UNIVERSITÉ DU BURUNDI
GRENIER DU SAVOIR DU BURUNDI
Dépôt institutionnel officiel
https://repository.ub.edu.bi

Etude du hamiltonien matriciel d’ordre deux dépendants du potentiel elliptique de Jacobi partiellement algébrique

Nihorimbere, Patrice; Sous la direction de : Pr Ancilla Nininahazwe

2025-06
UB, IPA & ENS
https://repository.ub.edu.bi/handle/123456789/2397

Document téléchargé depuis le **Grenier du Savoir du Burundi** — https://repository.ub.edu.bi

UNIVERSITE DU BURUNDI - ECOLE NORMALE SUPERIEURE

MASTER EN DIDACTIQUE DES SCIENCES (MASTER CONJOINT)

INSTITUT DE PEDAGOGIE APPLIQUEE

DEPARTEMENT DE PHYSIQUE - TECHNOLOGIE

DEPARTEMENT DES SCIENCES NATURELLES

SECTION DE PHYSIQUE - TECHNOLOGIE

ETUDE DU HAMILTONIEN MATRICIEL D'ORDRE DEUX DEPENDANTS DU POTENTIEL ELLIPTIQUE DE JACOBI PARTIELLEMENT ALGEBRIQUE

Par

Patrice NIHORIMBERE

Sous la direction de :

Pr Ancilla NININAHAZWE

Mémoire présenté et défendu publiquement en vue de l'obtention du Diplôme de Master en **Didactique des sciences**

Option : physique

Bujumbura, juillet 2025

LES MEMBRES DU JURY

Président : Pr. Déogratias NURWAHA

Directeur : Pr. Ancilla NININAHAZWE

Sécretaire : Msc Jean Pacifique MUNEZERO

DEDICACES

A mon regretté père,

A ma chère mère,

A mes frères et sœurs,

A mon épouse,

A mes enfants,

A mes oncles et tantes,

A mes cousins et cousines,

A tous ceux qui nous sont chers,

Je dédie ce mémoire.

Patrice NIHORIMBERE

REMERCIEMENTS

Au terme de ce travail, mes remerciements vont d'abord à l'endroit du tout puissant pour m'avoir guidé et assisté durant mon parcours d'études, sans oublier mes parents qui m'ont montré le chemin de l'école.

Ma reconnaissance s'adresse plus particulièrement à mon directeur de mémoire Pr Ancilla NININAHAZWE, enseignant à l'Université du BURUNDI, qui a accepté de diriger ce mémoire de Master.

Elle m'a fait découvrir le sens de la recherche en Physique. Ses précieux conseils, sa disponibilité permanente, surtout sa rigueur au travail et ses remarques m'ont été sans reproche dans la rédaction de ce mémoire.

Qu'elle trouve ici l'expression de mon entière reconnaissance.

De plus j'adresse mes sentiments de gratitude à l'ensemble des enseignants ayant contribué à ma formation durant mes études et à la direction de l'université du Burundi ainsi que la direction de l'Ecole Normale Supérieure pour l'organisation de ce master conjoint.

Je tiens également à remercier tous les membres du jury pour leur présence et pour leur lecture attentive de mon mémoire.

Enfin, que toute personne qui m'a aidé d'une manière ou d'un autre à la réussite de ce travail de mémoire accepte mes remerciements.

Patrice NIHORIMBERE

RESUME

L'étude des opérateurs hamiltoniens partiellement algébrique occupe une place centrale en mécanique quantique. L'objectif principal consiste à déterminer le spectre d'énergie d'un système quantique. Notre travail est axé sur la construction d'un opérateur hamiltonien partiellement algébrique et par après sur la détermination des conditions nécessaires et suffisantes pour que le hamiltonien matriciel d'ordre deux dépendant du potentiel elliptique de Jacobi construit soit partiellement algébrique.

Le premier chapitre fait objet des généralités et concepts de base sur les hamiltoniens partiellement algébriques.

Dans le second chapitre, à l'aide de la méthode analytique de résolubilité partielle, j'ai mis en évidence les trois conditions nécessaires et suffisantes pour que le hamiltonien matricielle d'ordre deux dépendant du potentiel elliptique de Jacobi pour le cas $\delta = 1$ soit partiellement algébrique.

Dans le troisième et dernier chapitre, par la même méthode utilisée dans le chapitre précédent, j'ai prouvé que le hamiltonien décrit ci-haut est partiellement algébrique cette fois-ci pour le cas $\delta = 2$.

Mots clés : Potentiel elliptique, hamiltonien matriciel, résolubilité partielle, méthode analytique de résolubilité partielle, fonctions elliptiques de Jacobi.

Abstract

The study of partially algebraic hamiltonian operators occupies a central place in quantum mechanics. The main objective is to determine the energiy spectrum of a quantum system.

Our work focuses on the construction of partially algebraic hamiltonian operator and subsequently on the determination of the necessary and sufficient conditions for the second-order matrix Hamiltonian dependent on the Jacobi elliptic potential to be partially algebraic.

The first chapter covers the generalities and basic concepts of partially algebraic Hamiltonians.

In the second chapter, using the analytical method of partial solvability, I highlighted the three necessary and sufficient conditions for the second-order matrix Hamiltonian dependent on the Jacobi elliptic potential to be partially algebraic for case $\delta = 1$.

In the third and final chapter, using the same method employed in the previous chapter, I proved that the Hamiltonian described above is partially algebraic, this time for case $\delta = 2$.

Key words : elliptic potential, matrix hamiltonian, partial solvability. QES analytic method, Jacobi elleptic functions.

TABLE DES MATIERES

LES MEMBRES DU JURY i

DEDICACES ii

REMERCIEMENTS iii

RESUME iv

Abstract v

TABLE DES MATIERES vi

LISTE DES FIGURES……..... x

QUELQUES SYMBOLES, SIGLES ET ABREVIATIONS xi

AVANT-PROPOS xii

0.INTRODUCTION GENERALE 1

0.1.Contexte et Problématique de la recherche. 2

0.1.1.Contexte de la recherche. 2

0.1.2. Problématique de la recherche. 3

0.2. Objectif de la recherche 4

0.2.1. Objectif général 4

0.2.2. Objectifs spécifiques. 4

0.3. Intérêt et importance du travail 4

0.3.1. Intérêt du travail 4

0.3.2. Importance du travail. 4

0.4. Méthodologie de recherche. 4

0.4.1. Revue théorique: 5

0.4.2. Modélisation du Hamiltonien : 5

0.4.3. Transformation analytique : 5

0.4.4. Identification des conditions algébriques: 5

CHAPITRE 1. GENERALITES ET CONCEPTS DE BASE SUR LES OPERATEURS PARTIELLEMENT ALGEBRIQUES…… 6

I.1. Introduction 6

I.2. Mécanique quantique 6

I. 2.1. Mécanique quantique relativiste 6

I.2.2. Mécanique quantique non relativiste 7

I.2.3. Passage de la mécanique classique à la mécanique quantique 7

I.2.4. Espace de Hilbert 8

1.3. Opérateur différencie matriciel d'ordre deux. 8

I.4. Les rappels sur les opérateurs auto-adjoints et leur spectre. 9

I.4.1.Hermiticité d'un operateur 9

I.4.1.1. Introduction 9

I.4.1.2 Définition 9

1.4.2. Quelques propriétés très importantes des opérateurs hermitiques 9

1.4.2.1. les valeurs propres des opérateurs hermitiques sont réels. 9

1.4.2.2. Deux vecteurs propres d'un opérateur hermitique correspondant à des valeurs propres distinctes, sont orthogonaux entre eux. 10

I.5.Les opérateurs différentiels liés aux algèbres de Lie. 11

I.5.1. Opérateur complètement algébrique 11

I.5.2. Opérateur partiellement algébrique 12

I.6. Les différentes méthodes de résolubilité partielle. 12

I.6.1. La méthode directe 12

I.6.2. La méthode algébrique de Lie 13

I.6.3. La méthode analytique de résolubilité partielle. 15

I.7. Exemple d'un opérateur complètement algébrique : opérateur de l'oscillateur harmonique. 16

I.7.1. Oscillateur 16

I.7.2. Oscillateur harmonique en mécanique classique 16

I.7.3 .Oscillateur harmonique quantique à une dimension 19

I.8. Caractéristiques des fonctions elliptiques 23

I.8.1.Les trois fonctions elliptiques fondamentales de Jacobi et leurs définitions 23

I.8.2. Les neuf autres fonctions elliptiques de Jacobi..... 25

I.8.3. Quelques relations fondamentales des fonctions elliptiques de Jacobi 26

I.8.4. Dérivées premières des fonctions elliptiques: sn, cn et dn 30

I.9. Représentation du formalisme hamiltonien dans la mécanique quantique. 31

I.9.1. Introduction..... 31

I.9.2. L'hamiltonien en mécanique quantique. 31

I.9.3. Représentations usuelles : position et impulsion. 32

I.9.3.1. Représentation en impulsion (configuration espace) :..... 33

I.9.3.2. Représentation en impulsion (momentum espace) : 33

I.9.4. Spectre de l' hamiltonien et quantification de l'énergie 33

I.9.5. Théorie des perturbations et hamiltoniens effectifs 33

I.9.6. Hamiltonien dans les représentations de Heisenberg et interaction..... 34

CHAPITRE II: ETUDE DU HAMILTONIEN MATRICIEL D'ORDRE DEUX ..... DEPENDANT DU POTENTIEL ELLIPTIQUE DE JACOBI PARTIELLEMENT ALGEBRIQUE : CAS $\delta = 1$……..... 35

II.1. Introduction 35

II.2. Différentes étapes de la méthode analytique de résolubilité partielle 35

II.2.1. Détermination de l'opérateur de jauge 35

II.2.2. Les trois composantes du hamiltonien de jauge. 40

II.2.3. Calcul des matrices $\boldsymbol{M_1}$, $\boldsymbol{M_0 et\ \widetilde{M}_1}$..... 41

II.3. Trois conditions de résolubilité partielle de l'opérateur de jauge 44

II.3.1.Première condition de résolubilité partielle de $\widetilde{\boldsymbol{H}}(t)$ 44

II.3.2.Deuxième condition de résolubilité partielle de $\widetilde{\boldsymbol{H}}(t)$ 45

II.3.3.Troisième condition de résolubilité partielle de $\widetilde{\boldsymbol{H}}(t)$..... 46

CHAPITRE III: ETUDE DU HAMILTONIEN ASSOCIE AUX POTENTIELS DEPENDANTS DES FONCTIONS ELLIPTIQUES DE JACOBI PARTIELLEMENT ALGEBRIQUE : cas de $\delta = 2$……..... 48

III.1. Calcul du hamiltonien de jauge 48

III.2. Transformation de jauge du premier terme du hamiltonien H($\boldsymbol{z}$) 49

III.3. Transformation de jauge du deuxième terme du hamiltonien H($\boldsymbol{z}$) 50

III.4. Transformation de jauge du troisième terme du hamiltonien H($\boldsymbol{z}$) 51

III.5. Calcul des matrices $\boldsymbol{M_1, M_0}$ ***et*** $\boldsymbol{\widetilde{M}_1}$ 53

III.6. Trois conditions de résolubilité partielle de l'opérateur de jauge 56

III.6.1.Première condition de résolubilité partielle de $\boldsymbol{\widetilde{H}}$*(t* 56

III.6.2.Deuxième condition de résolubilité partielle de $\widetilde{H}$(t)..... 57

III.6.3.Troisième condition de résolubilité partielle de $\boldsymbol{\widetilde{H}}$*(t)* 58

CONCUSION GENERALE 60

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES 61

ANNEXES 63

LISTE DES FIGURES

Fig 1 : Un pendule élastique horizontal…….17

QUELQUES SYMBOLES, SIGLES ET ABREVIATIONS

A : Un opérateur

A^+ : L'opérateur adjoint de A

cn : cosinus amplitudinis

dn : delta amplitudinis

E : Energie

H : Le hamiltonien

$\widetilde{H}$: Le hamiltonien qui a subi une transformation de jauge

$\hat{H}$: un opérateur hamiltonien solvable analytiquement

$J,^+ J,^- J^0$: Les générateurs de l′ algèbre de Lie $Sl(2,\mathbb{R})$

θ : Amplitude de l'angle.

λ : Valeur propre

$Sl(2,\mathbb{R})$: L′ algèbre de Lie

sn : sinus amplitudinis

T_0 : Période propre du mouvement.

$\mathcal{V}_n$: Espace vectoriel polyômial.

X_m : Amplitude du mouvement oscillatoire.

Ψ : La fonction d'onde.

φ : Phase à l' origine des temps.

ω_0 : La pulsation propre du mouvement.

AVANT-PROPOS

Ce mémoire rentre dans le cadre de l'obtention du diplôme de Master en Didactiques des sciences option Physique. Il concerne l'étude du hamiltonien matriciel d'ordre deux dépendant du potentiel elliptique de Jacobi.

Le sujet de cette recherche est choisi sur base des conceptions faites par d'autres chercheurs qui ont construit des opérateurs dits hamiltoniens matriciels d'ordre deux partiellement algébriques dépendant des fonctions elliptiques de Jacobi.

Le but de mon mémoire est de construire un nouveau type d'hamiltonien partiellement algébrique dépendant des fonctions elliptiques de Jacobi. La dite étude vise d'accroitre la classe d'opérateurs appelés operateurs partiellement algébriques.

0. INTRODUCTION GENERALE

En mécanique quantique non relativiste, le problème mathématique majeur est de déterminer les valeurs propres des opérateurs linéaires définis dans un domaine de l'espace de Hilbert. Malheureusement, le spectre complet ne peut être calculé algébriquement que dans très peu de cas particuliers appelés opérateurs complètement algébriques [1].Très récemment, une catégorie d'opérateurs dits operateurs partiellement algébriques a été découverte [1,2,3]: ce sont des opérateurs pour lesquels une partie du spectre peut être calculée algébriquement.

Mon travail de recherche fait objet d'une étude du hamiltonien matriciel d'ordre deux dépendant du potentiel elliptique de Jacobi construit sur base des fonctions elliptiques de Jacobi afin d'établir les trois conditions nécessaires et suffisantes pour que ce hamiltonien soit partiellement algébrique.

Ce travail s'articule sur trois chapitres.

Dans le premier chapitre, je mets en évidence les concepts de base sur les opérateurs complètement algébriques et sur des opérateurs partiellement algébriques. Là on donne leurs définitions et leurs propriétés. Par la suite, je précise les différentes méthodes de résolubilité partielle les plus couramment utilisées, à savoir la méthode directe, la méthode algébrique de Lie et la méthode analytique de résolubilité partielle. Pour terminer ce chapitre, je prouve la résolubilité complète du Hamiltonien de l'oscillateur harmonique quantique unidimensionnel et je donne les caractéristiques des fonctions elliptiques et l'importance des potentiels élliptiques dans la physique des solides, la théorie des champs et la cosmologie.

Dans le deuxième chapitre j'applique la méthode analytique de résolubilité partielle afin de prouver qu'un autre type d'opérateur matriciel d'ordre deux dépendant du potentiel elliptique de Jacobi est partiellement algébrique.

Pour y arriver je fais une transformation de jauge et un changement de variable approprié.

Dans ce chapitre, je considère le cas où δ=1, la constante dont dépend le vecteur générique de l'espace vectoriel[4,5] .

Dans le troisième et dernier chapitre, par le même raisonnement utilisé dans le chapitre précédent, je considère le cas où δ=2 et je détermine les trois conditions nécessaires et suffisantes pour que le même hamiltonien matriciel dépendant du potentiel elliptique de Jacobi soit partiellement algébrique.

0.1. Contexte et Problématique de la recherche.

0.1.1.Contexte de la recherche.

En mécanique quantique, la connaissance du spectre d'un hamiltonien c'est-à-dire les valeurs propres de l'opérateur agissant sur un espace de Hilbert est essentielle pour prédire le comportement physique d'un système[6]. Lorsque cet opérateur permet une détermination analytique complète de son spectre, on parle de système exactement soluble. Des exemples classiques incluent l'oscillateur harmonique ou l'atome d'hydrogène, analysés dans le cadre de la méthode de factorisation par Infeld et Hull (1951)[6].

Cependant, la plupart des systèmes quantiques présentent une complexité telle que leur spectre ne peut être résolu analytiquement. Pour surmonter cette limitation, la notion de resolubilité partielle a été introduite par Turbiner (1988) et Shifman (1989). Dans cette approche, l'objectif est de construire un hamiltonien qui préserve un sous-espace vectoriel de dimension finie, permettant ainsi le calcul d'une partie seulement du spectre par des méthodes algébriques. Ces opérateurs reposent souvent sur la représentation de l'algèbre de Lie [7].

A partir des années 1990, ce cadre a été étendu aux hamiltoniens différentiels matriciels d'ordre deux, qui interviennent dans la modélisation de systèmes couplés, particulièrement de particules à spin ½, et de modèles supersymétriques. Les travaux de González-López, Kamran et Olver (1993) ont ouvert la voie à une généralisation des opérateurs partiellement algébriques dans le cas matriciel, en développant une méthode permettant de traiter des opérateurs agissant sur des vecteurs de fonctions à plusieurs composantes[8].

Dans ce contexte, un intérêt particulier s'est porté sur les potentiels elliptiques, notamment ceux exprimés à l'aide des fonctions de Jacobi sn(x, k), cn(x, k), dn(x, k). Ces potentiels jouent un rôle important dans de nombreux domaines de la physique : dans la physique des solides, ils décrivent des réseaux périodiques d'électrons; en théorie des champs, ils interviennent dans certains modèles intégrables ; et en cosmologie, ils apparaissent dans les solutions analytiques de certains modèles d'univers anisotropes [8].

Les travaux de Finkel, González-López et Rodríguez (2000) ont permis de formaliser une méthode analytique qui, appliquée à un hamiltonien matriciel dépendant d'un potentiel elliptique, permet de déterminer les conditions algébriques nécessaires et suffisantes pour qu'il soit partiellement algébrique[8].

0.1.2. Problématique de la recherche.

La détermination exacte du spectre d'un opérateur différentiel constitue l'un des problèmes fondamentaux de la mécanique quantique non relativiste. Si certains systèmes, comme l'oscillateur harmonique ou l'atome d'hydrogène, peuvent être résolus algébriquement grâce à des méthodes algébriques classiques, la plupart des hamiltoniens présentent une complexité qui interdit une résolution complète [6].

Face à cette difficulté, une approche intermédiaire a été développée : celle des systèmes partiellement algebriques. Introduite par A.V. Turbiner (1988) et approfondie par M.A. Shifman (1989), cette méthode consiste à identifier des opérateurs pour lesquels une partie finie du spectre (et des fonctions propres correspondantes) peut être obtenue analytiquement. Ces opérateurs admettent une structure algébrique sous-jacente, souvent reliée à des représentations de l'algèbre ou à ses généralisations[7].

Ce cadre a été étendu avec succès aux hamiltoniens matriciels, c'est-à-dire des opérateurs différentiels à coefficients matriciels agissant sur des vecteurs de fonctions. Ces opérateurs apparaissent dans l'étude des systèmes quantiques couplés, des modèles supersymétriques et des systèmes à spin, comme l'ont montré González-López, Kamran et Olver (1993)[8]. Leur traitement exige une adaptation des méthodes de résolubilité partielle à des structures plus riches, souvent dépendantes d'une variable complexe ou elliptique[6,8].

Pour contribuer à la résolution d'un tel problème, nous devons nous poser la question suivante:

Quelles sont les conditions algébriques nécessaires et suffisantes pour qu'un hamiltonien différentiel matriciel d'ordre deux, dépendant d'un potentiel elliptique de Jacobi, admette une résolubilité partielle de son spectre, au sens de la théorie quasi-exacte ?

L'idée de ce travail de recherche est venue des idées des autres chercheurs qui ont construit des opérateurs dits hamiltoniens matriciels d'ordre deux partiellement algébriques dépendant des fonctions elliptiques de Jacobi et à la problématique telle que citée ci-haut, c'est là où est venu l'idée de notre sujet de recherche « ETUDE DU HAMILTONIEN MATRICIEL D'ORDE DEUX DEPENDANT DU POTENTIEL ELLIPTIQUE DE JACOBI PARTIELLEMENT ALGEBRIQUE » visant d'accroitre la classe d'opérateurs appelés operateurs partiellement algébriques.

0.2. Objectif de la recherche

0.2.1. Objectif général

Construire un opérateur matriciel d'ordre deux partiellement algébrique dépendant des fonctions elliptiques de Jacobi.

0.2.2. Objectifs spécifiques.

1. Dégager les notions de base et les propriétés des opérateurs partiellement algébriques.

2. Formuler explicitement le hamiltonien matriciel en terme des fonctions elliptiques de base de Jacobi tout en identifiant les paramètres caractéristiques du modèle.

3. Appliquer une méthode analytique de résolubilité partielle pour construire un hamiltonien matriciel d'ordre deux partiellement algébrique.

0.3. Intérêt et importance du travail

0.3.1. Intérêt du travail

L'étude des hamiltoniens matriciels partiellement algébriques s'inscrit au cœur de la recherche actuelle en physique mathématique. Ce sujet articule des enjeux fondamentaux (résolubilité spectrale, structures algébriques) avec des outils concrets, au croisement de l'analyse, de l'algèbre et de la physique théorique.

0.3.2. Importance du travail.

Ce sujet s'inscrit donc dans l'intersection de la physique théorique, de l'analyse fonctionnelle et de l'algèbre, et il contribue à la compréhension qualitative et quantitative des systèmes quantiques où la méthode purement numérique est insuffisante ou inadaptée

L'analyse des hamiltoniens matriciels partiellement algébriques constitue une avancée importante dans la compréhension des systèmes quantiques complexes, car elle permet de concilier les outils algébriques puissants avec des modèles physiques réalistes, souvent non intégrables dans leur totalité.

0.4. Méthodologie de recherche.

J'applique une méthode analytique de résolubilité partielle en identifiant un espace vectoriel de dimension finie invariant et pour prouver les trois conditions nécessaires et suffisantes pour que l'opérateur construit soit partiellement algébrique.

La démarche suivie comprend les étapes suivantes :

0.4.1. Revue théorique:

Un cadre conceptuel est d'abord établi à partir de la littérature existante sur les opérateurs partiellement algébriques, les algèbres de Lie, et les potentiels elliptiques. Cette étape permet de situer le travail dans le prolongement des contributions de Turbiner (1988), Shifman (1989) et González-López

et al. (1993, 2000) [7,8].

0.4.2. Modélisation du hamiltonien

Dans le cadre de cette recherche, je considère un hamiltonien matriciel différentiel d'ordre deux H. La façons dont l'hamiltonien H est construit représente un type de structure permettant de modéliser un système quantique couplé à deux composantes, comme une particule à spin ½ soumise à une interaction externe périodique ou elliptique.

L'étude porte alors sur les conditions algébriques que doivent satisfaire les coefficients de cette matrice pour que l'hamiltonien H préserve un espace vectoriel de fonctions à composantes polynomiales, ce qui définit la résolubilité partielle du spectre du hamiltonien H. Cette modélisation rend possible l'application de la méthode analytique de résolubilité partielle et l'étude du spectre dans des sous-espaces invariants.

0.4.3. Transformation analytique :

Une transformation de jauge et un changement de variable sont appliqués pour simplifier l'opérateur et l'exprimer dans une base de vecteurs de polynômes. Ces changements visent à étudier l'action du hamiltonien sur un espace vectoriel $\mathcal{V}_n$.

0.4.4. Identification des conditions algébriques:

On impose que l'image de $\mathcal{V}_n$ par l'opérateur soit contenue dans $\mathcal{V}_n$. Cette condition mène à un système d'équations algébriques entre les coefficients du hamiltonien, que l'on résout pour obtenir les conditions de résolubilité partielle.

CHAPITRE 1. GENERALITES ET CONCEPTS DE BASE SUR LES OPERATEURS PARTIELLEMENT ALGEBRIQUES.

I.1. Introduction

Dans ce chapitre je traite des généralités et concepts de base sur les opérateurs partiellement algébriques et je décris les différentes méthodes utilisées pour prouver la résolubilté partielle et la résolubilité complète d'un opérateur donné. Par la suite, avant de développer certaines notions sur les fonctions elliptiques, je prouve la résolubilité complète du hamiltonien de l'oscillateur harmonique quantique. En fin, pour terminer je précise l'importance des potentiels élliptiques dans la physique des solides, la théorie des champs et la cosmologie.

I.2. Mécanique quantique

La mécanique quantique est une branche de la physique qui a pour objet d'étudier et de décrire les phénomènes fondamentaux à l'œuvre dans les systèmes physiques, plus particulièrement à l'échelle atomique et subatomique[9]. Elle fut développée au début du 20ème siècle par une dizaine de physiciens américains et européens afin de résoudre différents problèmes, que la physique classique échouait à expliquer comme le rayonnement du corps noir, l'effet photo-électrique, ou l'existence des raies spectrales.

Au cours de ce développement, la mécanique quantique se révéla être féconde en résultats et en applications diverses. Elle permit notamment d'élucider le mystère de la structure d'atome, et plus globalement elle s'avéra être le cadre général de la description du comportement des particules élémentaires, jusqu'à constituer le socle de la physique[9].

La mécanique quantique comporte de profondes difficultés conceptuelles et son interprétation physique ne fait pas l'unanimité dans la communauté scientifique.

Parmi ces concepts, on peut citer la dualité d'onde -corpuscule, la superposition quantique, l'intrication quantique ou encore la non-localité[9].

I. 2.1. Mécanique quantique relativiste

En physique théorique, la mécanique quantique relativiste est une théorie qui tente de marier les postulats de la mécanique quantique non relativiste et le principe de la relativité restreinte afin de décrire la dynamique d'une particule relativiste dont la vitesse classique n'est pas très petite devant la vitesse de la lumière dans le vide[10,11].

En physique relativiste, on suppose que les lois de la physique sont les même dans le référentiel différent, qui sont en mouvement relatif uniforme (vitesse relatives constantes). Alors, les quantités conservées (comme énergie, etc.) doivent, en toute généralité, être soit des quadri-vecteurs, soit plus généralement des quadri-tenseurs ; tout simplement pour qu'on puisse faire des produits scalaires de ces quantités et obtenir des invariants. L'amplitude de diffusion de particules, par exemple, s'exprime en fonction des invariants, faits avec les impulsions des particules qui entrent dans la collision, une autre façon de dire est que les lois de la physique, des interactions sont les même dans tous les référentiels. Les invariants sont des valeurs indépendantes des changements des référentiels[11].

I.2.2. Mécanique quantique non relativiste

La mécanique quantique non relativiste dépend du temps et l'action est proportionnelle à la constante réduite de Planck[12].

En physique non relativiste, l'impulsion d'un objet matériel ponctuel est définie comme :

$$\vec{p} = m_0\overrightarrow{v} = m_0\frac{d\vec{x}}{dt} \tag{1.1}$$

où : m_0 est la masse de cet objet,

$\overrightarrow{v}$ est la vitesse de cet objet matériel.

$\overrightarrow{x}$ est le vecteur déplacement

En absence d'une force appliquée, l'impulsion est conservée, c'est un vecteur constant, indépendant du temps. Si on a un ensemble d'objets ponctuels, des particules par exemple, ou d'objets matériels tout simplement, en interaction entre eux, alors leur impulsion totale sera conservée au cours du temps. En plus, dans la limite non relativiste, $\frac{v}{c} \ll 1$ [9].

I.2.3. Passage de la mécanique classique à la mécanique quantique

La mécanique quantique est née au 19ème siècle. Cette partie de la physique joue un rôle fondamental pour la description et la compréhension des phénomènes naturels. En effet, dès que ces derniers se produisent à une échelle très fine (échelle atomique ou microscopique), ils ne sont explicables que dans le cadre de la mécanique quantique. Par exemple, l'existence et les propriétés des atomes, la liaison chimique, la propagation d'un électron dans un cristal, etc. : ne peuvent pas être comprises à partir de la mécanique classique.[9]

Même si l'on ne s'intéresse qu'aux objets physiques macroscopiques (c'est-à-dire de dimensions comparables à celles que l'on considère dans la vie courante), il faut en principe commencer par étudier le comportement des divers atomes, ions, électrons qui les constituent avant de pouvoir en donner une description scientifique complète[12].

C'est en ce sens que l'on peut dire que la mécanique quantique est la base de notre compréhension actuelle de tous les phénomènes naturels, y compris ceux qui relèvent traditionnellement de la chimie, de la biologie, etc.

Il est cependant important de remarquer que la mécanique classique reste valable pour la plupart des phénomènes à l'échelle courante ; par exemple la mécanique newtonienne permet de prédire correctement le mouvement d'un corps solide, à condition qu'il soit non relativiste (vitesse faible devant celle de la lumière) et macroscopique (dimensions grandes devant celles des atomes).

I.2.4. Espace de Hilbert

Un espace de Hilbert est un espace vectoriel complexe (ou réel) muni d'un produit scalaire qui est complet pour la norme induite par ce produit scalaire[13,14].

Formellement, soit $\mathscr{H}$ un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ (ou $\mathbb{R}$), muni d'un produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$. $\mathscr{H}$ est un espace de Hilbert si[14] :

1. $\langle x, x\rangle \geq 0$ et $\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (positivité)

2. $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle^*$ (conjugué hermitien)

3. $\langle ax + by, z\rangle = a\langle x, z\rangle + b\langle y, z\rangle$ (linéarité à gauche)

4. Toute suite de Cauchy pour la norme $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ converge dans $\mathscr{H}$ (complétude)

L'espace de Hilbert est l'outil central de la mécanique quantique : il permet de représenter les états quantiques comme des vecteurs, et les observables comme des opérateurs auto-adjoints sur cet espace.

1.3. Opérateur différenciel matriciel d'ordre deux.

Un opérateur différentiel d'ordre deux est un opérateur agissant sur un vecteur de fonction (ou un espace vectoriel de fonctions), représenté sous forme d'une matrice dont les éléments sont des opérateurs différentiels de degré ≤ 2. Généralement un opérateur est un objet mathématique

qui, à tout vecteur $|X>$ d'un espace vectoriel, fait correspondre un autre vecteur de ce même espace vectoriel[13].

I.4. Les rappels sur les opérateurs auto-adjoints et leur spectre.

I.4.1.Hermiticité d'un operateur

I.4.1.1. Introduction

L'hermiticité a été introduite dans les premiers stades dans la mécanique quantique comme une contrainte mathématique pour obtenir un spectre réel d'un opérateur.

Les opérateurs hermétiques jouent un rôle important en mécanique quantique, car ils représentent les grandeurs physiques.

I.4.1.2 Définition

Un opérateur A est dit hermitique s'il est égal à son adjoint ;

On dit également qu'il est auto adjoint. Les opérateurs hermitiques sont donc tels que [12] :

$$A^{+} = A \tag{1.3}$$

Autrement dit, l'operateur A vérifie la relation suivante [16] :

$$\langle Ax\,|\Psi\rangle = \langle\, x\,|A\Psi\rangle \tag{1.4}$$

Avec Ψ qui est une fonction d'onde.

1.4.2. Quelques propriétés très importantes des opérateurs hermitiques

1.4.2.1. Les valeurs propres des opérateurs hermétiques sont réels.

Considérons un opérateur hermitique A et Ψ un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ. L'équation aux valeurs propres des opérateurs A s écrit [15] :

$$A\Psi = \lambda\Psi \tag{1.5}$$

Pour une même fonction Ψ, l'équation (1.4;) devient :

$\langle\Psi/\, A\Psi\rangle = \langle A\Psi/\Psi\rangle$.

$$\int\, \Psi^{*} A\Psi dx \;=\; \int (A\Psi)^{*}\, \Psi dx \tag{1.6}$$

En tenant compte de la relation (1.5), la relation (1.6) s écrit

$\int \lambda\ \Psi^*\Psi dx\ = \int \lambda^*\ \Psi^*\Psi dx$,

$\lambda\int\ \Psi^*\ \Psi dx\ =\ \lambda^*\int\ \Psi^*\Psi dx$,

$\lambda\int |\Psi|^2 dx = \lambda^*\int |\Psi|^2 dx,$

$$(\lambda - \lambda^*)\int |\Psi|^2 dx = 0 \qquad (1.7)$$

Pour que la relation (1.7) soit vérifiée, soit $\lambda = \lambda^*$, soit $\Psi = 0$, notons que $|\Psi|^2$ est toujours positif, d'où $\lambda = \lambda^*$. Donc la valeur propre λ associée à l'opérateur hermitique A est réelle.

1.4.2.2. Deux vecteurs propres d'un opérateur hermitique correspondant à des valeurs propres distinctes, sont orthogonaux entre eux.

Considérons deux vecteurs propres Ψ et ϕ d'un opérateur, correspondant respectivement aux valeurs propres λ et μ. En utilisant l'une des propriétés du produit scalaire, on a [15] :

$$\langle \Psi, A\Psi \rangle = \langle A\Psi, \Psi \rangle^*, \qquad (1.8)$$

Sachant que $A\phi = \mu\phi$, on a :

$$\langle \Psi, A\phi \rangle = \langle \Psi, \mu\phi \rangle$$

$$= \mu\langle \Psi, \phi \rangle \qquad (1.9)$$

En se référant à la relation (1.8), on obtient :

$$\langle \Psi, A\phi \rangle^* = \mu^*\langle \Psi, \phi \rangle^*$$

$$= \mu^*\langle \phi, \Psi \rangle \qquad (1.10)$$

Ecrivons d'autre part, le produit scalaire suivant :

$$\langle \phi, A\Psi \rangle = \langle \phi, \lambda\Psi \rangle$$

$$= \lambda\langle \phi, \Psi \rangle \qquad (1.11)$$

Comparant entre elles les relations (1.8) et (1.9), on obtient :

$$(\mu^* - \lambda)\langle \phi, \Psi \rangle = 0 \qquad (1.12)$$

Puisque A est hermitique, la valeur propre μ est réelle (c'est –à-dire $\mu^* = \mu$) ; de plus λ et μ sont par hypothèse des valeurs propres distinctes. En conséquence $(\mu - \lambda)$ est différent de

zéro.D'où la relation (1.12) montre que $\langle\phi,\Psi\rangle= 0$, autrement dit les vecteurs propres ϕ et Ψ sont orthogonaux entre eux.

La réciproque des deux propriétés ci-dessus est également vérifiée : Si un opérateur a toutes ses valeurs propres réelles, et si tous les vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes, pris deux à deux, sont orthogonaux entre eux, alors l'opérateur est hermitique.

I.5.Les opérateurs différentiels liés aux algèbres de Lie.

Les opérateurs différentiels liés aux algèbres de Lie jouent un rôle fondamental en mathématiques et en physique théorique, notamment dans les domaines de la mécanique quantique, de la théorie des représentations et de l'analyse harmonique. Ils permettent de relier les structures algébriques abstraites aux transformations différentielles concrètes sur des variétés ou des espaces fonctionnels[17].

Par définition et cadre général une algèbre de Lie est une structure algébrique définie sur un espace vectoriel, munie d'un crochet bilinéaire antisymétrique satisfaisant l'identité de Jacobi. Les opérateurs différentiels associés sont des dérivations qui traduisent les éléments de l'algèbre de Lie en opérateurs agissant sur des fonctions ou des sections de fibrés. Ces opérateurs capturent les symétries infinitésimales des systèmes étudiés[17].

I.5.1. Opérateur complètement algébrique

Considérons un opérateur H de la forme[1,2,3,4,5] :

$$H = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + V(x) \tag{1.13}$$

où $V(x)$ est un potentiel.

L'operateur H est dit complètement algébrique s'il vérifie la relation :

$$H\mathcal{V}_n \subset \mathcal{V}_n \tag{1.14}$$

avec $n = 0,1,2, \dots n$ et n est arbitraire.

$$\mathcal{V}_0 \subset \mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}_2 \dots \subset \mathcal{V}_n,\ \mathcal{V}_n = \{1, x, x^2, \dots x^n\} \tag{1.14*}$$

Autrement dit l'action de l'opérateur H sur tous les éléments de l'espace vectoriel $\mathcal{V}_n$ de l'espace de Hilbert donne un élément de $\mathcal{V}_n$ pour tout.

Notons que toutes les valeurs propres associées à l'opérateur H peuvent être calculées algébriquement.

I.5.2. Opérateur partiellement algébrique

Un opérateur $H = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + V(x)$ est dit partiellement algébrique s'il vérifie la relation :

$$H\mathcal{V}_n \subset \mathcal{V}_n. \tag{1.15}$$

Avec n fixé.

En d'autres termes, H laisse invariant l'espace vectoriel $\mathcal{V}_n$ pour une valeur fixée de n.

I.6. Les différentes méthodes de résolubilité partielle.

I.6.1. La méthode directe

Nous allons considérer le hamiltonien de l'oscillateur anharmonique sextique de la forme [1,3]:

$$H(x) = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + a^2x^6 + 2abx^4 + [b^2 - (4n+3)a]x^2. \tag{1.16}$$

Le hamiltonien $H(x)$ est hermitique parce que ses différents termes vérifient la condition d'hermiticité[1] . Grâce à cette propriété, ses valeurs propres sont réelles.

On peut prouver la résolubilité partielle du hamiltonien (1.16) en opérant la transformation de jauge comme suit [1,3] :

$$\widetilde{H}(x) = e^{\frac{ax^4}{4}+\frac{bx^2}{2}} H(x) e^{-\frac{ax^4}{4}-\frac{bx^2}{2}}$$

Apres quelques simplications algébriques, on obtient :

$$\widetilde{H}(x) = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + 2ax^3\frac{d}{dx} + 2bx\frac{d}{dx} - 4nax^2 + b. \tag{1.17}$$

Pour que $\widetilde{H}(x)$ ait un espace vectoriel invariant sous son action, le changement de variable $y = x^2$ s'impose et on obtient [1,3]:

$$\widetilde{H}(y) = -4y\frac{d^2}{dy^2} + (4ay^2 + 4by - 2)\frac{d}{dy} - (4nay - b). \tag{1.18}$$

Soit $\mathcal{V}_n = \{1, y, y^2, \ldots, y^n\}$; espace vectoriel polynômial (1.19)

L'action de $\tilde{H}(y)$ sur un élément y^n générique de $\mathcal{V}_n$, espace vectoriel polynômial (1.19), nous donne:

$$\tilde{H}y^n = (-4y\,\frac{d^2}{dy^2} + (4ay^2 + 4by - 2)\frac{d}{dy} - (4nay - b))\,y^n$$

$$= -4y\,\frac{d^2}{dy^2}y^n + (4ay^2 + 4by - 2)\frac{d}{dy}y^n - (4nay - b)y^n$$

$$\tilde{H}y^n = -4yn(n-1)y^{n-2} + n(4ay^{n+1} + 4by^n - 2y^{n-1}) - 4nay^{n+1} + by^n \qquad (1.20)$$

Pour $n = 0$, (1.20) devient:

$$\tilde{H}y^0 = -4y0(0-1)y^{0-2} + 0(4ay^{0+1} + 4by^0 - 2y^{0-1}) - 4.0.\,ay + by^0$$

$$= b \qquad (1.21)$$

$\tilde{H}\mathcal{V}_0 \subset \mathcal{V}_0$, car le degré de $\tilde{H}\mathcal{V}_0$ est le même que celui de $\mathcal{V}_0$

Pour $n = 1$, (1.20) devient:

$$\tilde{H}y^1 = -4y1(1-1)y^{1-2} + 1(4ay^{1+1} + 4by^{1-1} - 2y^{1-1}) - 4.1.\,ay^{1+1} + by^1$$

$$= 4ay^2 + 4by^0 - 2y^0 - 4ay^2 + by$$

$$= by\text{+4b-2} \qquad (1.22)$$

$\tilde{H}\mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}_1$, car le degré de $\tilde{H}\mathcal{V}_1$ est le même que celui de $\mathcal{V}_1$

Pour n fixe l'expression (1.20) reste toujours valable pour vérifier la relation :

$$\tilde{H}\mathcal{V}_n \subset \mathcal{V}_n. \qquad (1.23)$$

Donc, le hamiltonien $\tilde{H}$ laisse invariant l'espace vectoriel $\mathcal{V}_n$ puisqu'il vérifie la relation $\tilde{H}\mathcal{V}_n \subset \mathcal{V}_n$ avec n fixé. De ce fait, nous concluons donc que le hamiltonien $\tilde{H}(y)$ est partiellement algébrique. Autrement dit,une partie de ses valeurs propres peut etre calculée algébriquement[3].

I.6.2. La méthode algébrique de Lie

Compte tenu du rôle de l'algèbre de Lie dans la construction des opérateurs algébriques, les algèbres de Lie jouent un rôle fondamental dans la construction et l'analyse des opérateurs algébriques en physique théorique et mathématique. Elles fournissent le cadre formel pour

décrire les symétries continues des systèmes physiques, et permettent d'engendrer des hamiltoniens ou des opérateurs de transition via leurs représentations et plus concrètement ceux des générateurs d'opérateurs différentiels[20],des opérateurs algébriques dans les systèmes intégrables [18], représentations et construction matricielle[19] et application en mécanique quantique et théorie quantique des champs.

Pour concrétiser cette méthode, on considère encore une fois le hamiltonien de l'oscillateur anharmonique quantique de degré 6 qui a subi la transformation de jauge et le changement de variable de la relation (1.18) :

$$\widetilde{H}(y) = -4y\,\frac{d^2}{dy^2} + (4ay^2 + 4by - 2)\frac{d}{dy} - (4nay - b). \tag{1.24}$$

Cet opérateur peut s'exprimer en termes des générateurs de l'algèbre de Lie $sl(2,\mathbb{R})$[1,3]:

$$J^+ = y^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} - ny,$$

$$J^0 = y\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} - \frac{n}{2},$$

$$J^- = \frac{\mathrm{d}}{3\mathrm{d}y}\,. \tag{1.25}$$

où n est un nombre naturel et y est une variable réelle. Ces générateurs vérifient les crochets de Lie suivants [1,3]:

$$[J^+, J^-] = -2J^0$$

$$[J^+, J^0] = -J^+$$

$$[J^-, J^0] = J^-. \tag{1.26}$$

Développons maintenant $\widetilde{H}(y)$ de la relations (1.24),on a :

$$\widetilde{H}(y) = -4y\,\frac{d^2}{dy^2} + (4ay^2 + 4by - 2)\frac{d}{dy} - (4nay - b).$$

$$= -4y\,\frac{d^2}{dy^2} + 4ay^2\frac{d}{dy} + 4by\frac{d}{dy} - 2\frac{d}{dy} - 4nay + b. \tag{1.27}$$

Exprimons maintenant tous les termes en y de l'équation (1.27) en fonction des générateurs (1.25),on a :

$$\widetilde{H}(y) = -4J^0J^- + 4aJ^+ + 4bJ^0 - 2(n+1)J^- + (2n+1)b. \quad (1.28)$$

Ce hamiltonien est une combinaison des générateurs de la relation (1.25) qui préservent l'espace vectoriel $\mathcal{V}_n$. D'où le hamiltonien $\widetilde{H}$ de (1.28) préserve le même espace vectoriel $\mathcal{V}_n$. $\widetilde{H}$ est partiellement algébrique.

I.6.3. La méthode analytique de résolubilité partielle.

Cette méthode analytique de résolubilité partielle permet de vérifier si un opérateur différentiel matriciel d'ordre deux H (en une variable x) préserve un espace vectoriel dont les composantes sont des polynômes[3].

Considérons un hamiltonien H qui après transformation de jauge et un changement de variable appliqués à l'opérateur H, on obtient un nouvel opérateur de jauge $\widetilde{H}$ qui peut être décomposé comme suit [1] :

$$\widetilde{H} = \widetilde{H}_1 + \widetilde{H}_0 + \widetilde{H}_{-1} \quad (1.29)$$

$$\text{avec } \widetilde{H}_S = \begin{pmatrix} A_s & C_s x^{s-1+\delta} \\ D_s x^{\delta'-1+\delta} & B_s \end{pmatrix}, s = 1,0,-1 \quad (1.30)$$

A_s,B_s désignent des opérateurs différentiels homogènes,

C_s, D_s, sont des constantes arbitraires et δ', δ sont des entiers.

Plus précisément, les composantes diagonales de $\widetilde{H}_1$ sont des opérateurs différentiels et les composantes hors-diagonales $(\widetilde{H}_1)_{12}$ et $(\widetilde{H}_1)_{21}$ sont respectivement proportionnels à x^δ et $x^{\delta'}$, avec $\delta = 0, 1,2$ et $\delta' = 2 - \delta$.

Les opérateurs $\widetilde{H}_0$ et $\widetilde{H}_{-1}$ ont dans toutes ses composantes, des degrés inferieurs à ces ceux des composantes correspondantes de $\widetilde{H}_1$.

Afin d'obtenir les conditions de résolubilité partielle pour $\widetilde{H}$, le vecteur générique de l'espace vectoriel V est [1,3] :

$$\Psi = \begin{pmatrix} \alpha_0 x^n + \alpha_1 x^{n-1} \\ \beta_0 x^{n-\delta+1} + \beta_1 x^{n-\delta} \end{pmatrix} \quad (1.31)$$

Où α_i, β_i $(i = 0,1)$ sont des constantes complexes.

L' action de l'opérateur $\widetilde{H}$ sur le vecteur générique Ψ devient :

$$\widetilde{H}\Psi = \text{diag}\left(x^{n+1}, x^{n1-\delta+2}\right)M_1\begin{pmatrix}\alpha_0\\ \beta_0\end{pmatrix} + \text{diag}\left(x^{n}, x^{n-\delta+1}\right)\left(M_0\begin{pmatrix}\alpha_0\\ \beta_0\end{pmatrix} + \widetilde{M}_1\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \beta_1\end{pmatrix}\right) \qquad (1.32)$$

où les matrices d'ordre deux M_1, M_0 ,$\widetilde{M}_1$ sont définies comme suit [3]:

$$\widetilde{H}_1\begin{pmatrix}\alpha_0 x^{n}\\ \beta_0 x^{n-\delta+1}\end{pmatrix} = \text{diag}\left(x^{n+1}, x^{n-\delta+2}\right)M_1\begin{pmatrix}\alpha_0\\ \beta_0\end{pmatrix}$$

$$\widetilde{H}_1\begin{pmatrix}\alpha_1 x^{n-1}\\ \beta_1 x^{n-\delta}\end{pmatrix} = \text{diag}\left(x^{n}, x^{n-\delta+1}\right)\widetilde{M}_1\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \beta_1\end{pmatrix} \qquad (1.33)$$

$$\widetilde{H}_0\begin{pmatrix}\alpha_0 x^{n}\\ \beta_0 x^{n-\delta+1}\end{pmatrix} = \text{diag}\left(x^{n}, x^{n-\delta+1}\right)M_0\begin{pmatrix}\alpha_0\\ \beta_0\end{pmatrix}$$

Les trois conditions nécessaires et suffisantes pour que le hamiltonien $\widetilde{H}$ préserve l'espace vectoriel V_n sont [1,3]:

1. det $M_1 = 0$

2. det $\widetilde{M}_1 = 0$ (1.34)

3. $M_0\begin{pmatrix}1\\ \frac{\beta_0}{\alpha_0}\end{pmatrix} = \Lambda\begin{pmatrix}1\\ \frac{\beta_0}{\alpha_0}\end{pmatrix}$ où $\boldsymbol{\Lambda}$ est une constante réelle

I.7. Exemple d'un opérateur complètement algébrique : opérateur de l'oscillateur harmonique.

I.7.1. Oscillateur

D'une façon générale, on définit un oscillateur comme étant tout objet décrivant un mouvement de va et vient de part et d'autre de sa position d'équilibre[20].

Exemple : Le système formé par un enfant sur une balançoire.

Ce système peut effectuer des oscillations de va et vient de part d'autre de sa position d'équilibre.

I.7.2. Oscillateur harmonique en mécanique classique

Un oscillateur harmonique est un système dont l'équation horaire du mouvement est une fonction sinusoïdale du temps[20].

Exemple : Un pendule élastique horizontale non amorti est un oscillateur harmonique de translation. En effet, considérons un pendule élastique horizontal c'est-à-dire un système constitué d'un solide accroché à l'extrémité d'un ressort de constante de raideur K et de masse négligeable, à spires non jointives, de sorte qu'il peut aussi être bien étiré que comprimé et pouvant se déplacer sans frottement sur un plan horizontal.

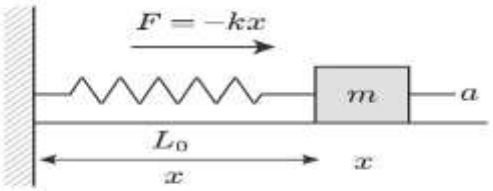


Fig 1

Fig 1 : un pendule élastique horizontal

Soit N la position occupée par le centre de gravité du solide lorsque le ressort est à vide, donc à l'équilibre et O la position occupée par le centre de gravité lorsque le ressort est étiré ou comprimé.

Lorsque le ressort est étiré ou comprimé, il exerce une force de rappel, appelée tension qui dans les deux cas, peut s'écrire vectoriellement[20]:

$$\vec{T} = -K\,\overrightarrow{NO} \tag{1.35}$$

Où K est une constante positive

Les forces extérieures appliquées au système sont :

-Le poids $\vec{P}$ vertical,

-La réaction $\vec{R}$ (vertical dirigée à la l'opposé de $\vec{P}$) du plan horizontal (elle est perpendiculaire à ce plan car il n'y a pas de frottement) ;

-La tension $\vec{T}$ du ressort.

Considérons le cas où le centre de gravité du solide occupe la position O, c'est-à-dire le ressort est soit étiré, soit comprimé.

Le théorème du centre d'inertie nous donne [20] :

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{T} = m\vec{a} \tag{1.36}$$

m étant la masse du système et $\vec{a}$ l'accélération,

Tenant compte de la relation (1.35) , la relation (1.36)devient :

$$\vec{P} + \vec{R} - K\,\overrightarrow{NO} = m\vec{a} \tag{1.37}$$

En projetant (1.36) sur l'axe horizontal (xx') du plan, on obtient :

$$-K\,ON = ma_x \tag{1.38}$$

En posant ON = x, (1.38) devient

$$-K\,x = ma_x \tag{1.39}$$

Avec $a_x = \frac{d^2x}{dt^2}$

L'équation (1.39) devient :

$$-K\,x = m\frac{d^2x}{dt^2}, \tag{1.40}$$

$$\frac{-K\,x}{m} = \frac{d^2x}{dt^2},$$

$$\Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{K}{m}x = 0, \tag{1.41}$$

Posons $\omega_0^2 = \frac{K}{m}$

$$\Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0\,, \tag{1.42}$$

C'est l'équation différentielle du mouvement.

La solution $x(t)$ de cette équation est une fonction sinusoïdale du temps de la forme [20]:

$$x(t) = X_m sin(\omega_0 t + \varphi) \tag{1.43}$$

$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$ la pulsation propre,

Sa période propre est :

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \tag{1.44}$$

X_m est l'amplitude du mouvement oscillatoire.

φ est la phase à l' origine des temps.

Nous signalons que lorsque le pendule est en mouvement, il possède de l'énergie mécanique [20] :

$$E = E_c + E_{pe} \tag{1.45}$$

E_c étant l'énergie cinétique que possède le pendule à cause de la vitesse,

E_{pe} est l'énergie potentielle élastique que possède le ressort une fois comprimé ou étiré.

Le pendule étant horizontal si nous considérons comme étant de référence le plan horizontal c'est-à-dire le plan sur lequel glisse le solide, l'énergie potentielle de la pesanteur est nulle Finalement l'énergie mécanique de cet oscillateur harmonique est donnée par [20] :

$E = E_c + E_{pe}$

où

$$E_c = \frac{1}{2}mV^2 , \tag{1.46}$$

$$E_{pe} = \frac{1}{2}Kx^2 \tag{1.47}$$

D'où :

$$E = \frac{1}{2}mV^2 + \frac{1}{2}Kx^2 \tag{1.48}$$

I.7.3 .Oscillateur harmonique quantique à une dimension

L'oscillateur harmonique quantique à une dimension est un système qui est décrit par le Hamiltonien de la forme [2] :

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2x^2 \tag{1.49}$$

Où ħ est la constante de Planck réduite dont l'expression:

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} \tag{1.50}$$

avec h la constante de Planck

m est la masse de l'oscillateur harmonique, ω est la fréquence angulaire.

En tenant compte des unités naturelles $m = 1$ et $\hbar = 1$:

Le hamiltonien de la relation (1.49) s'écrit [15] :

$$H = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}\omega^2 x^2 \tag{1.51}$$

Montrons que ce hamiltonien est complètement algébrique.

Soit $V_n = \{x^0, x^1, x^2, \dots, x^n\}$ l'espace vectoriel des Polynômes et x^n est l'élément générique quelconque de V_n .

Montrons que le hamiltonien de la relation (1.51) ne préserve aucun élément de de V_n.

L'action du hamiltonien H sur le vecteur générique x^n de V_n est :

$$Hx^n = \left(-\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}\omega^2 x^2\right) x^n$$

$$= -\frac{1}{2} n \frac{d}{dx}(x^{n-1}) + \frac{1}{2}\omega^2 x^{n+2}$$

$$Hx^n = -\frac{1}{2} n(n-1) x^{n-2} + \frac{1}{2}\omega^2 x^{n+2} \tag{1.52}$$

Pour $n = 0$, l' expression (1.51) devient :

$$Hx^1 = -\frac{1}{2} 0(0-1) x^{0-2} + \frac{1}{2}\omega^2 x^{0+2}$$

$$= \frac{1}{2}\omega^2 x^2 \tag{1.53}$$

Pour $n = 1$, l' expression (1.52) devient :

$$Hx^1 = -\frac{1}{2} 1(1-1) x^{1-2} + \frac{1}{2}\omega^2 x^{1+2}$$

$$= \frac{1}{2}\omega^2 x^3 \tag{1.54}$$

Pour $n = 2$, l' expression (1.52) devient :

$$Hx^2 = -\frac{1}{2}2(2-1)x^{2-2} + \frac{1}{2}\omega^2 x^{2+2}$$

$$= -1 + \frac{1}{2}\omega^2 x^4 \qquad (1.55)$$

Pour $n = 3$, l' expression (1.52) devient :

$$Hx^3 = -\frac{1}{2}3(3-1)x^{3-2} + \frac{1}{2}\omega^2 x^{3+2}$$

$$= -3x + \frac{1}{2}\omega^2 x^5 \qquad (1.56)$$

On peut continuer cette même opération jusqu'au dernier élément générique de l'espace vectoriel V_n. Des relations (1.53) à (1.56) ,on remarque que le deuxième terme du Hamiltonien de la relation (1.51) est gênant .En effet , l'action de ce deuxième élément de H sur l' élément générique x^n de l' éspace vectoriel V_n augmente le degré x^n de 2.Normalement , le degré de x^n devrait être inférieur ou égal à n pour que l' espace vectoriel V_n soit préserevé par le Hamiltonien H.

Autrement dit , H ne laisse pas invariant l' espace vectoriel V_n car il ne vérifie pas la relation :

$H\mathrm{V}_n \subset \mathrm{V}_n$.

Donc,H n'est pas complètement algébrique.

Pour que H soit complètement algébrique une transformation de jauge avec la fonction

$\Psi_0 = e^{-\frac{\omega x^2}{2}}$ s' impose [7]:

$$\Psi_0{}^{-1} H \Psi_0 = e^{\frac{\omega x^2}{2}} \left(-\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}\omega^2 x^2\right) e^{-\frac{\omega x^2}{2}} \qquad (1.57)$$

Cela donne :

$$\widetilde{H} = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + \omega x \frac{d}{dx} + \frac{\omega}{2} \qquad (1.58)$$

$\widetilde{H}$ est complètement algébrique ssi $\widetilde{H}\mathrm{V}_n \subset \mathrm{V}_n$, autrement dit $\widetilde{H}$ est complètement algébrique ssi le degré de $\widetilde{H}\mathrm{V}_n$ est inférieur ou égal à celui de x^n[1,3]:

$$\widetilde{H}\mathrm{V}_n = (-\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + \omega x \frac{d}{dx} + \frac{\omega}{2})x^n$$

$$\widetilde{H}\mathrm{V}_n = -\frac{1}{2}n(n-1)x^{n-2} + \omega n x^n + \frac{\omega}{2}x^n \tag{1.59}$$

Pour n=0, l'expression (1.59) devient :

$$\widetilde{H}x^0 = -\frac{1}{2}0(0-1)x^{0-2} + \omega 0 x^0 + \frac{\omega}{2}x^0$$

$$= \frac{\omega}{2} \tag{1.60}$$

Donc $\widetilde{H}\mathrm{V}_0 \subset \mathrm{V}_0$ car le degré de $\widetilde{H}\mathrm{V}_0$ est le même que celui de V_0

Pour $n = 1$, l'expression (1.60) devient :

$$\widetilde{H}x = -\frac{1}{2}1(1-1)x^{1-2} + \omega.1.x + \frac{\omega}{2}x$$

$$= \omega x + \frac{\omega}{2}x$$

$$= (\omega + \frac{\omega}{2})x \tag{1.61}$$

Donc $\widetilde{H}\mathrm{V}_1 \subset \mathrm{V}_1$ car le degré de $\widetilde{H}\mathrm{V}_1$ est le même que celui de V_1

Pour $n = 2$, l'expression (1.60) devient :

$$\widetilde{H}x^2 = -\frac{1}{2}2(2-1)x^{2-2} + \omega 2x^2 + \frac{\omega}{2}x^2$$

$$= -1 + 2\omega x^2 + \frac{\omega}{2}x^2$$

$$= -1 + (2\omega + \frac{\omega}{2})x^2 \tag{1.62}$$

Donc $\widetilde{H}\mathrm{V}_2 \subset \mathrm{V}_2$ car le degré de $\widetilde{H}\mathrm{V}_2$ est le même que celui de V_2

Pour $n = 3$, l'expression (1.60) devient :

$$\widetilde{H}x = -\frac{1}{2}3(3-1)x^{3-2} + 3\omega x^3 + \frac{\omega}{2}x^3$$

$$= -\frac{3}{2}.2x + 3\omega x^3 + \frac{\omega}{2}x^3$$

$$= -3x + (3\omega + \frac{\omega}{2})x^3 \tag{1.63}$$

Donc $\widetilde{H}\mathrm{V}_3 \subset \mathrm{V}_3$ car le degré de $\widetilde{H}\mathrm{V}_3$ est le même que celui de V_3.

On peut continuer cette même opération jusqu' au dernier élément générique de l' espace vectoriel V_n.On remarque que le degré de x^n est inférieur ou égal à n.

D' où $\widetilde{H}$ préserve l'espace vectoriel V_n car il vérifie la relation $\widetilde{H}V_n \subset V_n$.

Donc,$\widetilde{H}$ est un opérateur complétement algébrique .Par conséquent, toutes les valeurs propres du Hamiltonien $\widetilde{H}$ peuvent être calculées algébriquement.

I.8. Caractéristiques des fonctions elliptiques

I.8.1.Les trois fonctions elliptiques fondamentales de Jacobi et leurs définitions

Soitϕ l'amplitude de l'intégrale elliptique (Fϕ par exemple)[5,22,23,] :

Posons $u = F(k,\phi) = \int_0^{\phi} \frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}}$,

(1.64)

ϕ est alors l'amplitude de u et on écrit:

$\phi = \text{am } u.$ (1.65)

On lit: ϕ égale l'amplitude de u.

Les fonctions circulaires (trigonométriques) sinϕ, cosϕ, et la fonction $\Delta\phi$ sont le sinus, cosinus, et delta de am u.

Ce qu'on peut écrire:

sin am u, cos am u, Δ am u. (1.66)

En effet , partons de la relation suivante [22,23,]:

$F(k,x) = \int_0^{x} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$.

En posant $x = \sin\phi$ nous aurons :

$F(k,\phi) = \int_0^{\phi} \frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}}$. (1.66.a)

L'application de la fonction inverse de cette dernière relation va nous donner le sinus amplitudinis de u ou sn u.

$$\text{cn u} = \sqrt{1 - \text{sn}^2\text{u}} \tag{1.66.b}$$

De plus,delta amplitudinis s'obtient comme suit :

$$\text{u} = \text{F}(\text{k}, \phi) = \int_0^{\phi} \frac{\text{d}\phi}{\sqrt{1 - \text{k}^2\sin^2\phi}}$$

$$\text{du} = \frac{\text{d}\phi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\phi}}$$

$$\frac{\text{du}}{\text{d}\phi} = \frac{1}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\phi}}$$

$\frac{\text{d}\phi}{\text{du}} = \Delta \text{ am u} = \text{dn u},$

$\frac{\text{d}\phi}{\text{du}} = \text{dn u},$

$$\text{dn u} = \sqrt{1 - k^2\sin^2\phi} \ . \tag{1.66.c}$$

En abrégé nous pouvons noter les trois fonctions comme suit:

$$\text{sn u, cn u, dn u.} \tag{1.67}$$

En adoptant cette dernière notation on obtient un nouveau mode de fonctions: sn u est une sorte de fonction sinus, cn u et dn u sont des types de fonctions cosinus de u et delta de u. Elles sont appelées fonctions elliptiques.

Les trois fonctions : sn u, cn u et dn u constituent les fonctions elliptiques fondamentales de Jacobi[5,22,23,] :

$$\sin\phi = \text{sin am u} = \text{sn u} \tag{1.68}$$

$$\cos\phi = \text{cos am u} = \text{cn u} \tag{1.69}$$

$$\Delta\phi = \Delta \text{ am u} = \text{dn u.} \tag{1.70}$$

Elles se lisent respectivement comme suit:

-sinus amplitudinis de u, ou en prononçant les trois lettres séparément:

s, n, u.

-cosinus amplitudinis de u ou en prononçant les trois lettres

séparément: c, n, u

-delta amplitudinis de u ou en prononçant les trois lettres séparément:

d, n, u.

I.8.2. Les neuf autres fonctions elliptiques de Jacobi

On obtient trois nouvelles fonctions elliptiques en inversant les relations (1.68),(1.69) et (1.70)[24,25] :

Ainsi: $\frac{1}{\mathrm{snu}} = \mathrm{ns}\ u,$ (1.71)

$\frac{1}{\mathrm{cnu}} = \mathrm{nc}\ u,$ (1.72)

$\frac{1}{\mathrm{dnu}} = \mathrm{nd}\ u.$ (1.73)

Des trois fonctions elliptiques fondamentales, on peut obtenir six quotients: $\frac{\mathrm{snu}}{\mathrm{cnu}}$; $\frac{\mathrm{cnu}}{\mathrm{snu}}$;$\frac{\mathrm{dnu}}{\mathrm{snu}}$;$\frac{\mathrm{snu}}{\mathrm{dnu}}$;$\frac{\mathrm{cnu}}{\mathrm{dnu}}$;$\frac{\mathrm{dn}\,u}{\mathrm{cnu}}$ qui sont analogues aux fonctions tangente (tan) et cotangente (cotan). La notation appropriée a été donnée et utilisée par ***Dr Glaisher***, et on obtient six nouvelles fonctions elliptiques suivantes [24,25]:

$\frac{\mathrm{snu}}{\mathrm{cnu}} = \mathrm{sc}\ u,$ (1.74)

$\frac{\mathrm{cnu}}{\mathrm{snu}} = \mathrm{cs}\ u,$ (1.75)

$\frac{\mathrm{dnu}}{\mathrm{snu}} = \mathrm{ds}\ u,$ (1.76)

$\frac{\mathrm{snu}}{\mathrm{dnu}} = \mathrm{sd}\ u,$ (1.77)

$\frac{\mathrm{cnu}}{\mathrm{dnu}} = \mathrm{cd}\ u,$ (1.78)

$\frac{\mathrm{dnu}}{\mathrm{cnu}} = \mathrm{dc}\ u.$ (1.79)

Par analogie avec les fonctions trigonométriques on peut aussi écrire[22]:

$\frac{\text{snu}}{\text{cnu}} = \frac{\text{sinamu}}{\text{cosamu}} = \text{tan am u} = \text{tn u} = \text{sc u},$ (1.80)

$\frac{\text{cnu}}{\text{snu}} = \frac{\text{cosamu}}{\text{sinamu}} = \text{cotan am u} = \text{ctn u} = \text{cs u},$ (1.81)

$\frac{1}{\text{cnu}} = \frac{1}{\text{cosamu}} = \text{sec am u} = \text{nc u},$ (1.82)

$\frac{1}{\text{snu}} = \frac{1}{\text{sinamu}} = \text{cosec am u} = \text{ns u}.$ (1.83)

De plus, les douze fonctions elliptiques précédentes peuvent s'écrire[24,25]: sn(k,u); cn(k,u); dn(k,u); ns(k,u); nc(k,u); nd(k,u); sc(k,u); cs(k,u); ds(k,u); sd(k,u); cd(k,u); dc(k,u).

où k et u sont respectivement le module et l'argument de ces fonctions.

Si k=0 , les fonctions de Jacobi sont transformées en fonctions trigonométriques.

Si k=1, les fonctions de Jacobi sont transformées en fonctions hyperboliques.

I.8.3. Quelques relations fondamentales des fonctions elliptiques de Jacobi

A partir des relations (1.64) et (1.68) à (1.70) ainsi que la forme[3]pour la quantité $\Delta(k,\phi)$ ou $\Delta\phi$, on peut vérifier les identités suivantes[26]:

$\text{sn } 0=0.$ (1.84)

En effet, l'expression (1.64) donne:

$u = F(k,\phi) = \int_0^{\phi} \frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}}$,

$du = \frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}}$;

$\Delta\phi du = d\phi$,

où $\sqrt{1-k^2\sin^2\phi} = \Delta\phi$

$\Delta\phi\ d0 = d\phi$,

avec $u = 0$,

$d\phi = 0$,

$\phi = 0$.

En tenant compte de la relation (1.68), on a :

$\sin \phi = \sin \text{am } u = \text{sn } u$

$\sin 0 = \sin \text{am } 0 = \text{sn } 0$

d'où $\text{sn } 0 = 0$.

De la même manière, prouvons que :

$\text{cn } 0 = 1.$ (1.85)

En effet, on a $u = 0$

$$du = \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}},$$

$\Delta\phi \, du = d\phi$

avec $\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi} = \Delta\phi$

$\Delta\phi \, d\, 0 = d\phi$

où $u = 0$

$d\phi = 0,$

$\phi = 0.$

De la relation (1.69), on a :

$\cos \phi = \text{cn } u,$

$\cos 0 = \cos \text{am } 0 = \text{cn } 0,$

d'où $\text{cn } 0 = 1$ car $\cos 0 = 1$.

Par le même raisonnement, on peut facilement prouver l'égalité

$\text{dn } 0 = 1.$ (1.86)

En effet, les fonctions cn u, et dn u sont des types de fonctions cosinus de u

d'où : $\text{dn } 0 = 1$

$$\mathrm{sn}(-u) = -\,\mathrm{sn}\,u. \tag{1.87}$$

En effet, de la relation (1.49), on a:

$$\sin\phi = \sin \mathrm{am}\,u = \mathrm{sn}\,u,$$

$$\sin(-\phi) = \sin(-\mathrm{am}\,u) = \sin(-u). \tag{1.88}$$

$$\sin(-\phi) = -\sin\phi = -\sin \mathrm{am}\,u,$$

$$\sin(-\phi) = -\,\mathrm{sn}\,u. \tag{1.89}$$

Des relations (1.88) et (1.89) on tire:

$$\mathrm{sn}(-u) = -\mathrm{sn}\,u$$

$$\mathrm{cn}(-u) = \mathrm{cn}\,u. \tag{1.90}$$

En effet, on sait que:

$$\cos\phi = \cos \mathrm{am}\,u = \mathrm{cn}\,u,$$

or, $\cos(-\phi) = \cos(-\mathrm{am}\,u)$,

$$\cos(-\phi) = \mathrm{cn}(-u), \tag{1.91}$$

$$\cos(-\phi) = \cos\phi,$$

$$\cos(-\phi) = \cos \mathrm{am}\,u,$$

$$\cos(-\phi) = \mathrm{cn}\,u. \tag{1.92}$$

De (1.87) et (1.88) on tire:

$$\mathrm{cn}(-u) = \mathrm{cn}\,u.$$

Par un même raisonnement qu'à l'expression (1.71), on peut prouver l'égalité suivante :

$$\mathrm{dn}(-u) = \mathrm{dn}\,u. \tag{1.93}$$

Prouvons l'égalité suivante :

$$\mathrm{sn}^2u + \mathrm{cn}^2u = 1. \tag{1.94}$$

En effet,

$\sin^2 u = \mathrm{sn}^2 \mathrm{am}\, u = \sin^2\phi$ (1.95)

$\cos^2 u = \mathrm{cn}^2 \mathrm{am}\, u = \cos^2\phi$. (1.96)

De (1.95) et (1.96), on tire la formule fondamentale de la trigonométrie :

$\sin^2\phi + \cos^2\phi = 1$,

$\sin^2 \mathrm{am}\, u + \cos^2 \mathrm{am}\, u = 1$,

d'où $\mathrm{sn}^2 u + \mathrm{cn}^2 u = 1$.

Prouvons l'égalité suivante :

$\mathrm{dn}^2 u = 1 - k^2 \sin^2 u$ (1.97)

En effet,

$u = F(k, \phi) = \int_0^{\phi} \frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}}$,

$du = \frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}}$,

$$\frac{du}{d\phi} = \frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}}$$

$\frac{d\phi}{du} = \Delta \mathrm{am}\, u = \mathrm{dn}\, u$,

$\frac{d\phi}{du} = \mathrm{dn}\, u$,

$(\frac{d\phi}{du})^2 = \mathrm{dn}^2 u$,

or, $\mathrm{dn}\, u = \Delta\phi = \sqrt{1-k^2\sin^2\phi}$

d'où $\mathrm{dn}^2 u = 1 - k^2\sin^2\phi$,

or, $\sin^2\phi = \mathrm{sn}^2 u$,

d'où $\mathrm{dn}^2 u = 1 - k^2 \mathrm{sn}^2 u$.

Prouvons l'égalité suivante :

$\mathrm{dn}^2 u - k^2 \mathrm{cn}^2 u = k'^2$ (1.98)

où $k'^2 = 1-k^2$.

k'étant le comodule elliptique.

En effet, en utilisant l'expression (1.197) on a:

$\mathrm{dn}^2\mathrm{u} - \mathrm{k}^2\mathrm{cn}^2\mathrm{u} = 1-k^2\mathrm{sn}^2\mathrm{u}-k^2\mathrm{cn}^2\mathrm{u}$,

$\mathrm{dn}^2\mathrm{u} - k^2\mathrm{cn}^2\mathrm{u} = 1-k^2(\mathrm{sn}^2\mathrm{u}+\mathrm{cn}^2\mathrm{u})$

$\mathrm{dn}^2\mathrm{u} - k^2\mathrm{cn}^2\mathrm{u} = 1-k^2$

d'où :

$\mathrm{dn}^2\mathrm{u} - k^2\mathrm{cn}^2\mathrm{u} = k'^2$

I.8.4. Dérivées premières des fonctions elliptiques: sn, cn et dn

Pour ces fonctions, l'équation de base est[24,25]:

$\mathrm{u}=\mathrm{F}(k,\phi)$ (1.99)

or, $\mathrm{d}\phi = \Delta\phi\ \mathrm{du}$, ce qui peut s'écrire:

$\mathrm{d}(\sin\phi) = \cos\phi\Delta\phi\ \mathrm{du}.$ (1.100)

En tenant compte des relations (1.68) et (1.69), la relation (1.100) prend la forme suivante :

$\mathrm{d}(\mathrm{sn\ u}) = \mathrm{cn\ u}\ \Delta\phi\mathrm{du}.$

De la relation (1.45) on tire :

$\mathrm{d}(\mathrm{sn\ u}) = \mathrm{cn\ u\ dn\ udu},$

$\frac{\mathrm{d}(\mathrm{sn\ u})}{\mathrm{du}} = \mathrm{cn\ u\ dn\ u},$

d'où, $\mathrm{sn}'\mathrm{u} = \mathrm{cn\ u\ dn\ u}.$ (1.101)

Des relations (1.94) et (1.197), on en déduit:

$\mathrm{cn}^2\mathrm{u} = 1-\mathrm{sn}^2\mathrm{u},$ (1.102)

$\mathrm{dn}^2\mathrm{u} = 1-k^2\mathrm{sn}^2\ \mathrm{u}.$ (1.103)

Déterminons la dérivée première de (1.102) par rapport à u, on a:

$$\frac{\mathrm{d}(\mathrm{cn}^2\mathrm{u})}{\mathrm{du}} = \frac{\mathrm{d}(1-\mathrm{sn}^2\,\mathrm{u})}{\mathrm{du}}$$

$$2\mathrm{cn}\,\mathrm{u}\,\frac{\mathrm{d}(\mathrm{cn}\,\mathrm{u})}{\mathrm{du}} = -2\mathrm{sn}\,\mathrm{u}\frac{\mathrm{d}(\mathrm{sn}\,\mathrm{u})}{\mathrm{du}},$$

$$2\mathrm{cn}\,\mathrm{u}\,\mathrm{cn}'\mathrm{u} = -2\mathrm{sn}\,\mathrm{u}\,\mathrm{sn}'\mathrm{u}.$$

En tenant compte de la relation (1.97), on trouve:

$$\mathrm{cn}\,\mathrm{u}\,\mathrm{cn}'\mathrm{u} = -\,\mathrm{sn}\,\mathrm{u}\,\mathrm{cn}\,\mathrm{u}\,\mathrm{dn}\,\mathrm{u}$$

$$\text{d'où , } \mathrm{cn}'\mathrm{u} = -\mathrm{sn}\,\mathrm{u}\,\mathrm{dn}\,\mathrm{u}. \qquad (1.104)$$

De la même façon on dérive l'expression (1.103) et on a:

$$\frac{\mathrm{d}(\mathrm{dn}^2\mathrm{u})}{\mathrm{d}\,\mathrm{u}} = \frac{\mathrm{d}(1-k^2\mathrm{sn}^2\,\mathrm{u})}{\mathrm{d}\,\mathrm{u}},$$

$$2\mathrm{dn}\,\mathrm{u}\,\frac{\mathrm{d}(\mathrm{dnu})}{\mathrm{d}\,\mathrm{u}} = -2k^2\mathrm{sn}\,\mathrm{u}\,\frac{\mathrm{d}(\mathrm{sn}\,\mathrm{u})}{\mathrm{du}},$$

$$2\mathrm{dn}\,\mathrm{u}\,\mathrm{dn}'\mathrm{u} = -2k^2\mathrm{sn}\,\mathrm{u}\,\mathrm{sn}'\,\mathrm{u},$$

$$\mathrm{dn}\,\mathrm{u}\,\mathrm{dn}'\mathrm{u} = -k^2\mathrm{sn}\,\mathrm{u}\,\mathrm{cn}\,\mathrm{u}\,\mathrm{dn}\,\mathrm{u}$$

d'où :

$$\mathrm{dn}'\mathrm{u} = -k^2\mathrm{sn}\,\mathrm{u}\,\mathrm{cn}\,\mathrm{u}. \qquad (1.105)$$

I.9. Représentation du formalisme hamiltonien dans la mécanique quantique.

I.9.1. Introduction

Le formalisme hamiltonien constitue l'un des piliers fondamentaux de la formulation moderne de la mécanique quantique. A la différence de la mécanique classique, où l'hamuiltonien est une fonction sur l'espace des phases, en mécanique quantique, il devient un opérateur agissant sur un espace de Hilbert. Cette représentation permet une description dynamique des systèmes quantiques et constitue la base de l'équation de Schrödinger. Dans ce paragraphe, nous explorons comment le formalisme hamiltonien est adapté au contexte quantique, ses implications mathématiques, physiques et son role dans la dynamique temporelle des systèmes[27,28].

I.9.2. L'hamiltonien en mécanique quantique.

En mécanique quantique, un système est représenté par un espace de Hilbert Ħ, et son état est une fonction d'onde [27] :

$$\left|\psi(t)\right\rangle \epsilon H. \qquad (1.106)$$

L'évolution temporelle de cet état est régie par l'équation de Schödinger dépendant du temps [27] :

$$i\hbar \frac{d}{dt} \left| \psi(t) \right\rangle = \hat{H} \left| \psi(t) \right\rangle \tag{1.107}$$

où $\hat{H}$ est l'opérateur hamiltonien du système, représentant l'énergie totale (cinétique et potentielle).

L'opérateur $\hat{H}$ doit être hermitien pour assurer que les valeurs propres (énergies mesurables) soient réelles. Cela garantit aussi l'évolution unitaire, donc la conservation de la norme de l'état quantique au cours du temps.

I.9.3. Représentations usuelles : position et impulsion.

L'hamiltonien peut être exprimé différemment selon la représentation choisie (position ou impulsion)

I.9.3.1. Représentation en impulsion (configuration espace) :

Pour une particule dans un potentiel $V(x)$, on a [28] :

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x) \tag{1.108}$$

I.9.3.2. Représentation en impulsion (momentum espace) :

En transformation de Fourier, l'opérateur d'impulsion devient multiplicatif, et x devient un opérateur différentiel [28]:

$$\hat{H}(p) = \frac{p^2}{2m} + \widehat{V}\,(i\hbar\frac{d}{dp}) \tag{1.109}$$

La flexibilité du formalisme hamiltonien permet ainsi de traiter des systèmes divers allant des oscillateurs harmoniques à des particules relatives.

I.9.4. Spectre de l' hamiltonien et quantification de l'énergie

Les valeurs propres de $\hat{H}$, obtenus via la résolution de l'équation de Schödinger indépendante du temps [27,28] :

$$\hat{H}\,|\psi_n\rangle = E_n\,|\psi_n\rangle \tag{1.110}$$

Correspondent aux niveaux d'énergie quantifiés du système. Ces spectres peuvent être discrets (oscillateur harmonique) ou continus (particules libres).

Cette approche est cruciale dans l'interprétation physique : chaque mesure d'énergie donne un des E_n, avec une probabilité déterminée par la décomposition de $|\psi_n\rangle$ dans la base des états propres de $\hat{H}$.

I.9.5. Théorie des perturbations et hamiltoniens effectifs

Le formalisme hamiltonien permet aussi de traiter des systèmes plus complexes via la théorie des perturbations en exprimant [28]:

$$\hat{H} = H_0 + \lambda\widehat{V} \tag{1.111}$$

où : $\hat{H}$ est une hamiltonien solvable analytiquement,

$\widehat{V}$ est une petite perturbation.

Cela est essentiel pour modéliser les systèmes automatiques ou moléculaires réels, souvent non intégrables analytiquement.

I.9.6. Hamiltonien dans les représentations de Heisenberg et interaction

En représentation de Heisenberg, les opérateurs évoluent dans le temps [28] :

$$\hat{\mathrm{A}}_H(t) = e^{i\hat{\mathrm{H}}t/\hbar}\hat{\mathrm{A}}e^{-\hat{\mathrm{H}}t/\hbar} \tag{1.112}$$

Tandis que les états sont fixes. Cela offre une perspective alternative sur la dynamique quantique, utile en théorie quantique des champs et en optique quantique.

I.9.7. Approches modernes : Hamiltoniens topologiques et systèmes quantiques ouverts.

Les recherches récentes en physique de la matière condensée, comme dans les isolants topologiques, utilisent le formalisme hamiltonien pour classifier les phases de la matière via des invariants topologiques[27]:.

De même, pour les systèmes ouverts on généralise l'hamiltonien en intégrant des termes dissipatifs (formalismes de Lindblad), ce qui est crucial en informatique quantique ou en optique quantique [27]:

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{i}{\hbar}\left[\hat{\mathrm{H}}, \rho\right] + \sum_k (L_k \rho L_k^+ - \frac{1}{2}\{L_k^+ L_k, \rho\}) \tag{1.113}$$

CHAPITRE II: ETUDE DU HAMILTONIEN MATRICIEL D'ORDRE DEUX DEPENDANT DU POTENTIEL ELLIPTIQUE DE JACOBI PARTIELLEMENT ALGEBRIQUE : CAS $\delta = 1$

II.1. Introduction

Dans ce chapitre la méthode analytique de résolubilité partielle est appliquée pour prouver la résolubilité partielle du hamiltonien matriciel d'ordre deux dépendant du potentiel elliptique de Jacobi.

Autrement dit, on va établir les trois conditions nécéssaires et suffisantes pour que ce hamiltonien ait un espace vectoriel invariant sous son action[1,2,3,5,22] .

II.2. Différentes étapes de la méthode analytique de résolubilité partielle

Considérons le hamiltonien matriciel d'ordre deux dépendant du potentiel de Jacobi de la forme [4,5,22]:

$$H(z) = -\frac{d^2}{dz^2}\mathbb{1}_1 + V_D + V_I \qquad (2.1)$$

où : $\mathbb{1}_2$, la matrice identité d'ordre deux,

$$V_D = \begin{pmatrix} a_1 sn^2 + b & 0 \\ 0 & a_1 sn^2 - b \end{pmatrix}$$

$$V_I = \begin{pmatrix} 0 & \theta sncn \\ \theta sncn & 0 \end{pmatrix}$$

Signalons que a_1,a_2, b et θ sont des constantes réelles.

La somme $V_D(z) + V_I(z)$ est le potentiel associé à $H(z)$.

Pour prouver la résolubilité partielle du hamiltonien $H(z)$, nous procédons par une transformation de jauge.

II.2.1. Détermination de l'opérateur de jauge

Par la transformation de jauge, le hamiltonien $H(z)$donné par la relation (2.1) devient le hamiltonien de jauge [4,5,22]:

$$\widetilde{H}(Z) = q^{-1} H(z) q \qquad (2.2)$$

où la fonction de jauge pour notre cas est :

$$q = \begin{pmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cn & 0 \\ 0 & sn \end{pmatrix}$$

$$q^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{q_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{q_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{Cn} & 0 \\ 0 & \frac{1}{Sn} \end{pmatrix}$$

En opérant successivement cette transformation de jauge sur les différents termes du deuxième membre de la relation (2.1), on a:

Transformation de jauge du premier terme du hamiltonien (2.1):

$$-\frac{d^2}{dz^2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{d^2}{dz^2} & 0 \\ 0 & -\frac{d^2}{dz^2} \end{pmatrix}$$

$$q^{-1}\begin{pmatrix} -\frac{d^2}{dz^2} & 0 \\ 0 & -\frac{d^2}{dz^2} \end{pmatrix} q = \begin{pmatrix} \frac{1}{q_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{q_2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{d^2}{dz^2} & 0 \\ 0 & -\frac{d^2}{dz^2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & q_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{q_1}\frac{d^2}{dz^2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{q_2}\frac{d^2}{dz^2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & q_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{q_1}\frac{d^2}{dz^2}q_1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{q_2}\frac{d^2}{dz^2}q_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{d^2}{dz^2} - 2\frac{q_1'}{q_1}\frac{d}{d_Z} - \frac{q_1''}{q_1} & 0 \\ 0 & -\frac{d^2}{dz^2} - 2\frac{q_2'}{q_2}\frac{d}{d_Z} - \frac{q_2''}{q_2} \end{pmatrix} \qquad (2.3)$$

En considérant le changement de variable $\mathrm{t} = \mathrm{sn}^2$, on déduit [5,22]:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dz}} = \frac{\mathrm{dt}}{\mathrm{dz}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dz}} = \frac{\mathrm{d}sn^2}{\mathrm{dz}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}$$

La quatrième expression de l'annexe 1, nous permet d'écrire :

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dz}} = 2\ \mathrm{sn}\ \mathrm{cn}\ \mathrm{dn}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$.

La référence [4] nous permet d'écrire le premier terme de l'élément 11 et de l'élément 22 de la matrice (2.3) :

$$-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{dz}^2} = -4\mathrm{t}(1-t)(1-k^2t)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{dt}^2} - 2[3k^2t^2 - 2(1+k^2)t + 1]\frac{d}{\mathrm{dt}} \qquad (2.4)$$

L'expression (2.4) est celle qu'on va remplacer dans la matrice (2.3).

Comme $q_1 = \mathrm{cn}$,

Le deuxième terme de l'élément 11 de la matrice (2.3) s'écrit grâce à l'annexe 2 et au changement de variable précédent :

$$-2\frac{q_1'}{q_1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dz}} = -2\frac{q_1'}{q_1}(2\ \mathrm{sn}\ \mathrm{cn}\ \mathrm{dn})\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}.$$

$$= -4\frac{q_1'}{q_1}\ \mathrm{sn}\ \mathrm{cn}\ \mathrm{dn}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}.$$

$$= -4(k^2t^2 - t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}. \qquad (2.5)$$

De la même manière, sachant que $q_2 = \mathrm{sn}$, le deuxième terme de l'élément 22 de la matrice (2.3) s'écrit :

$$-2\frac{{q_2}'}{q_2}\frac{d}{dZ} = -2\frac{{q_2}'}{q_2}(2sncndn)\frac{d}{dt}$$

$$= -4\frac{{q_2}'}{q_2}sncndn\frac{d}{dt}$$

$$= -4[k^2t^2 - (k^2+1)t + 1]\frac{d}{dt} \qquad (2.6)$$

De la même manière les deux derniers termes des éléments 11et 22 de la matrice (2.3) deviennent successivement :

$$-\frac{{q_1}''}{q_1} = -(2k^2t - 1) = -2k^2t + 1$$

$$-\frac{{q_2}''}{q_2} = -[2k^2t - (k^2t + 1)] = -2k^2t + k^2 + 1 \qquad (2.7)$$

Des relations (2.4),(2.5) ,(2.6) et (2.7) , la matrice (2.3) devient :

$$q^{-1}\begin{pmatrix} -\frac{d^2}{dz^2} & 0 \\ 0 & -\frac{d^2}{dz^2} \end{pmatrix} q = \begin{pmatrix} -\frac{d^2}{dz^2} - 2\frac{q_1'}{q_1}\frac{d}{d_Z} - \frac{q_1''}{q_1} & 0 \\ 0 & -\frac{d^2}{dz^2} - 2\frac{q_2'}{q_2}\frac{d}{d_Z} - \frac{q_2''}{q_2} \end{pmatrix} \tag{2.8}$$

où :

$$-\frac{d^2}{dz^2} - 2\frac{q_1'}{q_1}\frac{d}{d_Z} - \frac{q_1''}{q_1} =$$

$$-4t(1-t)(1-k^2t)\frac{d^2}{dt^2} - 2[3k^2t^2 - 2(1+k^2)t + 1]\frac{d}{dt} + -4(k^2t^2 - t)\frac{d}{dt} - 2k^2t + 1$$

$$= -4t\frac{d^2}{dt^2} + 4k^2t^2\frac{d^2}{dt^2} + 4t^2\frac{d^2}{dt^2} - 4k^2t^3\frac{d^2}{dt^2} - 2[3k^2t^2 - 2(1+k^2)t + 1]\frac{d}{dt}$$
$$- 4k^2t^2\frac{d}{dt} + 4(k^2+1)t\frac{d}{dt} - 4\frac{d}{dt} - 2k^2t + k^2 + 1$$

Transformation de jauge du deuxième terme du hamiltonien (2.1) :

$$q^{-1}V_D q = \begin{pmatrix} \frac{1}{q_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{q_2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 sn^2 + b & 0 \\ 0 & a_2 sn^2 - b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & q_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{q_1}(a_1 sn^2 + b) & 0 \\ 0 & \frac{1}{q_2}(a_1 sn^2 - b) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & q_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{q_1}(a_1 sn^2 + b)q_1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{q_2}(a_1 sn^2 - b)q_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 sn^2 + b & 0 \\ 0 & a_2 sn^2 - b \end{pmatrix} \tag{2.9}$$

En tenant compte du changement de variable $\mathrm{sn}^2(\mathrm{z},\mathrm{k}) = t$ la relation (2.9) devient :$\begin{pmatrix} a_1 \mathrm{sn}^2 + \mathrm{b} & 0 \\ 0 & a_2 \mathrm{sn}^2 - \mathrm{b} \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} a_1 \mathrm{t} + \mathrm{b} & 0 \\ 0 & a_2 \mathrm{t} - \mathrm{b} \end{pmatrix} \tag{2.10}$$

Transformation de jauge du troisième terme du hamiltonien (2.2) :

$$q^{-1}V_I q = \begin{pmatrix} \frac{1}{q_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{q_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \theta sncn \\ \theta sncn & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & q_2 \end{pmatrix} \quad \text{où } q_1 = cn \text{ et } q_2 = sn$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{q_1}(\theta sncn) \\ \frac{1}{q_2}(\theta sncn) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & q_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{q_1}(\theta sncn)q_2 \\ \frac{1}{q_2}(\theta sncn)q_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \theta sn^2 \\ \theta cn^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$q^{-1}V_I q = \begin{pmatrix} 0 & \theta sn^2 \\ \theta cn^2 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.11}$$

En tenant compte des deux premières formules de l'annexe1 et du changement de variable $\mathrm{sn}^2(\mathrm{z},\mathrm{k}) = t$, on déduit :

$$\mathrm{sn}^2 = t \tag{2.12}$$

$$\mathrm{sn}^2 + \mathrm{cn}^2 = 1$$

$$\mathrm{cn}^2 = 1 - \mathrm{sn}^2$$

$$\mathrm{cn}^2 = 1 - t, \tag{2.13}$$

Des relations (2.12) et (2.13), l'expression (2.11) s'écrit :

$$q^{-1}\begin{pmatrix} 0 & \theta\ \mathrm{sn}\ \mathrm{cn} \\ \theta\ \mathrm{sn}\ \mathrm{cn} & 0 \end{pmatrix} q = \begin{pmatrix} 0 & \theta t \\ \theta(1-t) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \theta t \\ \theta - \theta t & 0 \end{pmatrix} \tag{2.14}$$

En tenant compte des expressions (2.8), (2.10) et (2.14), la forme finale du hamiltonien de jauge est la suivante :

$$\widetilde{H}(t) = q^{-1}H(z)q = \begin{pmatrix} \widetilde{H}_{11}(t) & \widetilde{H}_{12}(t) \\ \widetilde{H}_{21}(t) & \widetilde{H}_{22}(t) \end{pmatrix} \tag{2.15}$$

avec:

$$\widetilde{H}_{11} = -4t(1-t)(1-k^2t)\frac{d^2}{dt^2} - 2[3k^2t^2 - 2(1+k^2)t + 1]\frac{d}{dt} - 4(k^2t^2 - t)\frac{d}{dt} - 2k^2t + 1 + a_1t + b$$

$$= -4t\frac{d^2}{dt^2} + 4k^2t^2\frac{d^2}{dt^2} + 4t^2\frac{d^2}{dt^2} - 4k^2t^3\frac{d^2}{dt^2} - 2[3k^2t^2 - 2(1+k^2)t + 1]\frac{d}{dt} - 4(k^2t^2 - t)\frac{d}{dt} - 2k^2t + 1 + a_1t + b$$

$$\widetilde{H}_{12} = \theta t$$

$$\widetilde{H}_{21} = \theta - \theta t$$

$$\widetilde{H}_{22} = -4t(1-t)(1-k^2t)\frac{d^2}{dt^2} - 2[3k^2t^2 - 2(1+k^2)t + 1]\frac{d}{dt} - 4k^2t^2\frac{d}{dt} + 4(k^2+1)t\frac{d}{dt} - 4\frac{d}{dt} - 2k^2t + k^2 + 1 + a_2t - b$$

$$\widetilde{H}_{22} = -4t\frac{d^2}{dt^2} + 4k^2t^2\frac{d^2}{dt^2} + 4t^2\frac{d^2}{dt^2} - 4k^2t^3\frac{d^2}{dt^2} - 2[3k^2t^2 - 2(1+k^2)t + 1]\frac{d}{dt} - 4k^2t^2\frac{d}{dt} + 4(k^2+1)t\frac{d}{dt} - 4\frac{d}{dt} - 2k^2t + k^2 + 1 + a_2t - b \qquad (2.16)$$

II.2.2. Les trois composantes du hamiltonien de jauge.

Dans la suite, on va établir les trois conditions de résolubilité partielle.

Autrement dit, on va exprimer a_1, b et θ^2 en termes de k,a_2 et n [5,22].

Considérons le hamiltonien $\widetilde{H}(t)$ de la relation (2.16) en ses composantes :

$$\widetilde{H}(t) = \widetilde{H}_1(t) + \widetilde{H}_0(t) + \widetilde{H}_{-1}(t) \qquad (2.17)$$

Où :

$$\widetilde{H}_1(t) = \begin{pmatrix} -4k^2t^3\frac{d^2}{dt^2} - 10k^2t^2\frac{d}{dt} + (a_1 - 2k^2)t & \theta t \\ -\theta t & -4k^2t^3\frac{d^2}{dt^2} - 10k^2t^2\frac{d}{dt} + (a_2 - 2k^2)t \end{pmatrix} (2.17.a)$$

$$\widetilde{H}_0(t) = \begin{pmatrix} (4k^2+4)t^2\frac{d^2}{dt^2} + 4(2+k^2)t\frac{d}{dt} + 1 + b & 0 \\ \theta & (4k^2+4)t^2\frac{d^2}{dt^2} + 8(1+k^2)t\frac{d}{dt} + k^2 + 1 - b \end{pmatrix}$$

$$(2.17.b)$$

$$\widetilde{H}_{-1}(t) = \begin{pmatrix} -4t\frac{d^2}{dt^2} - 2\frac{d}{dt} & 0 \\ 0 & -4t\frac{d^2}{dt^2} - 6\frac{d}{dt} \end{pmatrix} \qquad (2.17.\text{c})$$

Le vecteur générique de l'espace vectoriel invariant sous l'action du hamiltonien de jauge $\widetilde{H}(t)$ a la forme suivante [1,2,5,19]:

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} \alpha_0 t^n + \alpha_1 t^{n-1} + \cdots \\ \beta_0 t^{n-\delta+1} + \beta_1 t^{n-\delta} + \cdot\cdot \end{pmatrix} \text{ où } \delta = 1$$

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} \alpha_0 t^n + \alpha_1 t^{n-1} + \cdots \\ \beta_0 t^n + \beta_1 t^{n-1} + \cdot\cdot \end{pmatrix} \qquad (2.18)$$

Notez que l'action de $\widetilde{H}_1(t)$ sur le vecteur générique$\Psi(t)$augmente son degré d'unité, $\widetilde{H}_0(t)$ laisse inchangé le degré de Ψtandis que $\widetilde{H}_{-1}(t)$ diminue le degré de Ψ.

II.2.3. Calcul des matricesM_1, $M_0 et \widetilde{M}_1$

Le vecteur$\widetilde{H}\Psi$ peut être décomposé en terme comme suit [2,5,19] :

$$\widetilde{H}\Psi = \text{diag}(t^{n+1}, t^{n+1})M_1 \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \end{pmatrix} + \text{diag}(t^n, t^n)\left(M_0 \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \end{pmatrix} + \widetilde{M}_1 \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix}\right) \qquad (2.19)$$

Ce vecteur permet de calculer les matrices 2×2 ;$M_1, M_0 \; et \; \widetilde{M}_1$ comme suit :

$$\widetilde{H}_1(t) \begin{pmatrix} \alpha_0 t^n \\ \beta_0 t^n \end{pmatrix} = \text{diag}(t^{n+1}, t^{n+1})M_1 \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \end{pmatrix} \qquad (2.19.a)$$

$$\widetilde{H}_1(t) \begin{pmatrix} \alpha_1 t^{n-1} \\ \beta_1 t^{n-1} \end{pmatrix} = \text{diag}(t^n, t^n)\widetilde{M}_1 \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} \qquad (2.19.b)$$

$$\widetilde{H}_0(t) \begin{pmatrix} \alpha_0 t^n \\ \beta_0 t^n \end{pmatrix} = \text{diag}(t^n, t^n)M_0 \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \end{pmatrix} \qquad (2.19.c)$$

En remplaçant $\widetilde{H}_1$ par son expression(2.17.a) dans la relation (2.19.a),on obtient :

$$\widetilde{H}_1(t) \begin{pmatrix} \alpha_0 t^n \\ \beta_0 t^n \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -4k^2t^3\frac{d^2}{dt^2} - 10k^2t^2\frac{d}{dt} + (a_1 - 2k^2)t & \theta t \\ -\theta t & -4k^2t^3\frac{d^2}{dt^2} - 10k^2t^2\frac{d}{dt} + (a_2 - 2k^2)t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 t^n \\ \beta_0 t^n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} C & \theta t^{n+1} \\ -\theta t^{n+1} & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \end{pmatrix}$$

où

C= $-4nk^2(n-1)t^{n-2}t^3 - 10nk^2t^{n-1}t^2 + (a_1 - 2k^2)t^{n+1}$

$= -4nk^2(n-1)t^{n+1} - 10nk^2t^{n+1} + (a_1 - 2k^2)t^{n+1}$

D= $-4nk^2(n-1)t^{n-2}t^3 - 10nk^2t^{n-1}t^2 + (a_2 - 2k^2)t^{n+1}$

=$-4nk^2(n-1)t^{n+1} - 10nk^2t^{n+1} + (a_2 - 2k^2)t^{n+1}$

Après les manipulations algébriques on obtient une matrice 2×1 suivante :

$$\widetilde{H}_1(t)\begin{pmatrix} \alpha_0 t^n \\ \beta_0 t^n \end{pmatrix} = \text{diag}(t^{n+1}, t^{n+1}) \begin{pmatrix} E & \theta \\ -\theta & F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

où :

$E = -4nk^2(n-1) - 10nk^2 + a_1 - 2k^2$

F= $-4nk^2(n-1) - 10nk^2 + a_2 - 2k^2$

En comparant la relation (2.19a) et (2.20) on a :

$$M_1 = \begin{pmatrix} -4nk^2(n-1) - 10nk^2 + a_1 - 2k^2 & \theta \\ -\theta & -4nk^2(n-1) - 10nk^2 + a_2 - 2k^2 \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

En remplaçant $\widetilde{H}_1$ par son expression (2.17a) dans la relation (2.19b), on obtient :

$$\widetilde{H}_1(t)\begin{pmatrix} \alpha_1 t^{n-1} \\ \beta_1 t^{n-1} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -4k^2t^3\frac{d^2}{dt^2} - 10k^2t^2\frac{d}{dt} + (a_1 - 2k^2)t & \theta t \\ -\theta t & 4k^2t^3\frac{d^2}{dt^2} - 10k^2t^2\frac{d}{dt} + (a_2 - 2k^2)t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 t^{n-1} \\ \beta_1 t^{n-1} \end{pmatrix}$$

De cette égalité, après les manipulations algébriques on aboutit à une nouvelle égalité de la forme suivante :

$$\widetilde{H}_1(t)\begin{pmatrix} \alpha_1 t^{n-1} \\ \beta_1 t^{n-1} \end{pmatrix} = \text{diag}(t^n, t^n)\begin{pmatrix} H & \theta \\ -\theta & G \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

où $H = -4k^2(n-1)(n-2) - 10k^2(n-1) + a_1 - 2k^2$

$G = -4k^2(n-1)(n-2) - 10k^2(n-1) + a_2 - 2k^2$

En comparant (2.19b) et (2.22), on déduit :

$$\widetilde{M}_1 = \begin{pmatrix} = -4k^2(n-1)(n-2) - 10k^2(n-1) + a_1 - 2k^2 & \theta \\ -\theta & -4k^2(n-1)(n-2) - 10k^2(n-1) + a_2 - 2k^2 \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

En remplaçant $\widetilde{H}_0$ par son expression (2.17b) dans la relation (2.19c), on obtient :

$$\widetilde{H}_0(t)\begin{pmatrix} \alpha_0 t^n \\ \beta_0 t^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K & 0 \\ \theta & L \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_0 t^n \\ \beta_0 t^n \end{pmatrix}$$

où :

K $=(4k^2+4)t^2\frac{d^2}{dt^2} + 4(2+k^2)t\frac{d}{dt} + 1 + b$

$L = (4k^2+4)t^2\frac{d^2}{dt^2} + 8(1+k^2)t\frac{d}{dt} + k^2 + 1 - b$

Après les manipulations algébriques on obtient une égalité suivante :

$$\widetilde{H}_0(t)\begin{pmatrix} \alpha_0 t^n \\ \beta_0 t^n \end{pmatrix} = \text{diag}(t^n, t^n)\begin{pmatrix} K' & 0 \\ \theta & L' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

où $K' = (4k^2+4)n(n-1) + 4n(2+k^2) + 1 + b$

$L' = n(n-1)(4k^2+4) + 8n(1+k^2) + k^2 + 1 - b$

En comparant les relations (2.19c) et (2.24), on déduit:

M_0=

$$\begin{pmatrix} (4k^2+4)n(n-1)+4n(2+k^2)+1+b & 0 \\ \theta & n(n-1)(4k^2+4)+8n(1+k^2)+k^2+1-b \end{pmatrix}$$

(2.25)

Donc les matrices 2×2 M_1,$\widetilde{M}_1$ et M_0 sont données successivement par les relations (2.21), (2.23) et (2.25).

II.3. Trois conditions de résolubilité partielle de l'opérateur de jauge

Les trois conditions nécessaires et suffisantes pour que l'opérateur $\widetilde{H}(t)$ de (2.15) ait un espace vectoriel invariant sous son action sont déterminées successivement[2]:.

II.3.1.Première condition de résolubilité partielle de $\widetilde{H}(t)$

Cette condition est déduite de la relation suivante [2,5,22]:

$\det M_1 = 0$

$$\begin{vmatrix} -4nk^2(n-1)-10nk^2+a_1-2k^2 & \theta \\ -\theta & -4nk^2(n-1)-10nk^2+a_2-2k^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$[-4nk^2(n-1)-10nk^2+a_1-2k^2][-4nk^2(n-1)-10nk^2+a_2-2k^2]+\theta^2=0$$

$$\begin{aligned}&[-4nk^2(n-1)][-4nk^2(n-1)]+[-4nk^2(n-1)][-10nk^2]+a_2[-4nk^2(n-1)]\\&-2k^2[-4nk^2(n-1)]+[-10nk^2][-4nk^2(n-1)]+[-10nk^2][-10nk^2]\\&+a_2[-10nk^2]-2k^2[-10nk^2]+a_1[-4nk^2(n-1)]+a_1[-10nk^2]+a_2a_1\\&-2k^2a_1-2k^2[-4nk^2(n-1)]-2k^2[-10nk^2]+a_2[-2k^2]-2k^2[-2k^2]\\&+\theta^2=0\end{aligned}$$

Après quelques simplifications algébriques on trouve la première condition nécessaire et suffisante pour que $\widetilde{H}(t)$ soit partiellement algébrique :

$$\theta^2=-16k^4n^4-48k^4n^3-52k^4n^2-24k^4n-4k^4+(a_1+a_2)(4k^2n^2+6k^2n+2k^2)-a_1a_2 \quad (2.26)$$

II.3.2.Deuxième condition de résolubilité partielle de $\widetilde{H}(t)$

Cette condition est déduite de la relation suivante [2,5,22]:

$$\det \widetilde{M}_1 = 0 \tag{2.27}$$

$$\begin{vmatrix} -4k^2(n-1)(n-2) - 10k^2(n-1) + a_1 - 2k^2 & \theta \\ -\theta & -4k^2(n-1)(n-2) - 10k^2(n-1) + a_2 - 2k^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$[-4k^2(n-1)(n-2) - 10(n-1)k^2 + a_1 - 2k^2][-4k^2(n-1)(n-2) - 10k^2(n-1) + a_2 - 2k^2] + \theta^2 = 0$$

$$[-4k^2(n-1)(n-2)][-4k^2(n-1)(n-2)] + [-4k^2(n-1)(n-2)][-10(n-1)k^2] + a_2[-4k^2(n-1)(n-2)] - 2k^2[-4k^2(n-1)(n-2)] + [-10(n-1)k^2][-4k^2(n-1)(n-2)] + [-10(n-1)k^2][-10(n-1)k^2] + a_2[-10(n-1)k^2] - 2k^2[-10(n-1)k^2] + a_1[-4k^2(n-1)(n-2)] + a_1[-10(n-1)k^2] + a_2a_1 - 2k^2a_1 + -2k^2[-4k^2(n-1)(n-2)] + -2k^2[-10(n-1)k^2] + a_2[-2k^2] - 2k^2[-2k^2] + \theta^2 = 0 \tag{2.28}$$

Les manipulations algébriques à cette équation (2.28) font aboutir à une égalité suivante :

$$16k^4n^4 - 96k^4n^3 + 208k^4n^2 - 192k^4n + 64k^4 + 40k^4n^3 - 160k^4n^2 + 200k^4n - 80k^4 - 4k^2n^2a_2 + 12k^2na_2 - 8k^2a_2 + 8k^4n^2 - 24k^4n - 16k^4 - 40k^4n^3 - 160k^4n^2 + 200k^4n - 80k^4 + 100k^4n^2 - 200k^4n + 100k^4 - 10nk^2a_2 + 10k^2a_2 + 20nk^4 - 20k^4 - 4a_1k^2n^2 + 12a_1k^2n - 8a_1k^2 - 10na_1k^2 + 10a_1k^2 + a_1a_2 - 2a_1k^2 + 8k^4n^2 - 24k^4n + 16k^4 + 20k^4n - 20k^4 - 2a_2k^2 + 4k^4 + \theta^2 = 0 \tag{2.29}$$

Dans la relation (2.29), remplaçons θ^2 par son expression (2.26), on a :

$$16k^4n^4 - 96k^4n^3 + 208k^4n^2 - 192k^4n + 64k^4 + 40k^4n^3 - 160k^4n^2 + 200k^4n - 80k^4 - 4k^2n^2a_2 + 12k^2na_2 - 8k^2a_2 + 8k^4n^2 - 24k^4n + 16k^4 + 40k^4n^3 - 160k^4n^2 + 200k^4n - 80k^4 + 100k^4n^2 - 200k^4n + 100k^4 - 10nk^2a_2 + 10k^2a_2 + 20nk^4 - 20k^4 - 4a_1k^2n^2 + 12a_1k^2n - 8a_1k^2 - 10na_1k^2 + 10a_1k^2 + a_1a_2 - 2a_1k^2 + 8k^4n^2 - 24k^4n + 16k^4 + 20k^4n - 20k^4 - 2a_2k^2 + 4k^4 - 16k^4n^4 - 48k^4n^3 - 52k^4n^2 - 24k^4n - 4k^4 + (a_1 + a_2)(4k^2n^2 + 6k^2n + 2k^2) - a_1a_2 = 0 \tag{2.30}$$

Après quelques simplifications algébriques on trouve la deuxième condition nécessaire et suffisante pour que$\widetilde{H}(t)$ soit partiellement algébrique :

$$a_1 = \frac{64k^4n^3+48k^4n^2+24k^4n+4k^4-a_2(8k^2n+2k^2)}{8k^2n+2k^2} \tag{2.31}$$

II.3.3.Troisième condition de résolubilité partielle de $\widetilde{H}(t)$

Cette condition est aussi déduite de la relation suivante [2,5,22]:

$$M_0\begin{pmatrix}1\\ \frac{\beta_0}{\alpha_0}\end{pmatrix} = \Lambda\begin{pmatrix}1\\ \frac{\beta_0}{\alpha_0}\end{pmatrix} \tag{2.32}$$

Où Λ un paramètre constant et $\frac{\beta_0}{\alpha_0}$ est déduit de la première condition de résolubilité partielle comme suit :

$$M_1\begin{pmatrix}\alpha_0\\ \beta_0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-4nk^2(n-1)-10nk^2+a_1-2k^2 & \theta\\ -\theta & -4nk^2(n-1)-10nk^2+a_2-2k^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_0\\ \beta_0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\alpha_0[-4nk^2(n-1)-10nk^2+a_1-2k^2]+\theta\beta_0\\ -\theta\alpha_0+[-4nk^2(n-1)-10nk^2+a_2-2k^2]\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} \tag{2.33}$$

De la relation (2.33), on tire un système suivant de deux équations :

On a deux équations :

$$\alpha_0[-4nk^2(n-1)-10nk^2+a_1-2k^2]+\theta\beta_0 = 0 \tag{2.34}$$

$$-\theta\alpha_0+[-4nk^2(n-1)-10nk^2+a_2-2k^2] = 0 \tag{2.35}$$

De l'équation (2.34) ,on peut en déduire $\frac{\beta_0}{\alpha_0}$ comme suit:

$$\frac{\beta_0}{\alpha_0} = \frac{4nk^2(n-1)+10nk^2-a_1+2k^2}{\theta}$$

$$\frac{\beta_0}{\alpha_0} = \frac{4n^2k^2-4k^2n+10nk^2-a_1+2k^2}{\theta}$$

$$\frac{\beta_0}{\alpha_0} = \frac{4n^2k^2+6nk^2-a_1+2k^2}{\theta} \tag{2.36}$$

De la relation (2.32) et (2.36) on tire un système suivant de deux équations :

$$\begin{cases}(4k^2+4)n(n-1)+4n(2+k^2)+1+b=\Lambda \\ \theta+[n(n-1)(4k^2+4)+8n(1+k^2)+k^2+1-b]\left[\frac{4n^2k^2+6nk^2-a_1+2k^2}{\theta}\right]= \end{cases} \quad (2.36)$$

$$\Lambda\left(\frac{4n^2k^2+6nk^2-a_1+2k^2}{\theta}\right) \quad (2.37)$$

Divisons par $\left(\frac{4n^2k^2+6nk^2-a_1+2k^2}{\theta}\right)$ l'équation (2.37) on a :

$$\frac{\theta\theta}{4n^2k^2+6nk^2-a_1+2k^2}+n(n-1)(4k^2+4)+8n(1+k^2)+k^2+1-b=\Lambda \quad (2.38)$$

Nous remarquons que les deuxièmes membres de (2.36) et (2.37) sont égaux et on a :

$$\frac{\theta\theta}{4n^2k^2+6nk^2-a_1+2k^2}+n(n-1)(4k^2+4)+8n(1+k^2)+k^2+1-b$$
$$=(4k^2+4)n(n-1)+4n(2+k^2)+1+b$$

$$2b=\frac{\theta^2}{4n^2k^2+6nk^2-a_1+2k^2}+n(n-1)(4k^2+4)+8n(1+k^2)+k^2+1-(4k^2+4)n(n-1)-4n(2+k^2)-1$$

$$2b=\frac{\theta^2}{4n^2k^2+6nk^2-a_1+2k^2}+(4nk^2+k^2) \quad (2.39)$$

En mettant tous les termes au même dénominateur, on a :

$$2b=\frac{\theta^2+(4nk^2+k^2)[4n^2k^2+6nk^2-a_1+2k^2]}{4n^2k^2+6nk^2-a_1+2k^2} \quad (2.40)$$

Après quelques simplifications algébriques on trouve la troisième condition nécessaire et suffisante pour que$\widetilde{H}(t)$ soit partiellement algébrique :

$$b=\frac{\theta^2+16n^3k^4+28n^2k^4+14nk^4-4nk^2a_1-k^2a_1+2k^4}{2(4n^2k^2+6nk^2-a_1+2k^2)} \quad (2.41)$$

Les conditions nécessaires et suffisantes pour que le hamiltonien $\widetilde{H}(t)$ soit partiellement algébrique sont données par les relations (2.26), (2.31) et (2.41). Ces conditions impliquent qu'une partie des valeurs propres associées à $\widetilde{H}$ peut être déterminée analytiquement.

CHAPITRE III: ETUDE DU HAMILTONIEN ASSOCIE AUX POTENTIELS DEPENDANTS DES FONCTIONS ELLIPTIQUES DE JACOBI PARTIELLEMENT ALGEBRIQUE : cas de $\boldsymbol{\delta = 2}$

Considérons le même hamiltonien tenu en compte pour $\boldsymbol{\delta = 1}$:

$$\mathrm{H}(z) = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{dz}^2}\mathbb{1}_2 + V_D(z) + V_\mathrm{I}(z), \tag{3.1}$$

où : $\mathbb{1}_2$, la matrice identité d'ordre deux

$$V_D(Z) = \begin{pmatrix} a_1\mathrm{sn}^2 + \mathrm{b} & 0 \\ 0 & a_2\mathrm{sn}^2 - \mathrm{b} \end{pmatrix}$$

$$V_I = \begin{pmatrix} 0 & \theta sncn \\ \theta sncn & 0 \end{pmatrix}$$

Signalons que a_1,a_2, b et θ sont des constantes réelles.

La somme $V_D(z) + V_\mathrm{I}(z)$ est le potentiel dépendant des fonctions elliptiques de Jacobi associé à $\mathrm{H}(z)$.

Pour prouver la résolubilité partielle du hamiltonien $\mathrm{H}(z)$, nous allons procéder par une transformation de jauge et un changement de variable.

III.1. Calcul du hamiltonien de jauge

Par la transformation de jauge, le hamiltonien $\mathrm{H}(z)$ de la relation (3.1) devient :

$$\widetilde{H}(Z) = r^{-1}\, H(z) r \tag{3.2}$$

où la fonction de jauge s'écrit :

$$r = \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{dn} & 0 \\ 0 & \mathrm{sn\ cn\ dn} \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

$$r^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\mathrm{dn}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\mathrm{sn\ cn\ dn}} \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

III.2. Transformation de jauge du premier terme du hamiltonien H(z)

Par le même raisonnement utilisé pour le cas $\boldsymbol{\delta = 1}$;on a :

$$-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{dz}^2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{dz}^2} & 0\\ 0 & -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{dz}^2}\end{pmatrix}$$

$$r^{-1}\begin{pmatrix}-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{dz}^2} & 0\\ 0 & -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{dz}^2}\end{pmatrix}r = \begin{pmatrix}\frac{1}{r_1} & 0\\ 0 & \frac{1}{r_2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{dz}^2} & 0\\ 0 & -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{dz}^2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}r_1 & 0\\ 0 & r_2\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}-\left(\frac{1}{r_1}\right)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{dz}^2} & 0\\ 0 & -\left(\frac{1}{r_2}\right)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{dz}^2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}r_1 & 0\\ 0 & r_2\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}-\left(\frac{1}{r_1}\right)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{dz}^2}r_1 & 0\\ 0 & -\left(\frac{1}{r_2}\right)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{dz}^2}r_2\end{pmatrix}$$

$$r^{-1}\begin{pmatrix}-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{dz}^2} & 0\\ 0 & -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{dz}^2}\end{pmatrix}r = \begin{pmatrix}-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{dz}^2} - 2\frac{r_1'}{r_1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dz}} - \frac{r_1''}{r_1} & 0\\ 0 & -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{dz}^2} - 2\frac{r_2'}{r_2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dz}} - \frac{r_2''}{r_2}\end{pmatrix} \quad (3.5)$$

En tenant compte du changement de variable $\mathrm{sn}^2(z,k) = t$,

on obtient [2,5]:

$$-\frac{d^2}{dz^2} = -4t(1-t)(1-k^2t)\frac{d^2}{dt^2} - 2[3k^2t^2 - 2(1+k^2)t + 1]\frac{d}{dt} \quad (3.6)$$

Comme r_1 =dn, le deuxième terme de l'élément 11 de la matrice (3.5) s'écrit grâce à l'annexe 2 et au changement de variable précédent :

$$-2\frac{{r_1}'}{r_1}\frac{d}{dZ} = -2\frac{{r_1}'}{r_1}(2sncndn)\frac{d}{dt}$$

$$= -4\frac{{r_1}'}{r_1}sncndn\frac{d}{dt}$$

$$= -4(k^2t^2 - k^2t)\frac{d}{dt} \quad (3.6)$$

De la même manière le troisième terme de l'élément 11de la matrice (3.4) s'écrit :

$$-\frac{r_1''}{r_1} = -(2k^2t - k^2) = -2k^2t + k^2 \tag{3.7}$$

Comme $r_2 = \text{sn cn dn}$,le deuxième terme et le troisième terme de l'élément 22 de la matrice (3.4) sont déterminés successivement par le même raisonnement :

$$-2\frac{r_2'}{r_2}\frac{d}{dZ} = -2\frac{r_2'}{r_2}(2sncndn)\frac{d}{dt}$$

$$= -4\frac{r_2'}{r_2}sncndn\frac{d}{dt}$$

$$= -4[3k^2t^2 - 2(k^2+1)t + 1]\frac{d}{dt} \tag{3.8}$$

$$-\frac{r_2''}{r_2} = -12k^2t - 4(k^2+1) \tag{3.9}$$

En tenant compte des relations (3.5),(3.6) ,(3.7) , (3.8) ,(3.9) la matrice (3.2) devient :

$$\begin{pmatrix} -\frac{d^2}{dz^2} - 2\frac{r_1'}{r_1}\frac{d}{d_Z} - \frac{r_1''}{r_1} & 0 \\ 0 & -\frac{d^2}{dz^2} - 2\frac{r_2'}{r_2}\frac{d}{d_Z} - \frac{r_2''}{r_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \tag{3.10}$$

où

$$\text{A}= -4t\frac{d^2}{dt^2} + 4k^2t^2\frac{d^2}{dt^2} + 4t^2\frac{d^2}{dt^2} - 4k^2t^3\frac{d^2}{dt^2} - 2[3k^2t^2 - 2(1+k^2)t + 1]\frac{d}{dt} - 4k^2t^2\frac{d}{dt} + 4t\frac{d}{dt} - 2k^2t + 1$$

$$\text{B}=-4t\frac{d^2}{dt^2} + 4k^2t^2\frac{d^2}{dt^2} + 4t^2\frac{d^2}{dt^2} - 4k^2t^3\frac{d^2}{dt^2} - 2[3k^2t^2 - 2(1+k^2)t + 1]\frac{d}{dt} - 4k^2t^2\frac{d}{dt} + 4(k^2+1)t\frac{d}{dt} - 4\frac{d}{dt} - 2k^2t + k^2 + 1$$

III.3. Transformation de jauge du deuxième terme du hamiltonien H(z).

$$r^{-1}V_D(\text{z})\,r = r^{-1}\begin{pmatrix} a_1\text{sn}^2 + \text{b} & 0 \\ 0 & a_2\text{sn}^2 - \text{b} \end{pmatrix} r$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{r_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r_2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1\text{sn}^2 + \text{b} & 0 \\ 0 & a_2\text{sn}^2 - \text{b} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\mathrm{dn}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\mathrm{sncndn}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1\mathrm{sn}^2 + \mathrm{b} & 0 \\ 0 & a_2\mathrm{sn}^2 - \mathrm{b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{dn} & 0 \\ 0 & \mathrm{sncndn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\mathrm{dn}}(a_1\mathrm{sn}^2 + \mathrm{b}) & 0 \\ 0 & \frac{1}{\mathrm{sncndn}}\ (a_2\mathrm{sn}^2 - \mathrm{b}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{dn} & 0 \\ 0 & \mathrm{sncndn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1\mathrm{sn}^2 + \mathrm{b} & 0 \\ 0 & a_2\mathrm{sn}^2 - \mathrm{b} \end{pmatrix} \quad .$$

(3.11)

En tenant compte du changement de variable $\mathrm{sn}^2(\mathrm{z},\mathrm{k}) = t$ la relation (3.11) s'écrit :

$$\begin{pmatrix} a_1\mathrm{sn}^2 + \mathrm{b} & 0 \\ 0 & a_2\mathrm{sn}^2 - \mathrm{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1\mathrm{t} + \mathrm{b} & 0 \\ 0 & a_2\mathrm{t} - \mathrm{b} \end{pmatrix}$$

$$r^{-1}V_D(\mathrm{z})\,r = \begin{pmatrix} a_1\mathrm{t} + \mathrm{b} & 0 \\ 0 & a_2\mathrm{t} - \mathrm{b} \end{pmatrix} \tag{3.12}$$

III.4. Transformation de jauge du troisième terme du hamiltonien H(z)

$$r^{-1}V_I r = \begin{pmatrix} \frac{1}{r_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \theta sncn \\ \theta sncn & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix}$$

$$r^{-1} \begin{pmatrix} 0 & \theta sncn \\ \theta sncn & 0 \end{pmatrix} r = \begin{pmatrix} \frac{1}{r_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \theta sncn \\ \theta sncn & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\mathrm{dn}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\mathrm{sncndn}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \theta sncn \\ \theta sncn & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{dn} & 0 \\ 0 & \mathrm{sncndn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \theta cn^2 sn^2 \\ \theta & 0 \end{pmatrix} \tag{3.13}$$

En tenant compte de l'expression $\mathrm{cn}^2 = 1 - \mathrm{sn}^2$ la relation (3.13)

s'écrit :

$$r^{-1}V_I r = \begin{pmatrix} 0 & \theta(1-sn^2)sn^2 \\ \theta & 0 \end{pmatrix} \tag{3.14}$$

En considérant dans la relation (3.14) le changement de variable $\mathrm{sn}^2(\mathrm{z},\mathrm{k}) = t$, on écrit :

$$r^{-1}V_I r = \begin{pmatrix} 0 & \theta t - \theta t^2 \\ \theta & 0 \end{pmatrix} \tag{3.15}$$

En tenant compte des expressions (3.10), (3.12) et (3.15) ,la forme finale du hamiltonien de jauge est la suivante :

$$\widetilde{H}(t) = r^{-1}H(z)r = \begin{pmatrix} \widetilde{H}_{11}(t) & \widetilde{H}_{12}(t) \\ \widetilde{H}_{21}(t) & \widetilde{H}_{22}(t) \end{pmatrix} \tag{3.16}$$

Après les simplifications ces 4éléments de $\widetilde{H}(t)$ deviennent:

$$\widetilde{H}_{11} = -4t(1-t)(1-k^2t)\frac{d^2}{dt^2} - 2[5k^2t^2 - 2(1+2k^2)t + 1]\frac{d}{dt}$$

$$+(-2k^2 + a_1)t + k^2 + b$$

$$\widetilde{H}_{12} = -\theta t^2 + \theta t$$

$$\widetilde{H}_{21} = \theta$$

$$\widetilde{H}_{22} = -4t(1-t)(1-k^2t)\frac{d^2}{dt^2} - 2[9k^2t^2 - 6(1+k^2)t + 3]\frac{d}{dt} + (a_2 - 12k^2)t + 4k^2$$

$$+4 - b \tag{3.17}$$

Le vecteur générique de l'espace vectoriel invariant sous l'action du hamiltonien de jauge $\widetilde{H}(t)$ a la forme suivante [1,2,5,6]:

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} \alpha_0 t^n + \alpha_1 t^{n-1} + \cdots \\ \beta_0 t^{n-\delta+1} + \beta_1 t^{n-\delta} + \cdots \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_0 t^n + \alpha_1 t^{n-1} + \cdots \\ \beta_0 t^{n-1} + \beta_1 t^{n-2} + \cdots \end{pmatrix} \tag{3.18}$$

Où : $\delta = 2$

Notez que l'action de $\widetilde{H}_1(t)$ sur le vecteur générique $\Psi(t)$augmente son degré d'unité, $\widetilde{H}_0(t)$ laisse inchangé le degré de$\Psi(t)$ tandisque $\widetilde{H}_{-1}(t)$ diminue le degré de $\Psi(t)$.

Considérons le hamiltonien $\widetilde{H}(t)$ de la relation (3.17) en ses composantes :

$$\widetilde{H}(t) = \widetilde{H}_1(t) + \widetilde{H}_0(t) + \widetilde{H}_{-1}(t)\,. \tag{3.19}$$

Avec :

$$\widetilde{H}_1(t) = \begin{pmatrix} -4k^2t^3\frac{d^2}{dt^2} - 10k^2t^2\frac{d}{dt} + (a_1 - 2k^2)t & -\theta t^2 \\ \theta & -4k^2t^3\frac{d^2}{dt^2} - 18k^2t^2\frac{d}{dt} + (a_2 - 12k^2)t \end{pmatrix}$$

(3.20.a)

$$\widetilde{H}_0(t) = \begin{pmatrix} 4(k^2+1)t^2\frac{d^2}{dt^2} + 4(1+2k^2)t\frac{d}{dt} + k^2 + b & \theta t \\ 0 & 4(k^2+1)t^2\frac{d^2}{dt^2} + 12(1+k^2)t\frac{d}{dt} + 4(k^2+1) - b \end{pmatrix}$$

(3.20.b)

$$\widetilde{H}_{-1}(t) = \begin{pmatrix} -4t\frac{d^2}{dt^2} - 2\frac{d}{dt} & 0 \\ 0 & -4t\frac{d^2}{dt^2} - 6\frac{d}{dt} \end{pmatrix}$$

(3.20.c)

III.5. Calcul des matricesM_1, $M_0 et \widetilde{M}_1$

Le vecteur$\widetilde{H}\Psi$ peut être décomposé comme suit [2,5,22] :

$$\widetilde{H}\Psi = \text{diag}(t^{n+1}, t^{n+1})M_1\begin{pmatrix}\alpha_0\\ \beta_0\end{pmatrix} + \text{diag}(t^n, t^n)\left(M_0\begin{pmatrix}\alpha_0\\ \beta_0\end{pmatrix} + \widetilde{M}_1\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \beta_1\end{pmatrix}\right) \tag{3.21}$$

Ce vecteur permet de calculer les matrices d'ordre deux $M_1, M_0\ et\ \widetilde{M}_1$ comme suit :

$$\widetilde{H}_1(t)\begin{pmatrix}\alpha_0 t^n\\ \beta_0 t^{n-1}\end{pmatrix} = \text{diag}(t^{n+1}, t^{n+1})M_1\begin{pmatrix}\alpha_0\\ \beta_0\end{pmatrix} \tag{3.22.a.}$$

$$\widetilde{H}_1(t)\begin{pmatrix}\alpha_1 t^{n-1}\\ \beta_1 t^{n-2}\end{pmatrix} = \text{diag}(t^n, t^n)\widetilde{M}_1\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \beta_1\end{pmatrix} \qquad (3.22.b.)$$

$$\widetilde{H}_0(t)\begin{pmatrix}\alpha_0 t^{n}\\ \beta_0 t^{n-1}\end{pmatrix} = \text{diag}(t^n, t^n)M_0\begin{pmatrix}\alpha_0\\ \beta_0\end{pmatrix} \qquad (3.22.c.)$$

En remplacant $\widetilde{H}_1$ par son expression (3.20.a) dans (3.22.a), on obtient :

$$\widetilde{H}_1(t)\begin{pmatrix}\alpha_0 t^{n}\\ \beta_0 t^{n-1}\end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix}-4k^2t^3\frac{d^2}{dt^2} - 10k^2t^2\frac{d}{dt} + (a_1 - 2k^2)t & -\theta t\\ \theta & -4k^2t^3\frac{d^2}{dt^2} - 18k^2t^2\frac{d}{dt} + (a_2 - 12k^2)t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_0 t^{n}\\ \beta_0 t^{n-1}\end{pmatrix}$$

Après les manipulations algébriques on obtient une matrice 2×1 suivante :

$$\widetilde{H}_1(t)\begin{pmatrix}\alpha_0 t^{n}\\ \beta_0 t^{n}\end{pmatrix} = \text{diag}(t^{n+1}, t^n)\begin{pmatrix}M & -\theta\\ \theta & N\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_0\\ \beta_0\end{pmatrix} \qquad (3.23)$$

M=$-4nk^2(n-1) - 10nk^2 + a_1 - 2k^2$

N= $-4k^2(n-1)(n-2) - 18(n-1)k^2 + a_2 - 12k^2$

En comparant la relation (3.22.a) et (3.23) on a :

$$M_1 =$$
$$\begin{pmatrix}-4nk^2(n-1) - 10nk^2 + a_1 - 2k^2 & -\theta\\ \theta & -4k^2(n-1)(n-2) - 18(n-1)k^2 + a_2 - 12k^2\end{pmatrix}$$

(3.24)

En remplaçant $\widetilde{H}_1$ par son expression (3.20.a) dans (3.22.b), on obtient :

$$\widetilde{H}_1(t)\begin{pmatrix}\alpha_1 t^{n-1}\\ \beta_1 t^{n-2}\end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix}-4k^2t^3\frac{d^2}{dt^2} - 10k^2t^2\frac{d}{dt} + (a_1 - 2k^2)t & -\theta t^2\\ \theta & 4k^2t^3\frac{d^2}{dt^2} - 18k^2t^2\frac{d}{dt} + (a_2 - 12k^2)t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1 t^{n-1}\\ \beta_1 t^{n-2}\end{pmatrix}$$

De cette égalité, après les manipulations algébriques on aboutit à une nouvelle égalité de la forme suivante :

$$\widetilde{H}_1(t)\begin{pmatrix}\alpha_1 t^{n-1}\\ \beta_1 t^{n-1}\end{pmatrix} = \text{diag}(t^n, t^n)\begin{pmatrix}O & -\theta\\ \theta & P\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \beta_1\end{pmatrix} \qquad (3.25)$$

O$= -4k^2(n-1)(n-2) - 10k^2(n-1) + a_1 - 2k^2$

P$= -4k^2(n-2)(n-3) - 18k^2(n-2) + a_2 - 12k^2$

En comparant (3.22.b) et (3.24), on déduit :

$$\widetilde{M}_1 = \begin{pmatrix}-4k^2(n-1)(n-2) - 10k^2(n-1) + a_1 - 2k^2 & -\theta\\ \theta & -4k^2(n-2)(n-3) - 18k^2(n-2) + a_2 - 12k^2\end{pmatrix} \qquad (3.26)$$

En remplaçant $\widetilde{H}_0$ par son expression (3.20.b) dans (3.22.c), on obtient :

$$\widetilde{H}_0(t)\begin{pmatrix}\alpha_0 t^n\\ \beta_0 t^n\end{pmatrix} = \text{diag}(t^n, t^n) M_0 \begin{pmatrix}\alpha_0\\ \beta_0\end{pmatrix}$$

$$\widetilde{H}_0(t)\begin{pmatrix}\alpha_0 t^n\\ \beta_0 t^{n-1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}Q & \theta t\\ 0 & R\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_0 t^n\\ \beta_0 t^{n-1}\end{pmatrix}$$

où :Q$= (4k^2+4)t^2\frac{d^2}{dt^2} + 4(1+2k^2)t\frac{d}{dt} + k^2 + b$

R$= (4k^2+4)t^2\frac{d^2}{dt^2} + 12(1+k^2)t\frac{d}{dt} + 4(k^2+1) - b$

Après les manipulations algébriques on obtient une égalité suivante :

$$\widetilde{H}_0(t)\begin{pmatrix}\alpha_0 t^n\\ \beta_0 t^n\end{pmatrix} = \text{diag}(t^n, t^n)\begin{pmatrix}Q' & \theta\\ 0 & R'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_0\\ \beta_0\end{pmatrix} \qquad (3.27)$$

où : $Q' = (4k^2+4)n(n-1) + 4n(1+2k^2) + k^2 + b$

R'=$(4k^2+4)(n-1)(n-2) + 12(n-1)(1+k^2) + 4(k^2+1) - b$

En comparant les relations (3.22.b) et (3.27) ,on déduit :

$$M_0 = \begin{pmatrix} (4k^2+4)n(n-1)+4n(1+2k^2)+k^2+b & \theta \\ 0 & (4k^2+4)(n-1)(n-2)+12(n-1)(1+k^2)+4(k^2+ \end{pmatrix}$$

(3.28)

Donc les matrices 2×2 M_1,$\widetilde{M}_1$ *et* M_0 sont données successivement par les relations (3.24), (3.26) et (3.28).

III.6. Trois conditions de résolubilité partielle de l'opérateur de jauge

Les trois conditions nécessaires et suffisantes pour que l'opérateur $\widetilde{H}(t)$ de (3.19) ait un espace vectoriel invariant sous son action sont déterminées successivement[2].

III.6.1.Première condition de résolubilité partielle de $\widetilde{H}(t)$

Cette condition est déduite de la relation suivante [2,5,22]:

dét $M_1 = 0$

$$\begin{vmatrix} -4nk^2(n-1)-10nk^2+a_1-2k^2 & -\theta \\ \theta & -4k^2(n-1)(n-2)-18(n-1)k^2+a_2-12k^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$[-4nk^2(n-1)-10nk^2+a_1-2k^2][-4k^2(n-1)(n-2)-18(n-1)k^2+a_2-12k^2]+\theta^2=0$$

$$\begin{aligned} &16k^4n^4-64k^4n^3+80k^4n^2-32k^4n+72k^4n^3-144k^4n^2+72k^4n^3+72k^4n \\ &-4k^2n^2a_2+48k^4n^2a_2+4nk^2a_2-48k^4n+40k^4n^3-120k^4n^2+80k^4n \\ &+180k^4n^2-180k^4n-10nk^2a_2+120nk^4-4k^2n^2a_1+12k^2na_1 \\ &-8k^2a_1+8k^4n^2-24k^4n+16k^4-18a_1k^2n+18a_1k^2+36k^4n-36k^4 \\ &+a_1a_2-12k^2a_1-2k^2a_2+24k^4+\theta^2=0 \end{aligned}$$

Après ces quelques simplifications algébriques on trouve la première condition nécessaire et suffisante pour que$\widetilde{H}(t)$ soit partiellement algébrique :

$$\theta^2=-16k^4n^4-48k^4n^3-52k^4n^2-24k^4n-4k^4+(a_1+a_2)(4k^2n^2+6k^2n+2k^2)-a_1a_2 \qquad (3.29)$$

III.6.2.Deuxième condition de résolubilité partielle de $\widetilde{H}(t)$

Cette condition est déduite de la relation suivante [2,5,22]:

dét$\widetilde{M}_1$ =0

$$\begin{vmatrix} -4k^2(n-1)(n-2)-10k^2(n-1)+a_1-2k^2 & -\theta \\ \theta & -4k^2(n-2)(n-3)-18k^2(n-2)+a_2-12k^2 \\ 0 & \end{vmatrix} = \quad 3.30$$

$$[-4k^2(n-1)(n-2)-10(n-1)k^2+a_1-2k^2][-4k^2(n-2)(n-3)-18k^2(n-2)+a_2-12k^2]+\theta^2=0$$

$$16k^4n^4-128k^4n^3+368k^4n^2-448k^4n+192k^4+72k^4n^3-360k^4n^2+576k^4n-288k^4-4k^2n^2a_2+12na_2k^2-8a_2k^2+48n^2k^4-144nk^4+96k^440k^4n^3-240k^4n^2+440k^4n-240k^4+180k^4n^2-540k^4n+360k^4-10k^2a_2n+10k^2a_2+120k^4n-120k^4-4a_1k^2n^2+20k^2na_1-24a_1k^2+8n^2k^4-40nk^4+48k^4=-18k^2a_1n+36k^2a_1+36k^4n-72k^4+a_1a_2-12a_1k^2-2a_2k^2+24k^4+\theta^2=0 \qquad (3.31)$$

En remplaçant θ^2 dans (3.31)par son expression dans la première condition on obtient :

$$16k^4n^4-128k^4n^3+368k^4n^2-448k^4n+192k^4+72k^4n^3-360k^4n^2+576k^4n-288k^4-4k^2n^2a_2+12na_2k^2-8a_2k^2+48n^2k^4-144nk^4+96k^4+40k^4n^3-240k^4n^2+440k^4n-240k^4+180k^4n^2-540k^4n+360k^4-10k^2a_2n+10k^2a_2+120k^4n-120k^4-4a_1k^2n^2+20k^2na_1-24a_1k^2+8n^2k^4-40nk^4+48k^4-18k^2a_1n+36k^2a_1+36k^4n-72k^4+a_1a_2-12a_1k^2-2a_2k^2+24k^4-16k^4n^4-48k^4n^3-52k^4n^2-4k^4n-4k^4+(a_1+a_2)(4k^2n^2+6k^2n+2k^2)-a_1a_2=0 \qquad (2.32)$$

Après ces quelques simplifications algébriques on trouve la deuxième condition nécessaire et suffisante pour que$\widetilde{H}(t)$ soit partiellement algébrique :

$$a_1=\frac{64k^4n^3+48k^4n^2+24k^4n+4k^4-8k^2na_2-2k^2a_2}{8k^2n+2k^2} \qquad (2.33)$$

III.6.3.Troisième condition de résolubilité partielle de $\widetilde{H}(t)$

Cette condition est aussi déduite de la relation suivante [2,5,22]:

$$M_0\begin{pmatrix}1\\ \frac{\beta_0}{\alpha_0}\end{pmatrix}=\Lambda\begin{pmatrix}1\\ \frac{\beta_0}{\alpha_0}\end{pmatrix} \tag{3.34}$$

où Λ un paramètre constant.

$\frac{\beta_0}{\alpha_0}$ est déduit de la première condition de résolubilité partielle comme suit :

$$M_1\begin{pmatrix}\alpha_0\\ \beta_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}C & -\theta\\ \theta & D\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_0\\ \beta_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\alpha_0[-4nk^2(n-1)-10nk^2+a_1-2k^2]-\theta\beta_0\\ \theta\alpha_0+\beta_0[-4k^2(n-1)(n-2)-18(n-1)k^2+a_2-12k^2]\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \tag{3.35}$$

De la relation (2.35) on tire deux équations suivantes :

$$\alpha_0[-4nk^2(n-1)-10nk^2+a_1-2k^2]-\theta\beta_0=0 \tag{3.36}$$

$$\theta\alpha_0+\beta_0[-4k^2(n-1)(n-2)-18(n-1)k^2+a_2-12k^2]=0 \tag{3.37}$$

De l'équation (3.36) ,on peut en déduire $\frac{\beta_0}{\alpha_0}$ comme suit:

$$\frac{\beta_0}{\alpha_0}=\frac{-4nk^2(n-1)-10nk^2+a_1-2k^2}{\theta}$$

$$\frac{\beta_0}{\alpha_0}=\frac{-4n^2k^2-6nk^2+a_1-2k^2}{\theta} \tag{3.38}$$

L'expression (3.34) devient :

$$\begin{pmatrix}Q' & \theta\\ 0 & R'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ \frac{-4n^2k^2-6nk^2+a_1-2k^2}{\theta}\end{pmatrix}=\Lambda\begin{pmatrix}1\\ \frac{-4n^2k^2-6nk^2+a_1-2k^2}{\theta}\end{pmatrix} \tag{3.39}$$

$$\begin{pmatrix}Q'-4n^2k^2+4k^2n-10nk^2+a_1-2k^2\\ R'\frac{-4n^2k^2-6nk^2+a_1-2k^2}{\theta}\end{pmatrix}=\Lambda\begin{pmatrix}1\\ \frac{-4n^2k^2-6nk^2+a_1-2k^2}{\theta}\end{pmatrix} \tag{3.40}$$

De la relation (3.40) on tire deux équations suivantes:

$$Q' - 4n^2k^2 - 6nk^2 + a_1 - 2k^2 = \Lambda \quad (3.41)$$

$$R' = \Lambda \quad (3.42)$$

Nous remarquons que les deuxièmes membres de (3.41) et (3.42) sont égaux et on a :

$$Q' - 4n^2k^2 - 6nk^2 + a_1 - 2k^2 = R' \quad (3.43)$$

Les manipulations algébriques à cette équation font aboutir à une égalité suivante :

$$b = \frac{4k^2n^2+2nk^2+k^2-a_1}{2} \quad (3.44)$$

(3.44) est la troisième condition nécessaire et suffisante pour que$\widetilde{H}(t)$ soit partiellement algébrique :

Les conditions nécessaires et suffisantes pour que le hamiltonien $\widetilde{H}(t)$ soit partiellement algébrique sont données par les relations (3.29), (3.33) et (3.44). Ces conditions impliquent qu'une partie des valeurs propres associées à $\widetilde{H}$ peut être déterminée analytiquement.

CONCUSION GENERALE

Notre travail a généralement traité les hamiltoniens partiellement algébriques en mécanique quantique non relativiste.

Dans le premier chapitre, après avoir souligné les notions de base et les propriétés des opérateurs complètement algébriques et des opérateurs partiellement algébriques, j'ai précisé les différentes méthodes de résolubilité partielle les plus couramment utilisés, à savoir la méthode directe, la méthode algébrique de Lie et la méthode analytique de résolubilité partielle. Par terminer la suite, j'ai prouvé la résolubilité complète du hamiltonien de l'oscillateur harmonique quantique unidimensionnel et donne aussi les caractéristiques des fonctions elliptiques sans oublier de parler sur l'importance des potentiels élliptiques dans la physique des solides, la théorie des champs et la cosmologie.

Dans le second chapitre, j'ai pu traiter le cas d'hamiltonien partiellement algébrique dont la valeur de δ=1.

Ici, j'applique la méthode analytique de résolubilité partielle afin de prouver les trois conditions nécéssaires et suffisantes pour qu'un autre type d'opérateur matriciel d'ordre deux dépendant du potentiel elliptique de Jacobi soit partiellement algébrique.

Dans le troisième et dernier chapitre, j'ai pu traiter le même cas d'hamiltonien partiellement algébrique dont la valeur de δ=2[4,5] .

Ici, j'applique aussi la méthode analytique de résolubilité partielle afin de prouver que le même type d'opérateur est partiellement algébrique.

J'affirme que mon travail a abouti à l'objectif que je me suis fixé qui est celui de prouver que le HAMILTONIEN MATRICIEL D'ORDRE DEUX DEPENDANT DU POTENTIEL ELLIPTIQUE DE JACOBI construit est partiellement algébrique pour le cas $\delta = 1$ et pour le cas $\delta = 2$.

Sans pour autant prétendre avoir été complet dans ce mémoire, nous interpelons d'autres étudiants à pousser encore plus loin la présente étude et contribuer davantage à son enrichissement et surtout sur les applications des fonctions elliptiques.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1]. A. Nininahazwe,Quasi-Exactly Solvable Extension of some Integrable Quantum Models, Université de Mons-Hainaut, thèse (Mars 2008).

[2]. Y. Brihaye, A. Nininahazwe and B. P. Mandal, *J. Phys.A:Math*.ther.40 (2007).

[3].Gérard NDAYEGAMIYE,la resolubilité complète des hamiltoniens matriciels de Jaynes-Cummings et de Mandal., *Université du Burundi,mémoire*,(2013).

[4]. Y. Brihaye and B. Hartmann, Mod. Phys. Lett.A16, 1895-1906 (2001).

[5]. A. Nininahazwe, Open Journal of Microphysics (OJM), "*Matrix*

Quasi- Exactly solvable Jacobi Elliptic Hamiltonian", Vol 3 n^0 3, (2013).

[6].Infeld, L. & Hull, T.E. (1951), The factorization method, Rev. Mod. Phys. 23, 21.

[7].M.V. Shifman and A.V. Turbiner, Comm.Math.Phys.126, 347 (1989).

[8].González-López, A. et al. (1994), Quasi-exactly solvable Lie algebras, J. Phys. A 27, 6127.

[9].John von Neumann,Mathematical Foundations of Quantum Mechanics(1932).

[10] .J.Bjorken and S. Drell ; Relativistic Quantum Mecanics, Mc Graw-Hill (1964).

[11].A. Messiah, Mecanique Quantique, Dunod 22ème édition.

[12] L.D.Landau and E.M.Lifshitz ; Quantum Mechanics,Volume 3,third edition.

[13] .C.Ngo et H.Ngo.Physique quantique :Introduction,Dunod, Paris, 2000, p.68.

[14]. Riesz, F. & Sz.-Nagy, B. Functional Analysis* (Dover Publications, 1990) .

[15].J. HLadik,Chrysos, P. E.Hladik, L.U. Ancarani; Mécanique quantique, Atomes et noyaux,Application technologiques $3^{ème}$ edition.

[16]. De Boeck and Larcier S.A, Mécanique quantique, 1ère édition, De Boeck Université (2000).

[17]. Nghiêm Xuân Hai, La transformation de Fourier-Plancherel analytique des groupes de Lie. I : algèbres de Weyl et opérateurs différentiels*, Annales de l'Institut Fourier, 33(4), 1983, pp. 95–133.

[18]. Olshanetsky,M.A., &Perelomov,A.M.(1983).Quantum integrable systems related to Lie algebras. Pysics Reports,94(6),313-404.

[19].Hitchin, N. (1987).Stable bundles and integrable systems.Duke Mathematical Jurnal, 54(1),91-114.

[20].Pysique Terminales C,D,E, les classiques africains, Versailles Cedex (France),1992, pp.161-163.

[21].D.Nibasumba, Exact solvabilité du Hamiltonien étendu de l'oscillateur harmonique, Université du Burundi, Bujumbura, 5030145 (2007), pp.9-10.

[22]. E.MANIRAKIZA et L.KAYUMBA,Hamiltoniens partiellement algebriques matriciels d'ordre deux dépendant des fonctions elliptiques de Jacobi,, *Université du Burundi,mémoire,*(2013).

[23]. A.CAYLEY, *Elliptic function, Dover Publications Inc,* New -York (1961).

[24]. E.NAHIMANA, *Eléments fondamentaux de la théorie sur les intégrales et fonctions elliptiques, Université du Burundi,mémoire,*(2004).

[25]. I. Hakizimana et J. Nahimana, *Application de la méthode analytique de résolubilité partielle aux opérateurs matriciels d'ordre deux*, Université du Burundi, mémoire,(2011).

[26].A.V. Turbiner, Comm.Math.Phys.118, 467-474(1988)

[27].Sakurai, JJ., & Napolitano, J.(2020). Modern Quantum Mecanics (2nd ed.). Cambridge University Press.

[28].Ballentine ,L.E.(2023).Quantum Mecanics: A Modern D EVELOPMENT (2nd ed.). World Scientific.

[29].Finkel, F., González-López, A., Rodríguez, M.A. (2000), On Hamiltonians with partially algebraic spectrum, J. Phys. A 33.

ANNEXES

ANNEXE 1

Dans cette annexe, nous présentons les différentes propriétés des fonctions elliptiques de Jacobi sn, cn, et dn que nous avons utilisées au deuxième et troisième chapitre. Ces fonctions satisfont les relations suivantes :

$\mathrm{cn}^2 + \mathrm{sn}^2 = 1$

$\mathrm{dn}^2 + k^2\mathrm{sn}^2 = 1$

$\frac{\mathrm{d\,sn}}{\mathrm{dz}} = \mathrm{cn\ dn}$

$\frac{\mathrm{d\,sn}^2}{\mathrm{dz}} = 2\ \mathrm{sncn\ dn}$

$\frac{\mathrm{d\,cn}}{\mathrm{dz}} = -\mathrm{sn\ dn}$

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dz}}\mathrm{dn} = -k^2\mathrm{sn\ cn}$

Les périodes respectives de sn, cn, et dn sont $4(k)$, $4(k)$ et $4(k)$; $\mathrm{K}(k)$ est l'intégrale de la forme :

$\mathrm{K(k)} = \int_0^{\frac{\eth}{2}} \frac{\mathrm{d}\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}}$.

Si $\mathrm{k} = 0$, alors $\mathrm{K}(0) = \frac{\eth}{2}$ et les fonctions de Jacobi se réduisent en fonctions trigonométriques :

$\mathrm{sn(z,0)} = \sin(\mathrm{z}) = \infty$ et les fonctions de Jacobi se réduisent à des fonctions élémentaires du type suivant :

$\mathrm{sn(z,1)} = \tanh(\mathrm{z})$

$\mathrm{cn(z,1)} = \mathrm{dn(z,1)} = \frac{1}{\mathrm{ch}(z)}$

Il est utile de savoir comment se comportent ces fonctions elliptiques de Jacobi si on change le signe de l'argument :

$\mathrm{sn}(-\mathrm{z}) = -\sin(\mathrm{z}),\ \mathrm{cn}(-\mathrm{z}) = \mathrm{cn}(\mathrm{z}),\ \mathrm{dn}(-\mathrm{z}) = \mathrm{dn}(\mathrm{z})$

ANNEXE$_2$

Voici quelques résultats très utiles pour faire les calculs du deuxième et du troisième chapitre.

Pour rappel [11] : $t = \mathrm{sn}^2$

f	$\frac{f''}{f}$	$\frac{f'}{f}$ sn cndn
1	0	0
sn	$2k^2t-(k^2+1)$	$k^2t^2-(k^2+1)t+1$
cn	$2k^2t-1$	k^2t^2-t
cn	$2k^2t-k^2$	$k^2t^2-k^2t$
cndn	$6k^2t-(k^2+1)$	$2k^2t^2-(k^2+1)t$
sn dn	$6k^2t-(4k^2+1)$	$2k^2t^2-(2k^2+1)t+1$
sn cn	$6k^2t-(k^2+4)$	$2k^2t^2-(k^2+2)t+1$
sn cndn	$4[3k^2t-(k^2+1)]$	$3k^2t^2-2(k^2+1)t+1$