2025

Fonction sommatoire d'une fonction moyenne

Bashirahishize, Aline

UB, FS

UNIVERSITE DU BURUNDI

FACULTE DES SCIENCES

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

CENTRE DE RECHERCHE EN MATHEMATIQUES ET PHYSIQUE

FONCTION SOMMATOIRE D'UNE FONCTION MOYENNE

Par :

Aline BASHIRAHISHIZE

Mémoire présenté et défendu publiquement en vue de l'obtention du Diplôme de Master en Mathématiques Fondamentales et Appliquées.

Sous la direction du :

Pr Servat NYANDWI

Bujumbura, Janvier 2025

Les membres du Jury

Pr Gaspard BANGEREZAKO (**Président**)
Dr Menus NKURUNZIZA (**Secrétaire**)
Pr Servat NYANDWI (**Directeur**)
Dr Renovat NKUNZIMANA (**Membre**)

Dédicaces

A mes parents,
A mon cher mari et à mon enfant,
A mes frères et sœurs ,
A toute ma famille,
Je dédie ce mémoire.

Remerciements

La réalisation de ce mémoire a été possible grâce aux concours et aux efforts de plusieurs personnes à qui je voudrais témoigner ma gratitude la plus profonde.

Je voudrais tout d'abord adresser toute ma reconnaissance au Professeur Servat Nyandwi, Directeur de ce mémoire pour avoir dirigé ce travail. Ses précieux conseils, son aide, son soutien scientifique et humaine m'ont donné la patience et la volonté d'accomplir travail de fin du cycle de Master.
Je remercie également les membres du jury pour avoir acceptés d'examiner ce mémoire.
Je n'oublie pas les enseignants des Département des Mathématiques et Physique de la Facultés des Sciences de l'Université du Burundi qui n'ont ménagé aucun effort pour m'aider à améliorer mes connaissances et mes compétences scientifiques.

Que mon mari, mes frères et sœurs, toute ma famille qu'ils se sentent concernés par cette page de remerciements.

J'aimerais remercier, tous mes camarades des Départements des Mathématiques et Physique de la Faculté des Sciences de l'Université du Burundi, pour leur confiance, leurs encouragements et leur collaboration pendant notre parcours d'études de Master.
En fin, je tiens à remercier toute personne qui a participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Résumé

Dans ce mémoire, nous étudions la valeur moyenne de la fonction f_g définie par la relation

$$f_g(n) = \frac{1}{h(n)} \sum_{d/n} g(d) f(d),$$

où f est une fonction arithmétique, additive et constante sur l'ensemble des nombres premiers P, de même que la fonction g qui est multiplicative positive et s'annulant sur les entiers ayant un facteur carré et

$$h(n) = \sum_{d/n} g(d).$$

Dans cette étude, nous avons obtenu un terme d'erreur d'ordre

$$\frac{x}{(\log x)^{m+1}},$$

où m est un entier $\geqslant 0$. Comme application, on considère les fonctions

$$g(n) = \mu^2(n)(k-1)^{\omega(n)} \ et \ \ f(n) = \omega(n)$$

où μ^2 est le carré de la fonction de Möbius et $\omega(n)$ le nombre de facteurs premiers distincts de n. A part l'étude de la fonction f_g, nous rappelons les notions de base de la théorie des nombres : les fonction arithmétiques, les séries de Dirichlet, la factorisation, l'intégrale de Stieltjes et le théorème des nombres premiers(T.N.P).

Abstract

In this dissertation, we study the mean value of the function f_g defined by the relation :

$$f_g(n) = \frac{1}{h(n)} \sum_{d/n} g(d) f(d),$$

where f is an arithmetic function additive and constant over the set of numbers P, just as the function g is multiplicative positive and cancelling over integers with a square factor and

$$h(n) = \sum_{d/n} g(d).$$

In this study, we obtained a error term of order

$$\frac{x}{(\log x)^{m+1}},$$

where m is an integer $\geqslant 0$. As application, we consider the functions

$$g(n) = \mu^2(n)(k-1)^{\omega(n)} \; and \; f(n) = \omega(n),$$

where μ^2 is a square function of the Möbius application and $\omega(n)$ the number of distinct prime factors of n. In addition to the study of the function f_g, this dissertation also introduces basic notions of number theory, arithmetic functions, Dirichlet series, factoring, the Stieltjes integral and the prime number theorem (P.N.T.).

Table des matières

Notations, Sigles et Abréviations

1. $\mathbb{N}^*$ désigne l'ensemble des nombres naturels non nuls ;
2. p désigne un nombre premier ;
3. P est l'ensemble des nombres premiers ;
4.(n,m) désigne le pgcd(n,m) ;
5. $p^r//n$ signifie p^r divise n et p^{r+1} ne divise pas n ;
6. [x] est la partie entière de x c'est-à-dire [x] $= \sum_{n\leq x} 1$
7. $\{x\}$ est la partie décimale de x ;
8. $\mathbf{1}$(n) : la fonction définie par $\mathbf{1}$(n)= 1 pour tout entier n ;
9. τ(n) : le nombre de diviseurs positifs de l'entier n ;
10. $\sigma(n)$: la somme des diviseurs positifs de l'entier n ;
11. $\omega(n)$: le nombre de facteurs premiers distincts de n ;
12. $\mu(n)$: la fonction de Möbius définie par

$$\mu(n) = \begin{cases} 0 \ si\ n\ est\ divisible\ par\ un\ carré\ parfait, \\ (-1)^{\omega(n)}\ sinon; \end{cases}$$

13. $\varphi(n)$: la fonction d'Euler qui compte le nombre d'entiers $m \leq n$ tels que (m,n) = 1 c'est-à-dire

$$\varphi(n) = \sum_{m\leqslant n,(m,n)=1} 1;$$

14. $\Lambda(n)$: la fonction de Von Mongoldt définie par :

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \ln p\ si\ n \ = \ p^r\ avec\ r \ \geqslant \ 1, \\ 0\ sinon. \end{cases}$$

15. $Re(s) = \sigma$ et$Im(s) = t$ désignent respectivement la partie réelle et la partie imaginaire du nombre complexe $s = \sigma + it$
16. T.N.P : Théorème des nombres premiers.
17. A :ensembles des fonctions additives
18. $f = 0(g)$
19. $n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha i}$ ou $n = \prod_{p^\alpha//n} p^\alpha$ est la factorisation de n en facteurs premiers
20. $f \backsim g$ signifie $lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$
21. $f(x) = O(g(x))$ ou$f << g$, les notations de Landau et Vinog radov, pour signifier qu'il existe une constante $c > 0$ et un réel x_0 tel que pour tout $x \geqslant x_0$,$\mid f(x) \mid \leq cg(x)$.
22. $\log x$ désigne le logarithme népérien de x ;

23. La relation a $\equiv$ b[q] signifie l'existence d'un entier relatif k tel que a =qk + b.
24. $\sum_{d/n} f(d)$ est la somme des valeurs f(d), où d est un diviseur de n.
25. $\sum_{n\leq x} f(n)$ est le réel f(1) + f(2) + $\cdots$ + f([x]).
26. $\pi(x)$ est le nombre des nombres premiers $\leq x$, $\pi(x) = \sum_{p\leq x} 1$.

Avant-propos

Les fonctions arithmétiques sont des concepts utilisés en théorie des nombres pour caractériser quelque fois les sous-ensembles des diviseurs d'un entier n, comme les diviseurs premiers, les diviseurs sans facteur carré, les diviseurs unitaires, les diviseurs friables ou criblés.

La plus part des fonctions considérées sont additives ou multiplicatives. Outre la caractérisation des sous-ensembles des diviseurs, les fonctions arithmétiques intéressent les chercheurs en étudiant leurs valeurs moyennes sur un sous-ensemble de $\mathbb{N}^*$.

Notre sujet d'étude *"Fonction sommatoire d'une fonction moyenne"* s'inscrit dans le cadre des autres recherches de la théorie des nombres via l'estimation de $\sum_{n\leq x} f_g(n)$.

Par ailleurs, les fonctions qui font l'objet d'étude possèdent les caractéristiques des moyennes pondérées "concepts clés de la statistique inférentielle"sauf que le traitement de ces objets mathématiques diffère de celui des mesures statistiques. La suite de cet avant-propos commence par un chapitre intitulé "*introduction générale*"

Chapitre 1

Introduction générale

La théorie des nombres est l'une des branches des mathématiques qui étudie la répartition des nombres premiers, les séries de Dirichlet ,l'estimation des sommes partielles des fonctions arithmétiques.
L'estimation des sommes partielles des fonctions arithmétiques utilisent le plus souvent la factorisation d'un entier naturel c'est -à- dire n = $\prod_{p^r/n} p^r$ où p est un nombre premier. Parmi les facteurs qui interviennent dans la factorisation de n, voir dans [7], il y a les facteurs unitaires d/n et pgcd(d, $\frac{n}{d}$) = 1 [6] et des facteurs "d" de n tel que d/n mais d^2 ne le divise pas, les facteurs "d" de n tel que d^k/n, $k \geqslant 2$. Les entiers ayant les diviseurs de la dernière catégorie sont appelées "entiers puissants [6] et les second entiers sont dits sans facteur carré[12].
Ces dernières années, beaucoup de chercheurs se sont intéressés aux entiers sans facteur carré. Parmi ces chercheurs, il y a J.M De Koninck et J.Grah [6], A.Ivic et G.Tenembaum [10] et Mongi Naïmi [16].
Les trois derniers mathématiciens ont étudié les entiers sans facteur carré et y- friables c'est à dire si p/n alors p $\leqslant$ y. Récemment Servat Nyandwi et al.[?], ont emboîté le pas de ces derniers en généralisant quelques résultats de J.M De Koninck et J.Grah qui ont étudié les valeurs moyennes des fonctions additives définies par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} f_1(n) &= \frac{1}{\tau(n)} \sum_{d/n} f(d) \\ f_2(n) &= \frac{1}{2^{\omega(n)}} \sum_{d/n} \mu^2(d) f(d) \\ f_3(n) &= \frac{1}{2^{\omega(n)}} \sum_{d/n,(d,\frac{n}{d})=1} f(d) \end{aligned} \tag{1.1}$$

où μ^2 est le carré de la fonction de Möbius, $\tau(n)$ est le nombre de diviseurs de n($\tau(n) = \sum_{d/n} 1$) et $\omega(n)$ est le nombre de facteurs premiers distincts de n($\omega(n) = \sum_{p/n} 1$) et f une fonction arithmétique.
Ces fonctions ressemblent à des moyennes pondérées, un concept clé de la statistique. Les propriétés de ces fonctions ainsi que les estimations de leurs sommes partielles appelées "fonctions sommatoires" ont été abondamment étudiées non seulement par J.M De Ko-

ninck et J.Grah mais aussi par d'autres chercheurs voir dans [7] et dans [?].
Par exemple S. Gaboury a amélioré le terme d'erreur dans l'estimation des fonctions

$$\sum_{n\leqslant x} f_i(n)$$

où i $\in \{1,2,3\}$ et f_i est une fonction additive constante sur l'ensemble des nombres premiers P c'est-à-dire si pgcd(m,n) = 1, alors

$$f_i(m,n) = f_i(m) + f_i(n) et f_i(p) = f_i(2),$$

pour tout $i \in \{1,2,3\}$.
Il a obtenu un terme d'erreur d'ordre $\frac{x}{(\log x)^{m+1}}$ au lieu de celui de $\frac{x}{\log x}$.
Se référant aux des fonctions f_i, S. Nyandwi et al.[18] ont introduit des fonctions arithmétiques f et g, où la première est une fonction arithmétique quelconque , la seconde, une fonction multiplicative positive vérifiant la contrainte $g(p^r) = 0$ si $r \geqslant 2$ avec p est un nombre premier. S.Nyandwi et al.[18] ont montré que la fonction f_g est multiplicative

$$(pgcd(m,n) = 1 \Rightarrow f_g(mn) = f_g(m)f_g(n)).$$

(respectivement additive, pgcd(m,n) = 1 $\Rightarrow f_g(mn) = f_g(m) + f_g(n)$) selon que f le soit. La fonction f_g généralise la fonction f_2 définie par J.M De Koninck et J.Grah voir la relation(1.1).
En exploitant la méthode de Mongi Naïmi, utilisée pour estimer la quantité

$$\sum_{n\leq x, p/n, p\leq y} \mu^2(n) f(n),$$

où f est une fonction multiplicative vérifiant la condition(C_δ) ; c'est-à-dire la série

$$\sum_p \frac{|f(p)-1|}{p^\delta} \tag{1.2}$$

converge pour un réel $\delta \in]0,1[$, S.Nyandwi et al. ont estimé par deux méthodes différentes dans un large domaine, la fonction $\sum_{n\leq x, p/n, p\leq y} f_g(n)$ où f est multiplicative vérifiant la condition C_δ. Contrairement à J.M De Koninck , J.Grah et S.Gaboury qui ont étudié les moyennes des fonctions f_i lorsque f est additive, S.Nyandwi et al. ont exploité le caractère multiplicatif de f et la relation $f_g = \mu^2 * g_1$ où g_1 est une fonction définie par une série de Dirichlet définie dans le chapitre quatre.
Il est connu en général que l'étude d'une moyenne d'une convolution f dépend de sa série de Dirichlet.
Par exemple, S.Nyandwi et al. ont exploité le lien entre la série de Dirichlet associée à f_g, c'est-à-dire la fonction

$$F_g(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f_g(n)}{n^s} \tag{1.3}$$

si Re(s) >1 et la convolution de Dirichlet de f_g définie ci-haut. Les autres chercheurs ont

exploité la factorisation d'un entier n et le fait que f_i est additive (si n = $\prod_{p^r//n} p^r$, alors $f(n) = \sum_{p^r//n} f(p^r)$).
Dans ce mémoire, nous utilisons la méthode de S.Gaboury pour estimer la fonction

$$\sum_{n\leqslant x} f_g(n),$$

lorsque f est additive et constante sur l'ensemble des nombres premiers P de même que g.
Dans les paragraphes suivants nous présentons les résultats de J.M.De Koninck et J.Grah et ceux de S.Gaboury que nous avons généralisés dans ce mémoire .
Soit f une fonction additive, constante sur l'ensemble des nombres premiers P et vérifiant la condition

$$f(p^r) - f(p^{r-1}) << 1 \tag{1.4}$$

pour tout entier $r \geqslant 1$
Posons

$$c_{f_i} = f_i(2)$$

et

$$D_{f_i} = c_{f_i}C + \sum_{r\geq 2}\sum_{p} \frac{f_i(p^r) - f_i(p^{r-1})}{p^r}$$

avec

$$C = \gamma + \sum_{p}\left(\log(1-\frac{1}{p}) + \frac{1}{p}\right)$$

et γ la constante d'Euler. Sous les conditions précédentes ,dans[6], J.M.De Koninck et J.Grah ont montré le lemme 1.1.

Lemme 1.1. $\forall i \in \{1, 2, 3\}$, *on a*

$$\sum_{n\leqslant x} f_i(n) = c_{f_{i_1}} x \log\log x + c_{f_{i_2}} x + O\left(\frac{x}{\log x}\right). \tag{1.5}$$

Dans [9], S.Gaboury a montré le lemme suivant.

Lemme 1.2. *Soit f vérifiant les conditions du lemme 1.1, on a alors, pour* $i \in \{1, 2, 3\}$

$$\sum_{n\leqslant x} f_i(n) = c_{f_{i_1}} x \log\log x + c_{f_{i_2}} x - c_{f_{i_3}} x m(x) + O\left(\frac{x}{(\log x)^{m+1}}\right). \tag{1.6}$$

où
$c_{f_{i_1}} = \frac{f_i(2)}{2}$, $c_{f_{i_2}} = \frac{f_{i_2}}{2}(C + C_1)$, $c_{f_{i_3}} = \frac{f_{i_2} D_{f_i}}{2}$, $m(x) = \sum_{j=1}^{m} \frac{d_j}{(\log x)^j}$, $d_l = \int_1^{+\infty} \frac{\{t\}(\log t)^l}{t^2} dt$,
C et D_{f_i} sont définies dans le paragraphe précédent.
Le lemme 1.2 a été obtenu par une combinaison de plusieurs méthodes ; méthodes élémentaires [24] basées sur la sommation et l'intégrale de Stieltjes [25] et surtout l'estimation améliore de la quantité $\sum_{p\leq x}\{\frac{x}{p}\}$.
En suivant le raisonnement de S.Gaboury, nous avons montré le résultat principal relatif

à la fonction sommatoire de f_g,c'est-à-dire

$$\sum_{n\leqslant x} f_g(n) = c_{1(f,g)}x\log\log x + c_{2(f,g)}x - c_{3(f,g)}xm(x) + O\left(\frac{x}{(\log x)^{m+1}}\right). \tag{1.7}$$

où les constantes et la fonction m(x) sont données par leurs valeurs respectives

$c_{1(f,g)} = \frac{g(2)f(2)}{1+g(2)}$, $c_{2(f,g)} = \frac{g(2)f(2)}{1+g(2)}\left(\gamma + \sum_p \left(\log(1-\frac{1}{p}) + \frac{1}{p}\right)\right)$, et $c_{3(f,g)} = \frac{g(2)f(2)}{1+g(2)}$.
Le résultat précédent devient plus simple lorsque

$$g(n) = \mu^2(n)(k-1)^{\omega(n)},$$

où k est un entier≥ 2 et $f(n) = \omega(n)$.
Si on pose $f_{g_1}(n) = f_g(n)$ et pour tout $l \geq 2$.

$$f_{g_l}(n) = \frac{1}{h(n)}\sum_{d/n} g(d)f_{g_{l-1}}(d),$$

on a établi également un résultat analogue à la relation(1.7).
Après la présentation sommaire de l'introduction, nous présentons les grandes parties de ce travail.
Dans le premier chapitre, nous avons présenté l'introduction, le second chapitre concerne la problématique du mémoire. Le troisième chapitre met en lumière les outils de base de la théorie des nombres utiles de ce travail.
Dans le quatrième chapitre, on rappelle les fonctions moyennes que nous avons notées par f_i, $1 \leq i \leq n$, voir la relation (1.1).
Le dernier chapitre fait l'objet d'une étude détaillée de la fonctionf_g. Enfin,nous clôturons notre mémoire par une brève conclusion et une bibliographie.
Nous abordons alors le second chapitre.

Chapitre 2

Problématique de la recherche, objectifs et méthodes

2.1 Introduction

Dans ce chapitre nous présentons l'intérêt du sujet de ce mémoire qui est la fonction moyenne généralisée et les contraintes d'une telle étude. Dans ce mémoire, on se bornera sur les propriétés des fonctions arithmétiques et l'estimation des fonctions sommatoires. Le plus souvent, on fera appel aux résultats antérieurs des autres chercheurs [6] sur les fonctions moyennes.

2.2 Problématique

Depuis longtemps, un des sujets qui préoccupent les chercheurs en théorie des nombres est l'estimation d'une fonction sommatoire d'une fonction arithmétique donnée f [9]. Pratiquement, on détermine deux fonctions W et r telles que

$$\sum_{n \leqslant x} f(n) = W(x) + r(x). \tag{2.1}$$

avec $\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{r(x)}{W(x)} = 0$.

Dans ce problème, deux questions se posent à savoir l'existence des fonctions W et r et l'estimation de $\frac{r(x)}{W(x)}$.
En général, il existe des méthodes qui explicitent le réel W(x).
Par contre, le choix de r(x) est aléatoire et dépend des propriétés de f et de la méthode utilisée pour la déterminer.
L'estimation de $\sum_{n \leqslant x} f(n)$ permet quelque fois d'étudier l'annulité de la série de Dirichlet associée à f.

En d'autre termes si on considère la fonction définie sur $\mathbb{C}$ par

$$F(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(n)}{n^s}, \tag{2.2}$$

avec Re(s) $> \sigma_a$, on peut utiliser l'expression de $\sum_{n\leqslant x} f(n)$ pour déterminer les régions sans zéros de la fonction F(s)[24].
Un des exemples connus en théorie des nombres est le théorème des nombres premiers (T.N.P) [24] voir la relation (2.4).

Si on pose

$$\pi(x) = \sum_{p\leqslant x} 1 \tag{2.3}$$

alors

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x} \tag{2.4}$$

lorsque $x \longrightarrow +\infty$.
En considérant ζ la fonction zêta de Riemman, pour Re(s) > 1, $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$, alors la relation

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$$

et équivalente à

$$\zeta(1 + it) \neq 0, t \neq 0. \tag{2.5}$$

La relation (2.5) date du $XVIII^e$ siècle. En effet, le mathématicien français Adrien-Marie Legendre (1752-1833) et le mathématicien allemand Carl Friedrich (1777-1855) ont conjecturé cette relation.
Vers le milieu du XIX^e siecle, le Russe Pafnouti Tchebychev (1821-1894) a montré qu'il existe deux réels a et b, avec a $< 1 <$ b tels que

$$\frac{ax}{\log x} \leqslant \pi(x) \leqslant \frac{bx}{\log x}, \tag{2.6}$$

Ce n'est qu'en 1896 que le mathématicien français Jacques Hadamard (1865-1963) et le mathématicien belge Charles-Jean De La Vallée Poussins (1866-1962) ont montré indépendamment la relation (2.4). Nous avons mentionné la relation (2.5) car l'estimation de la fonction
$\sum_{n\leqslant x} f_g(n)$ fait appel à celle de $\pi(x)$.

Après avoir montré comment les chercheurs se sont intéressés aux sommes partielles, nous revenons aux fonctions qui font l'objet d'étude de la fonction f_g dont son origine date de l'année 2023 [18] qui généralise la fonction f_2 introduite par J.M de Koninck et J.Grah [6] définie dans (1.1).
Les auteurs de ces fonctions ont montré la conservation du caractère additif ou multiplicatif de la fonction mère . En outre, ils ont établi les relations entre les valeurs moyennes des

fonctions f_i, $1 \leqslant i \leqslant 3$ et celles de f lorsque cette dernière est additive ou multiplicative, voir chapitre 4.
En 2007, S.Gaboury a établi le lemme 1.2. Il a amélioré alors les termes d'erreurs fournis par les anciens chercheurs dans l'estimation des valeurs moyennes des fonctions sommatoires f_i $1 \leqslant i \leqslant 3$ lorsque f est additive, voir l'introduction. Par contre, ces chercheurs canadiens n'ont pas traité le même problème lorsque f est multiplicative.
C'est en 2022 que Servat Nyandwi et al ont abordé ce problème en estimant les quantités $\sum_{n \leq x} f_i(n)$, $\sum_{n \leqslant x; p/n, p \leq y} f_i(n)$, $\sum_{n \leq x} f_g(n)$ et $\sum_{n \leqslant x, p/n, p \leq y} f_g(n)$ lorsque f est multiplicative sous la condition (C_8) définie dans le premier chapitre.

Beaucoup de problèmes lien avec la fonction f_g comme la moyenne sur les entiers criblés $(p/n \Longrightarrow p > y)$ ou la moyenne sur les entiers friables en progression arithmétique restent ouverts. Cela est du à la variabilité non régulière des facteurs premiers d'un nombre premier dans un intervalle donné. Ces problèmes non résolus montrent que l'étude des fonctions moyennes n'est pas encore terminée.

Remarque 2.1. *1. Les fonctions f et g existent, par exemples si $k \geqslant 2$ et pour tout $n \geqslant 1$, $g(n) = \mu^2(n)(k-1)^{\omega(n)}$ et f(n) $\in \{\frac{\sigma(n)}{n}, \frac{n}{\varphi(n)}, \frac{n}{\varphi(n,l)}\}$ avec $\sigma(n)$: la somme de diviseur de n ($\sigma(n) = \sum_{d/n} d$)*

$\varphi(n)$: la fonction d'Euler ($\varphi(n) = card, \{1 \leq m \leq n, (m,n) = 1\}$)
et $\varphi_n(n) = n \prod_{p/n}(1 + \frac{l-1}{p}), l \geqslant 2$.

2. En prenant $k = 2$, on obtient la fonction f_2 définie par la relation (1.1). Puisque la fonction f_g généralise la fonction f_2, certaines propriétés de f_g ne seront pas reprises dans ce mémoire.

L'objectif que nous poursuivons dans cette étude est d'établir un résultat analogue à ce lui de (1.6) pour la fonction f_g et est mentionné dans le paragraphe (2.3).

2.3 Objectifs

L'objectif principal de ce mémoire est d'estimer la quantité $S_{f_g(x)} = \sum_{n \leqslant x} f_g(n)$ lorsque f est additive avec un terme d'erreur négligeable par rapport à la partie principale d'ordre $\frac{x}{(\log x)^{m+1}}$, m $\geqslant 0$, lorsque x est très grand.
Pour atteindre cet objectif , on doit :

a) Appliquer correctement les méthodes classiques d'estimation (lemme d'Abel, la convolution, le produit eulérien, la formule de Mac-Laurin, l'intégrale de Stieltjes, etc).

b) Utiliser correctement les estimations des quantités $\pi(x)$, $\sum_{p \leqslant x} \frac{1}{p}$.

c) Appliquer convenablement les résultats des autres chercheurs dans l'étude de la fonction f_g .

2.4 Méthodes

Dans cette section, nous présentons les méthodes utilisées pour estimer $\sum_{n\leq x} f_g(n)$ de la théorie des nombres, à savoir les méthodes élémentaires et les méthodes analytiques.

2.4.1 Les méthodes élémentaires

2.4.1.1 Le lemme d'Abel

Si a(n) est une fonction arithmétique et f une fonction dérivable sur [1,x] et si on pose A(x) = $\sum_{n\leqslant x} a(n)$, on obtient la relation (2.5).

$$\sum_{n\leqslant x} a(n)f(n) = A(x)f(x) - \int_1^x A(t)f^{'}(t)dt \tag{2.7}$$

Dans ce mémoire, nous ferons recours le plus souvent à la relation (2.8), par exemple pour approximer la quantité $\sum_{p\leqslant x}\{\frac{x}{p}\}$.

2.4.1.2 Méthode de la convolution

Si f et g sont deux fonctions arithmétiques et en posant pour x $\geqslant$ 1, $G(x) = \sum_{n\leqslant x} g(n)$ et $F(x) = \sum_{n\leqslant x} f(n)$, alors

$$\begin{aligned} \sum_{n\leqslant x}(f * g)(n) &= \sum_{n\leqslant x} f(n)G(\frac{x}{n}) \\ &= \sum_{n\leqslant x} g(n)F(\frac{x}{n}) \end{aligned} \tag{2.8}$$

On utilise cette méthode pour estimer les fonctions du type $\sum_{n\leqslant x} f_g(n)$ lorsque f est multiplicative.

2.4.1.3 Méthode de factorisation

Si n = $\prod_{p^r//n} p^r$ et f additive, on a,

$\sum_{n\leqslant x} f(n) = \sum_{n\leqslant x} \sum_{p^r//n} f(p^r)$.

2.4.1.4 L'intégrale de Stieltjes

$\sum_{n\leq x} a_n b(n) = \int_2^x b(t)dA(t)$,
où
b est une fonction dérivable sur l'intervalle [1,x].

2.4.2 Les méthodes analytiques

2.4.2.1 Produit eulérien

Si f est une fonction multiplicative et la fonction $|F(s)|= |\sum_{n\geqslant 1}\frac{f(n)}{n^s}|$ existe lorsque Re(s) $> \sigma_a$, alors F(s) $= \pi_p \sum_{r=0}^{+\infty}\frac{f(p^r)}{p^{rs}}$
une telle relation est utilisée pour montrer que

$$f_g = \mu^2 * g_1 \tag{2.9}$$

où g_1 est une fonction multiplicative définie par la série de Dirichlet qui lui est associée. Naturellement $g_1 = f_g * (\mu^2)^{-1}$.

2.4.2.2 Série de Dirichlet d'une convolution [11]

Si$Re(s) > max(\sigma_1, \sigma_2), ona$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(a*b)(n)}{n^s} = U(s)V(s) \tag{2.10}$$

où
U(s) $= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a(n)}{n^s}$ et V(s) $= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{b(n)}{n^s}$.
En utilisant les différentes méthodes, les propriétés de la fonction f_g et les estimations des autres chercheurs, les contenus des chapitres 3 et 4, on aboutit aux nouveaux résultats groupés dans les théorèmes 5.1. Nous abordons maintenant le chapitre 3.

Chapitre 3

Fonctions arithmétiques et Séries de Dirichlet

3.1 Introduction

La théorie des nombres est un domaine des mathématiques dont la plus part des problèmes sont fondés sur les fonctions arithmétiques et l'estimation des valeurs moyennes de ces dernières. Cette estimation a été pendant très longtemps une source de fascination et de mystère. Un exemple de telle approximation est celui du nombre des nombres premiers dans l'intervalle [2,x] noté $\pi(x)$. L'estimation de cette fonction est connue. En effet, lorsque x tend vers l'infini dans [24] les chercheurs ont montré que $\pi(x) \sim \dfrac{x}{logx}$. C'est "le célèbre théorème des nombres premiers" (T.N.P). Pour estimer les fonctions sommatoires des fonctions arithmétiques $\sum_{n\leq x} f(n)$, on utilise le plus souvent la convolution de Dirichlet, les séries de Dirichlet où les propriétés des fonctions à estimer.

Les fonctions arithmétiques les plus étudiées sont : **1**, σ, Id, τ, μ, Λ, φ, e, μ^2, ω où

- **1** (n)=1, $\forall$ n (la fonction **1**(n) qui vaut 1 pour chaque nombre entier) ;
- e(n) = $\begin{cases} 1 & si\, n = 1 \\ 0 & si\, non \end{cases}$
- Id(n) = n : c'est la fonction identité
- $\mu(n) = \begin{cases} 1 & si\, n = 1 \\ (-1)^k & si\, n = p_1 p_2 ... p_k \text{ où } toutes\, les facteurs\, premiers\, P\, sont\, distincts. \\ 0 & si\, il\, existe\, p\, telle\, que\, p^2/n \end{cases}$
- $\sigma(n) = \sum_{d/n} d$ c'est la somme des diviseurs d'un entier n.

- La fonction $\omega(n) = \sum_{d/n} 1$ qui compte le nombre de diviseurs premiers distincts de l'entier n.

- $\tau(n)$ = nombre de diviseurs de n
  $= \Sigma_{d/n} 1$.
  Ainsi si r $\geqslant 1$, on a $\tau(p^r)$ = r + 1

- La fonction $\mu^2(n)$ qui vaut 1 si n est sans facteur carré et 0 dans le cas contraire.

- L'indicatrice d'Euler $\varphi(n) := \sharp\{k, 1 \leqslant k \leqslant n, pgcd(k,n) = 1\}$. C'est le nombre des entiers $k \leqslant n$ qui sont premiers avec n.

3.2 Quelques propriétés de la fonction φ

Cette fonction vérifie :
i)Il est multiplicative ii) Pour tout entier r $\geqslant 1$ et tout nombre premier p $\geqslant 2$, on a : $\varphi(p^r)$ = p^r - p^{r-1} Cette fonction est bien connue en théorie des groupes finis. Si A est l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, alors $\varphi(n)$ est l'ordre du groupe multiplicatif
$U(A) = \{x \in A/x\ inversible\}$.

iii) Pour tout entier n > 1, $\varphi(n)$ est donné par $\varphi(n)$ = n $\pi_{p/n}(1 - \frac{1}{p})$
Démonstration. Le iii) découle de i) car si n = $\pi_{p^r/n} p^r$ alors :

$$\begin{aligned}
\varphi(n) &= \pi_{p^r/n}\varphi(p^r) \\
&= \pi_{p/n} p^r (1 - \frac{1}{p}) \\
&= \pi_{p/n} p^r \pi_{p/n} (1 - \frac{1}{p}) \\
&= n\pi_{p/n}(1 - \frac{1}{p})
\end{aligned}$$

⊡

3.3 Quelques définitions utiles pour ce travail

Définition 3.1. *Une fonction arithmétique f est dite multiplicative si f(1) = 1 et si f(mn) = f(m)f(n) dès que pgcd(m,n) = 1. Elle est dite complètement multiplicative si f(1) = 1 et f(mn) = f(m)f(n) pour tous les entiers positifs m et n.*

Comme exemple de telles fonctions,il y a la fonction Id qui est complètement multiplicative. et la fonction **1**.

Définition 3.2. *Une fonction arithmétique f est dite additive si f(1) = 0 et f(mn) =f(m) + f(n) dès que pgcd(m,n) = 1. Elle est dite complètement additive si f(1) = 0 et f(mn) = f(m) + f(n) pour les entiers positifs m et n. Nous proposons deux exemples de fonctions additives. Les fonctions* log *et* ω.

Proposition 3.1. *Si f est additive, alors* $e^{\lambda f(n)}$ *est multiplicative où* λ *un réel donné.*
Démonstration. *On a :*

$$\begin{aligned} h(mn) &= e^{\lambda f(nm)} \\ &= e^{\lambda(f(n)+f(m))} \\ &= e^{\lambda f(n)} e^{\lambda f(m)} \\ &= h(n)h(m). \end{aligned}$$

Ainsi, si $\lambda \in \mathbb{R}^*$, alors f(n) = $\lambda^{\omega(n)}$ est multiplicative.

3.4 Quelques propriétés des fonctions arithmétiques

Si f et g sont multiplicatives(respectivement additives) alors fg et f + g sont multiplicatives (respectivement additives).
Démonstration.
i) Cas multiplicative Soient f et g deux fonctions arithmétiques et m, n deux entiers premiers entre eux. On a :

$$\begin{aligned} (fg)(mn) &= f(mn)g(mn) \\ &= f(m)f(n)g(m)g(n) \end{aligned}$$

$$= (fg)(m)(fg)(n). \tag{3.1}$$

ii) Cas additive Soient f et g deux fonctions arithmétiques et m, n deux entiers premiers entre eux. On a :

$$\begin{aligned} (f+g)(mn) &= f(mn) + g(mn) \\ &= f(m) + f(n) + g(m) + g(n) \\ &= (f(m) + g(m)) + (f(n) + g(n)) \end{aligned}$$

$$= (f+g)(m) + (f+g)(n). \tag{3.2}$$

$\boxdot$

Remarque : Puisque si n > 1, on l'écrit n = $p_1^{r_1} \cdots p_k^{r_k}$ et f(n) = $\prod_{p^r//n} f(p^r)$ (cas multiplicative) et f(n) = $\sum_{p^r//n} f(p^r)$ (cas additive), alors pour connaître f(n), il suffit de connaître $f(p^r)$, r $\geqslant$ 1.

3.5 Convolution de Dirichlet

Nous introduisons maintenant l'opérateur de convolution qui est abondamment utilisé en théorie élémentaire[6]ou analytique des nombres[24].
Il vise trois objectifs principaux à savoir : l'introduction des nouvelles fonctions, l'estimation des fonctions sommatoires et l'étude de certaines propriétés des séries de Dirichlet, voir dans[5] et dans[11].
Nous définissons alors la convolution des fonctions arithmétiques.

Définition 3.3. *Soient deux fonctions arithmétiques f et g. La convolution de Dirichlet, notée f*g est définie par*

$$(f * g)(n) = \sum_{d/n} f(d)g\left(\frac{n}{d}\right), \forall n \in \mathbb{N}^*. \tag{3.3}$$

L'opérateur ainsi défini possède quelques propriétés, voir les propositions 3.2 et 3.3

Proposition 3.2. *Soient f et g deux fonctions arithmétiques multiplicatives, alors la fonction f * g est multiplicative.*

Preuve Soient m, n deux nombres premiers entre eux. Nous avons

$$\begin{aligned}(f * g)(nm) &= \sum_{d/mn} f(d)g\left(\frac{nm}{d}\right)\\ &= \sum_{d'/m}\sum_{d/n} f(dd')g\left(\frac{nm}{dd'}\right), pgcd(d,d') = 1\\ &= \sum_{d'/m}\sum_{d/n} f(d)f(d')g\left(\frac{n}{d}\right)g\left(\frac{m}{d'}\right)\\ &= \sum_{d'/m} f(d')g\left(\frac{m}{d'}\right)\sum_{d/n} f(d)g\left(\frac{n}{d}\right)\\ &= (f*g)(m)(f*g)(n). \end{aligned} \tag{3.4}$$

$\boxdot$

Proposition 3.3. *i) La convolution de Dirichlet est une opération commutative c'est à dire f * g = g * f;*

*ii) Elle est associative : (f * g) * h = f * (g * h);*

*iii) Elle distributive par rapport à l'addition : f * (g+h) = f * g + f * h;*

iv) Elle admet un élément neutre qui est la fonction notée e, et définie par :

$$e(n) = \begin{cases} 1 \; si \; n = 1 \\ 0 \; sinon \end{cases}.$$

Démonstration. i) Par définition, on a :

$$\begin{aligned}(f*g)(n) &= \sum_{d/n} f(d)g\left(\frac{n}{d}\right)\\ &= \sum_{dc=n} f(d)g(c)\\ &= \sum_{c/n} f\left(\frac{n}{c}\right)g(c)\\ &= (g*f)(n).\end{aligned}$$

ii) De même, on peut écrire

$$\begin{aligned}((f*g)*h)(n) &= \sum_{d/n} f(d)(g*h)\left(\frac{n}{d}\right)\\ &= \sum_{dq=n} (f*g)(d)h(q)\\ &= \sum_{dq=n}\sum_{ab=d} f(a)g(b)h(q)\\ &= \sum_{abq=n} f(a)g(b)h(q)\\ &= \sum_{a/n} f(a)\sum_{bq=n/a} g(b)h(q)\\ &= \sum_{a/n} f(a)\sum_{b/\frac{n}{a}} g(b)h\left(\frac{n}{ab}\right)\\ &= \sum_{a/n} f(a)(g*h)\left(\frac{n}{a}\right)\\ &= (f*(g*h))(n).\end{aligned}$$

$\boxdot$

iii) Soit n $\in \mathbb{N}^*$, par définition, on a

$$\begin{aligned}(f*(g+h))(n) &= \sum_{d/n} f(d)(g+h)\left(\frac{n}{d}\right)\\ &= \sum_{d/n} f(d)\left(g(\frac{n}{d})+h(\frac{n}{d})\right)\\ &= \sum_{d/n}\left(f(d)g(\frac{n}{d})+f(d)h(\frac{n}{d})\right)\\ &= \sum_{d/n} f(d)g\left(\frac{n}{d}\right)+\sum_{d/n} f(d)h\left(\frac{n}{d}\right)\\ &= (f*g)(n)+(f*h)(n)\\ &= ((f*g)(n)+(f*h)(n)).\end{aligned}$$

$\boxdot$

iv) Soit f une fonction arithmétique : $\forall$ n $\in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}(e * f)(n) &= \sum_{d/n} e(d) f\left(\frac{n}{d}\right) \\ &= e(1)f(n) + \sum_{d/n} e(d) f\left(\frac{n}{d}\right) ; d > 1 \\ &= f(n) + 0 \\ &= f(n).\end{aligned}$$

Ainsi pour toute fonction arithmétique, on a :

$$e * f = f * e = f \tag{3.5}$$

Proposition 3.4. *Si f est complétement multiplicative, pour toutes fonctions arithmétiques g et h, on a :*

$$f(g * h)(n) = (fg * fh)(n).$$

Démonstration. Soit n $\geqslant$ 1, On a

$$\begin{aligned}f(g * h)(n) &= f(n) \sum_{d/n} g(d) h(\frac{n}{d}) \\ &= \sum_{d/n} f(d\frac{n}{d}) g(d) h(\frac{n}{d}) \\ &= \sum_{d/n} g(d) f(d) f(\frac{n}{d}) h(\frac{n}{d})\end{aligned}$$

$$= (fg * fh)(n). \tag{3.6}$$

$\boxdot$

3.6 Inverse d'une fonction arithmétique

Définition 3.4. *Soit f une fonction arithmétique. S'il existe une autre fonction arithmétique que g telle que f * g = g * f = e, on dit que f est inversible par rapport à la convolution de Dirichlet et g est son inverse qu'on note $g = f^{-1}$.*

Théorème 3.1. *Soit f : $\mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction arithmétique. Alors f est inversible si et seulement si f(1) $\neq$ 0*

Démonstration. Supposons que f est inversible. Il existe
g : $\mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{C}$ n $\longmapsto$ g(n) telle que f*g = g*f = e. Donc (f*g)(1) = 1. Par conséquent (f*g)(1) = f(1)g(1) = 1. D'où f(1) $\neq$ 0. Réciproquement si f(1) $\neq$ 0, alors $\frac{1}{f(1)} \neq 0$.
La fonction arithmétique g découle la relation (f*g)(n) = e(n) définie par

$$g(n) = \begin{cases} \frac{1}{f(1)} \\ -\frac{1}{f(1)} \sum_{d/n} f(d); d > 1. \end{cases} \tag{3.7}$$

- si n = 1, alors $\sum_{d/n} f(d)g\left(\frac{1}{d}\right)$ = e c'est à dire que f(1)g(1) =1 signifie g(1) = $\frac{1}{f(1)}$.

- si n > 1, alors

$$\begin{aligned}
g(n) = \sum_{d/n} f(d)g\left(\frac{n}{d}\right) &= e(n) \\
&= 0 \\
f(1)g(n) + \sum_{d/n,d>1} f(d)g\left(\frac{n}{d}\right) &= 0 \\
f(1)g(n) &= -\sum_{d/n,d>1} f(d)g\left(\frac{n}{d}\right) \\
g(n) &= -\frac{1}{f(1)} \sum_{d/n,d>1} f(d)g\left(\frac{n}{d}\right).
\end{aligned}$$

On définit alors la fonction arithmétique g par récurrence
$g(n) = \begin{cases} \frac{1}{f(1)} \; si\, n = 1 \\ -\frac{1}{f(1)} \sum_{d/n,d>1} f(d)g\left(\frac{n}{d}\right) \; si\, n > 1 \; vérifie \; f * g = e. \end{cases}$
D'où f est inversible.

Proposition 3.5. $(f * g)^{-1} = g^{-1} * f^{-1}$

Démonstration. En effet,

$$\begin{aligned}
f * g * g^{-1} * f^{-1} &= f * e * f^{-1} \\
&= f * f^{-1} \\
&= e
\end{aligned}$$

$\boxdot$

Corollaire 3.1. *Si f est complètement multiplicative, alors*

$$f^{-1} = \mu f \tag{3.8}$$

.

Démonstration.

$$\begin{aligned}
f * \mu(f) &= f\mathtt{1} * \mu f \\
&= f(\mathtt{1}\mu) \\
&= f * \mu f \\
&= fe \\
&= e
\end{aligned}$$

Par conséquent, μf * f = e
Ainsi $f^{-1} = \mu$ f

$\boxdot$

Comme exemples des inverses des fonctions multiplicatives,on a :
$\mu^{-1} = \mathbb{1}$,
Après avoir présenté quelques fonctions arithmétiques et quelques unes de leurs propriétés, nous abordons l'estimation des fonctions sommatoires du type $\sum_{n \leqslant x} f(n)$. Nous définissons d'abord la convolution généralisée utile dans ce mémoire.

3.7 Convolution généralisée

Proposition 3.6. *Soit F : [1,+∞] ⟶ ℂ et ∀ x ⩾ 1, posons G(x) =* $\sum_{n \leqslant x} F\left(\frac{x}{n}\right)$. *Alors on a :*

$$F(x) = \sum_{n \leqslant x} \mu(n) G\left(\frac{x}{n}\right). \tag{3.9}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\sum_{n \leqslant x} \mu(n) G\left(\frac{x}{n}\right) &= \sum_{n \leqslant x} \mu(n) \left(\sum_{n \leqslant x} F\left(\frac{x}{nm}\right)\right) \\
&= \sum_{n \leqslant x, m \leqslant x} \mu(n) F\left(\frac{x}{nm}\right) \\
&= \sum_{1 \leqslant nm \leqslant x} \mu(n) F\left(\frac{x}{nm}\right) \\
&= \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \mu(n) F\left(\frac{x}{k}\right) \\
&= \sum_{k \leqslant x} F\left(\frac{x}{k}\right) \sum_{n/k} \mu(n) \\
&= \sum_{k \leqslant x} F\left(\frac{x}{k}\right) e(k) \\
&= F(x)
\end{aligned}$$

Par conséquent, $\sum_{n \leqslant x} \mu(n) G\left(\frac{x}{n}\right)$ = F(x).

$\boxdot$

La relation précédente est appelée **"convolution généralisée"**.

3.8 Fonction sommatoire associée à une fonction arithmétique

En théorie des nombres, la fonction sommatoire joue un grand rôle dans l'estimation des sommes partielles.
Les méthodes les plus utilisées pour estimer ces sommes sont : l'intégration par parties(le

lemme d'Abel[24], la méthode de l'hyperbole [5], la méthode de Perron, la méthode du col et les méthodes tauberiennes[24].
Les fonctions sommatoires sont étudiées dans le paragraphe ci-après.

Définition 3.5. *Soit f une fonction arithmétique et x un réel* $\geqslant 1$.
On appelle "fonction sommatoire de f", la fonction $S_f(x)$ *définie par* $S_f(x)= \sum_{n\leqslant x} f(n)$.
Nous présentons deux méthodes les plus utilisées et quelques exemples des fonctions sommatoires.

Proposition 3.7. *(Formule d'Abel)[7] Soit* $(a_n)_{n\geqslant 1}$ *une suite des nombres complexes et* $f : [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{C}$ *une fonction ayant une dérivée continue sur* $[1, +\infty[$. *Si on pose pour chaque* $x \geqslant 1$, $A(x)= \sum_{n\leqslant x} a_n$, *alors*

$$\sum_{n\leqslant x} a_n f(n) = A(x)f(x) - \int_1^x A(t)f(t)dt. \tag{3.10}$$

Démonstration. Si on pose $S(x) = \sum_{n\leqslant x} a_n f(n)$, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
S(x) &= \sum_{n\leq x} A(n) - A(n-1)f(n);\\
&= \sum_{n\leq x} A(n)f(n) - \sum_{n\leq x-1} A(n)f(n+1);\\
&= \sum_{n\leq x-1} A(n)f(n) - f(n+1) + A([x](f[x]));\\
&= \sum_{n\leq x-1} A(n)\int_n^{n+1} f^{'}(t)dt + A(x)f([x]);\\
&= -\int_1^{[x]} A(t)f^{'}(t)dt - \int_{[x]}^x A(t)f^{'}(t)dt + A(x)f(x);\\
&= A(x)f(x) - \int_1^x A(t)f^{'}(t)dt.
\end{aligned}$$

Par conséquent : $\sum_{n\leqslant x} a_n f(n) =$ A(x)f(x) - $\int_1^x A(t)f^{'}(t)dt$

$\boxdot$

Proposition 3.8. *[8] Soient f et g deux fonctions arithmétiques. Si on pose* $F(x)= \sum_{n\leqslant x} f(n)$ *et* $G(x)= \sum_{n\leqslant x} g(n)$, *alors*

$$\begin{aligned}
\sum_{n\leqslant x}(f*g)(n) &= \sum_{n\leqslant x} f(n)G\left(\frac{x}{n}\right)\\
&= \sum_{n\leqslant x} g(n)F\left(\frac{x}{n}\right).
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Proposition 3.9. *(La méthode de l'hyperbole) .Sous les mêmes hypothèses que dans la proposition 3.8 et si y est un réel tel que* $X\geq x$, *en posant* $H(x)= \sum_{n\leqslant x}(f*g)(n)$, *on a :*

$$H(x) = \sum_{n\leqslant y} f(n)G(\frac{x}{n}) + \sum_{n\leqslant \frac{x}{y}} g(n)F(\frac{x}{n}) - F(y)G\left(\frac{x}{y}\right) \tag{3.12}$$

.

Démonstration. H(x)= $\sum_{n\leqslant y} f(n)G(\frac{x}{n}) + \sum_{y\leqslant n\leqslant x} f(n)G(\frac{x}{n}) - F(y)G\left(\frac{x}{y}\right)$
or

$$\begin{aligned}\sum_{y\leqslant n\leqslant x} f(n)G(\frac{x}{n}) &= \sum_{y\leqslant n\leqslant x} f(n)\sum_{d\leqslant \frac{x}{n}} g(d)\\ &= \sum_{d\leqslant \frac{x}{y}} g(d)F(\frac{x}{d}) - \sum_{d\leqslant \frac{x}{y}} g(d)\sum_{n\leqslant y} f(n)\\ &= \sum_{d\leqslant \frac{x}{y}} g(d)F(\frac{x}{d}) - F(y)G(\frac{x}{y}).\end{aligned}$$

$\boxdot$

Remarque : Pour tout réel x ≥ 1, on rappelle que $\sum_{n\leq x} 1 = [x]$, qui est la partie entière de x.
Nous présentons deux exemples des fonctions sommatoires non triviales, l'un fait appel au lemme d'Abel et l'autre à la méthode de l'hyperbole.

Proposition 3.10. *Pour $x \geq 1$, la fonction sommatoire $D(x) = \sum_{n\leq x}\tau(n)$ vérifie l'estimation*

$$D(x) = x\log x + (2\gamma - 1)x + O(x^{\frac{1}{2}})$$

où γ est la constante d'Euler donnée par

$$\gamma = 1 - \int_1^\infty \frac{\{t\}dt}{t^2}.$$

Pour établir la proposition, on utilise le lemme suivant

Lemme 3.1. *Pour $x \geq 1$,$\sum_{n\leq x}\frac{1}{n} = \log x + \gamma + O(\frac{1}{x})$*

Démonstration. Le lemme d'Abel implique que :

$$\begin{aligned}\sum_{n\leqslant x}\frac{1}{n} &= \frac{[x]}{x} + \int_1^\infty \frac{[t]dt}{t^2}\\ &= 1 - \frac{[x]}{x} + \int_1^x \frac{dt}{t} - \int_1^x \frac{\{t\}dt}{t^2}\\ &= \log x + \int_1^\infty \frac{\{t\}dt}{t^2} + \int_x^\infty \frac{\{t\}dt}{t^2} + 1 - \frac{[x]}{x}\\ &= \log x + 1 - \int_1^\infty \frac{\{t\}dt}{t^2} + O\left(\frac{1}{x}\right)\end{aligned}$$

Car $\int_x^\infty \frac{\{t\}dt}{t^2} << \frac{1}{x^2} << \frac{1}{x}$.
Par conséquent,
$\sum_{n\leqslant x}\frac{1}{n} = \log x + \gamma + O\left(\frac{1}{x}\right)$.

Démonstration de la proposition 3.10. Puisque $\tau = \mathtt{1} * \mathtt{1}$ et d'après la méthode de l'hyperbole, on peut écrire

$$\begin{aligned}
D(x) &= \sum_{d\leqslant y}\sum_{d\leqslant \frac{x}{d}} 1 + \sum_{q\leqslant y}\sum_{d\leqslant \frac{x}{q}} 1 - \sum_{n\leqslant y} 1 \sum_{n\leqslant y} 1\\
&= \sum_{d\leqslant y}[\frac{x}{d}] + \sum_{q\leqslant y}[\frac{x}{q}] - [y]^2\\
&= 2\sum_{d\leqslant y}\frac{x}{d} - \{\frac{x}{d}\} - (\{y-\{y\})^2\\
&= 2x\sum_{d\leqslant y}\frac{1}{d} - 2\sum_{d\leqslant y}\{\frac{x}{d}\} - y^2 + \{y^2\} - 2y\{y^2\}\\
&= 2x\sum_{n\leqslant \sqrt{x}}\frac{1}{d} - x + O(\sqrt{x})\\
&= 2x(\log\sqrt{x}) + \gamma + O(\frac{1}{x}) - x + O(\sqrt{x})\\
&= x\log x + (2\gamma - 1)x + O(\sqrt{x}).
\end{aligned}$$

3.9 Séries de Dirichlet

Dans ce paragraphe, nous introduisons le concept de série de Dirichlet d'une fonction arithmétique f utilisée quelques fois pour estimer la fonction $\sum_{n\leqslant x} f(n)$.

Définition 3.6. *La série de Dirichlet associée à une fonction arithmétique f est définie par*

$$F(s) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{f(n)}{n^s}$$

où "s" est un nombre complexe qu'on notera dans ce mémoire par $s = \sigma + it$, σ et t étant deux réels.
La fonction ainsi définie est appelée également fonction génératrice de f.

Remarque 3.1. *Cette série est caractérisée par son abscisse de convergence "σ_c" et celui de la convergence absolue "σ_a". Dans le premier cas pour Re(s) $> \sigma_c$, la série*

$$F(s) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{f(n)}{n^s}$$

converge et pour Re(s) $> \sigma_a$, la série converge absolument, c'est à dire

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{|f(n)|}{n^\sigma} < +\infty.$$

Les séries de Dirichlet interviennent énormément en théorie analytique des nombres.
Par exemple, la connaissance des régions sans zéros de la fonction F(s) permet d'améliorer le terme d'erreur de la quantité $\sum_{n\leqslant x} f(n)$, voir par exemples dans[6] pour $\pi(x)$ où

$$\pi(x) = Li(x) + O\left(xe^{-c\sqrt{\log x}}\right) \tag{3.13}$$

$$Li(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t}$$

et c un réel > 0, selon que les zéros de $\zeta(s)$ se rapprochent de Re(s) = $\frac{1}{2}$.

En outre cette contribution dans les estimations des fonctions permet d'expliciter les valeurs de certaines fonctions arithmétiques[24]. Une des séries de Dirichlet les plus utilisées en théorie des nombres est la fonction

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$$

avec Re(s) > 1. Cette fonction est bien connue dans la littérature de la théorie des nombres. Par exemple, on montre que dans le demi-plan, Re(s) > 1, ζ ne s'annule pas. De plus si $t \neq$ 0, $\zeta(1+it) \neq$ 0, c'est l'équivalent du théorème des nombres premiers[7] et [11]. On montre que 1 est un pôle simple de $\zeta(s)$ de résidu 1. Dans la bande 0 < Re(s) < 1 , $\zeta(s)$ = $\frac{1}{s-1}$ + $h(s)$ où h(s) est une fonction holomorphe plus précisément

$$h(s) = \frac{1}{s-1} + 1 - s\int_1^{+\infty} \frac{\{t\}dt}{t^{s+1}}$$

Dans cette région, les zéros de $\zeta(s)$ ne sont pas connus.
Par contre si Res < 0, ζ admet des zéros triviaux donnés par $s_k = -2k$, $k \in \mathbb{N}^*$.
D'une façon générale, la plus part des séries de Dirichlet s'écrivent sous la forme $\zeta^k(s)H(s)$,[24] où H(s) converge absolument si Res > 1 - η, avec 0 < η < 1.
Les séries de Dirichlet possèdent des propriétés pratiques.

Théorème 3.2. *Si f et g sont deux fonctions arithmétiques dont leurs séries de Dirichlet F(s) et G(s) convergent absolument pour Re(s) > σ_{fa}(Res > σ_{ga}), on a alors*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(f*g)(n)}{n^s} = F(s)G(s) \tag{3.14}$$

et converge absolument pour Re(s) > max(σ_{fa},σ_{ga}).

Démonstration. Pour tout s pour lequel les séries convergent absolument on a,

$$\begin{aligned} F(s)G(s) &= \sum_{n>1} \frac{f(n)}{n^s} \sum_{m>1} \frac{g(m)}{m^s} \\ &= \sum_{n\geq 1}\sum_{m\geq 1} \frac{f(n)g(m)}{(mn)^s}. \end{aligned}$$

A cause de la convergence absolue, on peut multiplier les deux séries et réarranger les termes sans changer la somme.
Groupons les termes pour lesquels le produit mn est constant, soit mn =k,on voit que

$k \in \mathbb{N}^*$

Par conséquent, donc

$$\begin{aligned} F(s)G(s) &= \sum_{k=1}(\sum_{mn=k} f(n)g(m))\frac{1}{k^s} \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{h(k)}{k^s} \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} h(k) &= \sum_{mn=k} f(n)g(m) \\ &= (f * g)(k) \end{aligned}$$

Théorème 3.3. *[5] Dans le demi-plan, Re(s) > σ_{fa}, on a alors*

$$\begin{aligned} F(s) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(n)}{n^s} \\ &= \pi_p \sum_{r=0}^{+\infty} \frac{f(p^r)}{p^{rs}} \end{aligned}$$

Remarque 3.2. *Si la fonction f est complètement multiplicative, alors pour tout r $\geqslant$ 0 on a f(p^r) = f(p)^r et la série $\sum_{r\geqslant 1} f(p^r)$ devient une série formelle géométrique convergente.*

Corollaire 3.2. *Si la fonction f du théorème est complètement multiplicative, on obtient alors*

$$\sum_{n>1} \frac{f(n)}{n^s} = \prod_p \left(1 - \frac{f(p)}{p^s}\right)^{-1} \tag{3.15}$$

Terminons ce paragraphe par la donnée de quelques exemples de séries de Dirichlet dans le tableau 3.1 :

Tableau 3.1 – Tableau de séries de Dirichlet

Fonction f(n)	Série de Dirichlet F(s)	Produit eulérien	Abscisse de convergence absolue σ_{fa}
1. f(n) =1	F(s) = $\zeta(s)$	$\pi_p(1-\frac{1}{p^s})^{-1}$	1
2. f(n)= N(n)	F(s) = $\zeta(s-1)$	$\pi_p\left(1-\frac{1}{p^{s-1}}\right)^{-1}$	2
3. f(n)= $\tau(n)$	F(s)= $\zeta^2(s)$	$\pi_p(1-\frac{1}{p^s})^{-2}$	1
4. f(n)= $\varphi(n)$	F(s) = $\frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}$	$\pi_p\left(\frac{1-\frac{1}{p^s}}{1-\frac{1}{p^{s-1}}}\right)$	2
5. f(n) = $\mu^2(n)$	F(s)= $\frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)}$	$\pi_p(1+\frac{1}{p^s})$	1

Nous abordons maintenant le chapitre 4 constitué par les fonctions moyennes.

Chapitre 4

Fonctions moyennes

4.1 Introduction

Ces dernières années, beaucoup de chercheurs se sont intéressés à l"étude des propriétés de sous-ensembles de diviseurs d'un entier des valeurs moyennes du type $\sum_{n \leqslant x} f(n)$, où f(n) est une moyenne pondérée et x un réel $\geqslant 1$.
Parmi ces chercheurs, il ya J.M.De Koninck et J.Grah [6], S.Nyandwi et al [17][18], Sébatien Gaboury [9] etc.

Dans ce chapitre, nous exposons quelques résultats liés aux fonctions moyennes sur l'ensemble des diviseurs de n que nous généralisons dans le cinquième chapitre. Ces fonctions moyennes sont définies par la relation(1.1).
Les propriétés de ces fonctions et leurs estimations dépendent en grande parties de celle de la fonction f. Dans le chapitre 5, nous généralisons la fonction f_2, plus précisément, on s'intéresse à la fonction

$$f_g(n) = \frac{1}{h(n)} \sum_{d/n} g(d) f(d)$$

où $h = g * \mathbf{1}$ et g est une fonction multiplicative vérifiant certaines hypothèses.
Cette fonctions f_g a été introduite par S. Nyandwi et al qui ont étudié ses valeurs moyennes, sur les entiers y-friables(entiers dont leurs facteurs premiers ne dépassent pas y) en utilisant les méthodes élémentaires et la méthode du point selle [21] lorsque f est multiplicative.
Lorsque f est additive vérifiant certaines conditions, dans [9] S.Gaboury a repris les travaux de Grah et J.M de Koninck en améliorant le terme d'erreur fourni par ces derniers chercheurs dans l'estimation des fonctions $\sum_{n \leqslant x} f_i(n)$, $1 \leqslant i \leqslant 3$ via une formule asymptotique de la quantité $\sum_{p \leqslant x} p^{\alpha} \{\frac{x}{p}\}^k$ [9] où α est un réel supérieur à -1 et k un entier strictement positif.
Dans le chapitre 5 nous donnons la formule analogue à celle de S.Gaboury de la fonction

$$\sum_{n \leqslant x} f_g(n)$$

lorsque f est additive, constante ainsi que g sur l'ensemble P.

Le théorème 4.1. Nous permet de décrire $f_i(n)$ comme un produit ou une somme de réels.

4.2 Propriétés et estimation des fonctions moyennes

Théorème 4.1. *Si f est multiplicative(respectivement additive), alors les fonctions f_i, $1 \leqslant i \leqslant 3$ sont multiplicative(respectivement additives).*

Démonstration. Nous le faisons pour f_1.
Soient m et n deux entiers premiers entre eux. Considérons le cas où f est multiplicative. Par définition, on a

$$\begin{aligned} f_1(mn) &= \frac{1}{\tau(mn)} \sum_{d/mn} f(d) \\ &= \frac{1}{\tau(m)\tau(n)} \sum_{d_1/m, d_2/n; (d_1,d_2)=1} f(d_1 d_2) \\ &= \frac{1}{\tau(m)\tau(n)} \sum_{d_1/m} f(d_1) \sum_{d_2/n} f(d_2) \\ &= f_1(m) f_1(n). \end{aligned}$$

⊡

Si f est additive,

$$\begin{aligned} f(n) &= \frac{1}{\tau(m)\tau(n)} \Big(\sum_{d_1/m, d_2/n} f(d_1) + \sum_{d_2/n, d_1/m} f(d_2)\Big) \\ &= f_1(m) f_1(n). \end{aligned}$$

⊡

Théorème 4.2. *Soit f une fonction arithmétique. Si f est multiplicative on a :*

$$\begin{aligned} f_1(n) &= \frac{1}{\tau(n)} \pi_{p^\alpha // n} \left(1 + \sum_{m=1}^{+\infty} f(p^m)\right) \\ f_2(n) &= \frac{1}{2^{\omega(n)}} \pi_{p/n} \left(1 + f(p)\right) \\ f_3(n) &= \frac{1}{2^{\omega(n)}} \pi_{p^\alpha/n} \left(1 + f(p^\alpha)\right) \end{aligned} \tag{4.1}$$

Démonstration.

$$
\begin{aligned}
f_1(n) &= \pi_{p^\alpha//n} f_1(p^\alpha) \\
&= \pi_{p^\alpha//n} \frac{1}{\tau(p^\alpha)} \sum_{d/p^\alpha} f\left(p^\alpha\right) \\
&= \frac{1}{\tau(n)} \pi_{p//n} \left(1 + \sum_{r=1}^{\alpha} f(p^r)\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_2(n) &= \pi_{p^\alpha//n} \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{\alpha} \mu^2(p^i) f(p^i) \\
&= \pi_{p^\alpha//n} \frac{1}{2} \left(1 + f(p)\right) \; car \; \mu^2(p^i) \; = \; 0 \, si \, i \; \geqslant \; 2. \\
&= \frac{1}{2^{\omega(n)}} \pi_{p/n} \left(1 + f(p)\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_3(n) &= \pi_{p^\alpha//n} \frac{1}{2} \left(1 + f(p^\alpha)\right) \\
&= \frac{1}{2^{\omega(n)}} \pi_{p^\alpha//n} \left(1 + f(p^\alpha)\right)
\end{aligned}
$$

car les seuls diviseurs unitaires de p^r sont r et p^r

Exemple 4.1.
Si $f(n) = \omega(n),$ *alors* $f_1(n) = \dfrac{n}{\tau(n)},\; f_2(n) = \dfrac{1}{2^{\omega(n)}},\; f_3(n) = \dfrac{\gamma(n)}{2^{\omega(n)}}$

où

γ *est la fonction noyau définie par* $\gamma(n) = \begin{cases} 1 \; si \; n \; = \; 1 \\ \pi_{p/n} p \; si \; n \; \geqslant \; 2 \end{cases}$

Si $f(n) = \sigma(n),$ *alors* $f_1(n) = \dfrac{1}{\tau(n)} \pi_{p\alpha//n} \left(1 + \displaystyle\sum_{i=1}^{\alpha} \frac{p^{i+1} - 1}{p - 1}\right),\; f_2(n) = \dfrac{1}{2^{\omega(n)}} \pi_{p\alpha//n} (p+2),\; f_3(n) = \dfrac{1}{2^{\omega(n)}}$

Théorème 4.3. *Si f est additive, on a*

$$
\begin{aligned}
f_1(n) &= \sum_{p^r//n} \frac{1}{r+1} \sum_{i=1}^{r} f(p^r) \\
f_2(n) &= \frac{1}{2} \sum_{p/n} f(p) \qquad (4.2) \\
f_3(n) &= \frac{1}{2} f(n).
\end{aligned}
$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} f_1(n) &= \sum_{p^r//n} \frac{1}{r+1} \sum_{d/p^r} f(d) \\ &= \sum_{p^r//n} \frac{1}{r+1} \sum_{i=0} f(p^i) \\ f_2(n) &= \sum_{p^r//n} \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{r} \mu^2(p^i) f(p^i) \\ &= \sum_{p^r//n} \frac{1}{2} f(p) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{p/n} f(p) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_3(n) &= \sum_{p^r//n} \frac{1}{2} f(p^r) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{p^r//n} f(p^r) \\ &= \frac{1}{2} f(n). \end{aligned}$$

$\boxdot$

Après avoir étudié les fonctions additives $f_i (1 \leqslant i \leqslant 3)$, nous établissons le lien entre la fonction μ^2 et certaines fonctions moyennes via leurs séries respectives de Dirichlet.
Dans ce paragraphe, nous introduisons trois nouvelles fonctions qui font l'objet d'une généralisation dans la suite du chapitre.
Il s'agit des fonctions :

$$f_4(n) = \frac{1}{\tau(n)} \sum_{d/n} \mu^2(d) f(d) \tag{4.3}$$

$$f_5(n) = \frac{1}{\tau(n)} \sum_{d/n} \mu^2(d) \tag{4.4}$$

$$f_6(n) = \frac{1}{2^{\omega(n)}} \sum_{d/n} \mu^2(d) f(d). \tag{4.5}$$

Si Re(s) > 1, posons $F_i(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f_i(n)}{n^s}$. Nous avons le théorème suivant :

Théorème 4.4. *[18] Dans le demi-plan cité ci-haut,on a*

$$F_4(s) = \zeta_2(s) G_4(s) \tag{4.6}$$

$$F_5(s) = \zeta_2(s) G_5(s) \tag{4.7}$$

$$F_6(s) = \zeta_2(s) G_5(s) \tag{4.8}$$

où on a posé

$$\zeta_2(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mu^2(n)}{n^s}.$$

$$G_4(s) = \prod_p \left(1 + \frac{f(p)-1}{2(p^s+1)} + \frac{f(p)+1}{p^s+1}\left(-p^{2s}\log\left(1-\frac{1}{p^s}\right) - p^s - \frac{1}{2}\right)\right)$$

$$G_5(s) = \prod_p \left(1 + \frac{2}{p^s+1} - p^{2s}\log(1-\frac{1}{p^s}) - p^s - 1\right)$$

et

$$G_6(s) = \prod_p \left(1 + \frac{f(p)-1}{2(p^s+1)} + \frac{f(p)+1}{2(p^{2s}+1)}\right).$$

Démonstration. Elle découle de représentation en produit eulérien des séries de Dirichlet via les relations ci-après.

$$\sum_{n=k}^{+\infty} x^n = \frac{x^k}{1-x}, |x| < 1;$$
$$\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n+1} x^n = -\frac{1}{x}\log(1-x), |x| < 1$$

et la formule de Mac-Laurin de la fonction $\log(1-x)$ au voisinage de zéro, via le lemme 4.1.

Lemme 4.1. *Pour tout nombre P premier et pour tout nombre complexe s vérifiant $|\frac{1}{p^s}| < 1$, on a*

$$\log\left(1-\frac{1}{p^s}\right) = -\frac{1}{p^s} - \frac{1}{p^{2s}} + O(\frac{1}{p^{2\sigma}})$$
$$\sum_{r\geq 2} \frac{1}{p^{rs}} = \frac{1}{p^s(p^s-1)}$$
$$\sum_{r\geq 0} \frac{1}{(r+1)p^{rs}} = -p^s \log\left(1-\frac{1}{p^s}\right).$$

Démontrons maintenant le théorème 4.4. Pour $F_4(s)$, nous écrivons

$$\begin{aligned}
F_4(s) &= \prod_p \left(1 + \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{r+1} \sum_{i=0}^{r} \frac{\mu^2(p^r) f(i)}{p^{rs}}\right) \\
&= \prod_p \left(1 + \frac{1}{2p^s}(f(p)+1) + f(p) + 1\right) - \left(-p^s \log(1-\frac{1}{p^{s)}}) - 1 - \frac{1}{2p^s}\right) \\
&= \prod_p \left(1 + \frac{1}{p^s} + \frac{f(p)-1}{2p^s} + (f(p)+1)X_p(s)\right)
\end{aligned}$$

où

$$X_p(s) = -p^s \log\left(1-\frac{1}{p^s}\right) - 1 - \frac{1}{2p^s}.$$

On peut encore écrire

$$F_4(s) = \zeta_2(s)\left(1 + \frac{f(p)-1}{2(p^s+1)}\right) + \left(-p^{2s}\log(1-\frac{1}{p^s}) - p^{s-\frac{1}{2}}\right)\{\frac{f(p)+1}{p^s+1}\}. \tag{4.9}$$

C'est la première relation.
Pour la série de Dirichlet $F_6(s)$, il suffit de remplacer f par **1** dans $F_4(s)$..
Pour $F_6(s)$,on obtient

$$\begin{aligned} F_6(S) &= \prod_P \left(1 + \sum_{r=1}^{+\infty} \frac{1+f(p)}{2p^{rs}}\right) \\ &= \prod_p \left(1 + \frac{1}{p^s} + \frac{f(p)-1}{2p^s} + \frac{1+f(p)}{2}\frac{1}{p^s(p^s-1)}\right) \\ &= \zeta_2(s)\prod_p \left(1 + \frac{f(p)-1}{2(p^s+1)} + \frac{f(p)+1}{2(p^{2s}-1)}\right) \end{aligned}$$

qui est la dernière formule.

Remarque 4.1. *i) Si f est multiplicative et la série*

$$\sum_p \frac{\mid f(p)-1 \mid}{p^\delta}$$

converge pour un certain réel δ dans l'intervalle]0,1[, alors les séries '$G_4(s), G_5(s), G_6(s)$ convergent absolument pour Re(s) > max(δ, $\frac{1}{2}$).
ii) Les estimations fournies par S.Nyandwi et al. pour les fonctions

$$\sum_{n\leqslant x} f_i(n)$$

découlent en partie de celle de la quantité

$$\sum_{n\leqslant x} \mu^2(n).$$

Théorème 4.5. *[24] La fonction sommatoire de μ^2,notée $M(x)$ est donnée par*

$$M(x) = \frac{6}{\pi^2}x + O(\sqrt{x}) \tag{4.10}$$

Démonstration. Comme $M(x) = \sum_{n\leq x}\mu^2(n)$, on peut encore écrire

$$\begin{aligned}
M(x) &= \sum_{n\leq x}\sum_{d^2/n}\mu(d).\\
&= \sum_{d\leq x}\mu(d)[\frac{x}{d^2}]\\
&= x\sum_{d\geqslant 1}\frac{\mu(d)}{d^2} - x\sum_{d>x}\frac{\mu(d)}{d^2} - \sum_{d\leqslant x}\mu(d)\{\frac{x}{d}\}
\end{aligned}$$

Disons

$$M(x) = \frac{1}{\zeta(2)}x + S_1 + S_2$$

où

$$S_1 << x\sum_{d>x}\frac{|M(d)|}{d^2} << x\int_{\sqrt{x}}^{\infty}\frac{dt}{t^2} << \frac{x}{\sqrt{x}} = \sqrt{x}$$

et

$$S_2 = \sum_{d\leqslant\sqrt{x}}\mu(d)\{\frac{x}{d}\}$$

$$S_2 << \sum_{d\leqslant\sqrt{x}} 1 = [\sqrt{x}] << \sqrt{x}.$$

Sachant que

$$\frac{1}{\zeta(2)} = \frac{6}{\pi^2},$$

alors

$$M(x) = \frac{6}{\pi^2}x + O(\sqrt{x}).$$

Des théorèmes 4.4. et 4.5., on en déduit le théorème 4.6.

Théorème 4.6. *Soit un réel ε, x un réel plus grand que 1 et f une fonction multiplicative vérifiant la condition,*

$$\sum_p \frac{|f(p)-1|}{p^\delta} < +\infty,$$

on a alors

$$\begin{aligned}
\sum_{n\leqslant x} f_4(n) &= \frac{6}{\pi^2}G_4(1)x + O(x^{\theta+\varepsilon})\\
\sum_{n\leqslant x} f_5(n) &= \frac{6}{\pi^2}G_5(1)x + O(x^{\theta+\varepsilon})\\
\sum_{n\leqslant x} f_6(n) &= \frac{6}{\pi^2}G_6(1)x + O(x^{\theta+\varepsilon})
\end{aligned}$$

où
$\theta = max(\delta, \frac{1}{2})$.

Remarque 4.2. *La démonstration de ces trois résultats est une conséquence du lemme 4.2.*

Lemme 4.2. *Soit h, une fonction multiplicative avec $h = \mu^2 * g$ où la série vérifie $\sum_{n\geqslant 1} \frac{|g(n)|}{n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}}$ converge pour $\varepsilon \in]0, \frac{1}{2}[$, alors*

$$\sum_{n\leqslant x} h(n) = \frac{6}{\pi^2} G(1)x + O(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}) \tag{4.11}$$

avec $G(s) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{g(n)}{n^s}$.

Démonstration du lemme précédent. Puisque h $= \mu^2 * g$, on a

$$\begin{aligned}\sum_{n\leq x} h(n) &= \sum_{n\leq x} g(n) M\left(\frac{x}{n}\right)\\ &= \frac{6}{\pi^2}\sum_{n\leqslant x}\frac{g(n)}{n} + O\left(\sum_{n\leqslant x}(\frac{|g(n)|}{\sqrt{n}}\sqrt{x}\right)\\ &= \frac{6}{\pi^2}G(1)x - \frac{6}{\pi^2}x\sum_{n>x}\frac{g(n)}{n} + S\end{aligned}$$

$$avec\ S << x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\sum_{n\leqslant x}|g(n)|\frac{1}{n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}}$$

puisque la série $\sum_{n\geq 1} \frac{|g(n)|}{n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}}$ converge, alors

$$S << x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$$

Le second terme du second membre est

$$\begin{aligned}&<< \frac{x}{x^{\frac{1}{2}-\varepsilon}}\sum_{n\geqslant 1}\frac{|g(n)|}{n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}}\\ &<< x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}.\end{aligned}$$

Pour établir le théorème 4.7., on utilise le théorème 2.5.car pour tout i $\in \{4, 5, 6\}$, $f_i = \mu^2 * g_i$ où la série $\sum_{n\leqslant 1} \frac{|g_i(n)|}{n^\sigma}$ converge lorsque $\sigma > max(\delta, \frac{1}{2})$ et conclure avec le lemme 4.2.

Remarque 4.3. *Le théorème 4.7. estime les fonctions sommatoires des fonctions de la forme $\mu^2 * g$, où la série de Dirichlet associée à g converge lorsque Re(s) $> 1 - \varepsilon$ et Re(s) $\neq$ 1 sur les entiers ordinaires, S.Nyandwi et al. ont généralisé ce théorème sur les entiers y-friables.*

Le chapitre suivant est réservé à la fonction $\sum_{n\leq x} f_g(n)$ avec f additive et g multiplicative.

Chapitre 5

Fonction moyenne généralisée

5.1 Introduction

Après avoir présenté la problématique du sujet de mémoire et quelques résultats de certains sous-ensembles des diviseurs d'un entier n,nous étudions dans cette section la valeur moyenne de la fonctionf_g définie dans l'introduction lorsque f est additive et constante sur l'ensemble des nombres premiers P.

Nous commençons d'abord à rappeler quelques résultats connus sur f_g.

Nous rappelons d'abord les hypothèses que doivent vérifier des fonctions f et g.

On dit que f et g appartiennent à une classe de fonctions S

a) si f est multiplicative vérifiant la condition (C_δ), alors la série $\sum_p \frac{|f(p)-1|}{p^\delta}$ converge pour un certain réel δ de l'intervalle]0,1[.

b) si g multiplicative, positive et $g(p^r) = 0$, pour tout entier $r \geqslant 2$.
Dans le cas où f est additive, on exigera quelque fois qu'elle soit constante sur P et vérifie la condition $f(p^r) - f(p^{r-1}) << 1$.

La fonctionf_g est définie par la relation

$$f_g(n) = \frac{1}{h(n)} \sum_{d/n} g(d)f(d) \tag{5.1}$$

avec

$$h(n) = \sum_{d/n} g(d).$$

Remarque 5.1. *a)L'ensemble S n'est pas vide car les fonctions* $f\varepsilon\{\frac{\sigma(n)}{n}, \frac{\tau(n)}{\varphi(n)}, \frac{n}{\varphi(n)}\}$ *et* $g(n) = \mu^2(n)(k-1)^{\omega(n)}$, $k \geq 2$ *sont des éléments de S.*
b)Lorsque f est additive et constante sur P de même que g, on fera appel au réel

$$c_{f,g} = \frac{f(2)g(2)}{1+g(2)}. \tag{5.2}$$

L'objectif de ce chapitre est d'estimer la fonction

$$S_{f,g}(x) = \sum_{n \leqslant x} f_g(n)$$

lorsque f et g vérifient la remarque (5.1) et nous montrons que

$$S_{f,g}(x) = u(x) + r(x),\ avec\, r(x) << \frac{x}{(\log x)^{m+1}}$$

où u(x) est une fonction donnée.
Lorsque f est multiplicative, la fonction $S_{f,g}(x)$ *a été estimée par S.Nyandwi et al.dans[26]. Ces chercheurs ont montré d'abord le caractère multiplicatif ou additif de* f_g *selon que f le soit.*
Ils ont ensuite établi la relation de convolution

$$f_g = \mu^2 * g_1,$$

où g_1 *est une fonction arithmétique et utilise la propriété de la série de Dirichlet associée à* f_g *.*
La propriété de convolution précédent les ont permis d'estimer également la fonction

$$\sum_{n \leqslant x, {}_{p/n}, {}_{p \leqslant y}} f_g(n)$$

Une recherche documentaire montre que la littérature de la théorie des nombres contient peu de résultats sur la fonction f_g *car elle est nouvellement définie. Comme les estimations des fonctions sommatoires des fonctions arithmétiques font appel aux propriétés des fonctions considérées, nous rappelons quelques - unes des caractéristiques de la fonction* f_g *utiles dans la suite.*

5.2 Quelques propriétés de la fonction f_g

Dès propriétés de f, nous déduisons la proposition 5.1.

Proposition 5.1. *La fonction* f_g *est multiplicative(respectivement additive) selon que f le soit.*

Démonstration :
i) Cas où f est multiplicative :
Soient deux entiers m et n premiers entre eux,on a :

$$\begin{aligned}
f_g(mn) &= \frac{1}{h(m)h(n)} \sum_{d_1/n, d2/n, (d1,d2)} g(d1,d2)f(d1,d2)) \\
&= \frac{1}{h(m)h(n)} \sum_{d1/n} (\sum_{(d2/m} g(d1)g(d2)f(d1)f(d2)) \\
&= \frac{1}{h(m)h(n)} (\sum_{d1/n} g(d1)f(d1) \sum_{d2/m} g(d1)f(d2)) \\
&= f_g(n)f_g(m)
\end{aligned} \tag{5.3}$$

Par conséquent $f_g(mn) = f_g(n)f_g(m)$.

$\boxdot$

ii) Cas où f est additive.
On peut écrire

$$\begin{aligned}
f_g(mn) &= \frac{1}{h(m)h(n)} \sum_{d_1/n} \left(\sum_{d_2/m} g(d_1)g(d_2) \right) (f(d_1) + f(d_2)) \\
&= \frac{1}{h(m)h(n)} \sum_{d_1/n} g(d_1) \left(f(d_1) \sum_{d_2/n} g(d_1) + \sum_{d_2/m} g(d_2)f(d_2) \right) \\
&= \frac{1}{h(m)} \sum_{d_1/n} g(d_1)f(d_1) + \frac{1}{h(n)} \sum_{d_2/m} g(d_2)f(d_2) \\
&= f_g(m) + f_g(n)
\end{aligned} \tag{5.4}$$

Des définitions de f et g, nous déduisons la proposition 5.2.

Proposition 5.2. *a)Pour tout nombre premier p et tout entier $r \geq 1$,on a :*

$$\begin{aligned}
f_g(p^r) &= \frac{1 + g(p)f(p)}{1 + g(p)} \quad \textit{si f est multiplicative} \\
&= \frac{g(p)f(p)}{1 + g(p)} \quad \textit{si f est additive}
\end{aligned} \tag{5.5}$$

b)Lorsque f est additive, en posant $f_{g_1}(n) = f_g(n)$ et pour tout $l \geqslant 2$

$$f_{g_l}(n) = \frac{1}{h(n)} \sum_{d/n} g(d) f_{g_{l-1}}(d)$$

on a les relations

$$f_{g_l}(p^r) = \left(\frac{g(2)}{1 + g(2)} \right)^l f(2) \tag{5.6}$$

$$f_{g_l}(n) = \left(\frac{g(2)}{1 + g(2)} \right)^l f(2)\omega(n). \tag{5.7}$$

Démonstration .

La preuve de 5.2 a) découle de la proposition 5.1.
Démontrons seulement le b) de la proposition.
i) Par récurrence ; si l=2, on a

$$\begin{aligned} f_{g_2}(p^r) &= \frac{1}{1+g(p)} \sum_{d/p^r} g(p^r) f_g(p^r) \\ &= \frac{1}{1+g(p)} f_g(p) \\ &= \left(\frac{g(p)}{1+g(p)} \right)^2 f(p). \end{aligned}$$

Admettons la relation (5.5) jusqu'à l'ordre $l-1$ et montrons-la pour l'entier l. Par définition de f_{g_l}, on a

$$\begin{aligned} f_{g_l}(p^r) &= \frac{1}{h(p^r)} \sum_{d/p^r} g(d) f_{g_{l-1}}(p) \\ &= \frac{1}{1+g(p)} g(p) f_{g_{l-1}}(p) \\ &= \frac{g(p)}{1+g(p)} \frac{(g(p))^{l-1}}{(1+g(p))^{l-1}} f(p) \\ &= \left(\frac{g(p)}{1+g(p)} \right)^l f(p). \end{aligned}$$

Pour la relation ii) on écrit :

$$\begin{aligned} f_{g_l}(n) &= \sum_{p^r//n} f_g(p^r) \\ &= \sum_{p/n} \left(\frac{g(p)}{1+g(p)} \right)^l f(p) \\ &= \sum_{p/n} \left(\frac{g(2)}{1+g(2)} \right)^l f(2) \\ &= \left(\frac{g(2)}{1+g(2)} \right)^l f(2)\omega(n). \end{aligned}$$

Dans les chapitres 3 et 4, nous avons parlé de la contribution des séries de Dirichlet dans l'estimation des fonctions arithmétiques, il est donc capital d'introduire la série de Dirichlet associée à la fonction f_g fournie par la proposition 5.3. Avant d'énoncer la proposition, des nouvelles notations savèrent nécessaires.

5.3 Série de Dirichlet associée à f_g

Nous introduisons d'abord des nouvelles notations utiles pour la suite. Pour Re(s) > 1, posons

$$\zeta_2(s)=\prod_p(1+\frac{1}{p^s}),\ F_g(s)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{f_g(n)}{n^s},\ et\ G_1(s)=\prod_p\left(1+\frac{g(p)(f(p)-1)}{(1+g(p))(p^s+1)}+\frac{c_{f,g}(p)}{(p^{2s}-1)}\right) \tag{5.8}$$

où

$$c_{f,g}(p)=\frac{1+g(p)f(p)}{1+g(p)}.$$

Proposition 5.3. *Si f et g appartiennent à l'ensemble S,alors*

$$F_g(s)=\zeta_2(s)G_1(s). \tag{5.9}$$

La démonstration de cette proposition est une conséquence du lemme 5.1. et de l'écriture en produit eulérien d'une série de Dirichlet.

Lemme 5.1. *[11] Pour tout nombre complexe z vérifiant* $\mid z\mid<1$ *et pour tout entier k* $\geqslant 1$, *on a,* $\sum_{l=k}^{\infty}z^k=\frac{z^k}{1-z^k}$.

Démonstration de la proposition 5.3. On sait que si Re(s) > σ_a alors

$$F_g(s)=\prod_p\left(1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{f_g(p^r)}{p^{rs}}\right).$$

On peut encore écrire

$$F_g(s)=\prod_p\left(1+\frac{c_{f,g}(p)}{p^s}+c_{f,g}(p)\sum_{r=2}^{\infty}\frac{1}{p^{rs}}\right).$$

Par le lemme 5.1. ,on a

$$\sum_{r=2}^{\infty}\frac{1}{p^{rs}}=\frac{1}{p^s(p^s-1)}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}F_g(s)&=\prod_p\left(1+\frac{1}{p^s}+\frac{g(p)(f(p)-1)}{(1+g(p))p^s}+\frac{c_{f,g}(p)}{p^s(p^s-1)}\right)\\&=\zeta_2(s)\prod_p\left(1+\frac{g(p)(f(p)-1)}{(1+g(p))(p^s+1)}+\frac{c_{f,g}(p)}{p^{2s}-1)}\right)\end{aligned}$$

Corollaire 5.1. *Sous les conditions de la proposition 5.3, la fonction* g_1 *définie par la série* $G_1(s)$ *est multiplicative et de plus* $G_1(s)$ *converge absolument dans le demi-plan, Re(s) > max*$(\frac{1}{2},\delta)$.

Démonstration. Sous la condition de f et g, $G_1(s)$ converge absolument si et seulement si :

$$\sum_p \frac{\mid f(p)-1 \mid}{p^\sigma} < +\infty \; et \; \sum_p \frac{1}{p^{2\sigma}} < +\infty.$$

Par conséquent, cette convergente ait lieu si et seulement si $\sigma > max(\frac{1}{2}, \delta)$.

Corollaire 5.2. *On a* g_1=$(\mu^2)^{-1} * f_g$.

Démonstration.
La relation 5.8. est équivalente à l'existence d'une fonction multiplicative g_1 telle que $f_g = \mu^2 * g_1$.
Par conséquent $g_1 = (\mu^2)^{-1} * f_g$.
Du corollaire 5.2. et de la relation (4.3), nous déduisons la proposition suivante.

Proposition 5.4. *[?] Sous les conditions de la proposition 5.3., on a*

$$\sum_{n\leqslant x} f_g(n) = \frac{6}{\pi^2} G_1(1)x + O(x^{\theta+\varepsilon}) \tag{5.10}$$

Démonstration. C'est le théorème 2.1. établi dans [?].

Corollaire 5.3. *Soit k un entier ≥ 2,on a*

$$\sum_{n\leqslant x} \frac{1}{k^{\omega(d)}} \sum_{d/n} \mu^2(d)(k-1)^{\omega(n)} \frac{d}{\varphi(d)} = \frac{6}{\pi^2} x \prod_p \left(1 + \frac{k-1}{k(p^2-1)} + \frac{kp-1}{k(p-1)(p^2-1)}\right) + O\left(x^{\theta+\varepsilon}\right);$$

$$\sum_{n\leqslant x} \frac{1}{k^{\omega(n)}} \sum_{d/n} \mu^2(d)(k-1)^{\omega(d)} \frac{\sigma(d)}{d} = \frac{6}{\pi^2} x \prod_p \left(1 + \frac{k-1}{kp(p-1)} + \frac{k(p+1)-1}{kp(p^2-1)}\right) + O\left(x^{\theta+\varepsilon}\right);$$

$$\sum_{n\leqslant x} \frac{1}{k^{\omega(n)}} \sum_{d/n} \mu^2(d)(k-1)^{\omega(d)} \frac{\varphi_l(d)}{d} = \frac{6}{\pi^2} c(f,g,l)x + O\left(x^{\theta+\varepsilon}\right)$$

où

$$c(f,g,l) = \frac{6}{\pi^2} \prod_p \left(1 + \frac{(k-1)(p+l-1)}{kp(p+1)} + \frac{kp+(l-1)(k-1)}{kp(p^2-1)}\right).$$

Remarque 5.2. *i)Les estimations précédentes montrent que la valeur moyenne de la fonctionf_g sur les entiers ordinaires est proportionnelle à celle des entiers sans facteur carré.*
ii)Il serait intéressant d'estimer les constantes qui apparaissent dans le corollaire 5.3 lorsque $k = 2$.
iii)Nous n'avons pas présenté l'estimation de la fonction $\sum_{n\leq x, p/n, p\leq y} f_g(n)$pour ne pas trop surchargé ce manuscrit.

5.4 Nouveaux résultats

Nous énonçons le théorème principal de ce mémoire à savoir l'estimation de la fonction $S_{f_g}(x)$. Dans ce théorème apparaissent quelques constantes que nous rappelons pour les fonctions g multiplicative et f additive constantes sur l'ensemble des nombres premiers P. Dans la suite de ce chapitre, nous faisons appels aux notations suivantes.
Pour tout réel $x \geq 1$, on pose

$Sf_g(x) = \sum_{n\leq x} f_g(n)$, *et* $Sf_{g_l}(x) = \sum_{n\leq x} f_{g_l}(n)$.

On pose en suite $C_{f,g} = \frac{g(2)f(2)}{1+g(2)}$, $A = \sum_p \left(\log(1-\frac{1}{p}) + \frac{1}{p}\right)$ *et* $C = \gamma + A$
où $\gamma = 1$ - $\int_1^{+\infty} \frac{\{t\}}{t^2} dt$, $d_{f_{g_l}} = \left(\frac{g(2)}{1+g(2)}\right)^l f(2)$. *puis* $m(x) = \sum_l^m \frac{d_{l-1}}{(\log x)^l}$, $H(x) = \log logx - m(x) + C$
avec
$d_l = \int_1^{+\infty} \frac{\{t\}}{t^2} (\log t)^l dt.$

Avec ces notations, on a le théorème suivant.

Théorème 5.1. *Les quantités $S_{f_g}(x)$ et $S_{f_{gl}}(x)$ vérifient les relations (5.10) et (5.11).*

$$\begin{aligned} S_{f_g}(x) &= c_{f,g}x\log\log x + c_{f,g}Cx - c_{f,g}xm(x) + O\left(\frac{x}{(\log x)^{m+1}}\right) \\ &= c_{f,g}xH(x) + O\left(\frac{x}{(\log x)^{m+1}}\right) \end{aligned}$$

où m est un entier $\geqslant 0$

Théorème 5.2.

$$\begin{aligned} S_{f_{g_l}}(x) &= c_{f,g_l}x\log\log x + c_{f,g_l}Cx - c_{f,g_l}xm(x) + O\left(\frac{x}{(\log x)^{m+1}}\right) \\ &= c_{f,g_l}xH(x) + O\left(\frac{x}{(\log x)^{m+1}}\right) \end{aligned} \tag{5.11}$$

Démonstration. Elle découle des lemmes suivants.

Lemme 5.2. *[22] D'après Ramdinmawia Vanlalngaia , on a,*

$$\sum_{p\leqslant x} \frac{1}{p} = \log\log x + C + O\left(\frac{x\exp^{-c_1\sqrt{\log x}}}{(\log x)^{\frac{3}{4}}}\right). \tag{5.12}$$

où c_1 est une constante strictement positive.

Lemme 5.3. *[24](T.N.P) Si $\pi(x) = \sum_{p\leq x} 1$ et $L_i(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t}$, alors,*

$$\pi(x) = L_i(x) + O\left(\frac{x\exp^{-c_2\sqrt{\log x}}}{(\log x)^{\frac{3}{4}}}\right) \tag{5.13}$$

où c_2 est un réel > 0.

Lemme 5.4. *[9] Si $a(n)$ est une fonction additive et $a(p^r) - a(p^{r-1}) << 1$ alors*

$$\sum_{p^r \leq x, r\geq 2} \frac{a(p^r) - a(p^{r-1})}{p^r} = \sum_{p,r\geq 2} \frac{a(p^r) - a(p^{r-1})}{p^r} + O\left(\frac{1}{(\log x)^{m+1}}\right) \tag{5.14}$$

Démonstration du théorème 5.1. Puisque f_g est additive, on peut écrire

$$\begin{aligned} S_{f_g}(x) &= \sum_{n\leqslant x} \sum_{p^r//n} f_g(p^r) \\ &= \sum_{mp^r\leqslant x, r\geqslant 1} \Big(f_g(p^r) - f_g(p^{r-1})\Big) \end{aligned}$$

On peut écrire aussi

$$S_{f_g}(x) = \sum_{mp\leqslant x} f_g(p) + \sum_{mp^r\leqslant x, r\geqslant 2} f_g(p^r) - f_g(p^{r-1}) \tag{5.15}$$

Disons que

$$S_{f_g}(x) = S_0 + S_1.$$

Puisque $f_g(p^r) = \frac{g(p)f(p)}{1+g(p)}$, pour tout $r \geqslant 1$, on a $S_1 = 0$.

Par conséquent,

$$\begin{aligned} S_{f_g}(x) &= S_0 \\ &= \sum_{mp\leq x} C_{f,g} \\ &= C_{f,g} \sum_{mp\leq x} 1 \end{aligned}$$

Il reste à estimer la quantité $\sum_{p\leq x}[\frac{x}{p}]$,

puisque

$$\begin{aligned} S_0 &= C_{f,g} \sum_{p\leq x}[\frac{x}{p}] \\ &= c_{f,g}x \sum_{p\leq x} \frac{1}{p} - c_{f,g} \sum_{p\leq x}\{\frac{x}{p}\}. \end{aligned}$$

Disons que $S_0 = S_0^{'} + S_0^{''}$.

Puisque

$$\frac{xexp(-c_2\sqrt{\log x}}{(\log)^{3/4}} << \frac{x}{(logx)^{m+1}},$$

le lemme 5.2., implique

$$S_0^{'} = c_{f,g}x(\log\log x + C) + O\left(\frac{x}{(logx)^{m+1}}\right) \tag{5.16}$$

Pour estimer $S_0^{''}$, on considère la quantité $\sum_{p\leq x}\{\frac{x}{p}\}$.

Lemme 5.5. *Nous avons* $\sum_{p\leq x}\{\frac{x}{p}\} = xm(x) + O\left(\frac{x}{(\log x)^{m+1}}\right)$.

Démonstration. D'après l'intégrale de Stieltjes[9], on a,

$$\sum_{p\leq x}\{\frac{x}{p}\} = \int_2^x \{\frac{x}{t}\}d\pi(t).$$

D'apres le T.N.P avec un reste d'ordre

$$\frac{x}{(logx)^{m+1}} \tag{5.17}$$

on peut écrire

$$d\pi(t) = \frac{1}{\log t}dt + d\left(O\left(\frac{x}{(logx)^{m+1}}\right)\right)$$

Par conséquent,

$$\sum_{p\leq x}\{\frac{x}{p}\} = \int_2^x \frac{\{\frac{x}{t}\}}{\log t}dt + O\left(\frac{x}{(logx)^{m+1}}\right).$$

Si on pose

$$I(x) = \int_2^x \frac{\{\frac{x}{t}\}}{\log t}dt$$

et en faisant un changement de variables y = $\frac{x}{t}$, alors,

$$I(x) = \frac{x}{\log x}\int_1^{\frac{x}{2}} \frac{\{y\}}{y^2(1-\frac{\log y}{logx})}dt$$

En développant en série entière à l'ordre m - 1, on a

$$\left(1-\frac{\log y}{logx}\right)^{-1} = \sum_{l=0}^{m-1}\left(\frac{\log y}{logx}\right)^l \int_1^{\frac{x}{2}} \frac{\{x\}}{y^2}(\log y)^l dy + O\left(\frac{x}{(logx)^{m+1}}\right). \tag{5.18}$$

Le terme d'erreur découle de la convergente de l'intégrale.

$$\int_1^{+\infty} \frac{\{y\}(\log y)^m}{y^2}dy.$$

Pour l $\in \{0, 1, 2, \cdots, m-1\}$.
L'intégrale dans I(x) devient :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\{y\}(\log y)^l}{y^2}dy = \int_1^{\frac{x}{2}} \frac{\{y\}(\log y)^l}{y^2}dy - \int_{\frac{x}{2}}^{+\infty} \frac{(\log y)^m}{y^2}dy$$

Le second terme est

$$<< \frac{(\log x)^l}{x^2}$$

car la fonction $y \to \frac{(\log y)^l}{y^2}$ est décroissante.

Par conséquent

$$\sum_{l=0}^{m-1} \frac{1}{(\log x)^l} \int_{\frac{x}{2}}^{+\infty} \frac{\{y\}(\log y)^l}{y^2} dy << \frac{1}{x^2}.$$

En insérant les estimations précédentes dans I(x), on obtient,

$$\begin{aligned} I(x) &= \frac{x}{\log x} \sum_{l=0}^{m-1} \frac{d_l}{(\log x)^l} + O\left(\frac{x}{(logx)^{m+1}}\right) \\ &= x \sum_{j=1}^{m} \frac{d_{j-1}}{(\log x)^j} + O\left(\frac{x}{(logx)^{m+1}}\right) \\ &= x m_1(x) + O\left(\frac{x}{(logx)^{m+1}}\right). \end{aligned} \tag{5.19}$$

En groupant toutes les estimations précédentes, on obtient finalement

$$S_0 = C_{f,g} x(\log \log x + C - m(x)) + O\left(\frac{x}{(logx)^{m+1}}\right).$$

Remarque 5.3. *Lorsque $f(p^r) - f(p^{r-1})$ n'est pas nul, la constante C est remplacée par*

$$C + \sum_p \sum_{r \geq 2} \frac{f(p^r) - f(p^{r-1})}{f(p^r}.$$

Pour estimer

$$\sum_{n \leqslant x} f_{g_l}(n),$$

on utilise la relation 5.6 et l'estimation

$$\sum_{n \leq x} \omega(n) = x(loglogx + C - m(x)) + O\left(\frac{x}{(logx)^{m+1}}\right).$$

Avant de terminer la rédaction de ce mémoire, mon directeur m'a informé qu'il est entrain d'étudier la quantité

$$\sum_{n \leqslant x, p/n, p > y, n \equiv a[nq]} f_g(n).$$

Les quantités suivantes

$$\sum_{n \leqslant x, n \equiv a[q]} f_i(n), \quad \sum_{n \leqslant x} l(n), \quad l(n) = \frac{1}{2^{\omega(n)}} \sum_{d/n,\, d\ unitaire} f(d).$$

Lorsque f_i est additive ne sont pas encore étudiée.

Enfin nous terminons ce travail par une brève conclusion et une bibliographie.

Conclusion

Dans ce mémoire de fin d'études du second cycle de l'enseignement supérieur, nous avons étudié la valeur moyenne d'une classe des fonctions arithmétiques additives et constantes sur l'ensemble des nombres premiers P.
Nous nous sommes surtout focalisés sur les quantités

$$\sum_{n\leq x} f_g(n) \ et \ \sum_{n\leq x} f_{g_l}(n),$$

où l est un entier ≥ 2, voir le théorème 5.1.

Les résultats obtenus possèdent des termes d'erreurs d'ordre $\frac{x}{(\log x)^{m+1}}$ où m est un entier ≥ 0 contrairement aux résultats de J.M De Koninck et J.Grah qui est de l'ordre de $\frac{x}{\log x}$.

Par contre notre terme d'erreur est du même ordre que celui de S.Gaboury obtenu pour les fonctions moyennes mais il faut remarquer que notre résultat généralise celui de S.Gaboury. On obtient l'estimation de S.Gaboury en posant $g = \mu^2$. A part l'estimation des quantités

$$\sum_{n\leq x} f_g(n)$$

$$\sum_{n\leq x} f_{g_l}(n).$$

nous avons exploité plusieurs fois les notions des chapitres 3 et 4.
Dans l'avenir, on peut étudier les problèmes de type,ce mémoire m'a permis de comprendre davantage certaines notions de base de la théorie des nombres.

$$\sum_{n\leq x} f_g(n)$$

$$\sum_{n\leq x, p/n, p>y} f_g(n), \quad \sum_{n\leq x, p/n, z<p\leq y} f_g(n), \quad \sum_{n\leq x, a=(mod q)} f_g(n).$$

En effet, la plus part des travaux de mon directeur de mémoire font appel aux entiers du type ci-haut pour d'autres fonctions autres que f_g.

Bibliographie

[1] K.Alladi, Asymptotic estimates formus involving the Mobius function II, Trans.Amer.Soc 272(1982), 87-105.

[2] T.M.Apostol, Introduction to analytic Number Theory, Spring-overlag Berlin, 1976.

[3] S.Bahman, Sur quelques applications de la"méthode de l'hyperbole" de Dirichlet à la théorie des nombres premiers(1968)

[4] M.Cloutier,Les parties puissantes et libre de carrés d'un entier .Springer Science,2013.

[5] H.Delange, Un théorème sur les fonctions multiplicatives et ses applications.In Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Superieure,Vol.78,P.1-29,1961.

[6] J.M De Koninck et J.Grah, Moyennes sur certains ensembles de diviseurs d'un entier. L'enseignement mathématique 42(1996), 97-123.

[7] A.Derbal :Ordre maximum d'une fonction liée aux diviseurs d'un nombre entier.Integers,12 :A44,2012.

[8] P.Erdos.On the distribution function of additive functions. Annals of Mathematics page 1-20, 1946.

[9] S.Gaboury, Sur les convolutions de fonctions arithmétiques, 2007.

[10] A.Ivic et G.Tenembaum, Local densites over integers free of large prime factors, The Quarterly Journal of Mathematics, 37(4) :401-417,1986.

[11] M.Karras,Sur les fonctions arithmetiques mutltiplicatives et leurs series de Dirichlet,these de doctorat.Ecole normale superieure Kouba-Alger,2017.

[12] I.Katai, On distribution of arithmetical functions on the set prime plus one.ompositio mathematica,19(4) : 278-289, 1968.

[13] D.Koukoulopoulos of prime numbers. Graduate studies in mathematics, 203.American Mathematical Society, Providence, R.I, 2019.

[14] V.A.Lebesgue, Introduction à la théorie des Nombres.Mallet-Bachelier, 1862.

[15] M.Natanson, Elementary Methods in Number Theory.

[16] M.Näimi, Les entiers sans facteurs carré $\leqslant$ x dont leurs premiers $\leqslant$, groupe de travailen théorie analytique et élémentaire des nombres, 1986-1987.Publ.Math.Orsay, 88 : 67-78.

[17] S.Nyandwi et al. : Fonctions de répartition et valeurs moyennes d'une classe de fonctions arithmétiques sur les entiers friables et sans facteurs carré. Revue de l'Université du Burundi, Vol 28, 2022.

[18] S.Nyandwi et al. , Fonctions moyennes sur les entiers sans facteurs carrés et y-friables. Annales Univ. Sci. Budapest., Sect. Comp. 54 (2023) 125-142.

[19] O.Ramaré, Moyenne De Fonctions Arithmétiques. Une introduction Agrémentée et D'Application Au Crible. Cours donné à l'université De Nouakshott.(20 novembre 2022).

[20] G.Robin, Estimation de la fonction de Tchebychev θ sur le k-ieme nombre premier et grandes valeurs de la fonction $\omega(n)$ nombre de diviseurs premiers de n. Acta artithmetica, 42(4), 367-389,1983.

[21] J.Steuding,Probabilistic number theory.The Pennsylvania State University citeseerXArchives,doi,10(1.118) :4775,2002.

[22] R.Vanlalngaia, Fonctions de Hardy des séries α et répartition des nombres premiers en progressions arithmétiques,2015.

[23] G.Verwee, Théorèmes d'Erdös-Wintner effectifs.Thèse de doctorat, université de Lorraine ; Technische universität(vienne)2020.

[24] G.Tenembaum, Introduction to analytic and probabilistic number theory ; Cambridge university 1995.

[25] G.Tenembaum, Introduction to analytic and probabilistic, number theory, vol 163. American Mathematic.Soc.2015.

[26] G.Tenembaum et J.Wu, Moyenne de certaines multiplicatives sur les entiers friables,2003.