad + (n-2)\gamma(\alpha_6-3\kappa-7)\\
&= (\alpha_9+\alpha_8\gamma-3\alpha_7-3\alpha_6\gamma+3\alpha_5+3\kappa\gamma+7\gamma)\\
&\quad + (n-2)(\alpha_6\gamma-3\kappa\gamma-7\gamma)\\
\sum_{k\neq\ell}\sum_j \mathrm{E}\Big[X_k^3X_\ell^2\Big(X_j^2-1\Big)^3\Big] &= n(n-1)2(\alpha_9+\alpha_8\gamma-3\alpha_7-3\alpha_6\gamma+3\alpha_5+3\kappa\gamma+7\gamma)\\
&\quad + n(n-1)(n-2)(\alpha_6\gamma-3\kappa\gamma-7\gamma)\\
&= n^3(\alpha_6\gamma-3\kappa\gamma-7\gamma)\\
&\quad + n^2(\alpha_9+\alpha_8\gamma-3\alpha_7-6\alpha_6\gamma+3\alpha_5+12\kappa\gamma+28\gamma)\\
&\quad + n(3\alpha_7-\alpha_9-\alpha_8\gamma+5\alpha_6\gamma-3\alpha_5-9\kappa\gamma-21\gamma)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\Big[X_k^2X_\ell^2X_r\Big(X_j^2-1\Big)^3\Big]\Big|_{\substack{k<\ell\\ r\neq k,r\neq\ell}} &= \mathrm{E}\Big[X_k^2X_\ell^2X_r\Big(X_j^6-3X_j^4+3X_j^2-1\Big)\Big]\Big|_{\substack{k<\ell\\ r\neq k,r\neq\ell}}\\
&= \begin{cases}\alpha_7-3\alpha_5+3\gamma, & j=r\\ 0, & \text{autrement}\end{cases}\\
\sum_j \mathrm{E}\Big[X_k^2X_\ell^2X_r\Big(X_j^2-1\Big)^3\Big]\Big|_{\substack{k<\ell\\ r\neq k,r\neq\ell}} &= \alpha_7-3\alpha_5+3\gamma\\
\sum_{r\neq k,r\neq\ell}\sum_j \mathrm{E}\Big[X_k^2X_\ell^2X_r\Big(X_j^2-1\Big)^3\Big]\Big|_{k<\ell} &= (n-2)(\alpha_7-3\alpha_5+3\gamma)\\
\sum_{k<\ell}\sum_{r\neq k,r\neq\ell}\sum_j \mathrm{E}\Big[X_k^2X_\ell^2X_r\Big(X_j^2-1\Big)^3\Big] &= \frac{1}{2}n(n-1)(n-2)(\alpha_7-3\alpha_5+3\gamma)\\
&= \frac{1}{2}(n^3-3n^2+2n)(\alpha_7-3\alpha_5+3\gamma)\\
\mathrm{E}\Big[X_i^5\Big(X_p^2-1\Big)^2\Big(X_q^2-1\Big)\Big]\Big|_{p\neq q} &= \mathrm{E}\Big[X_i^5\Big(X_p^4-2X_p^2+1\Big)\Big(X_q^2-1\Big)\Big]\Big|_{p\neq q}\\
&= \begin{cases}0, & i=p\\ (\kappa+2)(\alpha_7-\alpha_5), & i=q\end{cases}\\
\sum_{p\neq q}\mathrm{E}\Big[X_i^5\Big(X_p^2-1\Big)^2\Big(X_q^2-1\Big)\Big] &= (n-1)(\kappa+2)(\alpha_7-\alpha_5)\\
\sum_i\sum_{p\neq q}\mathrm{E}\Big[X_i^5\Big(X_p^2-1\Big)^2\Big(X_q^2-1\Big)\Big] &= (n^2-n)(\alpha_7\kappa+2\alpha_7-\alpha_5\kappa-2\alpha_5)\\
\mathrm{E}\Big[X_k^4X_\ell\Big(X_p^2-1\Big)^2\Big(X_q^2-1\Big)\Big]\Big|_{\substack{k\neq\ell\\ p\neq q}} &= \mathrm{E}\Big[X_k^4X_\ell\Big(X_p^4-2X_p^2+1\Big)\Big(X_q^2-1\Big)\Big]\Big|_{\substack{k\neq\ell\\ p\neq q}}\\
&= \begin{cases}\gamma(\alpha_8-2\alpha_6+\kappa+3), & (k,\ell)=(p,q)\\ (\alpha_6-\kappa-3)(\alpha_5-2\gamma), & (k,\ell)=(q,p)\\ (\kappa+3)(\kappa+2)\gamma, & q=\ell, p\neq k\\ 0, & \text{autrement}\end{cases}\\
\sum_{p\neq q}\mathrm{E}\Big[X_k^4X_\ell\Big(X_p^2-1\Big)^2\Big(X_q^2-1\Big)\Big]\Big|_{k\neq\ell} &= \gamma(\alpha_8-2\alpha_6+\kappa+3)+(\alpha_6-\kappa-3)(\alpha_5-2\gamma)\\
&\quad +(n-2)(\kappa+3)(\kappa+2)\gamma\\
&= (\alpha_8\gamma+\alpha_6\alpha_5-4\alpha_6\gamma-\alpha_5\kappa-3\alpha_5+3\kappa\gamma+9\gamma)\\
&\quad +(n-2)(\kappa+3)(\kappa+2)\gamma\\
\sum_{k\neq\ell}\sum_{p\neq q}\mathrm{E}\Big[X_k^4X_\ell\Big(X_p^2-1\Big)^2\Big(X_q^2-1\Big)\Big] &= n(n-1)(\alpha_8\gamma+\alpha_6\alpha_5-4\alpha_6\gamma-\alpha_5\kappa-3\alpha_5\\
&\quad +3\kappa\gamma+9\gamma)+n(n-1)(n-2)(\kappa+3)(\kappa+2)\gamma\\
&= (n^2-n)(\alpha_8\gamma+\alpha_6\alpha_5-4\alpha_6\gamma-\alpha_5\kappa-3\alpha_5+\\
&\quad 3\kappa\gamma+9\gamma)+(n^3-3n^2+2n)(\kappa^2\gamma+5\kappa\gamma+6\gamma)
\end{aligned}$$

$$\sum_{k\neq\ell}\sum_{p\neq q}\mathrm{E}\Big[X_k^4X_\ell\Big(X_p^2-1\Big)^2\Big(X_q^2-1\Big)\Big] = n^3(\kappa^2\gamma+5\kappa\gamma+6\gamma)+n^2(\alpha_8\gamma+\alpha_6\alpha_5 - 4\alpha_6\gamma-\alpha_5\kappa-3\alpha_5-3\kappa^2\gamma-12\kappa\gamma - 9\gamma)+n(-\alpha_8\gamma-\alpha_6\alpha_5+4\alpha_6\gamma+\alpha_5\kappa + 3\alpha_5+2\kappa^2\gamma+7\kappa\gamma+3\gamma)$$

$$\mathrm{E}\Big[X_k^3X_\ell^2\Big(X_p^2-1\Big)^2\Big(X_q^2-1\Big)\Big]\Big|_{\substack{k\neq\ell\\p\neq q}} = \mathrm{E}\Big[X_k^3X_\ell^2\Big(X_p^4-2X_p^2+1\Big)\Big(X_q^2-1\Big)\Big]\Big|_{\substack{k\neq\ell\\p\neq q}} = \begin{cases}(\alpha_7-2\alpha_5+\gamma)(\kappa+2), & (k,\ell)=(p,q)\\ (\alpha_6-2\kappa-5)(\alpha_5-\gamma), & (k,\ell)=(q,p)\\ \gamma(\kappa+2)(\kappa+2), & q=\ell, p\neq k\\ (\kappa+2)(\alpha_5-\gamma), & q=k, p\neq\ell\\ 0, & \text{autrement}\end{cases}$$

$$\sum_{p\neq q}\mathrm{E}\Big[X_k^3X_\ell^2\Big(X_p^2-1\Big)^2\Big(X_q^2-1\Big)\Big]\Big|_{k\neq\ell} = (\alpha_7-2\alpha_5+\gamma)(\kappa+2)+(\alpha_6-2\kappa-5)(\alpha_5-\gamma)+(n-2)\gamma(\kappa+2)(\kappa+2)+(n-2)(\kappa+2)(\alpha_5-\gamma) = (\alpha_7\kappa+2\alpha_7-4\alpha_5\kappa+\alpha_6\alpha_5-\alpha_6\gamma - 9\alpha_5+3\kappa\gamma+7\gamma)+(n-2)(\alpha_5\kappa + 2\alpha_5+\kappa^2\gamma+3\kappa\gamma+2\gamma)$$

$$\sum_{k\neq\ell}\sum_{p\neq q}\mathrm{E}\Big[X_k^3X_\ell^2\Big(X_p^2-1\Big)^2\Big(X_q^2-1\Big)\Big] = (n^2-n)\big(\alpha_7\kappa+2\alpha_7-4\alpha_5\kappa+\alpha_6\alpha_5 - \alpha_6\gamma-9\alpha_5+3\kappa\gamma+7\gamma\big)+(n^2-n) (n-2)(\alpha_5\kappa+2\alpha_5+\kappa^2\gamma+3\kappa\gamma+2\gamma) = n^3(\alpha_5\kappa+2\alpha_5+\kappa^2\gamma+3\kappa\gamma+2\gamma) + n^2(\alpha_7\kappa+2\alpha_7-7\alpha_5\kappa+\alpha_6\alpha_5-\alpha_6\gamma - 15\alpha_5-3\kappa^2\gamma-6\kappa\gamma+\gamma)+n(-\alpha_7\kappa - 2\alpha_7+6\alpha_5\kappa-\alpha_6\alpha_5+\alpha_6\gamma+13\alpha_5 + 2\kappa^2\gamma+3\kappa\gamma-3\gamma)$$

$$\mathrm{E}\Big[X_k^3X_\ell X_r\Big(X_p^2-1\Big)^2\Big(X_q^2-1\Big)\Big]\Big|_{\substack{\ell<r\\\ell\neq k,r\neq k\\p\neq q}} = \mathrm{E}\Big[X_k^3X_\ell X_r\Big(X_p^4-2X_p^2+1\Big)\Big(X_q^2-1\Big)\Big]\Big|_{\substack{\ell<r\\\ell\neq k,r\neq k\\p\neq q}} = \begin{cases}(\alpha_5-2\gamma)\gamma^2, & (\ell,r)=(p,q)\\ (\alpha_5-2\gamma)\gamma^2, & (\ell,r)=(q,p)\\ 0, & \text{autrement}\end{cases}$$

$$\sum_{p\neq q}\mathrm{E}\Big[X_k^3X_\ell X_r\Big(X_p^2-1\Big)^2\Big(X_q^2-1\Big)\Big]\Big|_{\substack{\ell<r\\\ell\neq k,r\neq k}} = 2(\alpha_5-2\gamma)\gamma^2 = 2(\alpha_5\gamma^2-2\gamma^3)$$

$$\sum_{k\neq\ell,k\neq r}\sum_{p\neq q}\mathrm{E}\Big[X_k^3X_\ell X_r\Big(X_p^2-1\Big)^2\Big(X_q^2-1\Big)\Big]\Big|_{\ell<r}=2(n-2)(\alpha_5\gamma^2-2\gamma^3)$$

$$\sum_{\ell<r}\sum_{k\neq\ell,k\neq r}\sum_{p\neq q}\mathrm{E}\Big[X_k^3X_\ell X_r\Big(X_p^2-1\Big)^2\Big(X_q^2-1\Big)\Big]=\frac{1}{2}n(n-1)2(n-2)(\alpha_5\gamma^2-2\gamma^3)$$

$$\sum_{\ell<r}\sum_{k\neq\ell,k\neq r}\sum_{p\neq q}\mathrm{E}\Big[X_k^3X_\ell X_r\Big(X_p^2-1\Big)^2\Big(X_q^2-1\Big)\Big]=(n^3-3n^2+2n)(\alpha_5\gamma^2-2\gamma^3)$$

$$\mathrm{E}\Big[X_k^2X_\ell^2X_r\Big(X_p^2-1\Big)^2\Big(X_q^2-1\Big)\Big]\Big|_{\substack{k<\ell\\k\neq r,\ell\neq r\\p\neq q}}=\mathrm{E}\Big[X_k^2X_\ell^2X_r\Big(X_p^4-2X_p^2+1\Big)\Big(X_q^2-1\Big)\Big]\Big|_{\substack{k<\ell\\k\neq r,\ell\neq r\\p\neq q}}$$

$$=\begin{cases}(\alpha_5-2\gamma)(\kappa+2), & p=r,q=k<\ell\\ (\alpha_5-2\gamma)(\kappa+2), & p=r,k<\ell=q\\ \gamma(\alpha_6-2\kappa-5), & q=r,p=k<\ell\\ \gamma(\alpha_6-2\kappa-5), & q=r,k<\ell=p\\ \gamma(\kappa+2), & q=r,p\neq k<\ell\\ \gamma(\kappa+2), & q=r,k<\ell\neq p\\ 0, & \text{autrement}\end{cases}$$

$$\begin{aligned}\sum_{p\neq q}\mathrm{E}\Big[X_k^2X_\ell^2X_r\Big(X_p^2-1\Big)^2\Big(X_q^2-1\Big)\Big]\Big|_{\substack{k<\ell\\k\neq r,\ell\neq r}}&=2(\alpha_5-2\gamma)(\kappa+2)+2\gamma(\alpha_6-2\kappa-5)\\&\quad+2(n-2)\gamma(\kappa+2)\\ \sum_{r\neq\ell,r\neq k}\sum_{p\neq q}\mathrm{E}\Big[X_k^2X_\ell^2X_r\Big(X_p^2-1\Big)^2\Big(X_q^2-1\Big)\Big]\Big|_{k<\ell}&=2(n-2)(\alpha_5-2\gamma)(\kappa+2)+2(n-2)\gamma\\&\quad(\alpha_6-2\kappa-5)+2(n-2)(n-2)\gamma(\kappa+2)\\ \sum_{k<\ell}\sum_{r\neq\ell,r\neq k}\sum_{p\neq q}\mathrm{E}\Big[X_k^2X_\ell^2X_r\Big(X_p^2-1\Big)^2\Big(X_q^2-1\Big)\Big]&=\frac{1}{2}n(n-1)2(n-2)(\alpha_5-2\gamma)(\kappa+2)\\&\quad+\frac{1}{2}n(n-1)2(n-2)\gamma(\alpha_6-2\kappa-5)\\&\quad+\frac{1}{2}n(n-1)2(n-2)(n-2)\gamma(\kappa+2)\\&=n^4(\kappa\gamma+2\gamma)+n^3(\alpha_6\gamma+\alpha_5\kappa+2\alpha_5\\&\quad-9\kappa\gamma-19\gamma)+n^2(-3\alpha_6\gamma-3\alpha_5\kappa-6\alpha_5\\&\quad+20\kappa\gamma+43\gamma)+n(2\alpha_6\gamma+2\alpha_5\kappa+4\alpha_5\\&\quad-12\kappa\gamma-26\gamma)\end{aligned}$$

$$\mathrm{E}\Big[X_k^3X_\ell X_r\Big(X_p^2-1\Big)\Big(X_q^2-1\Big)\Big(X_u^2-1\Big)\Big]\Big|_{\substack{\ell<r\\\ell\neq k,r\neq k\\p<q<u}}=\begin{cases}(\alpha_5-\gamma)\gamma^2, & k=p,\ell=q,r=u\\ (\alpha_5-\gamma)\gamma^2, & k=q,\ell=p,r=u\\ (\alpha_5-\gamma)\gamma^2, & k=u,\ell=p,r=q\\ 0, & \text{autrement}\end{cases}$$

$$\sum_{p<q<u} \mathrm{E}\Big[X_k^3 X_\ell X_r \Big(X_p^2-1\Big)\Big(X_q^2-1\Big)\Big(X_u^2-1\Big)\Big]\Big|_{\substack{\ell<r\\ \ell\neq k, r\neq k}} = 3(\alpha_5-\gamma)\gamma^2$$

$$\sum_{\substack{k\neq\ell\\ k\neq r}} \sum_{p<q<u} \mathrm{E}\Big[X_k^3 X_\ell X_r \Big(X_p^2-1\Big)\Big(X_q^2-1\Big)\Big(X_u^2-1\Big)\Big]\Big|_{\ell<r} = 3(n-2)(\alpha_5\gamma^2-\gamma^3)$$

$$\sum_{\ell<r} \sum_{\substack{k\neq\ell,\\ k\neq r}} \sum_{p<q<u} \mathrm{E}\Big[X_k^3 X_\ell X_r \Big(X_p^2-1\Big)\Big(X_q^2-1\Big)\Big(X_u^2-1\Big)\Big] = \frac{1}{2}n(n-1)3(\alpha_5-\gamma)\gamma^2$$

$$= \frac{3}{2}(n^3-3n^2+2n)(\alpha_5\gamma^2-\gamma^3)$$

$$\mathrm{E}\Big[X_k^2 X_\ell^2 X_r \Big(X_p^2-1\Big)\Big(X_q^2-1\Big)\Big(X_u^2-1\Big)\Big]\Big|_{\substack{k<\ell\\ k\neq r,\ell\neq r\\ p<q<u}} = \begin{cases} \gamma(\kappa+2)^2, & r=p, k=q, \ell=u \\ (\kappa+2)\gamma(\kappa+2), & k=p, r=q, \ell=u \\ (\kappa+2)^2\gamma, & k=p, \ell=q, r=u \\ 0, & \text{autrement} \end{cases}$$

$$\sum_{p<q<u} \mathrm{E}\Big[X_k^2 X_\ell^2 X_r \Big(X_p^2-1\Big)\Big(X_q^2-1\Big)\Big(X_u^2-1\Big)\Big]\Big|_{\substack{k<\ell\\ k\neq r,\ell\neq r}} = 3\gamma(\kappa+2)^2$$

$$\sum_{\substack{r\neq k\\ r\neq\ell}} \sum_{p<q<u} \mathrm{E}\Big[X_k^2 X_\ell^2 X_r \Big(X_p^2-1\Big)\Big(X_q^2-1\Big)\Big(X_u^2-1\Big)\Big]\Big|_{k<\ell} = 3(n-2)(\kappa^2\gamma+4\kappa\gamma+4\gamma)$$

$$\sum_{\ell<r} \sum_{\substack{r\neq k\\ r\neq\ell}} \sum_{p<q<u} \mathrm{E}\Big[X_k^2 X_\ell^2 X_r \Big(X_p^2-1\Big)\Big(X_q^2-1\Big)\Big(X_u^2-1\Big)\Big] = \frac{1}{2}n(n-1)3(n-2)(\kappa^2\gamma+4\kappa\gamma+4\gamma)$$

$$= \frac{3}{2}(n^3-3n^2+2n)(\kappa^2\gamma+4\kappa\gamma+4\gamma)$$

$$\mathrm{E}\Big[X_k^2 X_\ell X_r X_s \Big(X_p^2-1\Big)\Big(X_q^2-1\Big)\Big(X_u^2-1\Big)\Big]\Big|_{\substack{\ell<r<s\\ \text{tous}\neq k\\ p<q<u}} = \begin{cases} \gamma^3, & \ell=p, r=q, s=u \\ 0, & \text{autrement} \end{cases}$$

$$\sum_{p<q<u} \mathrm{E}\Big[X_k^2 X_\ell X_r X_s \Big(X_p^2-1\Big)\Big(X_q^2-1\Big)\Big(X_u^2-1\Big)\Big]\Big|_{\substack{\ell<r<s\\ \text{tous}\neq k}} = \gamma^3$$

$$\sum_{k\neq r, k\neq\ell, k\neq s} \sum_{p<q<u} \mathrm{E}\Big[X_k^2 X_\ell X_r X_s \Big(X_p^2-1\Big)\Big(X_q^2-1\Big)\Big(X_u^2-1\Big)\Big]\Big|_{\ell<r<s} = (n-3)\gamma^3$$

$$\sum_{\ell<r<s} \sum_{k\neq r, k\neq\ell, k\neq s} \sum_{p<q<u} \mathrm{E}\Big[X_k^2 X_\ell X_r X_s \Big(X_p^2-1\Big)\Big(X_q^2-1\Big)\Big(X_u^2-1\Big)\Big] = (\frac{1}{6}n^3-\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{3}n)(n-3)\gamma^3$$

$$= (\frac{1}{6}n^4-n^3+\frac{11}{6}n^2-n)\gamma^3$$

Les autres termes ont une espérance nulle. Finalement l'expression (3.10) s'obtient.

3.7 Propriété générale des moments mixtes $A_{k,\ell}$

Des expressions de ce chapitre et le précédent pour certains, au total 24, moments mixtes d'échantillon $A_{k,\ell}$, cette section avance des propriétés générales. Ce résultat nous a été communiqué par la professeur Vermeire.

Propriété 3.7.1. Moments mixtes d'échantillon. Considérons un moment mixte d'échantillon

$$A_{k,\ell} = \mathrm{E}\Big\{ \Big(\sum X_i\Big)^k \Big[\sum (X_j^2 - 1)\Big]^\ell \Big\} \tag{3.17}$$

($k = 1, 2, \ldots,\ \ell = 0, 1, 2, \ldots$) dans le cas d'une population standardisée X, i.e. à moyenne 0 et variance 1, et un échantillon iid de taille n. Notons les moments de population $\alpha_r = \mathrm{E}(X^r)$, $r \geq 1$, où $\alpha_1 = 0$ est la moyenne, $\alpha_2 = 1$ est la variance, $\gamma = \alpha_3$ est l'asymétrie, $\kappa = \alpha_4 - 3$ est le kurtosis de la population. On a les propriétés suivantes.

1. Le moment mixte d'échantillon $A_{k,\ell}$ peut s'écrire comme un polynôme en les moments de population $\alpha_r = \mathrm{E}(X^r)$, $r = 1, 2, \ldots$, et des puissances de n, n^q avec $q = 0, 1, 2, \ldots$.
2. Le degré maximal en n est borné par $\deg(A_{k,\ell}; n) \leq (k + \ell)/2$.
3. L'ordre maximal des moments de population α_r inclus dans le polynôme est donné par $\mathrm{ord}(A_{k,\ell}; \alpha) = k + 2\ell$, et se présente par le terme $n\alpha_{k+2\ell}$ à coefficient n.
4. Le degré maximal du polynôme en les moments de population est borné par la valeur $\deg(A_{k,\ell}; \alpha) \leq \min\{(k + 2\ell)/3, n\}$.
5. Les polynômes complets pour 24 moments mixtes d'échantillon $A_{k,\ell}$ sont données en les égalités (2.22)–(2.41) et (3.5)–(3.10), notamment pour les paires (k, ℓ), $k = 1, \ldots, 7$, $\ell = 0, 1, 2, 3$, pour $k = 6, 7$ les cas $\ell = 2, 3$ non inclus.
   Ces polynômes confirment les propriétés 1 à 4, et montrent que les inégalités donnent des bornes pointues.

Preuve. Pour 1. En utilisant pour $A_{k,\ell} = \mathrm{E}\{(\sum X_i)^k \, [\sum (X_j^2 - 1)]^\ell\}$ l'expansion à l'aide du multinomium, et la linéarité et la factorisation de l'espérance, $A_{k,\ell}$ devient une multisomme où chaque terme, à part de son coefficient, est un produit d'espérances $\mathrm{E}[X_r^{k_r}(X_r^2)^{s_r}] = \alpha_{k_r+2s_r}$ où $0 \leq k_r \leq k$, $0 \leq s_r \leq \ell_r \leq \ell$, avec des indices de sommation bornés par n et le pair k, ℓ :

$$\begin{aligned}
A_{k,\ell} &= \mathrm{E}\Bigg\{ \Bigg[\sum_{\substack{k_i \geq 0 \\ \sum_i k_i = k}} \binom{k}{k_1, \ldots, k_n} X_1^{k_1} \ldots X_n^{k_n} \Bigg] \Bigg[\sum_{\substack{\ell_j \geq 0 \\ \sum_j \ell_j = \ell}} \binom{\ell}{\ell_1, \ldots, \ell_n} (X_1^2 - 1)^{\ell_1} \ldots (X_n^2 - 1)^{\ell_n} \Bigg] \Bigg\} \\
&= \mathrm{E}\Bigg\{ \sum_{\substack{k_i \geq 0, \ell_j \geq 0 \\ \sum_i k_i = k, \sum_j \ell_j = \ell}} \binom{k}{k_1, \ldots, k_n} \binom{\ell}{\ell_1, \ldots, \ell_n} \Big[X_1^{k_1} (X_1^2 - 1)^{\ell_1} \Big] \ldots \Big[X_n^{k_n} (X_n^2 - 1)^{\ell_n} \Big] \Bigg\} \\
&= \sum_{\substack{k_i \geq 0, \ell_j \geq 0 \\ \sum_i k_i = k, \sum_j \ell_j = \ell}} \binom{k}{k_1, \ldots, k_n} \binom{\ell}{\ell_1, \ldots, \ell_n} \mathrm{E}\Big[X_1^{k_1} (X_1^2 - 1)^{\ell_1} \Big] \ldots \mathrm{E}\Big[X_n^{k_n} (X_n^2 - 1)^{\ell_n} \Big]
\end{aligned}$$

où

$$\mathrm{E}\Big[X_r^{k_r}(X_r^2-1)^{\ell_r}\Big] = \mathrm{E}\left[X_r^{k_r}\sum_{s_r=0}^{\ell_r}\binom{\ell_r}{s_r}(X_r^2)^{s_r}(-1)^{\ell_r-s_r}\right] = \sum_{s_r=0}^{\ell_r}\binom{\ell_r}{s_r}(-1)^{\ell_r-s_r}\alpha_{k_r+2s_r}\,.$$

Donc

$$A_{k,\ell} = \sum_{\substack{k_i\ge 0,\,\ell_j\ge 0\\ \sum_i k_i=k,\,\sum_j \ell_j=\ell}}\ \sum_{s_1=0}^{\ell_1}\cdots\sum_{s_n=0}^{\ell_n} B\,\alpha_{k_1+2s_1}\ldots\alpha_{k_n+2s_n} \tag{3.18}$$

où

$$B := B|_{\substack{k_1,\ldots,k_n\\ s_1,\ldots,s_n}} = \binom{k}{k_1,\ldots,k_n}\binom{\ell}{\ell_1,\ldots,\ell_n}(-1)^{\ell-\sum_r s_r}\binom{\ell_1}{s_1}\binom{\ell_2}{s_2}\ldots\binom{\ell_n}{s_n}. \tag{3.19}$$

On obtient un polynôme en les α_r. Il reste à montrer que c'est aussi un polynôme en n. Le coefficient B est un nombre entier. Le groupement des termes de même produit $\alpha_{k_1+2s_1}\ldots\alpha_{k_n+2s_n}$ aura un coefficient qui est un polynôme en n. Par exemple dans $A_{3,1}$ le terme de produit $\alpha_3\alpha_5\alpha_0\ldots\alpha_0$, qui provient des indices 3=3+2*0, 5=3+2*1 et 0=0+2*0, et le terme $\alpha_3\alpha_0\alpha_5\alpha_0\ldots\alpha_0$, et les termes avec toutes les positions possibles de α_3 et α_5 entre les α_0 dans le produit de n facteurs, donnent le même résultat $\alpha_3\alpha_5$, sont en nombre $n(n-1)=n^2-n$, ont le même coefficient B, et feront un terme groupé $B(n^2-n)\alpha_3\alpha_5$.
Pour 3. Corollaire de l'analyse (3.18) : l'ordre maximal du moment inclus est $\max_r\{k_r+2s_r\}=k+2\ell$, et se réalise pour le produit $\alpha_{k+2\ell}\alpha_0\ldots\alpha_0$ et ses réarrangements, qui sont en nombre n, et ont le coefficient $B=1$.
Pour 2. Des préliminaires, dans son équation (1.2), on sait qu'une moyenne d'échantillon est $O_p(n^{-1/2})$, alors la somme des composantes d'un échantillon de taille n est $O_p(n^{1/2})$. Par conséquence $(\sum X_i)^k\,[\sum(X_j^2-1)]^\ell = O_p(n^{(k+\ell)/2})$ et $A_{k,\ell}=O(n^{(k+\ell)/2})$, donc le degré maximal en n est $(k+\ell)/2$. On pourrait aussi essayer une démonstration par récurrence.
Pour 4. Le polynôme est une somme de termes de type produit $\alpha_{k_1+2s_1}\ldots\alpha_{k_n+2s_n}$ avec un coefficient, et $0\le k_r\le k$, $\sum k_r=k$, $0\le s_r\le\ell_r\le\ell$, $\sum\ell_r=\ell$, $r=1,\ldots,n$. Dans ce produit on peut avoir des facteurs $\alpha_0=1,\alpha_1=0,\alpha_2=1$, et des facteurs pertinents du type $\alpha_{k_r+2s_r}$ avec $k_r+2s_r\ge 3$. D'un côté, comme il y a n facteurs, le degré maximal du polynôme sera n. De l'autre côté, le degré du polynôme en les moments sera le nombre maximal de facteurs avec $k_r+2s_r\ge 3$ dans un produit. Soit ce nombre a, réalisé par les premiers a facteurs, alors $3a\le\sum_{r=1}^a(k_r+2s_r)\le\sum_{r=1}^n(k_r+2s_r)\le\sum_{r=1}^n(k_r+2\ell_r)=k+2\ell$. Donc $a\le(k+2\ell)/3$.
Pour 5. Les polynômes étaient prouvées auprès des équations citées. Leur accord avec les bornes des points 2 à 4 est vérifié dans la table 3.1.

Problèmes ouverts. Dans le contexte de la propriété, nous notons deux questions. Les 24 moments mixtes calculés ont la propriété $\deg(A_{k,\ell},\alpha)=\min\{\lfloor(k+2\ell)/3\rfloor,n\}$ où $\lfloor a\rfloor$ est le plus grand nombre entier $\le a$; est-ce qu'il s'agit d'une propriété générale ; et si non, elle se réalise sous quelles conditions ? Puis on pourrait faire l'étude des moments mixtes dans le cas d'une population X non-standardisée.

Table 3.1 – La propriété 3.7 des moments mixtes est confirmée dans les expressions (2.22)–(2.41) et (3.5)–(3.10) calculées dans ce mémoire.

$A_{k,\ell}$	$\deg(A_{k,\ell};n)$	$(k+\ell)/2$	$\mathrm{ord}(A_{k,\ell};\alpha)$	$k+2\ell$	$\deg(A_{k,\ell};\alpha)$	$(k+2\ell)/3$
$A_{1,0}$	0	0.5	1	1	0	0.33
$A_{2,0}$	1	1	2	2	0	0.67
$A_{3,0}$	1	1.5	3	3	1	1
$A_{4,0}$	2	2	4	4	1	1.33
$A_{5,0}$	2	2.5	5	5	1	1.67
$A_{6,0}$	3	3	6	6	2	2
$A_{7,0}$	3	3.5	7	7	2	2.33
$A_{1,1}$	1	1	3	3	1	1
$A_{2,1}$	1	1.5	4	4	1	1.33
$A_{3,1}$	2	2	5	5	1	1.67
$A_{4,1}$	2	2.5	6	6	2	2
$A_{5,1}$	3	3	7	7	2	2.33
$A_{6,1}$	3	3.5	8	8	2	2.67
$A_{1,2}$	1	1.5	5	5	1	1.67
$A_{2,2}$	2	2	6	6	2	2
$A_{3,2}$	2	2.5	7	7	2	2.33
$A_{4,2}$	3	3	8	8	2	2.67
$A_{5,2}$	3	3.5	9	9	3	3
$A_{1,3}$	2	2	7	7	2	2.33
$A_{2,3}$	2	2.5	8	8	2	2.67
$A_{3,3}$	3	3	9	9	3	3
$A_{4,3}$	3	3.5	10	10	3	3.33
$A_{5,3}$	4	4	11	11	3	3.67
$A_{7,1}$	4	4	9	9	3	3

Chapitre 4

Fonction de distribution de S_n

Ce chapitre présente l'expansion d'Edgeworth jusqu'à l'ordre 3 pour la fdi de la moyenne studentisée de Hall. Ce résultat est une extension de l'expansion jusqu'à l'ordre 2 présentée par Hall, et nous l'obtenons en suivant la méthode de Hall et en utilisant les expansions pour les moments obtenues dans les chapitres 3 et 4.

Si on dispose, basée sur un échantillon de taille n, d'une statistique asymptotiquement normale – comme la moyenne standardisée ou la moyenne studentisée – il est courant en statistique inférentielle d'utiliser la distribution normale comme approximation pour la vraie distribution de cette statistique. Afin d'étudier l'erreur de cette approximation, en premier lieu l'erreur sur la fdi de la statistique, on cherche l'expansion d'Edgeworth, qui est une expansion asymptotique en puissances de $n^{-1/2}$ de la vraie fdi autour de la fdi de la loi normale. Cette expansion permet de détecter les éléments de population qui sont la source dominante de l'erreur inhérente à l'approximation.

Ce chapitre présente d'abord la notion de cumulants d'une va. Les cumulants seront utiles pour obtenir l'expansion d'Edgeworth de la moyenne standardisée. La méthode peut se généraliser pour une statistique générale qui est asymptotiquement normale. Finalement nous l'appliquons pour la moyenne studentisée de Hall.

4.1 Cumulants et Moments

Cette section présente la définition des cumulants d'une va et la relation avec les moments de la va.

Les cumulants et les moments jouent un rôle comparable. Tous deux sont des mesures résumant certains aspects de la distribution ; les uns s'expriment comme polynômes des autres. Dépendant du contexte il est parfois plus simple d'utiliser les cumulants ou les moments.

Fonction génératrice des moments et fonction caractéristique
Pour une va X à fdi $F(x)$ et fde $f(x)$ nous notons les moments $\alpha_k = \mathrm{E}(X^k) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k\, dF(x)$ $= \int_{-\infty}^{\infty} x^k\, f(x)\, dx$, et les moments centrés $\mu_k = \mathrm{E}(X - \mathrm{E}X)^k$, $k = 1, 2, \ldots$. Alors $\alpha_1 = \mu$ est la moyenne de X, $\mu_2 = \alpha_2 - \alpha_1^2 = \sigma^2$ est la variance, et $\mu_1 = 0$. Nous connaissons la **fonction génératrice des moments** (fgm)

$$M(t) = \mathrm{E}(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx}\, f(x)\, dx$$

et la propriété, obtenu à l'aide de la série en puissances $e^x = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} x^j/j!$,

$$M(t) = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \frac{t^j}{j!}\,. \tag{4.1}$$

Parce que la fgm n'existe pas toujours, on préfère parfois d'utiliser la **fonction caractéristique** (fca) qui existe toujours,

$$\chi(t) = \mathrm{E}(e^{itX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, f(x)\, dx \tag{4.2}$$

et la propriété, obtenue de la même façon,

$$\chi(t) = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \frac{(it)^j}{j!}\,. \tag{4.3}$$

On peut donc définir le moment d'ordre j d'une va X comme le coefficient de $(it)^j/j!$ dans l'expansion en puissances de sa fca.
Pour les distributions en pratique la fca $\chi(t)$ est souvent une fonction exponentielle, de sorte que sa logarithme, la **logfca**, parfois appelée sa **deuxième fca**, $\log \chi(t)$, a une expression plus simple, ce qui pourrait suggérer de considérer l'expansion en puissances de cette dernière.

Définition 4.1.1. Le **cumulant** d'ordre j d'une va X est le coefficient κ_j de $(it)^j/j!$ dans l'expansion en puissances de sa logfca,

$$\log \chi(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \kappa_j \frac{(it)^j}{j!}\,. \tag{4.4}$$

Propriété 4.1.2. Relation entre les cumulants et les moments ou les moments centrés. Le cumulant d'ordre j s'exprime comme un polynôme de degré j en les moments de l'ordre 1 à j. Réciproquement le moment d'ordre j s'exprime comme un polynôme en les cumulants. Les cumulants s'expriment aussi comme un polynôme en les moments centrés.

En particulier, nous donnons les cumulants de l'ordre 1 à 5 :

$$\kappa_1 = \alpha_1 = \mu \tag{4.5}$$
$$\kappa_2 = \alpha_2 - \alpha_1^2 \tag{4.6}$$
$$= \mu_2 = \sigma^2 \tag{4.7}$$
$$\kappa_3 = \alpha_3 - 3\alpha_2\alpha_1 + 2\alpha_1^3 \tag{4.8}$$
$$= \mu_3 \tag{4.9}$$
$$\kappa_4 = \alpha_4 - 4\alpha_3\alpha_1 - 3\alpha_2^2 + 12\alpha_2\alpha_1^2 - 6\alpha_1^4 \tag{4.10}$$
$$= \mu_4 - 3\mu_2^2 \tag{4.11}$$
$$\kappa_5 = \alpha_5 - 10\alpha_2\alpha_3 - 5\alpha_1\alpha_4 + 30\alpha_1\alpha_2^2 + 20\alpha_1^2\alpha_3 - 60\alpha_1^3\alpha_2 + 24\alpha_1^5 \tag{4.12}$$
$$= \mu_5 - 10\mu_3\mu_2\,. \tag{4.13}$$

Nous savons que si α_j existe alors tout moment α_k d'ordre $k \leq j$ existe. En plus nous savons que chaque moment centré d'ordre j s'exprime comme un polynôme de degré j en les moments d'ordre $k \leq j$, et réciproquement. Alors la propriété illustre que κ_j existe ssi α_j existe, ou équivalemment ssi μ_j existe.

Preuve. La pointe de la démonstration est l'identification de deux expansions en puissances pour la logfca $\log \chi(t)$. D'un côté on a l'expression (4.4) avec la définition des cumulants. De l'autre côté on peut calculer la logfca à partir de l'expansion (4.3) en utilisant l'expansion en puissances

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots = \sum_{k\geq 1}(-1)^{k+1}\,\frac{x^k}{k}\,.$$

Alors

$$\log \chi(t) = \log\left(1 + \sum_{j\geq 1}\alpha_j\,\frac{(it)^j}{j!}\right) \tag{4.14}$$
$$= \sum_{k\geq 1}(-1)^{k+1}\,\frac{1}{k}\left[\sum_{j\geq 1}\alpha_j\,\frac{(it)^j}{j!}\right]^k\,. \tag{4.15}$$

On calcule à droite successivement le coefficient de $(it)^j/j!$, pour obtenir κ_j, $j = 1, 2, 3, 4, 5$.

A ce but nous posons $x = A + B$ et $y = C$ avec

$$A := \mathrm{E}(X)(it) + \frac{1}{2!}\mathrm{E}(X^2)(it)^2$$
$$B := \frac{1}{3!}\mathrm{E}(X^3)(it)^3$$
$$C := \frac{1}{4!}\mathrm{E}(X^4)(it)^4 + \frac{1}{5!}\mathrm{E}(X^5)(it)^5$$
$$\text{et} \quad I_k := \sum_{k\geq 1}(-1)^{k+1}(x+y)^k\,.$$

Calculons successivement I_k avec $1 \leq k \leq 5$ en considérant seulement les termes en $(it)^j$ avec $1 \leq j \leq 5$.

- Pour $k = 1$, on a :

$$\begin{aligned} I_1 &= x + y \\ &= \mathrm{E}(X)(it) + \frac{1}{2!}\mathrm{E}(X^2)(it)^2 + \frac{1}{3!}\mathrm{E}(X^3)(it)^3 + \frac{1}{4!}\mathrm{E}(X^4)(it)^4 + \frac{1}{5!}\mathrm{E}(X^5)(it)^5 . \end{aligned}$$

- Pour $k = 2$, on a :

$$\begin{aligned} I_2 &= -\frac{1}{2}(x+y)^2 \\ &= -\frac{1}{2}A^2 - AB - xy \\ &= -\frac{1}{2}\Big(\mathrm{E}(X)\Big)^2(it)^2 - \frac{1}{2}\mathrm{E}(X)\mathrm{E}(X^2)(it)^3 - \frac{1}{8}\Big(\mathrm{E}(X^2)\Big)^2(it)^4 - \frac{1}{6}\mathrm{E}(X)\mathrm{E}(X^3)(it)^4 \\ &\frac{1}{12}\mathrm{E}(X^2)\mathrm{E}(X^3)(it)^5 - \frac{1}{24}\mathrm{E}(X)\mathrm{E}(X^4)(it)^5 . \end{aligned}$$

- Pour $k = 3$, on a :

$$\begin{aligned} I_3 &= \frac{1}{3}(x+y)^3 \\ &= \frac{1}{3}x^3 \\ &= \frac{1}{3}\Big\{\Big(\mathrm{E}(X)\Big)^3(it)^3 + \frac{3}{2}\Big(\mathrm{E}(X)\Big)^2\mathrm{E}(X^2)(it)^4 + \frac{3}{4}\mathrm{E}(X)\Big(\mathrm{E}(X^2)\Big)^2(it)^5\Big\} \\ &\quad + \frac{1}{6}\Big(\mathrm{E}(X)\Big)^2\mathrm{E}(X^3)(it)^5 \\ &= \frac{1}{3}\Big(\mathrm{E}(X)\Big)^3(it)^3 + \frac{1}{2}\Big(\mathrm{E}(X)\Big)^2\mathrm{E}(X^2)(it)^4 + \frac{1}{4}\mathrm{E}(X)\Big(\mathrm{E}(X^2)\Big)^2(it)^5 \\ &\quad + \frac{1}{6}\Big(\mathrm{E}(X)\Big)^2\mathrm{E}(X^3)(it)^5 . \end{aligned}$$

- Pour $k = 4$, on a :

$$\begin{aligned} I_4 &= -\frac{1}{4}(x+y)^4 \\ &= -\frac{1}{4}\Big\{\Big(\mathrm{E}(X)\Big)^4(it)^4 - \frac{4}{2}\Big(\mathrm{E}(X)\Big)^3\mathrm{E}(X^2)(it)^5\Big\} \\ &= -\frac{1}{4}\Big(\mathrm{E}(X)\Big)^4(it)^4 - \frac{1}{2}\Big(\mathrm{E}(X)\Big)^3\mathrm{E}(X^2)(it)^5 . \end{aligned}$$

- Enfin pour $k = 5$ on a :

$$\begin{aligned} I_5 &= \frac{1}{5}(x+y)^5 \\ &= \frac{1}{5}x^5 \\ &= \frac{1}{5}\Big(\mathrm{E}(X)\Big)^5(it)^5 . \end{aligned}$$

Alors on obtient :

$$
\begin{aligned}
I &= I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 \\
&= \mathrm{E}(X)(it) + \frac{1}{2!}\Big\{\mathrm{E}(X^2) - \Big(\mathrm{E}(X)\Big)^2\Big\}(it)^2 + \Big\{\frac{1}{6}\mathrm{E}(X^3) - \frac{1}{2}\mathrm{E}(X)\mathrm{E}(X^2) \\
&\quad + \frac{1}{3}\Big(\mathrm{E}(X)\Big)^3\Big\}(it)^3 + \Big\{\frac{1}{24}\mathrm{E}(X^4) - \frac{1}{8}\Big(\mathrm{E}(X^2)\Big)^2 - \frac{1}{6}\mathrm{E}(X)\mathrm{E}(X^3) \\
&\quad + \frac{1}{2}\Big(\mathrm{E}(X)\Big)^2\mathrm{E}(X^2)\Big\}(it)^4 + \Big\{\frac{1}{120}\mathrm{E}(X^5) - \frac{1}{12}\mathrm{E}(X^2)\mathrm{E}(X^3) - \frac{1}{24}\mathrm{E}(X)\mathrm{E}(X^4) \\
&\quad + \frac{1}{4}\mathrm{E}(X)\Big(\mathrm{E}(X^2)\Big)^2 + \frac{1}{6}\Big(\mathrm{E}(X)\Big)^2\mathrm{E}(X^3) - \frac{1}{2}\Big(\mathrm{E}(X)\Big)^3\mathrm{E}(X^2) + \frac{1}{5}\Big(\mathrm{E}(Y)\Big)^5\Big\}(it)^5 .
\end{aligned}
$$

Nous obtenons finalement

$$
\begin{aligned}
\kappa_1 &= \mathrm{E}(X) \ , \\
\kappa_2 &= \mathrm{E}(X^2) - \Big(\mathrm{E}(X)\Big)^2 = \mathrm{V}(X) \ , \\
\kappa_3 &= \mathrm{E}(X^3) - 3\ \mathrm{E}(X^2)\mathrm{E}(X) + 2\ \Big(\mathrm{E}(X)\Big)^3 = \mathrm{E}\Big(X - \mathrm{E}(X)\Big)^3 \\
\kappa_4 &= \mathrm{E}(X^4) - 4\ \mathrm{E}(X^3)\mathrm{E}(X) - 3\ \Big(\mathrm{E}(X^2)\Big)^2 + 12\ \mathrm{E}(X^2)(\mathrm{E}(X)\Big)^2 - 6\ \Big(\mathrm{E}(X)\Big)^4 \\
&= \mathrm{E}\Big(X - \mathrm{E}X\Big)^4 - 3\ \Big(\mathrm{V}(X)\Big)^2 \qquad (4.16) \\
\kappa_5 &= \mathrm{E}(X^5) - 10\mathrm{E}(X^2)\mathrm{E}(X^3) - 5\mathrm{E}(X)\mathrm{E}(X^4) + 30\mathrm{E}(X)\Big(\mathrm{E}(X^2)\Big)^2 + 20\Big(\mathrm{E}(X)\Big)^2\mathrm{E}(X^3) \\
&\quad - 60\Big(\mathrm{E}(X)\Big)^3\mathrm{E}(X^2) + 24\Big(\mathrm{E}(X)\Big)^5 \\
&= \Big\{\mathrm{E}(X^5) - 5\mathrm{E}(X)\mathrm{E}(X^4) + 10\mathrm{E}(X^3)\Big(\mathrm{E}(X)\Big)^2 - 10\mathrm{E}(X^2)\Big(\mathrm{E}(X)\Big)^3 + 4\Big(\mathrm{E}(X)\Big)^5\Big\} \\
&\quad - 10\Big\{\mathrm{E}(X^3)\mathrm{E}(X^2) - 3\mathrm{E}(X)\Big(\mathrm{E}(X^2)\Big)^2 - \Big(\mathrm{E}(X)\Big)^2\mathrm{E}(X^3) + 5\mathrm{E}(X^2)\Big(\mathrm{E}(X)\Big)^3 \\
&\quad - 2\Big(\mathrm{E}(X)\Big)^5\Big\} \\
&= \mathrm{E}\Big(X - \mathrm{E}X\Big)^5 - 10\Big\{\mathrm{E}(X^2) - \Big(\mathrm{E}(X)\Big)^2\Big\}\Big\{\mathrm{E}(X^3) - 3\ \mathrm{E}(X^2)\mathrm{E}(X) + 2\Big(\mathrm{E}(X)\Big)^3\Big\} \\
&= \mathrm{E}\Big(X - \mathrm{E}X\Big)^5 - 10\mathrm{E}\Big(X - \mathrm{E}(X)\Big)^2\mathrm{E}\Big(X - \mathrm{E}(X)\Big)^3 \\
&= \mathrm{E}\Big(X - \mathrm{E}X\Big)^5 - 10\mathrm{V}(X)\kappa_3
\end{aligned}
$$

et ainsi de suite.

4.2 Expansion d'Edgeworth pour la moyenne standardisée

Cette section présente l'expansion d'Edgeworth pour la fonction de distribution de la moyenne standardisée. Nous suivons le travail de Hall, qui donne l'expansion d'ordre 2, et nous obtenons l'extension pour l'ordre 3.

Théorème 4.2.1. Expansion d'Edgeworth pour la fonction de distribution de la moyenne standardisée. Soit une population X à moyenne $\mu = \mathrm{E}(X)$ et variance finie $\sigma^2 = \mathrm{V}(X)$, et considérons un échantillon iid $X_1, \ldots, X_n$ de taille n. Alors la fonction de distribution $F_{S_n}(x) = \mathrm{P}(S_n \leq x)$ de la moyenne standardisée $S_n = n^{1/2}(\bar{X} - \mu)/\sigma$ a une expansion d'Edgeworth

$$F_{S_n}(x) = \Phi(x) + n^{-1/2}\, p_1(x)\, \phi(x) + n^{-1}\, p_2(x)\, \phi(x) + n^{-3/2}\, p_3(x)\, \phi(x) + o(n^{-3/2}) \quad (4.17)$$

où

$$p_1(x) = -\frac{1}{6}\gamma\ (x^2 - 1) \quad (4.18)$$

$$p_2(x) = -x\Big\{\frac{1}{24}\kappa\ (x^2 - 3) + \frac{1}{72}\gamma^2\,(x^4 - 10x^2 + 15)\Big\} \quad (4.19)$$

$$\begin{aligned} p_3(x) = -\Big\{ &\frac{1}{120}\kappa_5\,(x^4 - 6x^2 + 3) + \frac{1}{144}\kappa\gamma\ (x^6 - 15x^4 + 45x^2 - 15) \\ &+ \frac{1}{1296}\gamma^3\,(x^8 - 28x^6 + 210x^4 - 420x^2 + 105)\Big\} \end{aligned} \quad (4.20)$$

et $\gamma = \mathrm{E}[(X - \mu)/\sigma]^3$ est l'asymétrie, $\kappa = \mathrm{E}[(X - \mu)/\sigma]^4 - 3$ est le kurtosis,
$\kappa_5 = \mathrm{E}[(X - \mu)/\sigma]^5 - 10\gamma$ est le cinquème cumulant de la variable standardisée $(X - \mu)/\sigma$. L'expansion est valable comme une série asymptotique si κ_5 existe, ou équivalemment si α_5 existe, c.-à-d. si $\mathrm{E}(|X|^5) < \infty$.

Preuve. On veut écrire

$$F_{S_n}(x) = \Phi(x) + R_1(x)\, n^{-1/2} + R_2(x)\, n^{-1} + R_3(x)\, n^{-3/2} + \ldots \quad (4.21)$$

$$= \Phi(x) + \sum_{j \geq 1} R_j(x)\, n^{-j/2} \quad (4.22)$$

où

$$R_j(x) = p_j(x)\phi(x), \qquad j = 1, 2, \ldots\,. \quad (4.23)$$

Le coeur de la dérivation sera d'identifier deux expansions en puissances pour la fonction caractéristique de la statistique S_n,

$$\chi_n(t) = \mathrm{E}(e^{itS_n})\,. \quad (4.24)$$

D'un côté le projet de l'équation (4.22) donne une expression

$$\chi_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, dF_{S_n}(x) \tag{4.25}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, d\Phi(x) + \sum_{j\geq 1} n^{-j/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, dR_j(x) \tag{4.26}$$

$$= e^{-t^2/2} + \sum_{j\geq 1} n^{-j/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, dR_j(x)\,. \tag{4.27}$$

De l'autre côté on a

$$S_n = n^{1/2}\,\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma} = n^{1/2}\,\bar{Y} \tag{4.28}$$

où $Y_i = (X_i - \mu)/\sigma,\ i = 1, \ldots, n$, est un échantillon iid de la variable standardisée $Y = (X-\mu)/\sigma$ qui a moyenne 0 et variance 1.
Montrons maintenant que

$$\chi_n(t) = \Big[\chi\left(t/n^{1/2}\right)\Big]^n \tag{4.29}$$

où $\chi(t)$ est la fca de la variable standardisée Y.
En effet,

$$\chi_n(t) = \mathrm{E}\Big(e^{itS_n}\Big) = \mathrm{E}\Big[e^{it\sum_k Y_k/n^{1/2}}\Big] = \mathrm{E}\Big[\prod_k e^{itY_k/n^{1/2}}\Big]$$
$$= \prod_k \mathrm{E}\Big[e^{itY_k/n^{1/2}}\Big] = \Big[\mathrm{E}\Big(e^{itY/n^{1/2}}\Big)\Big]^n = \Big[\chi\left(t/n^{1/2}\right)\Big]^n.$$

De $\chi(t) = \exp\Big[\log\chi(t)\Big]$ et la définition (4.4) des cumulants, on obtient

$$\chi_n(t) = \left[\exp\Big(\sum_{j\geq 1}\kappa_j\,\frac{(it)^j}{j!}\,n^{-j/2}\Big)\right]^n \tag{4.30}$$

$$= \exp\left[\sum_{j\geq 1}\kappa_j\,\frac{(it)^j}{j!}\,n^{-(j-2)/2}\right] \tag{4.31}$$

où $\kappa_j = \kappa_{j,Y}$ est le cumulant d'ordre j de Y. Comme $Y = (X-\mu)/\sigma$ est standardisée, et en utilisant les relations cumulants/moments de la propriété 4.1.2 on a

$$\kappa_1 = \kappa_{1,Y} = 0 \tag{4.32}$$

$$\kappa_2 = \kappa_{2,Y} = 1 \tag{4.33}$$

$$\kappa_3 = \kappa_{3,Y} = \alpha_{3,Y} = \gamma \tag{4.34}$$

$$\kappa_4 = \kappa_{4,Y} = \alpha_{4,Y} = \kappa + 3 \tag{4.35}$$

$$\kappa_5 = \kappa_{5,Y} = \alpha_{5,Y} - 10\kappa_{3,Y} = \mu_5/\sigma^{5/2} - 10\gamma \tag{4.36}$$

où $\sigma^2,\ \gamma,\ \kappa,\ \mu_5$ sont respectivement la variance, l'asymétrie, le kurtosis, le moment centré d'ordre 5 de la population X, κ_5 est le cinquième cumulant de la variable standardisée $Y = (X - \mu)/\sigma$.
Par conséquence

$$\begin{aligned}\chi_n(t) &= \exp\left[-\frac{t^2}{2} + \sum_{j\geq 3} \kappa_j \frac{(it)^j}{j!}\, n^{-(j-2)/2} \right] \\ &= e^{-t^2/2}\, \exp\left[\sum_{j\geq 3} \kappa_j \frac{(it)^j}{j!}\, n^{-(j-2)/2} \right].\end{aligned}$$

En utilisant l'expansion en puissances $\exp(x) = 1 + x + x^2/2! + x^3/3! + \ldots$ on peut écrire

$$\begin{aligned}\chi_n(t) = e^{-t^2/2}\Bigg\{ & 1 + \left(\kappa_3 \frac{(it)^3}{3!} n^{-1/2} + \kappa_4 \frac{(it)^4}{4!} n^{-1} + \kappa_5 \frac{(it)^5}{5!} n^{-3/2} + \ldots \right) \\ & + \frac{1}{2} \left(\kappa_3 \frac{(it)^3}{3!} n^{-1/2} + \kappa_4 \frac{(it)^4}{4!} n^{-1} + \kappa_5 \frac{(it)^5}{5!} n^{-3/2} + \ldots \right)^2 \\ & + \frac{1}{3!} \left(\kappa_3 \frac{(it)^3}{3!} n^{-1/2} + \kappa_4 \frac{(it)^4}{4!} n^{-1} + \kappa_5 \frac{(it)^5}{5!} n^{-3/2} + \ldots \right)^3 \\ & + \ldots \Bigg\} \\ = e^{-t^2/2}\Bigg\{ & 1 + \kappa_3 \frac{(it)^3}{3!} n^{-1/2} + \left(\kappa_4 \frac{(it)^4}{4!} + \frac{1}{2}\, \kappa_3^2 \frac{(it)^6}{(3!)^2} \right) n^{-1} + \ldots \Bigg\}.\end{aligned}$$

En continuant le groupement des termes à droites en puissances de $n^{-1/2}$ on obtient

$$\chi_n(t) = e^{-t^2/2} + r_1(it)\, n^{-1/2}\, e^{-t^2/2} + r_2(it)\, n^{-1}\, e^{-t^2/2} + \ldots \tag{4.37}$$

$$= e^{-t^2/2} + \sum_{j\geq 1} n^{-j/2}\, r_j(it)\, e^{-t^2/2} \tag{4.38}$$

où $r_j(u)$ est un polynôme en u. Nous calculons facilement les premiers trois polynômes

$$r_1(u) = \frac{1}{6}\kappa_3 u^3 \tag{4.39}$$

$$r_2(u) = \frac{1}{24}\kappa_4 u^4 + \frac{1}{72}\kappa_3^2 u^6 \tag{4.40}$$

$$r_3(u) = \frac{1}{120}\, \kappa_5 u^5 + \frac{1}{144}\kappa_3\kappa_4\, u^7 + \frac{1}{1296}\, \kappa_3^3\, u^9\,. \tag{4.41}$$

Hall offre une propriété générale du polynôme $r_j(u)$: r_j est de degré $3j$ et est pair pour j pair, impair pour j impair.

En identifiant les expansions en puissances (4.27) et (4.38) on conclut que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, dR_j(x) = r_j(it)\, e^{-t^2/2}\,. \tag{4.42}$$

Comme $e^{-t^2/2}$ est la fca de la loi normal standard, et par multiple application de l'intégration partielle, on peut écrire

$$\begin{aligned} e^{-t^2/2} &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\phi(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} D\Phi(x)\, dx \\ &= (it)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} D\Phi(x)\, d\big(e^{itx}\big) \\ &= (it)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}(-D^2\Phi(x))\, dx \\ &= \dots \\ &= (it)^{-j} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}(-1)^j\, D^{j+1}\Phi(x)\, dx \\ &= (it)^{-j} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, d\big[(-D)^j\Phi(x)\big]\,. \end{aligned} \tag{4.43}$$

Puisque le polynôme r_j est de la forme $r_j(u) = \sum_{k=1}^{3j} a_{k,j}u^k$ on obtient

$$\begin{aligned} r_j(it)\, e^{-t^2/2} &= \sum_k a_{k,j}(it)^k\, e^{-t^2/2} \\ &= \sum_k a_{k,j} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, d\Big[(-D)^k\Phi(x)\Big] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, d\Big[\sum_k a_{k,j}(-D)^k\Phi(x)\Big] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, d\Big[r_j(-D)\Phi(x)\Big]\,. \end{aligned} \tag{4.44}$$

Alors de (4.42) et (4.44), par le théorème de l'inverse de la transformation de Fourier, on obtient la fonction recherchée

$$R_j(x) = r_j(-D)\Phi(x)\,. \tag{4.45}$$

Nous connaissons l'expression pour les dérivés de la fdi normale,

$$(-D)^k\Phi(x) = -H_{k-1}(x)\,\phi(x), \tag{4.46}$$

où H_k sont des polynômes d'Hermite. Ils sont orthogonaux par rapport à la fonction de poids ϕ et normalisés de manière à ce que le coefficient de puissance maximale en x soit égal à l'unité. Notez que H_j est de degré précis j et est pair pour j pair, impair pour j impair.
En utilisant la formule explicite suivante ([16])

$$H_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \frac{n!}{2^k k!(n-2k)!} x^{n-2k},$$

où $\lfloor n/2 \rfloor$ est la partie entière de $n/2$, on déduit que :

$$\begin{aligned}
H_0(x) &= 1 \\
H_1(x) &= x \\
H_2(x) &= x^2 - 1 \\
H_3(x) &= x(x^2 - 3) \\
H_4(x) &= x^4 - 6x^2 + 3 \\
H_5(x) &= x(x^4 - 10x^2 + 15) \\
H_6(x) &= x^6 - 15x^4 + 45x^2 - 15 \\
H_7(x) &= x(x^6 - 21x^4 + 105x^2 - 105) \\
H_8(x) &= x^8 - 28x^6 + 210x^4 - 420x^2 + 105\,.
\end{aligned} \tag{4.47}$$

Nous pouvons maintenant déduire par exemple

$$R_1(x) = r_1(-D)\Phi(x) = \frac{1}{6}\kappa_3(-D)^3\Phi(x) = -\frac{1}{6}\kappa_3 H_2(x)\phi(x) = -\frac{1}{6}\kappa_3 \left(x^2 - 1\right)\phi(x)\,.$$

Les premiers trois fonctions recherchées sont alors

$$\begin{aligned}
R_1(x) &= -\frac{1}{6}\kappa_3 \ (x^2 - 1)\phi(x) \\
R_2(x) &= -x\Big\{\frac{1}{24}\kappa_4 \ (x^2 - 3) + \frac{1}{72}\kappa_3^2 \ (x^4 - 10x^2 + 15)\Big\}\phi(x) \\
R_3(x) &= -\Big\{\frac{1}{120}\kappa_5 \ (x^4 - 6x^2 + 3) + \frac{1}{144}\kappa_3\kappa_4 \ (x^6 - 15x^4 + 45x^2 - 15) \\
&\quad + \frac{1}{1296}\kappa_3^3 \ (x^8 - 28x^6 + 210x^4 - 420x^2 + 105)\Big\}\phi(x)\,.
\end{aligned}$$

Alors de (4.23) on obtient les trois polynômes $p_1(x)$, $p_2(x)$, $p_3(x)$, ce qui finit la démonstration.

4.3 Expansion d'Edgeworth pour une statistique asymptotiquement normale

Nous traitons ici les expansions d'Edgeworth pour des statistiques plus générales que la moyenne standardisée de l'échantillon, toujours en suivant le développement de Hall.

Théorème 4.3.1. Expansion d'Edgeworth pour une statistique asymptotiquement normale. Soit S_n une statistique avec une distribution asymptotiquement normale standard, telle que $S_n = n^{1/2}(\hat{\theta} - \theta)/\hat{\sigma}$, où $\hat{\theta}$ est un estimateur consistent et asymptotiquement normale $\mathrm{AN}(\theta, \sigma^2/n)$ pour le paramètre θ, et $\hat{\sigma}^2$ est un estimateur consistent du paramètre σ^2 dans la variance asymptotique, donc $S_n \xrightarrow{d} Z \sim \mathrm{N}(0,1)$. Alors l'expansion d'Edgeworth pour la fdi de S_n à l'ordre 3 est

$$F_{S_n}(x) = \Phi(x) + n^{-1/2}\ p_1(x)\phi(x) + n^{-1}\ p_2(x)\phi(x) + n^{-3/2}\ p_3(x)\phi(x) + o(n^{-3/2}) \quad (4.48)$$

où

$$p_1(x) = -\Big\{\kappa_{1,2} + \frac{1}{6}\kappa_{3,1}(x^2-1)\Big\} \quad (4.49)$$

$$p_2(x) = -x\Big\{\frac{1}{2}\Big(\kappa_{2,2} + \kappa_{1,2}^2\Big) + \frac{1}{24}(\kappa_{4,1} + 4\kappa_{1,2}\kappa_{3,1})\ (x^2-3) + \frac{1}{72}\kappa_{3,1}^2\ (x^4 - 10x^2 + 15)\Big\} \quad (4.50)$$

$$\begin{aligned} p_3(x) = -\Big\{&\kappa_{1,3} + \frac{1}{6}\Big(\kappa_{3,2} + 3\kappa_{1,2}\kappa_{2,2} + \kappa_{1,2}^3\Big)(x^2-1) + \frac{1}{120}\Big(5\kappa_{1,2}\kappa_{4,1} + 10\kappa_{2,2}\kappa_{3,1} \\ &+ 10\kappa_{1,2}^2\kappa_{3,1} + \kappa_{5,1}\Big)(x^4 - 6x^2 + 3) + \frac{1}{144}\Big(\kappa_{3,1}\kappa_{4,1} + 2\kappa_{1,2}\kappa_{3,1}^2\Big)(x^6 - 15x^4 + 45x^2 \\ &- 15) + \frac{1}{1296}\kappa_{3,1}^3(x^8 - 28x^6 + 210x^4 - 420x^2 + 105)\Big\} \end{aligned} \quad (4.51)$$

et les $\kappa_{j,k}$ sont les coefficients dans les expansions des cumulants $\kappa_j := \kappa_{j,n}$ de S_n que l'on suppose d'ordre $n^{-(j-2)/2}$ et de la forme

$$\kappa_j = n^{-(j-2)/2}\Big(\kappa_{j,1} + n^{-1}\kappa_{j,2} + n^{-2}\kappa_{j,3} + \dots\Big) \quad j \geq 1\,. \quad (4.52)$$

Alors $\kappa_{1,1} = 0$ et $\kappa_{2,1} = 1$, de sorte que

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= n^{-1/2}\kappa_{1,2} + n^{-3/2}\kappa_{1,3} + \dots \\ \kappa_2 &= 1 + n^{-1}\kappa_{2,2} + n^{-2}\kappa_{2,3} + \dots \\ \kappa_3 &= n^{-1/2}\kappa_{3,1} + n^{-3/2}\kappa_{3,2} + n^{-5/2}\kappa_{3,3} + \dots \\ \kappa_4 &= n^{-1}\kappa_{4,1} + n^{-2}\kappa_{4,2} + n^{-3}\kappa_{4,3} + \dots \\ \kappa_5 &= n^{-3/2}\kappa_{5,1} + n^{-5/2}\kappa_{5,2} + n^{-7/2}\kappa_{5,3} + \dots\,. \end{aligned} \quad (4.53)$$

L'expansion est valable dès que le cumulant d'ordre 5 de S_n existe, i.e. dès que le moment d'ordre 5 existe.

Hall a noté qu'en pratique l'expansion (4.52) se fait souvent, et le résultat général que p_j est un polynôme de degré ne dépassant pas $3j-1$, impair pour j pair et pair pour j impair. Il a donné explicitement les deux polynômes p_1 et p_2. Le théorème ajoute le polynôme p_3.

Preuve. Prouvons d'abord la convergence de S_n pour $n \to \infty$:

$$S_n = n^{1/2}\,\frac{\hat\theta-\theta}{\hat\sigma} = n^{1/2}\,\frac{\hat\theta-\theta}{\sigma} : \frac{\hat\sigma}{\sigma} \tag{4.54}$$

où $n^{1/2}\,\frac{\hat\theta-\theta}{\sigma} \xrightarrow{d} Z \sim \mathrm{N}(0,1)$, $\hat\sigma \xrightarrow{p} \sigma$, donc $\hat\sigma/\sigma \xrightarrow{p} 1$. Alors par le théorème de Slutsky [15] on a $S_n \xrightarrow{d} Z : 1 = Z$.

Par le théorème de Scheffé pour des va continues [15], il en suivra la convergence des densités $f_{S_n}(x) \to f_Z(x) = \phi(x)$ et puis la convergence des moments $\mathrm{E}(S_n^k) \to \mathrm{E}(Z^k)$, en particulier $\mathrm{E}(S_n) \to 0$ et $\mathrm{V}(S_n) \to 1$.

Pour obtenir l'expansion de la fdi F_{S_n}, comme dans le cas de la section précédente, on identifiera deux expansions en puissances de la fca $\chi_n(t)$ de S_n. D'un côté on veut écrire l'expansion pour F_{s_n} en la forme (4.22) avec (4.23), d'où une expression pour la fca donnée en (4.27).
De l'autre côté, la définition des cumulants $\kappa_j = \kappa_{j,n}$, $j = 1, 2, \ldots$, de S_n donne la fca

$$\begin{aligned}\chi_n(t) &= \exp\log\chi_n(t)\\ &= \exp\Big\{\kappa_1(it) + \frac{1}{2!}\kappa_2(it)^2 + \frac{1}{3!}\kappa_3(it)^3 + \ldots + \frac{1}{j!}\kappa_j(it)^j + \ldots\Big\}\end{aligned} \tag{4.55}$$

où on suppose les expansions (4.52). Alors $\kappa_{1,1} = 0$ et $\kappa_{2,1} = 1$, dû au fait que S_n est centré et mis à l'échelle de sorte que $\kappa_1 = \mathrm{E}(S_n) \to 0$ et $\kappa_2 = \mathrm{V}(S_n) \to 1$. Alors on a les expressions (4.53) pour les cumulants, et la fca devient

$$\begin{aligned}\chi_n(t) = e^{-t^2/2}\exp\Big\{&n^{-1/2}\Big(\kappa_{1,2}(it) + \frac{1}{6}\kappa_{3,1}(it)^3\Big) + n^{-1}\Big(\frac{1}{2}\kappa_{2,2}(it)^2 + \frac{1}{24}\kappa_{4,1}(it)^4\Big)\\ &+ n^{-3/2}\Big(\kappa_{1,3}(it) + \frac{1}{6}\kappa_{3,2}(it)^3 + \frac{1}{120}\kappa_{5,1}(it)^5\Big) + \ldots\Big\}.\end{aligned}$$

Utilisons encore $\exp(x) = 1 = x^2/2! + x^3/3! + \ldots$ et regroupons les termes jusqu'à l'ordre 3, et on obtient

$$\chi_n(t = e^{-t^2/2}\Big\{1 + r_1(it)\; n^{-1/2} + r_2(it)\; n^{-1} + r_3(it)\; n^{-3/2} + \ldots + r_j(it)\; n^{-j/2} + \ldots\Big\} \tag{4.56}$$

où les premiers r_j sont les polynômes suivants

$$
\begin{aligned}
r_1(it) &= \kappa_{1,2}(it) + \frac{1}{6}\kappa_{3,1}(it)^3 \\
r_2(it) &= \Big(\frac{1}{2}\kappa_{2,2}(it)^2 + \frac{1}{24}\kappa_{4,1}(it)^4\Big) + \frac{1}{2}\Big(\kappa_{1,2}(it) + \frac{1}{6}\kappa_{3,1}(it)^3\Big)^2 \\
&= \frac{1}{2}\Big(\kappa_{2,2} + \kappa_{1,2}^2\Big)(it)^2 + \frac{1}{24}(\kappa_{4,1} + 4\kappa_{1,2}\kappa_{3,1})(it)^4 + \frac{1}{72}\kappa_{3,1}^2(it)^6 \\
r_3(it) &= \Big(\kappa_{1,3}(it) + \frac{1}{6}\kappa_{3,2}(it)^3 + \frac{1}{120}\kappa_{5,1}(it)^5\Big) + \frac{2}{2}\Big(\kappa_{1,2}(it) + \frac{1}{6}\kappa_{3,1}(it)^3\Big) \\
&\quad \Big(\frac{1}{2}\kappa_{2,2}(it)^2 + \frac{1}{24}\kappa_{4,1}(it)^4\Big) + \frac{1}{6}\Big(\kappa_{1,2}(it) + \frac{1}{6}\kappa_{3,1}(it)^3\Big)^3 \\
&= \kappa_{1,3}(it) + \frac{1}{6}\Big(\kappa_{3,2} + 3\kappa_{1,2}\kappa_{2,2} + \kappa_{1,2}^3\Big)(it)^3 \\
&\quad + \frac{1}{120}\Big(5\kappa_{1,2}\kappa_{4,1} + 10\kappa_{2,2}\kappa_{3,1} + 10\kappa_{1,2}^2\kappa_{3,1} + \kappa_{5,1}\Big)(it)^5 \\
&\quad + \frac{1}{144}\Big(\kappa_{3,1}\kappa_{4,1} + 2\kappa_{1,2}\kappa_{3,1}^2\Big)(it)^7 + \frac{1}{1296}\kappa_{3,1}^3(it)^9\,.
\end{aligned}
$$

Hall note la propriété générale que r_j est un polynôme de degré ne dépassant pas $3j$, pair pour j pair et impair pour j impair.
Le développement est formellement identique à celui de la section précédente, à partir de (4.37). On obtient

$$\chi_n(t) = e^{-t^2/2} + \sum_{j\geq 1} n^{-j/2} r_j(it) e^{-t^2/2} \tag{4.57}$$

$$= e^{-t^2/2} + \sum_{j\geq 1} n^{-j/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, d[r_j(-D)\Phi(x)]\,. \tag{4.58}$$

Donc

$$p_j(x)\,\phi(x) = R_j(x) = r_j(-D)\Phi(x), \quad j \geq 1, \tag{4.59}$$

où les dérivés de $\Phi(x)$ s'expriment avec des polynômes d'Hermite, (4.46) et (4.47). Le calcul des cas $j = 1, 2, 3$ offre les polynômes p_1 à p_3 du théorème.

4.4 Expansion d'Edgeworth pour la moyenne studentisée de Hall

Dans cette section nous appliquons les résultats de la section précédente pour présenter l'expansion d'Edgeworth pour la fonction de distribution de la moyenne studentisée de Hall. Nous suivons Hall pour obtenir l'expansion jusqu'à l'ordre 2. En plus, nous présentons l'extension avec l'expansion jusqu'à l'ordre 3.

Théorème 4.4.1. Expansion d'Edgeworth pour la fonction de distribution de la moyenne studentisée de type Hall. Reprenons les notations pour une population X du théorème 4.2.1, maintenant le cas de variance non-connue et estimée par l'estimateur $S^2 = \sum(X_i - \bar{X})^2/n$, et soit $S_n = n^{1/2}(\bar{X} - \mu)/S$ la moyenne studentisée de Hall. Alors l'expansion d'Edgeworth pour la fonction de distribution de S_n, $F_{S_n}(x) = \mathrm{P}\,(S_n \leq x)$, peut s'écrire

$$F_{S_n}(x) = \Phi(x) + n^{-1/2}\; q_1(x)\phi(x) + n^{-1}\; q_2(x)\phi(x) + n^{-3/2}\; q_3(x)\phi(x) + o(n^{-3/2}) \quad (4.60)$$

où

$$q_1(x) = \frac{1}{6}\gamma(2x^2+1) \quad (4.61)$$

$$q_2(x) = \frac{\kappa}{12}\;(x^3 - 3x) - \frac{\gamma^2}{18}\;(x^5 + 2x^3 - 3x) - \frac{1}{4}\;(x^3 + 3x) \quad (4.62)$$

$$q_3(x) = -\frac{\kappa_5}{40}\Big(2x^4 + 8x^2 + 1\Big) - \frac{\kappa\gamma}{1152}\Big(32x^6 - 3075x^4 + 16290x^2 - 8625\Big) + \frac{\gamma^3}{1296}\Big(8x^8 + 28x^6 - 210x^4 - 3525x^2 - 105\Big) + \frac{\gamma}{192}\Big(16x^6 + 1017x^4 - 5334x^2 + 2883\Big) \quad (4.63)$$

avec $\gamma = \mathrm{E}((X-\mu)/\sigma)^3)$, $\kappa = \mathrm{E}((X-\mu)/\sigma)^4) - 3$ et $\kappa_5 = \mathrm{E}((X-\mu)/\sigma)^5 - 10\gamma$ respectivement l'asymétrie, le kurtosis et le cinquième cumulant de la variable standardisée $Y = (X-\mu)/\sigma$.
L'extension à l'ordre 3 est valable comme une série asymptotique à 3 termes si $\mathrm{E}(|X|^5) < \infty$.

Hall donne la forme générale de l'expansion, avec les expressions explicites pour les polynômes q_1 et q_2. Le théorème ci-dessus ajoute l'expression explicite pour le polynôme q_3.

Interprétation. L'erreur de l'approximation normale Φ pour la fdi F_{S_n} de la moyenne studentisée de Hall dépend de n, x, et les cumulants de population. Hors x et n le facteur dominant est l'asymétrie, qui est responsable pour l'effet à l'ordre 1. A l'ordre 2 s'ajoute le kurtosis. A l'ordre 3 intervient en plus le cumulant d'ordre 5, ou essentiellement le moment standard d'ordre 5.

Preuve. S_n a la structure de la statistique du théorème 4.3.1 de la section précédente. L'application de ce théorème demande les coefficients dans l'expansion des premiers 5 cumulants de S_n à l'ordre 3. Comme les cumulants s'expriment comme polynômes en les moments, nous utiliserons les expressions pour ces moments obtenues en les chapitres 2 et 3.

De la relation (4.16) et (2.11),(2.14),(2.17),(2.20) et(3.4), on a :

$$
\begin{aligned}
\kappa_{1,n} &= \mathrm{E}(S_n) \\
&= -\frac{1}{2}n^{-1/2}\gamma + \frac{1}{8}n^{-3/2}\Big(3\alpha_5 - 35\gamma - \frac{15}{2}\kappa\gamma\Big) + O(n^{-2}) \\
\kappa_{2,n} &= \mathrm{E}(S_n^2) - \Big(\mathrm{E}(S_n)\Big)^2 \\
&= 1 + n^{-1}(2\gamma^2+3) - \Big\{ -\frac{1}{2}n^{-1/2}\gamma + \frac{1}{8}n^{-3/2}\Big(3\alpha_5 - 35\gamma - \frac{15}{2}\kappa\gamma\Big)\Big\}^2 + O(n^{-2}) \\
&= 1 + \frac{1}{4}n^{-1}(7\gamma^2+12) + O(n^{-2}) \\
\kappa_{3,n} &= \mathrm{E}(S_n^3) - 3\ \mathrm{E}(S_n)\mathrm{E}(S_n^2) + 2\ \Big(\mathrm{E}(S_n)\Big)^3 \\
&= -\frac{7}{2}n^{-1/2}\gamma + \frac{1}{8}n^{-3/2}\Big(33\alpha_5 - \frac{105}{2}\kappa\gamma - 105\gamma^3 - 477\gamma\Big) \\
&\quad - 3\Big\{ -\frac{1}{2}n^{-1/2}\gamma + \frac{1}{8}n^{-3/2}\Big(3\alpha_5 - \frac{15}{2}\kappa\gamma - 35\gamma\Big)\Big\}\Big(1 + n^{-1}(2\gamma^2+3)\Big) \\
&\quad + 2\Big\{ -\frac{1}{2}n^{-1/2}\gamma + \frac{1}{8}n^{-3/2}\Big(3\alpha_5 - \frac{15}{2}\kappa\gamma - 35\gamma\Big)\Big\}^3 + O(n^{-2}) \\
&= -2\gamma\ n^{-1/2} + \frac{1}{8}n^{-3/2}\Big(24\alpha_5 - 30\kappa\gamma - 83\gamma^3 - 336\gamma\Big) + O(n^{-2}) \\
\kappa_{4,n} &= \mathrm{E}(S_n^4) - 3\ \Big(\mathrm{E}(S_n^2)\Big)^2 - 4\ \mathrm{E}(S_n)\mathrm{E}(S_n^3) + 12\ \Big(\mathrm{E}(S_n)\Big)^2\mathrm{E}(S_n^2) - 6\ \Big(\mathrm{E}(S_n)\Big)^4 \\
&= 3 + n^{-1}(28\gamma^2 - 2\kappa + 24) - 3\Big(1 + n^{-1}(2\gamma^2+3)\Big)^2 - 4\Big\{ -\frac{1}{2}n^{-1/2}\gamma + \frac{1}{8}n^{-3/2} \\
&\quad \Big(3\alpha_5 - \frac{15}{2}\kappa\gamma - 35\gamma\Big)\Big\}\Big\{ -\frac{7}{2}n^{-1/2}\gamma + \frac{1}{8}n^{-3/2}\Big(33\alpha_5 - \frac{105}{2}\kappa\gamma - 105\gamma^3 - 477\gamma\Big)\Big\} \\
&\quad + 12\ \Big\{ -\frac{1}{2}n^{-1/2}\gamma + \frac{1}{8}n^{-3/2}\Big(3\alpha_5 - \frac{15}{2}\kappa\gamma - 35\gamma\Big) + O(n^{-2})\Big\}^2 \\
&\quad \Big(1 + n^{-1}(2\gamma^2+3))\Big) - 6\Big\{ -\frac{1}{2}n^{-1/2}\gamma + \frac{1}{8}n^{-3/2}\Big(3\alpha_5 - \frac{15}{2}\kappa\gamma - 35\gamma\Big)\Big\}^4 + O(n^{-2}) \\
&= n^{-1}(12\gamma^2 - 2\kappa + 6) + O(n^{-2})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\kappa_{5,n} &= \mathrm{E}(S_n^5) - 10\ \mathrm{E}(S_n^2)\mathrm{E}(S_n^3) - 5\ \mathrm{E}(S_n)\mathrm{E}(S_n^4) + 30\ \mathrm{E}(S_n)\Big(\mathrm{E}(S_n^2)\Big)^2 + 20\ \Big(\mathrm{E}(S_n)\Big)^2\mathrm{E}(S_n^3) \\
&\quad - 60\ \Big(\mathrm{E}(S_n)\Big)^3\mathrm{E}(S_n^2) + 24\ \Big(\mathrm{E}(S_n)\Big)^5 \\
&= -\frac{55}{2}n^{-1/2}\gamma + \frac{1}{8}n^{-3/2}\Big(333\alpha_5 - 2575\kappa\gamma - 2450\gamma^3 - 10530\gamma\Big) \\
&\quad - 10\Big\{1 + n^{-1}(2\gamma^2+3)\Big\}\Big\{ -\frac{7}{2}n^{-1/2}\gamma + \frac{1}{8}n^{-3/2}\Big(33\alpha_5 - \frac{105}{2}\kappa\gamma - 105\gamma^3 - 477\gamma\Big)\Big\} \\
&\quad - 5\Big\{ -\frac{1}{2}n^{-1/2}\gamma + \frac{1}{8}n^{-3/2}\Big(3\alpha_5 - \frac{15}{2}\kappa\gamma - 35\gamma\Big)\Big\}\Big\{3 + n^{-1}(28\gamma^2 - 2\kappa + 24)\Big\} \\
&\quad + 30\Big\{ -\frac{1}{2}n^{-1/2}\gamma + \frac{1}{8}n^{-3/2}\Big(3\alpha_5 - \frac{15}{2}\kappa\gamma - 35\gamma\Big)\Big\}\Big\{1 + n^{-1}(2\gamma^2+3)\Big\}^2 \\
&\quad + 20\Big\{ -\frac{1}{2}n^{-1/2}\gamma + \frac{1}{8}n^{-3/2}\Big(3\alpha_5 - \frac{15}{2}\kappa\gamma - 35\gamma\Big)\Big\}^2 \\
&\quad \Big\{ -\frac{7}{2}n^{-1/2}\gamma + \frac{1}{8}n^{-3/2}\Big(33\alpha_5 - \frac{105}{2}\kappa\gamma - 105\gamma^3 - 477\gamma\Big)\Big\} \\
&\quad - 60\Big\{ -\frac{1}{2}n^{-1/2}\gamma + \frac{1}{8}n^{-3/2}\Big(3\alpha_5 - \frac{15}{2}\kappa\gamma - 35\gamma\Big)\Big\}^3\Big\{1 + n^{-1}(2\gamma^2+3)\Big\} \\
&\quad + 24\Big\{ -\frac{1}{2}n^{-1/2}\gamma + \frac{1}{8}n^{-3/2}\Big(3\alpha_5 - \frac{15}{2}\kappa\gamma - 35\gamma\Big)\Big\}^5 + O(n^{-2}) \\
&= \frac{1}{8}n^{-3/2}\left\{48\alpha_5 - \frac{4405}{2}\kappa\gamma - 840\gamma^3 - 5685\gamma\right\} + O(n^{-2})\,.
\end{aligned}
$$

On déduit de la relation (4.52) que

$$
\begin{aligned}
&\kappa_{1,2} = -\frac{1}{2}\gamma, && \kappa_{1,3} = \frac{1}{8}(3\alpha_5 - \frac{15}{2}\kappa\gamma - 35\gamma), \\
&\kappa_{2,2} = \frac{1}{4}(7\gamma^2 + 12), && \\
&\kappa_{3,1} = -2\gamma, && \kappa_{3,2} = \frac{1}{8}(24\alpha_5 - 30\kappa\gamma - 83\gamma^3 - 336\gamma), \\
&\kappa_{4,1} = 12\gamma^2 - 2\kappa + 6, && \\
&\kappa_{5,1} = \frac{1}{8}(48\alpha_5 - \frac{4405}{2}\kappa\gamma - 840\gamma^3 - 5685\gamma)\,. &&
\end{aligned}
$$

Alors de (4.49) à (4.51) et les relations ci-dessus, on calcule directement les premiers trois polynômes de l'expansion d'Edgeworth :

$$
q_1(x) = -\Big\{\kappa_{1,2} + \frac{1}{6}\kappa_{3,1}(x^2-1)\Big\} = \frac{1}{2}\gamma + \frac{1}{3}\gamma(x^2-1) = \frac{1}{6}\gamma(2x^2+1)
$$

et pareillement les plus complexes $q_2(x)$ et $q_3(x)$. On obtient le résultat du théorème.

Conclusion

Ce mémoire se cadre dans l'analyse de l'erreur de l'approximation normale pour une statistique à test qui est présentée dans tout premier cours en statistique inférentielle, notamment la moyenne studentisée pour analyser une moyenne de population à l'aide d'un échantillon de taille n. Un pas cruciale et inspirant pour cette étude est le travail de Hall, qui analyse l'erreur de l'approximation normale pour une statistique équivalente à l'aide d'expansions d'Edgeworth, c'est-à-dire des expansions asymptotiques en puissances de $n^{-1/2}$.

L'objectif du mémoire a été atteint. Le mémoire obtient pour la fonction de distribution de la moyenne studentisée de Hall, ou la moyenne studentisée MM, à partir de l'approximation normale, l'expansion d'Edgeworth jusqu'à l'ordre 3. Le résultat est en accord avec l'expansion à l'ordre 2 de Hall, et en donne une extension par le terme de l'ordre suivant. Cette extension offre une approximation plus précise que la normale pour la vraie fonction de distribution de la moyenne studentisée de Hall, et une identification hiérarchique des paramètres de population qui sont à l'origine de l'erreur de l'approximation normale.

En plus en cours de l'étude nous avons obtenu pour un échantillon indépendant et identiquement distribué de taille n d'une population X, à moyenne 0 et variance 1, des expressions complètes pour 24 moments mixtes d'échantillon $A_{k,\ell} = \mathrm{E}\{(\sum X_i)^k \, [\sum (X_j^2 - 1)]^\ell\}$, comme polynômes en n et les moments de population. Une propriété générale pour ces moments mixtes en est filtrée et prouvée.

Au cours de ce travail de recherche, nous avons appris et utilisé plusieurs méthodes et notions : les expansions d'Edgeworth et leur potentiel pour la statistique, l'application concrète du binomium et du multinomium, et du calcul par récurrence, les notions d'ordre et d'ordre en probabilité, la fonction caractéristique et les cumulants.

Plusieurs problèmes se présentent pour une future recherche : élargir l'étude vers la moyenne studentisée classique, et vers d'autres approximations que la normale, comme initié dans le travail de Nkurunziza et Vermeire ; écrire un algorithme en un logiciel mathématique, comme Mathematica ou Maple, pour calculer les moments mixtes d'échantillon ; la question ouverte du degré de l'expression polynomiale d'un moment mixte d'échantillon en les moments de population.

Bibliographie

[1] BARROW, M. *Statistics for Economics, Accounting and Business Studies.* 5th Edition. England : Prentice Hall, Pearson, Harlow, 2009.

[2] HALL, P. *The Bootstrap and Edgeworth Expansion.* New York : Springer-Verlag, 1992

[3] HALL, P. *The bootstrap and Edgeworth expansion.* Springer Science & Business Media, 2013.

[4] JOHNSON, R., FREUND, J., MILLER, I. *Miller and Freund's Probability and Statistics for Engineers.* 8th Edition. Boston : Pearson, 2011.

[5] JOHNSON, R.A. & BHATTACHARYYA, G.K. *Statistics Principles and Methods.* 7e edition. Wiley, 2014.

[6] KOLASSA, J.E. *Series Approximation Methods in Statistics.* (Lecture Notes in Statistics #88). 3rd edition. New York : Springer, 2006.

[7] LEFEBVRE, M. *Probabilités, statistique et applications.* Canada : Presses internationales Polytechnique, 2011.

[8] MITTELHAMER, R.C. *Mathematical Statistics for Economics and Business.* 2nd Edition. Springer Nature, 2013.

[9] MOORE, D.S., MCCABE, G.P. *Introduction to the Practice of Statistics.* 8th Edition. New York : Freeman, 2014.

[10] NKURUNZIZA, M. & VERMEIRE, L. *On the studentized statistic for statistical inference on a mean.* Work note, pp. 42.

[11] ROUSSAS, G. *A course in Mathematical Statistics.* 2nd Edition. Academic Press, San Diego (CA), 1997

[12] SAPORTA, G. *Probabilités, Analyse des données et Statistique.* 2e Edition. Paris : Editions Technip, 2006.

[13] SAPORTA, G. *Probabilités, Analyse des données et Statistique.* 3e Edition.révisée. Paris : Editions Technip, 2011.

[14] SERFLING, R.J. *Approximation Theorems of Mathematical Statistics.* 2nd Edition. New York : John Wiley & Sons, 2002.

[15] VERMEIRE, L. *Cours de Probabilités et statistique inférentielle*. Mastère I Maths fondamentales et appliquées, KU Leuven et Université du Burundi, 2017-2018.

[16] VAN ASSCHE, W. *Cours de Physique théorique et Mathematique* Mastère I Maths fondamentales et appliquées, KU Leuven et Université du Burundi, 2017-2018.

[17] WONNACOTT, T.H. & WONNACOTT, R.J. *Introduction Statistics for Business and Economics* . 5th Edition. Canada : Wiley & Sons, 1990.