UNIVERSITE DU BURUNDI

FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES
CENTRE DE RECHERCHE EN MATHEMATIQUES ET PHYSIQUE

La β-méthode de factorisation pour les polynômes hypergéométriques discrets.

Par :
Japhet MANIRITUNGIRA

Sous la Direction de:

Pr Gaspard BANGEREZAKO

Mémoire présenté et défendu publiquement en vue de l'obtention du Diplôme de Master en Mathématiques Fondamentales et Appliquées.

Bujumbura, Décembre 2021

Membres du Jury

Professeur Servat NYANDWI (**Président**)

Professeur François NDAYIRAGIJE (**Secrétaire**)

Professeur Gaspard BANGEREZAKO (**Directeur**)

Docteur Jean Paul Nuwacu (**Membre**)

DÉDICACE

A

mes parents:

Oscar NTUKAMAZINA

et

Pélagie SIBOMANA,

mes frères et mes soeurs,

toute ma famille.

REMERCIEMENTS

Avant toute chose, je veux signaler que ce travail n'est pas le fruit de mes seuls efforts, raison pour laquelle je voudrais présenter mes sentiments à toute personne qui ont contribué à sa réalisation.

Mes sincères remerciements sont adressés au Professeur Gaspard BANGEREZAKO, du département de Mathématiques de l'Université du Burundi, qui malgré ses multiples obligations a accepté de diriger ce mémoire. Ses précieux conseils, sa disponibilité, sa rigueur scientifique et ses suggestions m'ont été d'une grande utilité; qu'il trouve ici l'expression de notre profonde et respectueuse gratitude.

Je remercie également tous les membres du jury pour le temps qu'ils ont bien voulu consacrer pour lire ce travail; leurs précieux commentaires pour l'amélioration de ce travail nous seront d'une importance capitale.

Mes sentiments de reconnaissance sont également dirigés à l'endroit de tous ceux qui ont contribué à ma formation depuis le cycle primaire jusqu'à l'Université du Burundi et plus particulièrement tous les professeurs de la Faculté des Sciences surtout ceux des départements de Mathématiques et de Physique. Qu'ils trouvent ici ma profonde gratitude pour m'avoir doté d'une formation tant humaine que scientifique de haut niveau.

Résumé

Dans ce travail, nous discutons des types spéciaux de la méthode de factorisation pour l'équation hypergéométrique dite aux β-différences, puis nous les illustrons en résolvant ou en transformant des équations hypergéométriques aux différences et aux q-différences, y compris l'équation aux q-différences de second ordre d'Askey-Wilson.

Mots clés. β-Dérivée et intégrale, β-différence, équations hypergéométriques aux différences et aux q-différences, Séries hypergéométriques et q-hypergéométriques, polynômes orthogonaux hypergéométriques aux différences et aux q-différences, méthodes de factorisation.

Abstract

In this work, we discuss special types of factorization method for the so-called β-difference hypergeometric equation, and then illustrate them by solving or transforming difference and q-difference hypergeometric equations, including the Askey-Wilson second order q-difference equation.

Key words. β-Derivative and integral, β-difference, difference and q-difference hypergeometric equations, hypergeometric and q-hypergeometric series, difference and q-difference orthogonal polynomials, factorization methods.

Table des matières

Avant-propos

Ce mémoire rentre dans le cadre de l'obtention du diplôme de master en mathématiques fondamentales et appliquées. Il étudie la β-méthode de factorisation pour les polynômes hypergéométriques discrets.

La méthode qui était applicable est celle de l'utilisation des séries hypergéométriques nécessitant aussi des calculs énormes. La méthode utilisée dans ce travail résout le problème de complexité temporel de cette dernière.

Ce mémoire est d'importance car il met en place une théorie unifiant deux méthode de factorisation à savoir la méthode de factorisation pour les équations hypergéométriques aux différences et les équations hypergéométriques aux q-différences.

Introduction

Comme dans le cas des équations différentielles, la principale méthode de résolution ou de transformation des équations linéaires aux différences et aux q-différences du second ordre sont des versions de la célèbre méthode de factorisation connue sous le nom de ≪Transformation de Darboux≫ [8].

Dans ce travail, nous considérons une méthode de factorisation due à G.Bangerezako [4].

L'objectif de ce travail est de présenter une théorie unifiant deux méthodes de factorisation à savoir: la méthode de factorisation des équations hypergéométriques aux différences [2] et la méthode de factorisation des équations hypergéométriques aux q-différences[7].

Hormis l'introduction et la conclusion, notre travail est composé de trois chapitres:

le premier chapitre parle du schéma d'Askey pour les polynômes orthogonaux hypergéométriques;
le second chapitre parle de la méthode de factorisation pour l'équation hypergéométrique aux β-différences.
En fin, nous allons donner des applications pour l'équation hypergéométrique aux différences, l'équation hypergéométrique aux q-différences et l'équation aux q-différences du second ordre d'Askey-Wilson.

Chapitre 1

Schéma d'Askey pour les polynômes orthogonaux hypergéométriques

Dans ce chapitre, nous mettons en évidence quelques polynômes orthogonaux qui peuvent être définis en termes d'une série hypergéométrique ou d'une série q-hypergéométrique.

1.1 Les polynômes orthogonaux hypergéométriques aux différences

La référence principale de cette section est [11].

Séries hypergéométriques

La série hypergéométrique ${}_rF_s$ est définie par:

$$ {}_rF_s\left(\begin{array}{ccc|c} a_1, & \dots & a_r, & \\ & & & z \\ b_1, & \dots & b_s, & \end{array}\right) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1,\dots,a_r)_k}{(b_1,\dots,b_s)} \frac{z^k}{k!} \tag{1.1}$$

où $(a_1,\dots,a_r)_k := (a_1)_k \dots (a_r)_k, (a)_0 = 1, (a)_k = a(a+1)(a+2)\dots(a+k-1), k = 1, 2, \dots$.

Bien entendu, les paramètres doivent être tels que les facteurs du dénominateur dans les termes de la série ne soient jamais nuls. Lorsqu'un des paramètres du numérateur a_i vaut $-n$ où n est un entier non négatif cette série hypergéométrique est un polynôme en z. Sinon le rayon de convergence ρ de la série hypergéométrique est donné par:

$$\rho = \begin{cases} \infty & \text{si } r < s+1 \\ 1 & \text{si } r = s+1 \\ 0 & \text{si } r > s+1 \end{cases}$$

Une série hypergéométrique de la forme (1.1) est dite équilibrée (ou saalschutzien) si $r = s+1, z = 1$ et $a_1 + a_2 + \ldots + a_{s+1} + 1 = b_1 + b_2 + \ldots + b_s$.

Polynômes de Wilson

Définition.

$$\frac{w_n(x^2; a, b, c, d)}{(a+b)_n(a+c)_n(a+d)_n} = {}_4F_3\left(\begin{matrix} -n, & n+a+b+c+d-1, & a+ix, & a-ix \\ & a+b, & a+c, & a+d \end{matrix} \middle| 1 \right). \tag{1.2}$$

Orthogonalité. Si $Re(a, b, c, d) > 0$ et les paramètres non réels apparaissent dans des paires conjuguées, alors

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \left| \frac{\Gamma(a+ix)\Gamma(b+ix)\Gamma(c+ix)\Gamma(d+ix)}{\Gamma(2ix)} \right|^2 W_m(x^2; a, b, c, d) W_n(x^2; a, b, c, d)dx$$
$$= \frac{\Gamma(n+a+b)\ldots\Gamma(n+c+d)}{\Gamma(2n+a+b+c+d)}(n+a+b+c+d-1)_n n!\delta_{mn}, \tag{1.3}$$

où

$$\Gamma(n+a+b)\ldots\Gamma(n+c+d)$$
$$= \Gamma(n+a+b)\Gamma(n+a+c)\Gamma(n+a+d)\Gamma(n+b+c)\Gamma(n+b+d)\Gamma(n+c+d).$$

Si $a < 0$ et $a+b, a+c, a+d$ sont positifs ou si une paire de conjugués complexes apparaît avec des parties réelles positives, alors

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \left| \frac{\Gamma(a+ix)\Gamma(b+ix)\Gamma(c+ix)\Gamma(d+ix)}{\Gamma(2ix)} \right|^2 W_m(x^2; a, b, c, d) W_n(x^2; a, b, c, d)dx$$
$$+ \frac{\Gamma(a+b)\Gamma(a+c)\Gamma(a+d)\Gamma(b-a)\Gamma(c-a)\Gamma(d-a)}{\Gamma(-2a)}$$

$$\times \sum_{k=0,1,2,\ldots} \frac{(2a)_k(a+1)_k(a+b)_k(a+c)_k(a+d)_k}{(a)_k(a-b+1)_k(a-c+1)_k(a-d+1)_k k!}$$
$$\times W_m((-a+k)^2;a,b,c,d)W_n(-(a+k)^2;a,b,c,d)$$
$$= \frac{\Gamma(n+a+b)\ldots\Gamma(n+c+d)}{\Gamma(2n+a+b+c+d)}(n+a+b+c+d-1)_n n!\delta_{mn}.$$

Relation de récurrence.

$$-(a^2+x^2)\tilde{W}_n(x^2) = A_n\tilde{W}_{n+1}(x^2) - (A_n+C_n)\tilde{W}_n(x^2) + C_n\tilde{W}_{n-1}(x^2), \tag{1.4}$$

où

$$\tilde{W}_n(x^2) := \tilde{W}(x^2;a,b,c,d) = \frac{w_n(x^2;a,b,c,d)}{(a+b)_n(a+c)_n(a+d)_n}$$

et

$$\begin{cases} A_n = \frac{(n+a+b+c+d-1)(n+a+b)(n+a+c)(n+a+d)}{(2n+a+b+c+d-1)(2n+a+b+c+d)} \\ \\ C_n = \frac{n(n+b+c-1)(n+b+d-1)(n+c+d-1)}{(2n+a+b+c+d-2)(2n+a+b+c+d-1)}. \end{cases}$$

Relation de récurrence normalisée.

$$xp_n(x) = p_{n+1}(x) + (A_n+C_n-a^2)A_{n-1}C_n p_{n-1}(x), \tag{1.5}$$

où

$$W_n(x^2;a,b,c,d) = (-1)^n(n+a+b+c+d-1)_n p_n(x).$$

Équation aux différences.

$$n(n+a+b+c+d-1)y(x)$$
$$= B(x)y(x+i) - [B(x)+D(x)]y(x) + D(x)y(x-i), \tag{1.6}$$

où

$$y(x) = W_n(x^2;a,b,c,d)$$

et

$$\begin{cases} A_n = \frac{(a-ix)(b-ix)(c-ix)(d-ix)}{2ix(2ix-1)} \\ \\ C_n = \frac{(a+ix)(b+ix)(c+ix)(d+ix)}{2ix(2ix+1)}. \end{cases}$$

Opérateur de transfert.

$$W_n((x+\frac{1}{2}i)^2;a,b,c,d) - W_n((x-\frac{1}{2}i)^2;a,b,c,d) \tag{1.7}$$
$$= -2inx(n+a+c+d-1)W_{n-1}(x^2;a+\frac{1}{2},b+\frac{1}{2},c+\frac{1}{2},d+\frac{1}{2})$$

cela équivaut à

$$\begin{aligned}&\frac{\delta W_n(x^2;a,b,c,d)}{\delta x^2}\\&=-n(n+a+c+d-1)W_{n-1}(x^2;a+\frac{1}{2},b+\frac{1}{2},c+\frac{1}{2},d+\frac{1}{2}).\end{aligned}\tag{1.8}$$

Opérateur en arrière.

$$\begin{aligned}&(a-\frac{1}{2}-ix)(b-\frac{1}{2}-ix)(c-\frac{1}{2}-ix)(d-\frac{1}{2}-ix)W_n((x+\frac{1}{2}i)^2;a,b,c,d)\\&(a-\frac{1}{2}+ix)(b-\frac{1}{2}+ix)(c-\frac{1}{2}+ix)(d-\frac{1}{2}+ix)W_n((x-\frac{1}{2}i)^2;a,b,c,d)\\&=2ixW_{n+1}(x^2;a-\frac{1}{2},b-\frac{1}{2},c-\frac{1}{2},d-\frac{1}{2})\end{aligned}\tag{1.9}$$

ou de manière équivalente

$$\begin{aligned}&\frac{\delta[w(x;a,b,c,d)W_n(x^2,a,b,c,d)]}{\delta x^2}\\&=w(x;a-\frac{1}{2},b-\frac{1}{2},c-\frac{1}{2},d-\frac{1}{2})W(x^2;a-\frac{1}{2},b-\frac{1}{2},c-\frac{1}{2},d-\frac{1}{2}),\end{aligned}\tag{1.10}$$

où

$$w(x;a,b,c,d):=\frac{1}{2ix}\left|\frac{\Gamma(a+ix)\Gamma(b+ix)\Gamma(c+ix)\Gamma(d+ix)}{\Gamma(2ix)}\right|^2.$$

Formule de Rodriques.

$$\begin{aligned}&w(x;a,b,c,d)W_n(x^2,a,b,c,d)\\&=\left(\frac{\delta}{\delta x}\right)^2[w(x;a+\frac{1}{2}n,b+\frac{1}{2}n,c+\frac{1}{2}n,d+\frac{1}{2}n)].\end{aligned}\tag{1.11}$$

Polynômes de Hahn

Définition.

$$Q_n(x;\alpha,\beta,N)={}_3F_2\left(\begin{matrix}-n, & n+\alpha+\beta, & -x\\ & \alpha+1, & -N\end{matrix}\middle|1\right),n=0,1,2,...,N.\tag{1.12}$$

l'orthogonalité. Pour $\alpha>-1$ et $\beta>-1$ ou pour $\alpha<-N$ et $\beta<-N$ on a

$$\sum_{x=0}^{N}\left(\begin{array}{c}\alpha+x\\ x\end{array}\right)\left(\begin{array}{c}\beta+N-x\\ N-x\end{array}\right)Q_m(x;\alpha,\beta,N)Q_n(x;\alpha,\beta,N)$$
$$=\frac{(-1)^n(n+\alpha+\beta+1)_{N+1}(\beta+1)_n n!}{(2n+\alpha+\beta+1)(\alpha+1)_n(-N)_n N!}\delta_{mn}. \tag{1.13}$$

Relation de récurrence.

$$-xQ_n(x)=A_nQ_{n+1}(x)-(A_n+C_n)Q_n(x)+C_nQ_{n-1}(x), \tag{1.14}$$

où

$$Q_n(x):=Q_n(x;\alpha,\beta,N)$$

et

$$\left\{\begin{array}{l} A_n=\frac{(n+\alpha+\beta+1)(n+\alpha+1)(N-n)}{(2n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+2)}\\ \\ C_n=\frac{n(n+\alpha+\beta+N+1)(n+\beta)}{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+1)}.\end{array}\right.$$

Relation de récurrence normalisée.

$$xp_n(x)=p_{n+1}(x)+(A_n+C_n)p_n(x)+A_{n-1}C_np_{n-1}(x), \tag{1.15}$$

où

$$Q_n(x;\alpha,\beta,N)=\frac{(n+\alpha+\beta+1)_n}{(\alpha+1)_n(-N)_n}p_n(x).$$

Équation aux différences.

$$n(n+\alpha+\beta+1)y(x)=B(x)y(x+1)-[B(x)+D(x)]y(x)+D(x)y(x-1), \tag{1.16}$$

où

$$y(x)=Q_n(x;\alpha,\beta,N)$$

et

$$\left\{\begin{array}{l} B(x)=(x+\alpha+1)(x-N)\\ \\ D(x)=x(x-\beta-N-1).\end{array}\right.$$

Opérateur de transfert.

$$Q_n(x+1;\alpha,\beta,N)-Q_n(x;\alpha,\beta,N)$$
$$=-\frac{n(n+\alpha+\beta+1)}{(\alpha+1)N}Q_{n-1}(x;\alpha+1,\beta+1,N-1) \tag{1.17}$$

ou équivalemment

$$\Delta Q_n(x;\alpha,\beta,N) = -\frac{n(n+\alpha+\beta+1)}{(\alpha+1)N} Q_{n-1}(x;\alpha+1,\beta+1,N-1). \tag{1.18}$$

Opérateur en arrière.

$$\begin{aligned}&(x+\alpha)(N+1-x)Q_n(x;\alpha,\beta,N) - x(\beta+N+1-x)Q_n(x-1;\alpha,\beta,N)\\&= \alpha(N+1)Q_{n+1}(x;\alpha-1,\beta-1,N+1)\end{aligned} \tag{1.19}$$

ou équivalemment

$$\nabla[w(x;\alpha,\beta,N)Q_n(x;\alpha,\beta,N)] = \frac{N+1}{\beta} Q_{n+1}(x;\alpha-1,\beta-1,N+1), \tag{1.20}$$

où

$$w(x;\alpha,\beta,N) = \begin{pmatrix} \alpha+x \\ x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta+N-x \\ N-x \end{pmatrix}.$$

Formule de Rodrigues.

$$w(x;\alpha,\beta,N)Q_n(x;\alpha,\beta,N) = \frac{(-1)^n(\beta+1)_n}{(-N)_n} \nabla^n[w(x;\alpha+n,\beta+n,N-n)]. \tag{1.21}$$

Polynômes de Meixner

Définition.

$$M_n(x,\beta,c) = 2F_1 \left(\begin{array}{cc|c} -n, & -x & \\ & & 1-\frac{1}{c} \\ & \beta & \end{array} \right). \tag{1.22}$$

Orthogonalité.

$$\sum_{x=0}^{\infty} \frac{(\beta)_x}{x!} c^x M_m(x;\beta;c) M_n(x;\beta,c) = \frac{c^{-n} n!}{(\beta)_n (1-c)^\beta} \delta_{mn}, \beta > 0 \text{ et } 0 < c < 1. \tag{1.23}$$

Relation de récurrence.

$$\begin{aligned}(c-1)xM_n(x;\beta,c) &= c(n+\beta)M_{n+1}(x;\beta,c)\\ &- [n+(n+\beta)c]M_n(x;\beta,c) + nM_{n-1}(x;\beta,c).\end{aligned} \tag{1.24}$$

Relation de récurrence normalisée.

$$xp_n(x) = p_{n+1}(x) + \frac{n+(n+\beta)c}{1-c} p_n(x) + \frac{n(n+\beta-1)c}{(1-c)^2} p_{n-1}(x) \tag{1.25}$$

où

$$M_n(x;\beta,c) = \frac{1}{(\beta)_n}\left(\frac{c-1}{c}\right)^n p_n(x).$$

Équation aux différences.

$$n(c-1)y(x) = c(x+\beta)y(x+1) - [x+(x+\beta)c]y(x) + xy(x-1), y(x) = M_n(x;\beta,c). \quad (1.26)$$

Opérateur de transfert.

$$M_n(x+1;\beta,c) - M_n(x;\beta,c) = \frac{n}{\beta}\left(\frac{c-1}{c}\right)M_{n-1}(x;\beta,c) \quad (1.27)$$

nous pouvons encore écire

$$\Delta M_n(x;\beta,c) = \frac{n}{\beta}\left(\frac{c-1}{c}\right)M_{n-1}(x;\beta+1,c). \quad (1.28)$$

Opérateur en arrière.

$$c(\beta+x-1)M_n(x;\beta,c) - xM_n(x-1;\beta,c) = c(\beta-1)M_{n+1}(x;\beta-1,c) \quad (1.29)$$

ou de manière équivalente

$$\nabla\left[\frac{(\beta)_x c^x}{x!}M_n(x;\beta,c)\right] = \frac{(\beta-1)_x c^x}{x!}M_{n+1}(x;\beta-1,c). \quad (1.30)$$

Formule de Rodrigues.

$$\frac{(\beta)_x c^x}{x!}M_n(x;\beta,c) = \nabla^n\left[\frac{(\beta+n)_x c^x}{x!}\right]. \quad (1.31)$$

Polynômes de Charlier

Définition.

$$C_n(x,a) = 2F_0\left(\begin{array}{cc|c} -n, & -x & \\ & & -\frac{1}{a} \\ & - & \end{array}\right). \quad (1.32)$$

Orthogonalité.

$$\sum_{x=0}^{\infty}\frac{a^x}{x!}C_m(x,a)C_n(x,a) = a^{-n}\mathrm{e}^a n!\delta_{mn}, a>0. \quad (1.33)$$

Relation de récurrence.

$$-xC_n(x,a) = aC_{n+1}(x,a) - (n+a)C_n(x,a) + nC_{n-1}(x,a). \tag{1.34}$$

Relation de récurrence normalisée.

$$xp_n(x) = p_{n+1}(x) + (n+a)p_n(x) + nap_{n-1}(x), \tag{1.35}$$

où

$$C_n(x;a) = \left(-\frac{1}{a}\right)^n p_n(x).$$

Équation aux différences.

$$-ny(x) = ay(x+1) - (x+a)y(x) + xy(x-1), y(x) = C_n(x;a). \tag{1.36}$$

Opérateur de transfert.

$$C_n(x+1;a) - C_n(x;a) = -\frac{n}{a}C_{n-1}(x;a) \tag{1.37}$$

ou équivalemment

$$\Delta C_n(x;a) = -\frac{n}{a}C_{n-1}(x;a). \tag{1.38}$$

Opérateur en arrière.

$$C_n(x;a) - \frac{x}{a}C_n(x-1;a) = C_{n+1}(x;a) \tag{1.39}$$

ou de manière équivalente

$$\nabla\left[\frac{a^x}{x!}C_n(x;a)\right] = \frac{a^x}{x!}C_{n+1}(x;a). \tag{1.40}$$

Formule de Rodrigues

$$\frac{a^x}{x!}C_n(x;a) = \nabla^n\left[\frac{a^x}{x!}\right]. \tag{1.41}$$

Schéma d'Askey pour les polynômes orthogonaux aux différences

${}_4F_3(4)$		Wilson	Racah	
${}_3F_2(3)$	Continuous dual Hahn	Continuous Hahn	Hahn	Dual Hahn
${}_2F_1(2)$	Meixner-Pollaczek	Jacobi	Meixner	Krawtchouk
${}_1F_1(1)/{}_2F_0(1)$		Laguerre	Charlier	
${}_2F_0(0)$		Hermite		

1.2 Les polynômes orthogonaux hypergéométriques aux q-différences

Dans cette section, après avoir défini les q-hypergéométriques, nous décrivons quelques polynômes orthogonaux hypergéométriques aux q-différence.

La référence principale de cette section est [11].

Séries q-hypergéométriques

Lorsqu'il s'agit d'équations aux q-différences [10], apparaissent naturellement des solutions en série de type

$$y(x) = \sum_{0}^{\infty} c_n x^n. \tag{1.42}$$

Parmi elles, sont particulièrement intéressantes celles pour lesquelles

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} \tag{1.43}$$

est une fonction rationnelle dans q^n. Si par exemple

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{\prod_{i=1}^{r}(\alpha_i - q^{-n})}{\prod_{i=1}^{s}(\beta_i - q^{-n})(q - q^{-n})}, \tag{1.44}$$

de telles séries sont considérées comme ayant la forme

$$
{}_r\phi_s\left(\begin{matrix}\alpha_1, & \alpha_2, & \ldots, & \alpha_r\\ \beta_1, & \beta_2, & \ldots, & \beta_s\end{matrix}\middle| q; z\right)
= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1;q)_k(\alpha_2;q)_k\ldots(\alpha_r;q)_k}{(\beta_1;q)_k(\beta_2;q)_k\ldots(\beta_s;q)_k}\left[(-1)^k q^{\frac{k(k-2)}{2}}\right]^{1+s-r}\frac{z^k}{(q;q)_k} \tag{1.45}
$$

où $(a_1,a_2,\ldots,a_q;q)_k := (a_1;q)_k(a_2;q)_k\ldots(a_p;q)_k$, $(a,q)_0 = 1$, $(a;q)_k = a(1-a)(1-aq)(1-aq^2)\ldots(1-aq^{k-1})$, $k = 1,2,\ldots$. Ces séries sont appelées séries q-hypergéométriques ou séries hypergéométriques de base. Puisque $\lim_{q\to 1}\frac{(q^a;q)_k}{(1-q)^k} = (a)_k$ on a

$$
\lim_{q\to 1} {}_r\phi_s\left(\begin{matrix}q_1^{\alpha}, & q_2^{\alpha}, & \ldots, & q_r^{\alpha}\\ q_1^{\beta}, & q_2^{\beta}, & \ldots, & q_s^{\beta}\end{matrix}\middle| q; (q-1)^{1+r-s}z\right)
= {}_rF_s\left(\begin{matrix}\alpha_1, & \alpha_2, & \ldots, & \alpha_r\\ \beta_1, & \beta_2, & \ldots, & \beta_s\end{matrix}\middle| z\right), \tag{1.46}
$$

où

$$
{}_rF_s\left(\begin{matrix}\alpha_1, & \alpha_2, & \ldots, & \alpha_r\\ \beta_1, & \beta_2, & \ldots, & \beta_s\end{matrix}\middle| z\right)
= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha_1)_k(\alpha_2)_k\ldots(\alpha_r)_k}{(\beta_1)_k(\beta_2)_k\ldots(\beta_s)_k}\frac{z^k}{k!}. \tag{1.47}
$$

Aussi bien que pour les séries hypergéométriques généralisées que pour les séries hypergéométriques de base, le rayon de convergence est donné par

$$
\rho(x) = \begin{cases}\infty, r < s+1\\ 1, r = s+1\\ 0, r > s+1.\end{cases} \tag{1.48}
$$

Prenons par exemple l'équation aux q-différences

$$
D_q y(x) = y(x). \tag{1.49}
$$

Sa solution est donnée par

$$
\sum_{n=0}^{\infty}\frac{((1-q)x)^n}{(q;q)_n} = {}_1\phi_0\left(\; 0; \quad -; \quad q, \quad (1-q)x \;\right),
$$

une q-version de la fonction exponentielle, e^x [12].

Polynômes d'Askey-Wilson

Définition.

$$\frac{a^n p_n(x;a,b,c,d|q)}{(ab,ac,ad;q)_n} = {}_4\phi_3\left(\begin{array}{cccc} q^{-n}, & abcdq^{n-1}, & ae^{i\theta}, & ae^{-i\theta} \\ & ab, & ac, & ad \end{array}\middle| q;q\right), x=\cos\theta. \tag{1.50}$$

Les polynômes d'Askey-Wilson sont les q-analogues des polynômes de Wilson (1.1).

Orthogonalité. Si a, b, c, d sont réels, ou apparaissent dans des paires conjuguées complexes si complexes, et $\max(|a|,|b|,|c|,|d|) < 1$, on a la relation d'orthogonalité suivante

$$\int_{-1}^{1} \frac{w(x)}{\sqrt{1-x^2}} p_m(x;a,b,c,d|q) p_n(x;a,b,b,c,d|q) dx = h_n \delta_{mn}, \tag{1.51}$$

où

$$\begin{aligned} w(x) := w(x;a,b,c,d|q) &= \left| \frac{(e^{2i\theta};q)_\infty}{(ae^{i\theta},be^{i\theta},ce^{i\theta},de^{i\theta})_\infty} \right|^2 \\ &= \frac{h(x,1)h(x,-1)h(x,q^{\frac{1}{2}})h(x,q^{-\frac{1}{2}})}{h(x,a)h(x,b)h(x,c)h(x,d)}, \end{aligned}$$

avec

$$h(x,\alpha) := \prod_{k=0}^{\infty} [1 - 2\alpha x q^k + \alpha^2 q^{2k}] = (\alpha e^{i\theta}, \alpha e^{-i\theta};q)_\infty, x = \cos\theta$$

et

$$h_n = \frac{(abcdq^{n-1};q)_n (abcdq^{2n};q)_\infty}{(q^{n+1},abq^n,acq^n,adq^n,bcq^n,bdq^n,cdq^n;q)}.$$

Si $a > 1$ et b, c, d sont réels ou l'un est réel et les deux autres sont des complexes conjugués, $\max(|b|,|c|,|d|) < 1$ et les produits par paires de a, b, c et d ont une valeur absolue inférieure à un, alors on a une autre relation d'orthogonalité donnée par:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} \frac{w(x)}{\sqrt{1-x^2}} p_m(x;a,b,c,d|q) p_n(x;a,b,b,c,d|q) dx \\ &+ \sum_{\substack{k \\ 1<aq^k\leq a}} w_k(x) p_m(x_k;a,b,c,d|q) p_n(x_k;a,b,b,c,d|q) = h_n \delta_{mn}, \end{aligned} \tag{1.52}$$

où $w(x)$ et h_n sont comme avant,

$$x_k = \frac{aq^k + (aq^k)^{-1}}{2}$$

et

$$w_k = \frac{(a^{-2};q)_\infty}{(q,ab,ac,ad,a^{-1}b,a^{-1}c,a^{-1}d;q)_\infty}\frac{(1-a^2q^{2k})(a^2,ab,ac,ad;q)_k}{(1-a^2)(q,ab^{-1}q,ac^{-1}q,ad^{-1}q;q)_k}(\frac{q}{abcd})^k.$$

Relation de récurrence.

$$2x\tilde{p}_n(x) = A_n\tilde{p}_{n+1}(x) + [a+a^{-1}-(A_n+C_n]\tilde{p}_n(x) + C_n\tilde{p}_{n-1}(x), \tag{1.53}$$

où

$$\tilde{p}_n(x) := \tilde{p}_n(x;a,b,c,d|q) = \frac{a^n p_n(x;a,b,c,d|q)}{(ab,ac,ad;q)_n}$$

et

$$\begin{cases} A_n = \frac{(1-abq^n)(1-acq^n)(1-adq^n)(1-abcdq^{n-1}}{a(1-abcdq^{2n-1})(1-abcdq^{2n})} \\ \\ C_n = \frac{a(1-q^n)(1-bcq^{n-1})(1-bdq^{n-1})(1-cdq^{n-1}}{(1-abcdq^{2n-2})(1-abcdq^{2n-1})}. \end{cases}$$

Relation de récurrence normalisée.

$$xp_n(x) = p_{n+1}(x) + \frac{1}{2}[a+a^{-1}-(A_n+C_n)]p_n(x) + \frac{1}{4}A_{n-1}C_np_{n-1}(x), \tag{1.54}$$

où

$$p_n(x;a,b,c,d|q) = 2^n(abcdq^{n-1};q)_n p_n(x).$$

Équation aux q-différences.

$$\begin{gathered}(1-q)^2D_q[\tilde{w}(x;aq^{\frac{1}{2}},bq^{\frac{1}{2}},cq^{\frac{1}{2}},dq^{\frac{1}{2}}|q)D_qy(x)] \\ +\lambda_n\tilde{w}(x;a,b,c,d|q)y(x) = 0, y(x) = p_n(x;a,b,c,d|q),\end{gathered} \tag{1.55}$$

où

$$\tilde{w}(x;a,b,c,d|q) := \frac{w(x;a,b,c,d|q)}{\sqrt{1-x^2}}$$

et

$$\lambda_n = 4q^{-n+1}(1-q^n)(1-abcdq^{n-1}).$$

Si on définit

$$P_n(z) := \frac{(ab,ac,ad;q)_n}{a^n}{}_4\phi_3\left(\begin{array}{cccc} q^{-n}, & abcdq^{n-1}, & az, & az^{-1} \\ & ab, & ac, & ad \end{array}\middle| q;q\right)$$

alors l'équation aux q-différences peut également être écrite sous la forme

$$\begin{aligned}&q^{-n}(1-q^n)(1-abcdq^{n-1})P_n(z)\\&=A(z)P_n(qz)-[A(z)+A(z^{-1})]P_n(z)+A(z^{-1})P_n(q^{-1}z),\end{aligned}\tag{1.56}$$

où

$$A(z)=\frac{(1-az)(1-bz)(1-cz)(1-dz)}{(1-z^2)(1-qz^2)}.$$

Opérateur de transfert.

$$\begin{aligned}\delta_q p_n(x;a,b,c,d|q)&=-q^{-\frac{1}{2}n}(1-q^n)(1-abcdq^{n-1})(e^{i\theta}-e^{-i\theta})\\&\times p_{n-1}(x;aq^{\frac{1}{2}},bq^{\frac{1}{2}},cq^{\frac{1}{2}},dq^{\frac{1}{2}}|q),x=\cos\theta\end{aligned}\tag{1.57}$$

ou de manière équivalente

$$D_q p_n(x;a,b,c,d|q)=2q^{-\frac{1}{2}(n-1)}\frac{(1-q^n)(1-abcdq^{n-1})}{1-q}p_{n-1}(x;aq^{\frac{1}{2}},bq^{\frac{1}{2}},cq^{\frac{1}{2}},dq^{\frac{1}{2}}|q).\tag{1.58}$$

Opérateur en arrière.

$$\begin{aligned}&\delta_q[\tilde{w}(x;a,b,c,d|q)p_n(x;a,b,c,d|q)]\\&=q^{-\frac{1}{2}(n+1)}(e^{i\theta}-e^{-i\theta})\tilde{w}(x;aq^{\frac{1}{2}},bq^{\frac{1}{2}},cq^{\frac{1}{2}},dq^{\frac{1}{2}}|q)\\&\times p_{n-1}(x;aq^{-\frac{1}{2}},bq^{-\frac{1}{2}},cq^{-\frac{1}{2}},dq^{-\frac{1}{2}}|q),x=\cos\theta\end{aligned}\tag{1.59}$$

cela équivaut à

$$\begin{aligned}&D_q[\tilde{w}(x;a,b,c,d|q)p_n(x;a,b;cd|q)]\\&=\frac{2q^{-\frac{1}{2}}n}{1-q}\tilde{w}(x;q^{-\frac{1}{2}},bq^{-\frac{1}{2}},cq^{-\frac{1}{2}},dq^{-\frac{1}{2}}|q)p_{n+1}(x;q^{-\frac{1}{2}},bq^{-\frac{1}{2}},cq^{-\frac{1}{2}},dq^{-\frac{1}{2}}|q).\end{aligned}\tag{1.60}$$

Formule de Rodrigues.

$$\begin{aligned}&\tilde{w}(x;a,b,c,d|q)p_n(x;a,b;cd|q)\\&=(\frac{q-1}{2})^n q^{\frac{1}{4}n(n-1)}(D_q)^n[\tilde{w}(x;q^{\frac{1}{2}},bq^{\frac{1}{2}},cq^{\frac{1}{2}},dq^{\frac{1}{2}}|q)].\end{aligned}\tag{1.61}$$

Polynômes de q-Hahn

Définition.

$$Q_n(q^{-x};\alpha,\beta,N|q) = {}_3\phi_2\left(\begin{array}{ccc} q^{-n}, & \alpha\beta q^{n+1}, & q^{-x} \\ \alpha q, & q^{-N} & \end{array}|q;q\right), n = 0,1,2,\ldots,N. \tag{1.62}$$

Orthogonalité. Pour $0 < \alpha < q^{-1}$ et $0 < \beta < q^{-1}$ ou pour $\alpha > q^{-N}$ et $\beta > q^{-N}$ on a

$$\begin{aligned} &\sum_{x=0}^{N} \frac{(\alpha q, q^N; q)_x}{(q, \beta^{-1}q^{-N}; q)_x}(\alpha\beta q)^{-x} Q_m(q^{-x},\alpha,\beta,N|q) Q_n(q^{-x},\alpha,\beta,N|q) \\ &= \frac{(\alpha\beta q^2;q)_N}{(\beta q;q)_N(\alpha q)^N} \frac{(q,\alpha\beta q^{N+2},\beta q;q)_n}{(\alpha q,\alpha\beta q,q^{-N};q)_n} \frac{(1-\alpha\beta q)(-\alpha q)^n}{(1-\alpha\beta q^{2n+1}} q^{\binom{n}{2}-Nn}\delta_{mn}. \end{aligned} \tag{1.63}$$

Relation de récurrence.

$$-(1-q^{-x})Q_n(q^{-x}) = A_n Q_{n+1}(q^{-x}) - (A_n + C_n)Q_n(q^{-x}) + C_n Q_{n-1}(q^{-x}), \tag{1.64}$$

où

$$Q_n(q^{-x}) := Q_n(q^{-x};\alpha,\beta,N|q)$$

et

$$\left\{ \begin{array}{rl} A_n = & \frac{(1-q^{n-N})(1-\alpha q^{n+1})(1-\alpha\beta q^{n+1})}{(1-\alpha\beta q^{2n+1}((1-\alpha\beta q^{2n+2})} \\ C_n = & -\frac{\alpha q^{n-N}(1-q^n)(1-\alpha\beta q^{N+n+1})(1-\beta q^n)}{(1-\alpha\beta q^{2n})(1-\alpha\beta q^{2n+1})}. \end{array} \right.$$

Relation de récurrence normalisée.

$$xp_n(x) = p_{n+1}(x) + [1-(A_n+C_n)]p_n(x) + A_{n-1}C_n p_{n-1}(x), \tag{1.65}$$

où

$$Q_n(q^{-x};\alpha,\beta,N|q) = \frac{(\alpha\beta q^{n+1};q)_n}{(\alpha q, q^{-N};q)_n} p_n(q^{-x}).$$

Équation aux q-différences.

$$\begin{aligned} &q^{-n}(1-q^n)(1-\alpha\beta q^{n+1})y_n(x) \\ &= B(x)y(x+1) - [B(x)+D(x)]y(x) + D(x)y(x-1), \end{aligned} \tag{1.66}$$

où

$$y(x) = Q_n(q^{-x};\alpha,\beta,N|q)$$

et

$$\begin{cases} B(x) = (1-q^{x-N})(1-\alpha q^{x+1}) \\ D(x) = \alpha q(1-q^{x})(\beta - q^{x-N-1}) \end{cases}$$

Opérateur de transfert.

$$\begin{aligned} &Q_n(q^{-x-1};\alpha,\beta,N|q) - Q_n(q^{-x};\alpha,\beta,N|q) \\ &= \frac{q^{-n-x}(1-q^n)(1-\alpha\beta q^{n+1})}{(1-\alpha q)(1-q^{-N})} Q_{n-1}(q^{-x};\alpha q,\beta q,N-1|q) \end{aligned} \tag{1.67}$$

ou équivalemment

$$\frac{\Delta Q_n(q^{-x};\alpha,\beta,N|q}{\Delta q^{-x}} = \frac{q^{-n+1}(1-q^n)(1-\alpha\beta q^{n+1}}{(1-q)(1-\alpha q)(1-q^{-N})} Q_{n-1}(q^{-x};\alpha q,\beta q,N-1|q). \tag{1.68}$$

Opérateur en arrière.

$$\begin{aligned} &(1-\alpha q^x)(1-q^{x-N-1})Q_n(q^{-x};\alpha,\beta,N|q) - \alpha(1-q^x)(\beta-q^{x-N-1})Q_n(q^{-x+1};\alpha,\beta,N|q) \\ &= q^x(1-\alpha)(1-q^{-N-1})Q_n(q^{-x};\alpha q^{-1},\beta q^{-1},N+1|q) \end{aligned} \tag{1.69}$$

ou équivalemment

$$\begin{aligned} &\frac{\nabla[w(x;\alpha,\beta,N|q)Q_n(q^{-x};\alpha,\beta,N|q)]}{\nabla q^{-x}} \\ &= \frac{1}{1-q} w(x;\alpha q^{-1},\beta q^{-1},N+1|q)Q_{n+1}(q^{-x};\alpha q^{-1},\beta q^{-1},N+1|q), \end{aligned} \tag{1.70}$$

où

$$w(x;\alpha,\beta,N|q) = \frac{(\alpha q, q^{-N};q)_x}{(q,\beta^{-1}q^{-N};q)_x}(\alpha\beta)^{-x}. \tag{1.71}$$

Formule de Rodrigues.

$$w(x;\alpha,\beta,N|q)Q_n(q^{-x};\alpha,\beta,N|q) = (1-q)^n(\nabla_q)^n[w(x;\alpha q^n,\beta q^n,N_n|q)] \tag{1.72}$$

où

$$\nabla_q := \frac{\nabla}{\nabla q^{-x}}.$$

Polynômes de q-Meixner

Définition.

$$M_n(q^{-x};b,c;q) = {}_2\phi_1\left(\begin{array}{c} q^{-n}, q^{-x} \\ bq \end{array}\middle| q; -\frac{q^{n+1}}{c}\right). \tag{1.73}$$

Orthogonalité.

$$\begin{aligned}&\sum_{x=0}^{\infty}\frac{(bq;q)_x}{(q,-bcq;q)_x}c^x q^{\binom{n}{2}} M_m(q^{-x};b,c;q)M_n(q^{-x};b,c;q) \\ &= \frac{(-c;q)_\infty}{(-bcq;q)_\infty}\frac{(q,-c^{-1}q;q)_n}{(bq;q)_n}q^{-n}\delta_{mn}, 0<b<q^{-1} \quad et \quad c>0.\end{aligned} \tag{1.74}$$

Relation de récurrence.

$$\begin{aligned}&q^{2n+1}(1-q^{-x})M_n(q^{-x}) = c(1-bq^{n+1})M_{n+1}(q^{-x}) \\ &-[c(1-bq^{n+1})+q(1-q^n)(c+q^n)]M_n(q^{-x}) + q(1-q^n)(c+q^n)M_{n-1}(q^{-x}),\end{aligned} \tag{1.75}$$

où

$$M_n(q^{-x}) = M_n(q^{-x};b,c;q).$$

Relation de récurrence normalisée.

$$\begin{aligned}&xp_n(x) = p_{n+1}(x) + [1+q^{-2n-1}\left\{c(1-bq^{n+1})+q(1-q^n)(c+q^n)\right\}]p_n(x) \\ &+ cq^{-4n+1}(1-q^n)(1-bq^n)(c+q^n)p_{n-1}(x),\end{aligned} \tag{1.76}$$

où

$$M_n(q^{-x};b,c;q) = \frac{(-1)^n q^{n^2}}{(bq;q)_n c^n}p_n(q^{-x}).$$

Équation aux q-différences.

$$-(1-q^n)y(x) = B(x)y(x+1) - [B(x)+D(x)]y(x) + D(x)y(x-1), \tag{1.77}$$

où

$$y(x) = M_n(q^{-x};b,c;q)$$

et

$$\begin{cases} B(x) = cq^x(1-bq^{x+1}) \\ D(x) = (1-q^x)(1+bcq^x).\end{cases}$$

Opérateur de transfert.

$$M_n(q^{-x-1};b,c;q)-M_n(q^{-x};b,c;q)=\frac{q^{-x}(1-q^n)}{c(1-bq)}M_{n-1}(q^{-x};bq,cq^{-1};q) \tag{1.78}$$

ou de manière équivalente

$$\frac{\Delta M_n(q^{-x};b,c;q)}{\Delta q^{-x}}=-\frac{q(1-q^n)}{c(1-q)(1-bq)}M_{n-1}(q^{-x};bq,cq^{-1};q). \tag{1.79}$$

Opérateur en arrière.

$$\begin{aligned}&cq^x(1-bq^x)M_n(q^{-x};b,c;q)-(1-q^x)(1+bcq^x)M_n(q^{-x+1};b,c;q)\\&=cq^x(1-b)M_{n+1}(q^{-x};bq^{-1},cq;q)\end{aligned} \tag{1.80}$$

ou de manière équivalente

$$\frac{\nabla[w(x;b,c;q)M_n(q^{-x};b,c;q)}{\nabla q^{-x}}=\frac{1}{1-q}w(x;bq^{-1},cq;q)M_n(q^{-x};bq^{-1},cq;q) \tag{1.81}$$

où

$$w(x;b,c;q)=\frac{(bq;q)_x}{(q,-bcq;q)_x}c^xq^{\binom{x+1}{2}}.$$

Formule de Rodrigues.

$$w(x;b,c;q)M_n(q^{-x};b,c;q)=(1-q)^n(\nabla_q)^n[w(x;bq^n,cq^{-n};q)], \tag{1.82}$$

où

$$\nabla_q:=\frac{\nabla}{\nabla q^{-x}}.$$

Polynômes de q-Charlier

Définition.

$$\begin{aligned}C_n(q^{-x};a;q)&={}_2\phi_1\left(\begin{array}{c}q^{-n},q^{-x}\\0\end{array}\middle|q;-\frac{q^{n+1}}{a}\right)\\&=(-a^{-1}q;q)_n\,{}_1\phi_1\left(\begin{array}{c}q^{-n}\\-a^{-1}q\end{array}\middle|q;-\frac{q^{n+1-x}}{a}\right),\end{aligned} \tag{1.83}$$

Orthogonalité.

$$\sum_{x=0}^{\infty}\frac{a^x}{(q;q)_x}q^{\binom{x}{2}}C_m(q^{-x};a;q)C_n(q^{-x};a;q)=q^{-n}(-a;q)_\infty(-a^{-1}q,q;q)_n\delta_{mn},a>0. \tag{1.84}$$

Relation de récurrence.

$$
\begin{aligned}
&q^{2n+1}(1-q^{-x})C_n(q^{-x}) = aC_{n+1}(q^{-x}) - [a+q(1-q^n)(a+q^n)]C_n(q^{-x}) \\
&+ q(1-q^n)(a+q^n)C_{n-1}(q^{-x}),
\end{aligned}
\tag{1.85}
$$

où

$$C_n(q^{-x}) := C_n(q^{-x};a;q).$$

Relation de récurrence normalisée.

$$xp_n(x) = p_{n+1}(x) + [1+q^{-2n-1}\{a+q(1-q^n)(a+q^n)\}]p_n(x) + aq^{-4n+1}(1-q^n)(a+q^n)p_{n-1}(x), \tag{1.86}$$

où

$$C_n(q^{-x};a;q) = \frac{(-1)^n q^{n^2}}{a^n} p_n(q^{-x}).$$

Équation aux q-différences.

$$q^n y(x) = aq^x y(x+1) - q^x(a-1)y(x) + (1-q^x)y(x-1), y(x) = C_n(q^{-x};a;q). \tag{1.87}$$

Opérateur de transfert.

$$C_n(q^{-x-1};a;q) - C_n(q^{-x};a;q) = -a^{-1}q^{-1}(1-q^n)C_{n-1}(q^{-x};a;q) \tag{1.88}$$

ou équivalemment

$$\frac{\Delta C_n(q^{-x};a;q)}{\Delta q^{-x}} = -\frac{q(1-q^n)}{a(1-q)} C_{n-1}(q^{-x};aq^{-1};q). \tag{1.89}$$

Opérateur en arrière.

$$C_n(q^{-x};a;q) - a^{-1}q^{-x}C_n(q^{-x+1};a;q) = C_n(q^{-x};aq;q) \tag{1.90}$$

ou équivalemment

$$\frac{\nabla[w(x;a;q)C_n(q^{-x};a;q)]}{\nabla q^{-x}} = \frac{1}{1-q} w(x;a;q) = C_{n+1}(q^{-x};aq;q) \tag{1.91}$$

où

$$w(x;a;q) = \frac{a^x q^{\binom{x+1}{2}}}{(q;q)_x}.$$

Formule de Rodrigues.

$$w(x;a;q)C_n(q^{-x};a;q) = (1-q)^n(\nabla_q)^n[w(x;aq^{-n};q)], \tag{1.92}$$

où

$$\nabla_q := \frac{\nabla}{\nabla q^{-x}}.$$

Polynômes de Grand q-Jacobi

Définition.

$$P_n(x;a,b,c;q) = {}_3\phi_2\left(\begin{matrix} q^{-n}, & abq^{n+1}, x \\ & aq, cq \end{matrix} \; q;q\right). \tag{1.93}$$

Orthogonalité. Pour $0 < a < q^{-1}$ et $c < 0$ on a

$$\begin{aligned}&\int_{cq}^{aq} \frac{(a^{-1}x, c^{-1}x;q)_\infty}{(x, bc^{-1}x;q)_\infty} P_m(x;a,b,c;q)P_n(x;a,b,c;q)d_qx \\ &= \frac{q(abq^2, a^{-1}c, ac^{-1}q;q)_\infty}{(aq, bq, cq, abc^{-1}q;)_\infty} \\ &\times \frac{(1-abq)}{(1-abq^{2n+1})}\frac{(q,bq,abc^{-1};q)_n}{(aq,abq,cq;q)_n}(-acq^2)^n q^{\binom{n}{2}}\delta_{mn}.\end{aligned} \tag{1.94}$$

Relation de récurrence.

$$\begin{aligned}&(x-1)P_n(x;a,b,c;q) \\ &= A_nP_{n+1}(x;a,b,c;q) - (A_n+C_n)P_n(x;a,b,c;q) + C_nP_{n-1}(x;a,b,c;q),\end{aligned} \tag{1.95}$$

où

$$\left\{\begin{aligned} A_n &= \tfrac{(1-aq^{n+1})(1-abq^{n+1})(1-cq^{n+1})}{(1+abq^{2n+1})(1+abq^{2n+2})} \\ C_n &= -acq^{n+1}\tfrac{(1-q^n)(1-abc^{-1}q^n)(1-bq^n)}{(1+abq^{2n})(1+abq^{2n+2})}.\end{aligned}\right.$$

Relation de récurrence normalisée.

$$xp_n(x) = p_{n+1}(x) + [1-(A_n+B_n)]p_n(x) + A_{n-1}C_np_{n-1}(x), \tag{1.96}$$

où

$$P_n(x;a,b,c;q) = \frac{(abq^{n+1};q)_n}{(aq,cq;q)_n}p_n(x).$$

Équation aux q-différences.

$$\begin{aligned}
&q^{-n}(1-q^n)(1-abq^{n+1})x^2y(x)\\
&=B(x)y(qx)-[B(x)+D(x)]y(x)+D(x)y(q^{-1}x),
\end{aligned}\tag{1.97}$$

où

$$y(x)=P_n(x;a,b,c;q)$$

et

$$\begin{cases} B(x)=aq(x-1)(bx-c)\\ D(x)=(x-aq)(x-cq).\end{cases}$$

Opérateur de transfert.

$$\begin{aligned}
&P_n(x;a,b,c;q)-P_n(qx;a,b,c;q)\\
&=\frac{q^{-n+1}(1-q^n)(1-abq^{n+1})}{(1-aq)(1-cq)}xP_{n-1}(qx;aq,bq,cq;q)
\end{aligned}\tag{1.98}$$

nous pouvons encore écrire

$$\Delta P_n(x;a,b,c;q)=\frac{q^{-n+1}(1-q^n)(1-abq^{n+1})}{(1-q)(1-aq)(1-cq)}P_{n-1}(qx;aq,bq,cq;q).\tag{1.99}$$

Opérateur en arrière.

$$\begin{aligned}
&(x-a)(x-c)P_n(x;a,b,c;q)-a(x-1)(bx-c)P_n(x;a,b,c;q)\\
&=(1-a)(1-c)P_{n+1}(x;aq^{-1},bq^{-1},cq^{-1};q)
\end{aligned}\tag{1.100}$$

on peut traduire cela par

$$\begin{aligned}
&\Delta[w(x;a,b,c;q)P_n(x;a,b,c;q)]\\
&=\frac{(1-a)(1-c)}{ac(1-q)}w(x;aq^{-1},bq^{-1},cq^{-1};q)P_n(x;aq^{-1},bq^{-1},cq^{-1};q)
\end{aligned}\tag{1.101}$$

où

$$w(x;a,b,c;q)=\frac{(a^{-1}x,c^{-1}x;q)_\infty}{(x,bc^{-1}x;q)_\infty}.$$

Formule de Rodrigues.

$$w(x;a,b,c;q)P_n(x;a,b,c;q)=\frac{a^nc^nq^{ncn+1)}(1-q)^n}{(aq,cq;q)_n}(D_q)^n[w(x;aq^n,bq^n,cq^n;q)].\tag{1.102}$$

Polynômes de Petit q-Jacobi

Définition.

$$p_n(x;a,b|q) = {}_2\phi_1\left(\begin{array}{cc|c} q^{-n}, & abq^{n+1} & \\ & aq & q;qx \end{array}\right). \tag{1.103}$$

Orthogonalité.

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(bq;q)_k}{(q;q)_k}(aq)^k P_m(q^k;a,b|q)P_n(q^k;a,b|q) \qquad (1.104)\\ &= \frac{(abq^2;q)_\infty}{(aq;q)_\infty}\frac{(1-abq)(aq)^n}{(1-abq^{2n+1})}\frac{(q,bq;q)_n}{(aq,abq;q)_n}\delta_{mn}, o<a<q^{-1} \quad et \quad b<q^{-1}.\end{aligned}$$

Relation de récurrence.

$$-xP_n(x;a,b|q) = A_nP_{n+1}(x;a,b|q) - (A_n+C_n)P_n(x;a,b|q) + C_nP_{n-1}(x;a,b|q), \tag{1.105}$$

où

$$\left\{\begin{array}{l} A_n = q^n\frac{(1-aq^{n+1})(1-abq^{n+1})}{(1-abq^{2n+1})(1-abq^{2n+2})} \\ \\ C_n = aq^n\frac{(1-q^n)(1-bq^n)}{(1-abq^{2n})(1-abq^{2n+1})}. \end{array}\right.$$

Relation de récurrence normalisée.

$$xp_n(x) = p_{n+1}(x)(A_n+B_n)p_n(x) + A_{n-1}C_np_{n-1}(x), \tag{1.106}$$

où

$$P_n(x;a,b|q) = \frac{(-1)^nq^{-\binom{n}{2}}(abq^{n+1};q)_n}{(aq;q)_n}p_n(x).$$

Équation aux q-différences.

$$\begin{aligned}&q^{-n}(1-q^n)(1-abq^{n+1})xy(x) \qquad (1.107)\\ &= B(x)y(qx) - [B(x)+D(x)]y(x) + D(x)y(q^{-1}x), y(x) = p_n(x;a,b|q),\end{aligned}$$

où

$$\left\{\begin{array}{r} B(x) = a(bqx-1) \\ D(x) = x-1. \end{array}\right.$$

Opérateur de transfert.

$$p_n(x;a,b|q) - p_n(qx;a,b|q) = \frac{q^{-n+1}(1-q^n)(1-abq^{n+1})}{(1-aq)}xP_{n-1}(x;aq,bq|q) \tag{1.108}$$

cela équivaut à

$$\Delta p_n(x;a,b|q) = \frac{q^{-n+1}(1-q^n)(1-abq^{n+1})}{(1-q)(1-aq)} P_{n-1}(x;aq,bq|q). \tag{1.109}$$

Opérateur en arrière.

$$a(bx-1)p_n(x;a,b|q) - (x-1)p_n(x;a,b|q) = (1-a)p_{n+1}(x;aq^{-1},bq^{-1}|q) \tag{1.110}$$

ou de manière équivalente

$$\begin{aligned} &D_{q^{-1}}[w(x;\alpha,\beta|q)p_n(x;q^\alpha,q^\beta|q)] \\ &= \frac{(1-q^\alpha)}{q^{\alpha-1}(1-q)} w(x;\alpha-1,\beta-1|q)p_{n+1}(x;q^{\alpha-1},q^{\beta-1}|q), \end{aligned} \tag{1.111}$$

où

$$w(x;\alpha,\beta|q) = \frac{(qx;q)_\infty}{(q^{\beta+1}x;q)_\infty} x^\alpha.$$

Formule de Rodrigues.

$$w(x;\alpha,\beta|q)p_n(x;q^\alpha,q^\beta|q) = \frac{q^{n\alpha+\binom{n}{2}}(1-q)^n}{(q^{\alpha+1;q)_n}(} (D_{q^{-1}})^n[w(x;\alpha+n,\beta+n|q)]. \tag{1.112}$$

Schéma d'Askey pour les polynômes orthogonaux aux q-différences

(4)			Askey-Wilson		
(3)	Continuous dual q-Hahn	Continuous q-Hahn	Big q-Jacobi		
(2)	Al-Salam-Chihara	q-Meixner-Pollaczek	Continuous q-Jacobi	Big q-Laguerre	Little q-Jacobi
(1)	Continuous big q-Hermite	Continuous q-Laguerre	Little q-Laguerre	q-Laguerre	
(0)		Continuous q-Hermite	Stieltjes-Wigert		

Schéma d'Askey pour les polynômes orthogonaux aux q-différences

q-Racah (4)

Big q-Jacobi | q-Hahn | Dual q-Jacobi (3)

q-Meixner | Quantum q-Krawtchouk | q-Krawtchouk | Affine q-Krawtchouk | Dual q-Krawtchouk (2)

Alternative q-Charlier | q-Charlier | Al-Salam - Carlitz I | Al-Salam - Carlitz II (1)

Discrete q-Hermite I | Discrete q-Hermite II (0)

Chapitre 2

La méthode de factorisation pour l'équation hypergéométrique aux β-différences

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons d'abord de la méthode de factorisation pour l'équation générale hypergéométrique aux β-différences, c'est-à-dire une équation de la forme

$$[\sigma(x)D_{\beta^{-1}}D_{\beta} + \tau(x)D_{\beta}]y_n(x) = \lambda(n)y_n(x) \tag{2.1}$$

où D_{β} et $D_{\beta^{-1}}$ sont les β-dérivées avant et arrière données par [9]

$$D_{\beta}y(x) = \frac{y(\beta(x)) - y(x)}{\beta(x) - x}, D_{\beta^{-1}}y(x) = \frac{y(\beta^{-1}(x)) - y(x)}{\beta^{-1}(x) - x}, \tag{2.2}$$

pour tout point x pour lequel $\beta(x) \neq x$ et $D_{\beta}f(x_0) = f'(x_0)$ pour un point fixe $x = x_0$ de β, chaque fois que f est dérivable en $x = x_0$ au sens usuel, et β est une fonction continue strictement croissante $\beta : \mathbb{I} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{I}$, tandis que σ et τ sont des fonctions arbitraires (pas nécessairement des polynômes).

Clairement, lorsque $\beta(t) = qt$, ou $\beta(t) = t + 1$, les dérivées dans (2.2) donnent

$$D_q y(x) = \frac{y(qx) - y(x)}{qx - x},\ D_{q^{-1}}y(x) = \frac{y(q^{-1}(x)) - y(x)}{q^{-1}x - x} \tag{2.3}$$

la dérivée aux q-différences avant (q-dérivée de Jackson [10]) et arrière, et la dérivée aux différences avant et arrière

$$\Delta y(x) = y(x+1) - y(x), \ \nabla y(x) = y(x) - y(x-1) \tag{2.4}$$

respectivement.

2.2 La méthode de factorisation pour la solvabilité de l'équation hypergéométrique aux β-différences

Théorie générale

Considérons l'équation générale aux valeurs propres aux β-différences du second ordre

$$[\sigma(x)D_{\beta^{-1}}D_\beta + \tau(x)D_\beta]y_n(x) = \lambda(n)y_n(x). \tag{2.5}$$

Cette équation peut s'écrire sous la forme

$$[u(x)E_\beta + v(x) + w(x)E_{\beta^{-1}}]y_n(x) = \lambda(n)y_n(x) \tag{2.6}$$

où $v(x) = -(u(x) + w(x))$;
avec

$$u(x) = \frac{\sigma(x)}{[x - \beta^{-1}x][\beta x - x]} + \frac{\tau(x)}{\beta x - x}; w(x) = \frac{\sigma(x)}{[\beta^{-1}x - x]^2}, \tag{2.7}$$

tandis que $E_\beta f(x) = f(\beta(x)), E_{\beta^{-1}}f(x) = f(\beta^{-1}(x))$

Inversement, une equation du type (2.6) peut s'écrire comme (2.5) avec

$$\begin{aligned} \sigma(x) &= w(x)[\beta^{-1}(x) - x]^2, \\ \tau(x) &= w(x)[\beta^{-1}(x) - x]/[\beta(x) - x] - u(x)[x - \beta(x)]. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Notre objectif est d'étudier la solvabilité de l'équation des types (2.6)(ou (2.5) qui sont équivalentes). Ici la méthode suivie dans [2, 4, 7] sera utilisée.

D'abord, écrivons (2.6) sous la forme

$$\begin{aligned} Ly_n(x) &= [a(x)E_\beta + b(x) + c(x)E_{\beta^{-1}}]y_n(x) \\ &= \lambda(n)\theta(x)y_n(x) \end{aligned} \tag{2.9}$$

où

$$a(x) = \theta(x)u(x), \ b(x) = \theta(x)v(x), \ c(x) = \theta(x)w(x) \tag{2.10}$$

pour une certaine fonction $\theta \neq 0$.

Considérons ensuite l'opérateur

$$\begin{aligned} H(x,n) &= E_\beta[\rho(L-\lambda\theta)\rho] && (2.11)\\ &= E_\beta^2 + [b(\beta(x) - \lambda(n)\theta(\beta(x))]E_\beta + d(\beta(x)) && (2.12) \end{aligned}$$

où

$$\rho(\beta(x))/\rho(x) = a(x), d(x) = a(\beta^{-1}(x))c(x). \quad (2.13)$$

En effet, nous avons

$$\begin{aligned} H(x,n) =& E_\beta[\rho(L-\lambda\theta)\rho]\\ =& E_\beta[\rho(x)(a(x)E_\beta + b(x) + c(x)E_\beta^{-1} - \lambda(n)\theta(x))\rho^{-1}(x)]\\ =& E_\beta[\rho(x)(a(x)\rho^{-1}(\beta(x))E_\beta + b(x)\rho^{-1}(x)\\ &+ c(x)\rho^{-1}(\beta^{-1}(x))E_\beta^{-1} - \lambda(n)\theta(x)\rho^{-1}(x))]\\ =& E_\beta[\frac{\rho(x)}{\rho(\beta(x))}a(x)E_\beta + b(x) + \frac{\rho(x)}{\rho(\beta^{-1}(x))}c(x)E_\beta^{-1} - \lambda(n)\theta(x)]\\ =& E_\beta^2 + [b(\beta(x) - \lambda(n)\theta(\beta(x))]E_\beta + d(\beta(x)). \end{aligned}$$

Donc l'équation aux valeurs propres (2.9) est "équivalente" à l'équation

$$H(x,n)y_n(x) = 0, \quad (2.14)$$

en ce sens que si $y_n(x)$ est une solution de (2.9), alors $\rho(x)y_n(x)$ est une solution de (2.14) et inversement si $y_n(x)$ est une solution de (2.14), alors $\rho^{-1}(x)y_n(x)$ est une solution de (2.9)

Considérons maintenant pour H, le type de factorisation suivant

$$\begin{aligned} H(x,n) - \mu(n) &= (E_\beta + g(x,n))(E_\beta + f(x,n)) && (2.15)\\ H(x,n) - \mu(n) &= (E_\beta + f(x,n))(E_\beta + g(x,n)), \end{aligned}$$

pour certaines fonctions $f(x,n), g(x,n)$ et constantes (en x) $\lambda(n), \mu(n)$.

Considérons ensuite l'équation aux valeurs propres

$$\begin{aligned} \tilde{L}\tilde{y}_n(x) &= [-g(x,-1)E_\beta + b(x) - f(\beta^{-1}(x),-1)E_{\beta^{-1}}]\tilde{y}_n(x)\\ &= \lambda(n)\theta(x)\tilde{y}_n(x), && (2.16) \end{aligned}$$

et l'opérateur

$$\begin{aligned}\tilde{H}(x,n) &= E_\beta[\tilde{\rho}(x)(\tilde{L}-\lambda(n)\theta(x))\tilde{\rho}^{-1}(x)] \\ &= E_\beta^2+[b(\beta(x)-\lambda(n)\theta(\beta(x))]E_\beta+\tilde{d}(\beta(x)),\end{aligned} \tag{2.17}$$

où

$$\tilde{\rho}(\beta(x))/\tilde{\rho}(x) = -g(x,-1); \tilde{d}(x) = f(\beta^{-1}(x),-1)g(\beta^{-1}(x),-1). \tag{2.18}$$

Ici aussi, nous avons

$$\begin{aligned}\tilde{H}(x,n) =& E_\beta[\tilde{\rho}(x)(\tilde{L}-\lambda(n)\theta(x))\tilde{\rho}^{-1}(x)] \\ =& E_\beta[\tilde{\rho}(x)(-g(x,-1)E_\beta+b(x)-f(\beta^{-1}(x),-1)E_\beta^{-1}-\lambda(n)\theta(x))\tilde{\rho}^{-1}(x)] \\ =& E_\beta[\tilde{\rho}(x)(-g(x,-1)\tilde{\rho}^{-1}(\beta(x))E_\beta+b(x)\tilde{\rho}^{-1}(x) \\ &-f(\beta^{-1}(x),-1)\tilde{\rho}^{-1}(\beta^{-1}(x))E_\beta^{-1}-\lambda(n)\theta(x)\tilde{\rho}^{-1}(x))] \\ =& E_\beta[-g(x,-1)\frac{\tilde{\rho}(x)}{\tilde{\rho}(\beta(x))}E_\beta+b(x) \\ &-f(\beta^{-1}(x),-1)\frac{\tilde{\rho}(x)}{\tilde{\rho}(\beta^{-1}(x))}E_\beta^{-1}-\lambda(n)\theta(x)] \\ =& E_\beta^2+[b(\beta(x)-\lambda(n)\theta(\beta(x))]E_\beta+\tilde{d}(\beta(x)).\end{aligned}$$

On voit dans ce cas aussi que l'équation aux valeurs propres (2.16) est "équivalente" à l'équation

$$\tilde{H}(x,n)\tilde{y}_n(x) = 0. \tag{2.19}$$

Considérons aussi pour $\tilde{H}$, la factorisation

$$\begin{aligned}\tilde{H}(x,n)-\tilde{\mu}(n) &= (E_\beta+g(x,n))(E_\beta+f(x,n)) \\ \tilde{H}(x,n)-\tilde{\mu}(n) &= (E_\beta+f(x,n))(E_\beta+g(x,n)),\end{aligned} \tag{2.20}$$

avec

$$\tilde{\mu}(n) = \mu(n)-\mu(-1), \tag{2.21}$$

et certaines fonctions $f(x,n), g(x,n)$ et les constantes (en x) $\lambda(n), \mu(n)$ comme en (2.15).

Donnons maintenant l'énoncé principale de cette section.

Théorème 2.1. *Supposons qu'il existe des fonctions $f(x,n)$, $g(x,n)$, des constantes (en x) $\lambda(n)$, $\mu(n)$, pour laquelle H admet la factorisation* (2.15).

Dans ce cas, les situations suivantes sont valables:

(i) L'équation aux valeurs propres (2.16) *admet une suite de fonctions propres* $\tilde{y}_n(x) = \psi_n(x)$ *satisfaisant les relations aux différences*

$$\begin{aligned}\psi_{n+1}(x) &= [-g(x,-1)E_\beta + f(x,n)]\psi_n(x) \\ -\tilde{\mu}(n)\psi_{n-1} &= [-g(x,-1)E_\beta + g(x,n-1)]\psi_n(x), n = 0,1,2,... \\ \psi_0(x) &= 1,\end{aligned} \tag{2.22}$$

et les relations de récurrence à trois termes

$$\psi_{n+1}(x) + \tilde{\mu}(n-1)\psi_{n-1} = [f(x,n) - g(x,n-1)]\psi_n(x) \tag{2.23}$$
$$n = 0,1,2,... \tag{2.24}$$

(ii) Si de plus $f(x,n)$ *et* $g(x,n)$ *sont telles que*

$$f(x,n) - g(x,n) = c_1(n)\chi(x) + c_2(n), \tag{2.25}$$

pour une fonction $\chi(x)$*, tandis que* $c_1(n) \neq 0, \infty, n = 0,1,2,...,$ *alors l'équation aux valeurs propres* (2.16) *admet une suite de fonctions propres ployômiales* $\tilde{y}_n(x) = \tilde{P}_n(\chi(x))$ *satisfaisant les mêmes relations aux différences* (2.22) *et les relations de récurrence*

$$\tilde{P}_{n+1}(\chi(x)) + \mu(n-1)\tilde{P}_{n-1}(\chi(x)) = [c_1(n)\chi(x) + c_2(n)]\tilde{P}_n(\chi(x)) \tag{2.26}$$

$$\tilde{P}_0 = 1, \tilde{P}_1 = c_1(0)\chi(x) + c_2(0). \tag{2.27}$$

(iii) Si $\mu(-1) = 0$*, les équations* (2.16) *et* (2.9) *ainsi que leurs solutions, deviennent identiques.*

Démonstration 2.1.
(i) Remarquons d'abord que des relations en (2.15) *découlent en particulier les équations*

$$f(x,n)g(x,n) = d(\beta(x)) - \mu(n), \tag{2.28}$$
$$f(\beta(x),n) + g(x,n) = b(\beta(x)) - \theta(\beta(x))\lambda(n), \tag{2.29}$$

avec

$$f(\beta(x),n+1) + g(x,n+1) = f(x,n) + g(\beta(x),n), \tag{2.30}$$
$$f(x,n+1)g(x,n) = f(x,n)g(x,n) + \mu(n) - \mu(n+1), \tag{2.31}$$

ou de manière équivalente les équations (2.28) *et* (2.29) *avec l'équation aux* β*-différences.*

$$\Delta_\beta(f(x,n)-g(x,n))=[\lambda(n+1)-\lambda(n)]\theta(\beta(x)),\Delta_\beta=E_\beta-1. \tag{2.32}$$

Remarquons ensuite que de (2.13), (2.17), (2.18) *et* (2.28) *(avec* $n=-1$*), il s'en suit que*

$$H=\tilde{H}+\mu(-1). \tag{2.33}$$

D'où de (2.15) *suit* (2.20). *De l'autre côté, de* (2.20) *découle des relations d'interconnexion*

$$\begin{aligned}\tilde{H}(x,n+1)(E_\beta+f(x,n))&=(E_\beta+g(x,n))\tilde{H}(x,n)\\ \tilde{H}(x,n)(E_\beta+g(x,n))&=(E_\beta+f(x,n))\tilde{H}(x,n+1),\end{aligned} \tag{2.34}$$

d'où l'on déduit que toute suite de solutions de (2.19) *satisfait*

$$\begin{aligned}\phi_{n+1}(x)&=(E_\beta+f(x,n))\phi_n(x),\\ -\tilde{\mu}(n-1)\phi_{n-1}(x)&=(E_\beta+g(x,n-1))\phi_n(x),n=0,1,2,...\end{aligned} \tag{2.35}$$

De l'autre côté de (2.29) *(avec* $n=0$*) et* (2.31) *(avec* $n=-1$*) suit que* $\tilde{y}_0=1$ *est une solution de* (2.16) *avec* $n=0$.

D'où de (2.17) *et* (2.18) *découlent que* $\phi_0(x)=\tilde{\rho}$ *est une solution de* (2.19) *avec* $n=0$. *D'où de* (2.35) *découle* (2.22) *et par conséquent* (2.23).

(ii) Pour obtenir les relations en (2.26) *et* (2.27)*, il suffit de considérer* (2.25) *(avec* $n=0$*) et la première relation en* (2.22) *(avec* $n=0$*).*

(iii) Ceci est une conséquence directe du fait que si $\mu(-1)=0$*, alors* $\tilde{H}=H$ *(voir* (2.33)*), et donc, par des simples considérations,* $\lambda(0)=0$*,* $\tilde{\mu}=\mu$*,* $\tilde{L}=L$ $a(x)=-g(x,-1),c(x)=-f(\beta^{-1}(x),-1)$.

Notons que si les polynômes $\tilde{y}_n(x)$ satisfont (2.26), alors leur formes moniques $\tilde{P}_n=\tilde{y}_n/\rho(n)$ où

$$\rho(n+1)/\rho(n)=c_1(n)$$

satisfait

$$\tilde{P}_{n+1}+a_n^2\tilde{P}_{n-1}=(\chi(x)-b_n)\tilde{P}_n \tag{2.36}$$

où

$$a_n^2 = \frac{\tilde{\mu}(n-1)}{c_1(n)c_1(n-1)}, b_n = -c_2(n)/c_1(n). \tag{2.37}$$

2.3 La méthode de factorisation pour la transformation de l'équation hypergéométrique aux β-différences

Théorie générale

Considérons l'opérateur général $H(x)$ aux β-différences du second ordre

$$H(x) = u(x)E_\beta + v(x) + w(x)E_{\beta^{-1}}. \tag{2.38}$$

Notre objectif est d'étudier la transformabilité d'un tel opérateur. La méthode de factorisation de type [5, 6] sera utilisée. Supposons que l'opérateur dans (2.38) soit llbispectralgg au sens où il admet deux séquences de systèmes distincts d'éléments propres, disons par exemple (λ_n, y_n) et (γ_n, z_n) :

$$\begin{aligned} Hy_n(x) &= \lambda_n y_n(x) \\ Hz_n(x) &= \gamma_n z_n(x), n = 0, 1, 2, \ldots. \end{aligned} \tag{2.39}$$

Dans ce cas, on peut utiliser l'un des deux éléments propres, disons par exemple (γ_n, z_n) , pour transformer H en un autre opérateur résoluble $\tilde{H}$ de la manière suivante. Factoriser H et définir $\tilde{H}$ comme suit,

$$\begin{aligned} H - \gamma_m &= L_m R_m \\ \tilde{H} - \gamma_m &= R_m L_m, m = 0, 1, 2, \ldots, \end{aligned} \tag{2.40}$$

où

$$\begin{aligned} R_m &= 1 + f(x, m)E_{\beta^{-1}} \qquad L_m = u(x)E_\beta + g(x, m) \\ f(x, m) &= -\frac{z_m(x)}{z_m(\beta^{-1}(x))} \qquad g(x, m) = -w(x)\frac{z_m(\beta^{-1}(x))}{z_m(x)}. \end{aligned} \tag{2.41}$$

Il résulte de (2.39) que les fonctions $\tilde{y}_n(x,m), m, n = 0, 1, ...$ défini par

$$\begin{aligned} [u(x)E_\beta + g(x,m)]\tilde{y}_0(x,m) = 0 \\ \tilde{y}_n(x,m) = [1 + f(x,m)E_{\beta^{-1}}]y_{n-1}(x), \quad m = 0,1,2,..., \end{aligned} \tag{2.42}$$

sont des fonctions propres de $\tilde{H}(x,m)$ correspondant aux valeurs propres γ_m, λ_n , pour $m = 0, 1, ..., n = 0, 1, ...$ respectivement. Nous désignerons ici H et y_n comme opérateur et fonctions transformables respectivement, z_n comme fonctions de transformation et finalement $\tilde{H}$ et $\tilde{y}_n$ comme opérateur et fonctions transformés respectivement. Le point ici est que si

$$\frac{y_n(x)}{y_n(\beta^{-1}(x))} \neq \frac{z_n(x)}{z_n(\beta^{-1}(x))}, \tag{2.43}$$

alors, pour un m fixe, les fonctions transformées $\tilde{y}_n(x,m), n = 0, 1, \ldots$ ne sont pas des solutions triviales de l'opérateur transformé $\tilde{H}$. De plus, sous certaines conditions additionnelles, les fonctions transformées admettent la plupart des propriétés mathématiques des transformables y_n, telles que la fermeture et l'orthogonalité, satisfaire les équations aux valeurs propres aux différences et les relations aux différences ou de récurrence.

Équation aux différences

Clairement, les fonctions $y_n(x,m)$ satisfont l'équation aux valeurs propres

$$\begin{aligned} \tilde{H}(x,m)\tilde{y}_0(x,m) &= \gamma_m \tilde{y}_0(x,m) \\ \tilde{H}(x,m)\tilde{y}_n(x,m) &= \lambda_{n-1}\tilde{y}_n(x,m), n = 1, 2, \ldots, \end{aligned} \tag{2.44}$$

pour

$$\tilde{H}(x,m) = u(x)E_\beta + \tilde{v}(x,m) + \tilde{w}(x,m)E_{\beta^{-1}}, \tag{2.45}$$

où

$$\begin{aligned} \tilde{v}(x,m) &= g(x,m) + f(x,m)u(\beta^{-1}(x)) + \gamma_m \\ &= v(x) + f(x,m)u(\beta^{-1}(x)) - u(x)f(\beta(x),m) \\ \tilde{w}(x,m) &= f(x,m)g(\beta(x),m) = w(x)\frac{g(\beta(x),m)}{g(x,m)}. \end{aligned} \tag{2.46}$$

Orthogonalité, fermeture

Définissons d'abord l'inverse de la β-dérivée suivante, la β-intégrale comme suit [9]

$$\int_a^b f(x)d_{\beta(x)} = \sum_{k=0}^{n_a-1}(\beta^k(b) - \beta^{k+1}(b))f(\beta^k(b)), \tag{2.47}$$

donnée sur le β-réseau (pour cela on suppose que $0 < \beta^{'}(x) < 1$)

$$a = \beta^{n_a}(b), ..., \beta^{k+1}(b), \beta^k(b), ..., \beta(b), \beta^0(b) = b, n_a \in \mathbb{Z}^+, \tag{2.48}$$

$x_0 \leq a < b$, où x_0 est le point fixe de β.
Notons que puisque la condition de convergence des itérations $x_{k+1} = \beta(x_k)$ est satisfaite, il résulte de (2.47) que

$$\int_{x_0}^b f(x)d_{\beta(x)} = \sum_{k=0}^{\infty}(\beta^k(b) - \beta^{k+1}(b))f(\beta^k(b)), \tag{2.49}$$

et

$$\int_{x_0}^\infty f(x)d_{\beta(x)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty}(\beta^k(b) - \beta^{k+1}(b))f(\beta^k(b)). \tag{2.50}$$

Des définitions similaires peuvent être données dans les cas où $\beta_0(x) \geq 1$. Considérons ensuite les fonctions $\rho(x)$ et $\tilde{\rho}(x)$ définies par

$$\begin{aligned} \frac{\rho^2(\beta(x))}{\rho^2(x)} &= \frac{x-\beta(x)}{\beta(x)-\beta^2(x)}\frac{w(x)}{w(\beta(x))} = \frac{x-\beta(x)}{\beta(x)-\beta^2(x)}\frac{u(x)}{f(\beta(x),m)g(x,m)}; \\ \frac{\rho^2(\beta(x),m)}{\rho^2(x,m)} &= \frac{x-\beta(x)}{\beta(x)-\beta^2(x)}\frac{u(x)g(\beta(x),m)}{w(\beta(x))g(x,m)} = \frac{x-\beta(x)}{\beta(x)-\beta^2(x)}\frac{u(x)}{f(\beta(x),m)g(x,m)}; \end{aligned} \tag{2.51}$$

Des relations intéressantes existent entre $\rho(x)$ et $\tilde{\rho}(x,m)$: On a

$$\tilde{\rho}^2(x,m) = \rho^2(x)g(x,m). \tag{2.52}$$

Ensuite, comme on le voit facilement, les réductions de similarité $\rho H \rho^{-1}$ et $\tilde{\rho}\tilde{H}\tilde{\rho}^{-1}$ envoient H et $\tilde{H}$ respectivement, dans leurs formes symétriques formelles, c'est-à-dire comme

$$u(x)E_\beta + b(x) + \frac{\beta^{-1}(x) - x}{x - \beta(x)}u(\beta^{-1}(x))E_\beta^{-1}, \tag{2.53}$$

ou

$$\frac{\beta(x)-\beta^2(x)}{x-\beta(x)}w(\beta(x))E_\beta + b(x) + w(x)E_\beta^{-1}. \tag{2.54}$$

Notons $\ell^2(a,b;\rho^2)$ l'espace linéaire des fonctions β-discrètes définies sur le réseau (2.48), dans lequel est défini un produit interne pondéré β-discret

$$(\psi,\phi)_{\rho^2} = \int_a^b \psi(x)\phi(x)\rho^2(x)d_\beta x. \tag{2.55}$$

L'espace similaire pour $\tilde{\rho}^2$ sera noté $\tilde{\ell}^2(\tilde{a},\tilde{b};\tilde{\rho}^2)$. De plus, en utilisant la β-sommation par parties et les relations (2.51), (2.52), on vérifie facilement que pour ψ et ϕ satisfaisant les conditions aux limites

$$\varrho^2(\beta^{-1}(y))u(\beta^{-1}(y))[\psi(\beta^{-1}(y))\phi(y)-\phi(\beta^{-1}(y))\psi(y)]_a^b = 0. \tag{2.56}$$

pour ϱ^2 est égal à ρ^2 et $\tilde{\rho}^2$ respectivement, on a

$$(H\psi,\phi)_{\rho^2} = (\psi,H\phi)_{\rho^2};(\tilde{H}\psi,\phi)_{\tilde{\rho}^2} = (\psi,\tilde{H}\phi)_{\tilde{\rho}^2}. \tag{2.57}$$

Le même raisonnement montre que, pour ψ et ϕ satisfaisant

$$u(\beta^{-1}(y))\varrho(\beta^{-1}(y))\phi(y)\psi(\beta^{-1}(y))|_a^b = 0, \tag{2.58}$$

on a

$$(\phi,R_m\psi)_{\tilde{\rho}^2} = (L_m\phi,\psi)_{\rho^2}. \tag{2.59}$$

Le théorème suivant réfère les propriétés d'orthogonalité et de fermeture de $\{\tilde{y}_n\}_{n\geq 0}$ dans $\tilde{\ell}^2(\tilde{a},\tilde{b};\tilde{\rho}^2)$ à celles de $\{y_n\}_{n\geq 0}$ dans $\ell^2(a,b;\rho^2)$.

Théorème 2.2. *Si* (2.58) *est satisfait pour $\psi = y_j$ et $\phi = \tilde{y}_i, i,j = 0,1,...$ alors*
(i) De l'orthogonalité de $\{y_n\}_{n\geq 0}$ dans $\ell^2(a,b;\rho^2)$ découle celle de $\{\tilde{y}_n\}_{n\geq 0}$ dans $\tilde{\ell}^2(\tilde{a},\tilde{b};\tilde{\rho}^2)$
(ii) De la fermeture de $\{y_n\}_{n\geq 0}$ dans $\ell^2(a,b;\rho^2)$ découle celle de $\{y_n\}_{n\geq 0}$ dans $\ell^2(a,b;\rho^2)$.

Démonstration 2.2. *(i) Dans* (2.59) *prenons $\phi = R_m y_i$ et $\psi = y_j$. On obtient $(R_m y_i, R_m y_j)_{\tilde{\rho}^2} = (L_m R_m y_i, y_j)_{\rho^2} = (\lambda_i - \gamma_m)(y_i,y_j)_{\rho^2} = 0$. Donc $\tilde{y}_{i+1} = R_m y_i \perp \tilde{y}_{j+1} = R_m y_j, i,j = 0,1,....$ En prenant $\phi = \tilde{y}_0$ et $\psi = y_j$, on a $(\tilde{y}_0, R_m y_j)_{\tilde{\rho}^2} = (L_m\tilde{y}_0, y_j)^2_\rho = 0, j = 1,...$ (puisque $L_m\tilde{y}_0 =^{def} 0$). Donc $\tilde{y}_0\perp\tilde{y}_j, j = 0,1....$ En somme $\tilde{y}_i\perp\tilde{y}_j, i,j = 0,1...,i\neq j$.*
(ii) Supposons qu'il existe un certain y tel que $y\perp\tilde{y}_j, j = 1,....$ On a $0 = (y,\tilde{y}_j)_{\tilde{\rho}^2} = (y,R_m y_j)_{\tilde{\rho}^2} = (L_m y, y_j)_{\rho^2}$. A partir de la fermeture de $\{y_j\}_{j\geq 0}$, il s'ensuit que $L_m y = 0$.

En d'autres termes $y = \tilde{y}_0$. *Donc le système* $\{\tilde{y}_n\}_{n\geq 0}$ *est fermé dans* $\tilde{\ell}^2(\tilde{a}, \tilde{b}; \tilde{\rho}^2)$ *et le théorème est complètement démontré.*

Relations aux différences et de récurrence

Supposons que les fonctions transformables satisfassent aux relations aux différences

$$\begin{aligned} \alpha_n y_{n+1} &= H_n^- y_n \\ \beta_n y_n &= H_n^+ y_{n+1}, n = 0, 1, ... \end{aligned} \tag{2.60}$$

où disons, $H_n^- = \bar{a}(x)E_\beta + \bar{f}(x, n)$ et $H_n^+ = \bar{b}(x)E_\beta + \bar{g}(x, n)$.
De l'autre côté, à partir de (2.40), on a

$$\begin{aligned} \tilde{y}_{n+1} &= R_m y_n \\ (\lambda_n - \gamma_m) y_n &= L_m \tilde{y}_{n+1}, n = 0, 1, ... \end{aligned} \tag{2.61}$$

Une combinaison de (2.60) et (2.61) conduit à une relation aux différences du troisième ordre suivante pour $\tilde{y}_n, n = 1, 2, ...$

$$\begin{aligned} \alpha_n(\lambda_n - \gamma_m)\tilde{y}_{n+2} &= R_m H_n^- L_m \tilde{y}_{n+1} \\ \beta_n(\lambda_{n+1} - \gamma_m)\tilde{y}_{n+1} &= R_m H_n^+ L_m \tilde{y}_{n+2}. \end{aligned} \tag{2.62}$$

En utilisant l'équation aux valeurs propres satisfaite par le $\tilde{y}_n$ (voir (2.44)) et les relations précédentes, on peut naturellement atteindre des relations aux différences du second ordre reliant $\tilde{y}_n, n = 1, 2, ...$
Supposons maintenant que les fonctions transformables y_n satisfont une relation de récurrence à trois termes

$$y_{n+1} + (b_n - \chi(x))y_n + a_n^2 y_{n-1} = 0, \tag{2.63}$$

alors, en utilisant la première relation dans (2.61), on montre que les transformées $\tilde{y}_n, n = 1, 2, \ldots$, satisfont la relation de récurrence à cinq termes suivante

$$\begin{aligned} \tilde{y}_{n+4} + [b_{n+2} + b_{n+1} - \chi(x) - \chi(\beta^{-1}(x))]\tilde{y}_{n+3} \\ +[(b_{n+1} - \chi(x))(b_{n+1} - \chi(\beta^{-1}(x))) + a_{n+2}^2]\tilde{y}_{n+2} \\ +a_{n+1}^2[b_{n+1} + b_n - \chi(x) - \chi(\beta^{-1}(x))]\tilde{y}_{n+1} + a_{n+1}^2 a_n^2 \tilde{y}_n = 0. \end{aligned} \tag{2.64}$$

Chapitre 3

Applications

3.1 La méthode de factorisation pour la solvabilité de l'équation hypergéométrique

L'équation hypergéométrique aux différences

Ici, nous utilisons la théorie générale du paragraphe 2.2 où nous posons $\beta(x) = x + 1$.

Considérons l'équation générale aux valeurs propres aux β-différences du second ordre

$$[\sigma(x)D_{\beta^{-1}}D_\beta + \tau(x)D_\beta]y_n(x) = \lambda(n)y_n(x). \tag{3.1}$$

En prenant $\beta(x) = x + 1$ cette équation peut s'écrire sous la forme

$$[\sigma(x)\Delta\nabla + \tau(x)\Delta]y_n(x) = \lambda_n y_n(x). \tag{3.2}$$

En effet, la β-dérivée donne la Δ-dérivée et nous avons

$$\begin{aligned}
D_\beta y(x) &= \frac{y(x+1) - y(x)}{x + 1 - x} \\
&= y(x+1) - y(x) \\
&= \Delta y(x); \\
D_{\beta^{-1}}D_\beta y(x) &= D_{\beta^{-1}}y(x+1) - D_{\beta^{-1}}y(x) \\
&= y(x+1) - y(x+1-1) - y(x) + y(x-1) \\
&= y(x+1) - y(x) - y(x) + y(x-1) \\
&= \nabla\Delta y(x);
\end{aligned}$$

et (3.1) donne (3.2).

L'équation (3.2) peut être écrite sous la forme

$$[u(x)E + v(x) + w(x)E^{-1}]y_n(x) = \lambda_n y_n(x), \tag{3.3}$$

avec

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{\sigma(x)}{[x-x+1][x+1-x]} + \frac{\tau(x)}{x+1-x} = \sigma(x) + \tau(x); \\ w(x) &= \frac{\sigma(x)}{[x-1-x]^2} = \sigma(x); v(x) = -(u(x)+w(x)), \end{aligned} \tag{3.4}$$

et $Ef(x) = f(x+1), E^{-1}f(x) = f(x-1)$.

Inversement, une équation de type (3.3) peut s'écrire comme (3.2) avec

$$\begin{aligned} \sigma(x) &= w(x)[x-1-x]^2, \\ &= w(x) \\ \tau(x) &= w(x)[x-1-x]/[x+1-x] - u(x)[x-x-1] \\ &= w(x) + u(x). \end{aligned} \tag{3.5}$$

Notre objectif est d'étudier la solvabilité de (3.2) ou (3.3), utilisant la théorie générale du paragraphe 2.2.

D'abord, écrivons (3.3) sous la forme

$$\begin{aligned} Ly_n(x) &= [a(x)E + b(x) + c(x)E^{-1}]y_n(x) \\ &= \lambda(n)\theta(x)y_n(x), \end{aligned} \tag{3.6}$$

où

$$a(x) = \theta(x)u(x), b(x) = \theta(x)v(x), c(x) = \theta(x)w(x). \tag{3.7}$$

Considérons ensuite l'opérateur

$$\begin{aligned}
H(x,n) &= E[\rho(L-\theta(x)\lambda)\rho^{-1}] \qquad (3.8)\\
&= E[\rho(x)(a(x)E+b(x)+c(x)E^{-1}-\theta(x)\lambda(n))\rho^{-1}(x)]\\
&= E[\rho(x)(a(x)\rho^{-1}(x+1)E+b(x)\rho^{-1}(x)+c(x)\rho^{-1}(x-1)E^{-1}\\
&- \theta(x)\lambda(n)\rho^{-1}(x))]\\
&= E[\frac{\rho(x)}{\rho(x+1)}a(x)E+b(x)+\frac{\rho(x)}{\rho(x-1)}c(x)E^{-1}-\theta(x)\lambda(n)]\\
&= E[E+b(x)+d(x)E^{-1}-\theta(x)\lambda(n)]\\
&= E^2+[b(x+1)-\theta(x)\lambda(n)]E+d(x+1),
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
\rho(x+1)/\rho(x) &= a(x); \qquad (3.9)\\
d(x) &= a(x-1)c(x).
\end{aligned}$$

Donc l'équation aux valeurs propres (3.6) est "équivalente" à l'équation

$$H(x,n)y_n(x)=0, \qquad (3.10)$$

en ce sens que si $y_n(x)$ est une solution de (3.8) , alors $\rho(x)y_n(x)$ est une solution de (3.10) et inversement si $y_n(x)$ est une solution de (3.10), alors $\rho^{-1}(x)y_n(x)$ est une solution de (3.8).

Considérons maintenant pour H, le type de factorisation suivant

$$\begin{aligned}
H(x,n)-\mu(n) &= (E+g(x,n))(E+f(x,n)) \qquad (3.11)\\
H(x,n)-\mu(n) &= (E+f(x,n))(E+g(x,n)),
\end{aligned}$$

pour certaines fonctions $f(x,n)$, $g(x,n)$ et constantes (en x) $\lambda(n)$, $\mu(n)$.

Considérons ensuite l'équation aux valeurs propres

$$\begin{aligned}
\tilde{L}\tilde{y}_n(x) &= [-g(x,-1)E+b(x)-f(x-1,-1)E^{-1}]\tilde{y}_n(x)\\
&= \lambda(n)\theta(x)\tilde{y}_n(x), \qquad (3.12)
\end{aligned}$$

et l'opérateur

$$\begin{aligned}
\tilde{H}(x,n) &= E[\tilde{\rho}(L-\theta(x)\lambda)\tilde{\rho}^{-1}] \qquad (3.13)\\
&= E[\tilde{\rho}(x)(-g(x,-1)E+b(x)-f(x-1,-1)E^{-1}-\theta(x)\lambda(n))\tilde{\rho}^{-1}(x)]\\
&= E[\tilde{\rho}(x)(-g(x,-1)\tilde{\rho}_{-1}(x+1)E+b(x)\tilde{\rho}^{-1}(x)\\
&- f(x-1,-1)\tilde{\rho}^{-1}(x-1)E^{-1}-\theta(x)\lambda(n)\tilde{\rho}^{-1}(x))]\\
&= E[-\frac{\tilde{\rho}(x)}{\tilde{\rho}(x+1)}g(x,-1)E+b(x)\\
&- \frac{\tilde{\rho}(x)}{\tilde{\rho}(x-1)}f(x-1,-1)E^{-1}-\theta(x)\lambda(n)] \qquad (3.14)\\
&= E[E+b(x)+\tilde{d}(x)E^{-1}-\theta(x)\lambda(n)]\\
&= E^2+[b(x+1)-\theta(x)\lambda(n)]E+\tilde{d}(x+1),
\end{aligned}$$

où nous avons posé

$$\tilde{\rho}(x+1)/\tilde{\rho}(x) = -g(x,-1); \quad \tilde{d}(x) = g(x-1,-1)f(x-1,-1). \qquad (3.15)$$

On voit que l'équation aux valeurs propres (3.12) est "équivalente" à l'équation

$$\tilde{H}(x,n)\tilde{y}_n(x) = 0. \qquad (3.16)$$

Considérons aussi pour $\tilde{H}$, la factorisation

$$\begin{aligned}
\tilde{H}(x,n)-\tilde{\mu}(n) &= (E+g(x,n))(E+f(x,n)) \qquad (3.17)\\
\tilde{H}(x,n)-\tilde{\mu}(n) &= (E+f(x,n))(E+g(x,n)),
\end{aligned}$$

avec

$$\tilde{\mu}(n) = \mu(n)-\mu(-1), \qquad (3.18)$$

et quelques fonctions $f(x,n)$, $g(x,n)$ et les constantes (en x) $\lambda(n)$, $\mu(n)$ comme en (3.11).

Théorème 3.1. *Supposons qu'il existe des fonctions $f(x,n)$, $g(x,n)$, des constantes (en x) $\lambda(n)$, $\mu(n)$, pour lesquelles H admet la factorisation* (3.11).

Dans ce cas, les situations suivantes sont valables:

(i) L'équation aux valeurs propres (3.12) *admet une suite de fonctions propres $\tilde{y}_n(x) =$*

$\psi_n(x)$ satisfaisant les relations aux différences

$$\begin{aligned} \psi_{n+1}(x) &= [-g(x,-1)E + f(x,n)]\psi_n(x) \\ -\tilde{\mu}(n-1)\psi_{n-1}(x) &= [-g(x,-1)E + g(x,n-1)]\psi_n(x), n = 0,1,2,... \\ \psi_0(x) &= 1, \end{aligned} \tag{3.19}$$

et les relations de récurrence à trois termes

$$\begin{aligned} \psi_{n+1}(x) + \tilde{\mu}(n-1)\psi_{n-1} &= [f(x,n) - g(x,n-1)]\psi_n(x) \\ n &= 0,1,2,... \end{aligned} \tag{3.20}$$

(ii) Si de plus $f(x,n)$ et $g(x,n)$ sont telles que

$$f(x,n) - g(x,n) = c_1(n)\chi(x) + c_2(n), \tag{3.21}$$

pour certaines fonctions $c_1(n) \neq 0, \infty, n = 0,1,2,\ldots,$ et $c_2(n)$ alors l'équation aux valeurs propres (3.12) *admet une suite de fonctions propres ployômiales $\tilde{y}_n(x) = \tilde{P}_n(\chi(x))$ satisfaisant les mêmes relations aux différences* (3.19) *et les relations de récurrence à trois termes*

$$\tilde{P}_{n+1}(\chi(x)) + \mu(n-1)\tilde{P}_{n-1}(\chi(x))[c_1(n)\chi(x) + c_2(n)]\tilde{P}_n(\chi(x)) \tag{3.22}$$

$$\tilde{P}_0 = 1, \tilde{P}_1 = c_1(0)\chi(x) + c_2(0) \tag{3.23}$$

(iii) Si $\mu(-1) = 0$, les équations (3.12) *et* (3.7) *ainsi que leurs solutions, deviennent identiques.*

Démonstration 3.1.

(i) Remarquons d'abord que des relations en (3.11) *découlent en particulier les équations*

$$f(x,n)g(x,n) = d(x+1) - \mu(n), \tag{3.24}$$

$$f(x+1,n) + g(x,n) = b(x+1) - \theta(x+1)\lambda(n), \tag{3.25}$$

avec

$$f(x+1,n+1) + g(x,n+1) = f(x,n) + g(x+1,n), \tag{3.26}$$

$$f(x,n+1)g(x,n) = f(x,n)g(x,n) + \mu(n) - \mu(n+1), \tag{3.27}$$

ou de manière équivalente les équations (3.24) *et* (3.25) *avec l'équation aux différences.*

$$\Delta(f(x,n) - g(x,n)) = [\lambda(n+1) - \lambda(n)]\theta(\beta(x)), \Delta = E - 1. \tag{3.28}$$

Remarquons ensuite que de (3.8), (3.13), (3.15) *et* (3.24) *(avec $n = -1$), il s'en suit que*

$$H = \tilde{H} + \mu(-1). \tag{3.29}$$

D'où de (3.12) *suit* (3.17)*, de l'autre côté, de* (3.17) *découle des relations d'interconnexion*

$$\begin{aligned} \tilde{H}(x,n+1)(E + f(x,n)) &= (E + g(x,n))\tilde{H}(x,n) \\ \tilde{H}(x,n)(E + g(x,n)) &= (E + f(x,n))\tilde{H}(x,n+1) \end{aligned} \tag{3.30}$$

d'où l'on déduit que toute suite de solution de (3.16) *satisfait*

$$\begin{aligned} \phi_{n+1}(x) &= (E + f(x,n))\phi_n(x), \\ -\tilde{\mu}(n-1)\phi_{n-1}(x) &= (E + g(x,n-1))\phi_n(x), n = 0, 1, 2, ... \end{aligned} \tag{3.31}$$

De l'autre côté de (3.24) *(avec $n = 0$) et* (3.25) *(avec $n = -1$) suit que $\tilde{y}_0 = 1$ est une solution de* (3.12) *avec $n = 0$.*

D'où de (3.25) *et* (3.15) *découlent que $\phi_0(x) = \tilde{\rho}$ est une solution de* (3.16) *avec $n = 0$. D'où de* (3.31) *découle* (3.19) *et par conséquent* (3.20).

(ii) Pour obtenir les relations en (3.22) *et* (3.23)*, il suffit de considérer* (3.21) *(avec $n = 0$) et la première relation en* (3.19) *(avec $n = 0$).*

(iii) Ceci est une conséquence directe du fait que si $\mu(-1) = 0$, alors $\tilde{H} = H$ (voir (3.29)*), et donc, par des simples considérations, $\lambda(0) = 0$, $\tilde{\mu} = \mu$, $\tilde{L} = L$, $a(x) = -g(x,-1)$, $c(x) = -f(x-1,-1)$.*

Théorème 3.2. *Si $a(x)$, $b(x)$ et $c(x)$ sont ceux donnés en* (3.7)*, $\theta(x) = 1$; $\chi(x) = x$; $\sigma = \sigma_0 x^2 + \sigma_1 x + \sigma_2$; $\tau = \tau_0 x + \tau_1$, alors*
a) L'opérateur

$$H(x,n) = E^2 + (b(x+1) - \lambda(n))E + d(x+1), \tag{3.32}$$

$d(x) = a(x-1)c(x)$, admet une factorisation du type (3.11) *avec*

$$f(x,n) = -\sigma(x) - \tau(x) - \frac{1}{2}\lambda(n) + \varphi(x,n) \tag{3.33}$$
$$g(x,n) = -\sigma(x+1) - \frac{1}{2}\lambda(n) + \varphi(x+1,n)$$
$$\mu(n) = \varphi(n)(\psi(n) + \phi(n) + \sigma_1 + \sigma_0 - \tau_1 - \frac{1}{2}\lambda(n)(\sigma_0 + \sigma_1$$
$$+ 2\sigma_2 - \phi(n))(\sigma_2 + \tau_1 + \frac{1}{2}\lambda(n)) - \frac{1}{2}\lambda^2(n),$$

où $\varphi(x,n) = \phi(n)x + \psi(n)$ et

$$\phi(n) = \frac{1}{2}\tau_0 - \sigma_0 - \frac{1}{2}\lambda(n) - \frac{1}{2}\lambda(n+1) \tag{3.34}$$
$$\psi(n) = \frac{\phi(n)(\tau_1 + \tau_0 - \sigma_0 - \phi(n)) + (\sigma_0 + \sigma_1 + \frac{1}{2}\tau_0)\lambda(n)}{2\phi(n) + 2\sigma_0 - \tau_0}.$$

tandis que

$$\lambda(n) = \tau_0 n + \sigma_0 n(n-1) \tag{3.35}$$

b) Les fonctions f et g dans (3.33) *satisfont la condition* (3.21).
c) $\mu(-1) = \lambda(0) = 0$,$\tilde{\mu} = \mu$, et $H = \tilde{H}, L = \tilde{L}$ ($\tilde{H}$ et $\tilde{L}$ sont obtenus comme dans la première sous-section) et clairement, les polynômes correspondants sont les polynômes hypergéométriques aux différences satisfaisant les relations (3.19) *et* (3.22)- (3.23).

Démonstration 3.2. *La démonstration du théorème consiste en des calculs directs et une utilisation du théorème 3.1*

Exemple[2]

Polynômes de Charlier

$$H(x,n) = E^2 - (x+\mu+1+\lambda(n))E + \mu(x+1); \quad \rho(x) = \mu^x; \quad \lambda(n) = -n;$$

$$\begin{aligned} f_1(x,n) = -x+n; \quad f_2(x,n) = -\mu; \\ g_1(x,n) = -\mu; \quad g_2(x,n) = -x+n-1; \\ \mu_1(n) = \mu n + \mu; \quad \mu_2(n) = \mu n. \end{aligned}$$

Polynômes de Meixner

$$\begin{aligned} H(x,n) = E^2 - [(\mu+1)x + \mu(\gamma+1) + 1 + \lambda(n)]E + \mu x^2 + \mu(\gamma+1)x + \gamma\mu; \\ \rho(x) = \mu^x \Gamma(x+\gamma); \quad \lambda(n) = -n(1-\mu); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_1(x,n) = -x+n; \quad f_2(x,n) = -\mu(x+\gamma+n); \\ g_1(x,n) = -\mu(x+\gamma+n-1); \quad g_2(x,n) = -x+n-1; \\ \mu_1(n) = \mu(n\gamma+n^2+n+\mu); \quad \mu_2(n) = \mu n(\gamma+n-1). \end{aligned}$$

Polynômes de Hahn

$$\begin{aligned} H(x,n) &= E^2 + [2x^2 + (6+\beta-\alpha-2N)x + (5+2\beta-\alpha-3N-\beta N-\lambda(n))]E \\ &\quad +[x^4 + (4+\beta-\alpha-2N)x^3 + (6+3\beta-3\alpha-6N+N^2-2N\beta+\alpha N-\alpha\beta)x^2] \\ &\quad (4+3\beta-3\alpha-6N+2N^2-4N\beta+2N\alpha-2\alpha\beta+N^2\beta+N\alpha\beta)x + \\ &\quad 1+\beta-\alpha-2N+N^2-2N\beta+\alpha N-\alpha\beta+N^2\beta+N\alpha\beta], \\ \rho(x) &= \frac{\Gamma(x+\beta+1)}{\Gamma(-x+N)}, \lambda(n) = -n(n+\alpha+\beta+1); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_1(x;n) &= x^2 - (N+\alpha+n-1)x - (\beta+1)(N-1) - \frac{1}{2}\lambda(n) + \psi_1(n); \\ g_1(x;n) &= x^2 + (3+n+\beta-N)x + 2 + \beta + n - N - \frac{1}{2}\lambda(n) - \psi_1(n); \\ \mu_1(n) &= \psi_1(n)(\psi_1(n) - 1 - \beta N - n) - \frac{1}{2}\lambda(n)(\beta+1)(N-1) - \frac{1}{2}\lambda(n)(N+\alpha-1) \\ &\quad +(n+\alpha+\beta+1)(\beta+1)(N-1) + \frac{1}{4}\lambda(n)(n+2)(n+\alpha+\beta+1); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_2(x;n) &= x^2+(2+\beta-N+n)x-(\beta+1)(N-1)-\frac{1}{2}\lambda(n)+\psi_2(n);\\
g_2(x;n) &= x^2+(2-n-N-\alpha)x-N-\alpha-n+1-\frac{1}{2}\lambda(n)-\psi_2(n);\\
\mu_2(n) &= \psi_2(\psi_2(n)+n+\alpha-\beta N+\beta)-\frac{1}{2}\lambda(n)(N+\alpha-1)-n(\beta+1)(N-1)\\
&\quad -\frac{1}{2}\lambda(n)(\beta+1)(N-1)-\frac{1}{2}\lambda(n)n-\frac{1}{4}\lambda^2(n);
\end{aligned}$$

$$\psi_1(n)=\frac{(n+\alpha+\beta+1)(\beta+1)(N-1)-\lambda(n)(n+\alpha)+\frac{1}{2}\lambda(n)(\alpha+\beta+2)}{2+2n+\alpha+\beta};$$

$$\psi_2(n)=\frac{(n(\beta+1)(N-1)+\lambda(n)(n+\alpha)-\frac{1}{2}\lambda(n)(\alpha+\beta+2)}{2n+\alpha+\beta}.$$

L'équation hypergéométrique aux q-différences

Ici, nous utilisons la théorie générale du paragraphe 2.2 où nous posons $\beta(x)=qx$.

Considérons encore une fois l'équation aux β-différences du second degré aux valeurs propres

$$[\sigma(x)D_{\beta^{-1}}D_\beta+\tau(x)D_\beta]y_n(x)=\lambda(n)y_n(x). \tag{3.36}$$

En prenant $\beta(x)=qx$, on a

$$[\sigma(x)D_{q^{-1}}D_q+\tau D_q]y_n(x)=\lambda(n)y_n(x) \tag{3.37}$$

où

$$D_q y_n(x)=\frac{y_n(qx)-y_n(x)}{qx-x}$$

est la q-dérivée ou dérivée de Jackson [5].

Cette équation peut être écrite sous la forme

$$[u(x)E_q+v(x)+w(x)E_q^{-1}]y_n(x)=\lambda(n)y_n(x) \tag{3.38}$$

où $v(x)=-(u(x)+w(x))$;

$$u(x)=\frac{\sigma(x)}{[x-q^{-1}x][qx-x]}+\frac{\tau(x)}{qx-x};w(x)=\frac{\sigma(x)}{[q^{-1}x-x]^2}, \tag{3.39}$$

avec

$$E_qf(x)=f(qx),E_q^{-1}f(x)=f(q^{-1}x).$$

En effet,

$$
\begin{aligned}
D_q y_n(x) &= \frac{y_n(qx) - y_n(x)}{qx - x} \\
D_q^{-1} D_q y_n(x) &= D_q^{-1}[\frac{y_n(qx) - y_n(x)}{qx - x}] \\
&= \frac{\frac{y_n(x)-y_n(q^{-1}x)}{x-q^{-1}x} - \dfrac{y_n(qx) - y_n(x)}{qx - x}}{x - q^{-1}x} \\
&= \frac{qxy_n(x) - qxy(q^{-1}x) + xy_n(q^{-1}x) - xy_n(qx) + q^{-1}xy_n(qx) - q^{-1}xy_n(x)}{[x - q^{-1}x]^2[qx - x]} \\
&= \frac{(qx - q^{-1}x)y_n(x) - (qx - x)y_n(q^{-1}x) + (x - q^{-1}xy_n(qx)}{[x - q^{-1}x]^2[qx - x]} \\
&= \frac{E_q y_n(x)}{[x - q^{-1}x][qx - x]} - \frac{E_q^{-1} y_n(x)}{[x - q^{-1}x]^2} + \frac{(qx - q^{-1}x)y_n(x)}{[x - q^{-1}x]^2[qx - x]}.
\end{aligned}
$$

Alors l'équation (3.37) devient:

$$
\begin{aligned}
\sigma(x)\frac{E_q y_n(x)}{[x - q^{-1}x][qx - x]} - \sigma(x)\frac{E_q^{-1} y_n(x)}{[x - q^{-1}x]^2} + \sigma(x)\frac{(qx - q^{-1}x)y_n(x)}{[x - q^{-1}x]^2[qx - x]} \\
+\frac{\tau(x)E_q y_n(x)}{qx - x} - \frac{\tau(x)y_n(x)}{qx - x} = \lambda(n)y_n(x); \\
([\frac{\sigma(x)}{x - q^{-1}x][qx - x]} + \frac{\tau(x)}{qx - x}]E_q + [\frac{\sigma(x)(qx - q^{-1}x)}{[x - q^{-1}x]^2[qx - x]} - \frac{\tau(x)}{qx - x}] \\
+\frac{\sigma(x)}{[x - q^{-1}x]^2}E_q^{-1})y_n(x) = \lambda(n)y_n(x).
\end{aligned}
$$

En posant

$$
\begin{aligned}
u(x) = \frac{\sigma(x)}{[x - q^{-1}x][qx - x]} + \frac{\tau(x)}{qx - x}; \quad w(x) = \frac{\sigma(x)}{[x - q^{-1}x]^2} \\
v(x) = -(u(x) + w(x)),
\end{aligned}
$$

on obtient

$$
[u(x)E_q + v(x) + w(x)E_q^{-1}]y_n(x) = \lambda(n)y_n(x).
$$

Inversement, l'équation (3.38) peut être écrite sous la forme de l'équation (3.37) avec

$$
\begin{aligned}
\sigma(x) &= w(x)[x - q^{-1}x]^2 \qquad (3.40) \\
\tau(x) &= w(x)[q^{-1}x - x]/(qx - x) - u(x)[x - qx].
\end{aligned}
$$

Notre objectif est d'étudier la solvabilité de (3.37) ou (3.38), utilisant la théorie générale du paragraphe 2.2.

Premièrement, écrivons l'équation (3.38) sous la forme

$$\begin{aligned} Ly_n(x) &= [a(x)E_q + b(x) + c(x)E_q^{-1}]y_n(x) \\ &= \lambda(n)\theta(x)y_n(x), \end{aligned} \tag{3.41}$$

où

$$a(x) = \theta(x)u(x), b(x) = \theta(x)v(x), c(x) = \theta(x)w(x). \tag{3.42}$$

Considérons l'opérateur

$$\begin{aligned} H(x,n) &= E_q[\rho(x)(L - \lambda(n)\theta(x))\rho^{-1}(x)] \\ &= E_q^2 + [b(qx) - \lambda(n)\theta(qx)]E_q + d(qx). \end{aligned} \tag{3.43}$$

En effet;

$$\begin{aligned} H(x,n) =&E_q[\rho(x)(a(x)E_q + b(x) + c(x)E_q^{-1} - \lambda(n)\theta(x))\rho^{-1}(x)] \\ =&E_q[\rho(x)(a(x)\rho^{-1}(qx)E_q + b(x)\rho^{-1}(x) \\ &+ c(x)\rho^{-1}(q^{-1}x)E_q^{-1} - \lambda(n)\theta(x)\rho^{-1}(x))] \\ =&E_q[\rho(x)/\rho^{-1}(qx)a(x)E_q + b(x) + \rho(x)/\rho^{-1}(q^{-1}x)c(x)E_q^{-1} - \lambda(n)\theta(x)]. \end{aligned}$$

En posant que

$$\rho(qx)/\rho(x) = a(x), d(x) = a(q^{-1}x)c(x), \tag{3.44}$$

$$\begin{aligned} H(x,n) =&E_q[E_q + b(x) + d(x)E_q^{-1} - \lambda(n)\theta(x)] \\ =&E_q^2 + b(qx)E_q + d(qx) - \lambda(n)\theta(qx)E_q \\ =&E_q^2 + [b(qx) - \lambda(n)\theta(qx)]E_q + d(qx) \end{aligned}$$

Donc, l'équation aux valeurs propres (3.41) est "équivalente" à l'équation

$$H(x,n)y_n(x) = 0. \tag{3.45}$$

Dans ce sens que si $y_n(x)$ est une solution de (3.41), alors $\rho(x)y_n(x)$ est solution de (3.45) et inversement si $y_n(x)$ est solution de (3.45), alors $\rho^{-1}(x)y_n(x)$ est solution de (3.41).

Considérons maintenant pour H, le type de factorisation suivant

$$\begin{aligned} H(x,n)-\mu(n) &= (E_q+g(x,n))(E_q+f(x,n)) \\ H(x,n)-\mu(n) &= (E_q+f(x,n))(E_q+g(x,n)), \end{aligned} \tag{3.46}$$

pour certaines fonctions $f(x,n)$, $g(x,n)$ et quelques constantes (en x) $\lambda(n)$, $\mu(n)$.

Considérons ensuite l'équation aux valeurs propres

$$\begin{aligned} \tilde{L}\tilde{y}_n(x) &= [-g(x,-1)E_q+b(x)-f(q^{-1}x,-1)E_q]y_n(x) \\ &= \lambda(n)\theta(x)y_n(x), \end{aligned} \tag{3.47}$$

et l'opérateur

$$\begin{aligned} \tilde{H}(x,n) &= E_q[\tilde{\rho}(x)(\tilde{L}-\lambda(n)\theta(x))\tilde{\rho}^{-1}(x)] \\ &= E_q^2+[b(qx)-\lambda(n)\theta(qx)]E_q+\tilde{d}(qx). \end{aligned} \tag{3.48}$$

En effet,

$$\begin{aligned} \tilde{H}(x,n) =& E_q[\tilde{\rho}(x)(-g(x,-1)E_q+b(x)-f(q^{-1}x,-1)E_q^{-1}-\lambda(n)\theta(x))\tilde{\rho}^{-1}(x)] \\ =& E_q[\tilde{\rho}(x)(-g(x,-1)\tilde{\rho}^{-1}(qx)E_q+b(x)\tilde{\rho}^{-1}(x) \\ & -f(q^{-1}x,-1)\tilde{\rho}^{-1}(q^{-1}x)E_q^{-1}-\lambda(n)\theta(x)\tilde{\rho}^{-1}(x))] \\ =& E_q[-g(x,-1)\tilde{\rho}(x)/\tilde{\rho}^{-1}(qx)E_q \\ & +b(x)-f(q^{-1}x,-1)\tilde{\rho}(x)/\tilde{\rho}^{-1}(q^{-1}x)E_q^{-1}-\lambda(n)\theta(x)]. \end{aligned}$$

En posant

$$\tilde{\rho}(qx)/\tilde{\rho}(x)=-g(x,-1), \tilde{d}(x)=g(qx,-1)f(q^{-1}x,-1), \tag{3.49}$$

on a

$$\begin{aligned} \tilde{H}(x,n) =& E_q[E_q+b(x)-\tilde{d}(x)E_q^{-1}-\lambda(n)\theta(x)] \\ =& E_q^2+b(qx)E_q+\tilde{d}(qx)-\lambda(n)\theta(qx)E_q \\ =& E_q^2+[b(qx)-\lambda(n)\theta(qx)]E_q+\tilde{d}(qx). \end{aligned}$$

C'est visible que l'équation aux valeurs propres (3.47) est "équivalente" à l'équation

$$\tilde{H}(x,n)\tilde{y}_n(x)=0. \tag{3.50}$$

Considérons aussi pour $\tilde{H}$, la factorisation

$$\begin{aligned}\tilde{H}(x,n)-\tilde{\mu}(n)&=(E_q+g(x,n))(E_q+f(x,n)) \\ \tilde{H}(x,n)-\tilde{\mu}(n)&=(E_q+f(x,n))(E_q+g(x,n)),\end{aligned} \tag{3.51}$$

avec

$$\tilde{\mu}(n)=\mu(n)-\mu(-1), \tag{3.52}$$

et quelques fonctions $f(x,n)$, $g(x,n)$ et des constantes en x $\lambda(n)$, $\mu(n)$.

Théorème 3.3. *Supposons que les fonctions $f(x,n)$, $g(x,n)$ et des constantes en x $\lambda(n)$, $\mu(n)$ existent, pour chaque H admettant la factorisation* (3.46)*.*

(i) L'équation aux valeurs propres (3.47) *admet une suite des fonctions propres $\tilde{y}_n(x)=\psi_n(x)$ satisfaisant les relations aux différences suivantes*

$$\begin{aligned}\psi_{n+1}(x)&=[-g(x,-1)E_q+f(x,n)]\psi_n(x) \\ -\tilde{\mu}(n-1)\psi_{n-1}(x)&=[-g(x,-1)E_q+g(x,n-1)]\psi_n(x), n=0,1,2,.... \\ \psi_0(x)&=1,\end{aligned} \tag{3.53}$$

et la relation de trois termes de récurrence

$$\psi_{n+1}(x)+\tilde{\mu}(n-1)\psi_{n-1}(x)=[f(x,n)+g(x,n-1)]\psi_n(x), \quad n=0,1,2,... \tag{3.54}$$

(ii) Si de plus $f(x,n), g(x,n)$ sont telles que

$$f(x,n)-g(x,n-1)=c_1(n)\chi(x)+c_2(n) \tag{3.55}$$

pour quelque fonction $\chi(x)$, tant que $c_1(n)\neq 0,\infty, n=0,1,2,...$, alors l'équation aux valeurs propres (3.47) *admet une suite des polynômes à fonctions propres $\tilde{y}_n(x)=\tilde{P}_n(\chi(x))$ satisfaisant les mêmes relations aux différences* (3.53) *et celles de trois termes de récurrence*

$$\tilde{P}_{n+1}(\chi(x))+\tilde{\mu}(n-1)\tilde{P}_{n-1}(\chi(x))=[c_1(n)\chi(x)+c_2(n)]\tilde{P}_n(\chi(x)), \tag{3.56}$$

$$\tilde{P}_0=1, \tilde{P}_1=c_1(0)\chi(x)+c_2(0) \tag{3.57}$$

(iii) Si $\mu(-1)=0$, les équations (3.47) *et* (3.41) *et leurs solutions deviennent identiques.*

Démonstration 3.3.
(i) Notons premièrement qu'à partir des relations en (3.46) *nous obtenons les relations*

suivantes

$$f(x,n)g(x,n) = d(qx) - \mu(n), \tag{3.58}$$
$$f(qx,n) + g(x,n) = b(qx) - \theta(qx), \lambda(n) \tag{3.59}$$

avec

$$f(qx,n+1) + g(x,n+1) = f(x,n) + g(qx,n), \tag{3.60}$$
$$f(x,n+1)g(x,n+1) = f(x,n)g(x,n) + \mu(n) - \mu(n+1), \tag{3.61}$$

Les équations (3.58) *et* (3.59) *ensemble et l'équation aux q-différences, on a*

$$\Delta_q(f(x,n) - g(x,n)) = (\lambda(n+1) - \lambda(n))\theta(qx), \;\; \Delta_q = E_q - 1. \tag{3.62}$$

Remarquons maintenant qu'à partir des équations (3.43),(3.48), (3.49) *et* (3.58) *(avec n=-1), suit que*

$$H = \tilde{H} + \mu(-1). \tag{3.63}$$

D'où de (3.46) *suit* (3.51)*. De l'autre cote ,de* (3.51) *les relations d'interconnexion*

$$\begin{aligned} \tilde{H}(x,n+1)(E_q + f(x,n)) &= (E_q + f(x,n))\tilde{H}(x,n) \\ \tilde{H}(x,n)(E_q + g(x,n)) &= (E_q + g(x,n))\tilde{H}(x,n), \end{aligned} \tag{3.64}$$

d'où l'on déduit que toute suite de solution de (3.50) *satisfait*

$$\begin{aligned} \phi_{n+1}(x) &= (E_q + f(x,n))\phi_n(x), \\ \tilde{\mu}(n-1)\phi_{n-1}(x) &= (E_q + g(x,n-1))\phi_n(x), n = 0,1,2,.... \end{aligned} \tag{3.65}$$

De l'autre côté de (3.59) *(avec $n = 0$) et* (3.60) *(avec $n = -1$) suit que $\tilde{y}_0 = 1$ est une solution de* (3.47) *avec $n = 0$.*

D'où de (3.48) *et* (3.49) *découlent que $\phi_0(x) = \tilde{\rho}$ est une solution de* (3.50) *avec $n = 0$. D'où de* (3.65) *découle* (3.52) *et par conséquent* (3.53)*.*

(ii) Pour obtenir les relations en (3.56) *et* (3.57)*, il suffit de considérer* (3.55) *(avec $n = 0$) et la première relation en* (3.52) *(avec $n = 0$).*

(iii) Ceci est une conséquence directe du fait que si $\mu(-1) = 0$, alors $\tilde{H} = H$ (voir (3.63)*), et donc, par des simples considérations, $\lambda(0) = 0$, $\tilde{\mu} = \mu$, $\tilde{L} = L$, $a(x) = -g(x,-1)$, $c(x) = -f(q^{-1}(x),-1)$.*

Théorème 3.4. *Si* $a(x), b(x)$ *et* $c(x)$ *sont ceux donnés en* (3.42), $\theta(x) = (1-q)/x$*;* $\sigma(x) = \sigma_0 x^2 + \sigma_1 x + \sigma_2$*;* $\tau(x) = \tau_0 x + \tau_1$*, alors*
a) L'opérateur

$$H(x,n) = E_q^2 + (b(qx) - \lambda(n)\theta(qx))E_q + d(qx), \tag{3.66}$$

$d(x) = a(x/q)c(x)$*, admet une factorisation du type* (3.51) *avec*

$$\begin{aligned} f(x,n) &= -\sigma_2/x - \frac{1}{2}(-\tau_1(x) - qc_0(n) + \tau_1 q + q\sigma_1 + q^2\sigma_1)/q - \\ &\quad (-\tau_0 + q^2\sigma_0 + q\sigma_0 + \tau_0 q + \lambda(n)q - \lambda(n+1)x/(1+q); \\ g(x,n) &= -\sigma_2/x - \frac{1}{2}(-\tau_1(x) - qc_0(n) + \tau_1 q + q\sigma_1 + q^2\sigma_1)/q - c_0(n) \\ &\quad + (-(-\tau_0 + q^2\sigma_0 + q\sigma_0 + \tau_0 q + \lambda(n)q - \lambda(n+1)x/(1+q) \\ &\quad - \lambda(n+1) + \lambda(n))x; \\ \mu(n) &= 1/4(-q^6\sigma_1^2 + 2\tau_1^2 q^2 - 8q^4\sigma_2\sigma_0 + c_0^2(n)q^4 - q^2\sigma_1^2 \\ &\quad + c_0^2(n)q^2 + 2\tau_1\sigma_1 - 4\tau_1 q^3\sigma_1 - \tau_1^2 - \tau_1^2 q^4 + 2q^4\sigma_1^2 + 2c_0^2(n)q^3 \\ &\quad + 4q^2\sigma_2\lambda(n) + 4q^2\sigma_2\tau_2 + 4q^2\sigma_0\sigma_2 + 4q^2\lambda(n+1)\sigma_2 - 4q^4\sigma_2\tau_0 \\ &\quad - 4q^4\sigma_2\lambda(n+1) - 4q^4\lambda(n)\sigma_2 + 2\tau_1 q^5\sigma_1 + 4q^6\sigma_2\sigma_0)/(q^2(1+q)^2) \end{aligned} \tag{3.67}$$

où

$$\begin{aligned} c_0(n) &= (2\tau_1 q^4\sigma_0 + q^3\sigma_1\lambda(n) + q^3\sigma_1\lambda(n+1) &(3.68)\\ &\quad + 2\tau_1 q^3\sigma_0 + q^2\lambda(n)\tau_1 + 2\tau_1 q^2\sigma_0 + \tau_1 q^2\lambda(n+1) \\ &\quad + 2\tau_1 q^2\tau_0 - q\lambda(n+1)\sigma_1 - q\lambda(n+1)\tau_1 - 2\tau_1 q\lambda(n) - q\sigma_1\lambda(n) \\ &\quad - 4\tau_1 q\tau_0 - 2\tau_1 q\sigma_0 + \lambda(n+1)\tau_1 + \tau_1\lambda(n) \\ &\quad + 2\tau_1\tau_0)/(q(1+q)(\lambda(n+1) - \lambda(n))) &(3.69) \end{aligned}$$

et

$$\lambda(n) = -[1 - tq^{-n}][\frac{q^2\sigma_0}{q-1} - (\frac{q\sigma_0}{q-1} + \tau_0)t^{n-1}q^n], \tag{3.70}$$

où t *est un paramètre indépendant.*
b) Les fonctions f *et* g *dans* (3.67) *vérifient la condition* (3.55) *avec* $\chi(x) = x$ *.*
c) Semblable à l'équation (3.47) *ici, admet une suite de solutions polynomiales satisfaisantes relations de type* (3.53) *et* (3.56)-(3.58).
d) Pour $t = 1$ *, on obtient* $\mu(-1) = \lambda(0) = 0, \tilde{\mu} = \mu$ *(et* $f(x/q,-1) = -c(x)$*,* $g(x,-1) = -a(x)$*,*$\tilde{H} = H, \tilde{L} = L$*) et les polynômes en c) sont les q-polynômes de différence hy-*

pergéométriques.
e) Pour $t \neq 1$ *, on a* $\mu(-1) \neq 0, \lambda(0) \neq 0, H \neq \tilde{H}, \tilde{L} \neq L$ *(* $\tilde{H}, \tilde{L}$ *sont obtenu comme dans la première sous-section), mais* $\mu(-1) = a_0^2 = 0$ *(voir* (3.52), (2.37)*), et les polynômes en c) sont des polynômes généralisant (par t en* (3.70)*) les polynômes de q-différence hypergéométriques.*

Démonstration 3.4. *La démonstration du théorème consiste en des calculs directs et une utilisation du théorème 3.3*

Exemple[7]

Polynômes de q-Hahn

Pour q-Hahn, on a

$$a(x) = \alpha(x-1)(x\beta q - q^{-N})/x$$
$$b(x) = (x^2 - xq^{-N} - x\alpha q + q^{-N+1}\alpha)/x$$

et les formules pour $f(x,n)$, $g(x,n)$, $\mu(n)$, $\lambda(n)$ pour la factorisation sont obtenues à partir de celles ci-dessus en remplaçant

$$\sigma_0 = 1/q; \quad \sigma_1 = -(q^{-N} + q^{\alpha})/q; \quad \sigma_2 = q^{-N}\alpha; \tau_0 = (\alpha\beta q^2 - 1)/(q-1)$$
$$\tau_1 = -(\alpha\beta q^2 + q^{-N+1}\alpha - q^{-N} - q\alpha)/(q-1)$$

Polynômes Grand q-Jacobi

Dans le cas de Grand q-Jacobi (voir par exemple [11]), nous avons

$$a(x) = aq(x-1)(bx-c)/x \quad b(x) = (x-aq)(x-cq)/x \tag{3.71}$$

et les formules pour $f(x,n), g(x,n), \mu(n), \lambda(n)$ pour la factorisation sont obtenues à partir de celles ci-dessus en remplaçant

$$\sigma_0 = 1/q \quad \sigma_1 = -(a+c) \quad \sigma_2 = aqc$$
$$\tau_0 = (aq^2 b - 1)/(q-1)$$
$$\tau_1 = (q(a+c) - aq^2(b+c))/(q-1)$$

L'équation aux q-différences du second ordre d'Askey-Wilson.

Ici aussi, nous utilisons la théorie générale du paragraphe 2.2 où nous posons $\beta(x) = qx$.

Considérons l'équation générale aux valeurs propres aux q-différences du second ordre

$$[\sigma(x)D_q^{-1}D_q + \tau(x)D_q]y_n(x) = \lambda(n)y_n(x). \tag{3.72}$$

Comme auparavant, cette équation peut être écrite sous la forme

$$[u(x)E_q + v(x) + w(x)E_q^{-1}]y_n(x) = \lambda(n)y_n(x). \tag{3.73}$$

Aussi nous pouvons réécrire l'équation (3.73) sous la forme

$$\begin{aligned} Ly_n(x) &= [a(x)E_q + b(x) + c(x)E_q^{-1}]y_n(x) \\ &= \lambda(n)\theta(x)y_n(x). \end{aligned} \tag{3.74}$$

Les polynômes d'Askey-Wilson $y_n(x) = \mathcal{P}_n(\chi(x))$ [1] (voir aussi (1.50)) sont solutions de l'équation (3.74)

avec

$$a(x) = \frac{a_{-2}x^{-2} + a_{-1}x^{-1} + a_0 + a_1x + a_2x^2}{qx - x^{-1}}; \tag{3.75}$$

$$c(x) = \frac{a_2x^{-2} + a_1x^{-1} + a_0 + a_{-1}x + a_{-2}x^2}{qx - x^{-1}}, \tag{3.76}$$

$$a_{-2} = 1;\ \ a_{-1} = -(a + b + c + d); \tag{3.77}$$

$$a_0 = ab + ac + ad + bc + bd + cd; \tag{3.78}$$

$$a_1 = (abc + abd + bcd + acd); \tag{3.79}$$

$$a_2 = abcd;\ \ b(x) = -(a(x) + c(x)). \tag{3.80}$$

Cette équation peut également être écrite comme (voir par exemple [3])

$$\mathfrak{L}y_n(x) = \left[\frac{(q-1)^2}{4q}\frac{x^2-1}{x\omega(x)}\mathcal{D}_q\frac{x^2-1}{x}v(q^{-\frac{1}{2}}x)\right]\mathcal{D}_q y_n(x) = \lambda(n)y_n(x), \tag{3.81}$$

où

$$\mathcal{D}_q f(\chi(x)) = \frac{f(\chi(xq^{\frac{1}{2}}) - f(\chi(xq^{-\frac{1}{2}})}{\chi(xq^{\frac{1}{2}} - \chi(xq^{-\frac{1}{2}})}, \tag{3.82}$$

est la dérivée d'Askey-Wilson [1, 13](voir aussi [3]),

$$v(x) = \frac{(1-ax)(1-bx)(1-cx)(1-dx)}{(1-x^2)(1-qx^2)}, \tag{3.83}$$

$$\frac{\omega(qx)}{\omega(x)} = \frac{v(x)}{v((qx)^2)}. \tag{3.84}$$

Théorème 3.5. *Si $a(x)$, $b(x)$ et $c(x)$ sont ceux donnés en (3.75)-(3.80), $\theta(x) = x - x^{-1}$; $\chi(x) = \frac{x+x^{-1}}{2}$, alors*
a) L'opérateur

$$H(x,n) = E_q^2 + (b(qx) - \lambda(n)\theta(qx))E_q + d(qx), \tag{3.85}$$

$d(x) = a(x/q)c(x)$, admet une factorisation du type (3.51) avec

$$f(x;n) = \frac{f_{-2}x^{-1} + f_{-1}x^{-1} + f_0 + f_1 x + f_2 x^2}{qx - x^{-1}}, \tag{3.86}$$

$$g(x;n) = \frac{(f_{-2} - \beta_{-1})x^{-2} + (f_{-1} - \beta_0)x^{-1} + f_0 + (f_1 + \beta_0)x + (f_2 + \beta_1 q)^2}{qx - x^{-1}},$$

où

$$\begin{aligned}
f_{-2}(n) &= \frac{\lambda(n) - q\lambda(n+1}{q^2-1} - \frac{q+a_2}{q^2+q}; f_2(n) = \frac{\lambda(n)q - \lambda(n+1)}{1-q^2}q^2 - \frac{q^2+qa_2}{q+1}; \\
\beta_0(n) &= \frac{1-q}{(\lambda(n)q - \lambda(n+1))q^3}((2\frac{\lambda(n)q-\lambda(n+1)}{1-q^2}q^2 + \frac{\lambda(n+1)-\lambda(n)}{1-q}q^2 \\
& \quad -2\frac{q^2+qa_2}{1+q})(a_1 + qa_{-1}) + (2a^1q^2 + 2a_2a_{-1}q)); \\
& \quad \beta_{-1} = \frac{\lambda(n+1)-\lambda(n)}{1-q}; \beta_1 = q\beta_{-1}, \\
& \quad f_{-1}(n) = \frac{\beta_0(n)}{2} - \frac{a_1+qa_{-1}}{2q}; f_1(n) = \frac{q\beta_0}{2} - \frac{a_1+qa_{-1}}{2}; \\
& \quad f_0(n) = \frac{1}{q+q^2}\left\{q^2 - q^3 - a_0(q+q^2) + a_2(q-1) + q^2(\lambda(n) - \lambda(n+1))\right\},
\end{aligned} \tag{3.87}$$

tandis que

$$\mu(n) = a_0 + a_1 a_{-1} q^2 + a_0 a_2 q^{-2} + f_0(n)\beta_{-1}(n) \\ +f_{-1}(n)\beta_0(n) - 2f_{-2}(n)f_0(n) - f_{-1}^2(n), \tag{3.88}$$

et

$$\lambda(n) = -(1 - tq^{-n})(1 - abcdt^{-1}q^{n-1}), \tag{3.89}$$

où t est un paramètre libre.
b) Les fonctions f et g vérifient la condition (3.55) *avec la fonction $\chi(x) = (x + x^{-1})/2$.*
c) L'équation similaire à (3.47) *ici, admet une suite de solutions polynomiales satisfaisant aux relations de types* (3.53) *et* (3.94)-(3.58)*.*
d) Pour $t = 1$, on obtient $\mu(-1) = \lambda(0) = 0, \tilde{\mu} = \mu$ (et $f(x/q, -1) = -c(x)$, $g(x, -1) = -a(x)$,$\tilde{H} = H, \tilde{L} = L$) et les polynômes en c) sont les polynômes d'Askey-Wilson.
e) Pour $t \neq 1$, on a $\mu(-1) \neq 0, \lambda(0) \neq 0, H \neq \tilde{H}, \tilde{L} \neq L$ ($\tilde{H}, \tilde{L}$ sont obtenu comme auparavant, mais $\mu(-1) = a_0^2 = 0$ (voir (3.52), (2.37)*), et les polynômes en c) sont des polynômes généralisant (par t en* (3.70)*) les polynômes d'Askey-Wilson.*

Démonstration 3.5. *La démonstration du théorème consiste en des calculs directs et une utilisation du théorème 3.3*

3.2 La méthode de factorisation pour la transformation de l'équation hypergéométrique

L'équation hypergéométrique aux différences

Ici, nous utilisons la théorie générale du paragraphe 2.3 où nous posons $\beta(x) = x + 1$.

Les fonctions transformables et de transformation

Les fonctions transformables sont les Meixner $M_n(2, c; x)$, un cas particulier des polynômes généraux de Meixner définis par [6]

$$M_n(2, c; x) = {}_2F_1\left(\begin{matrix} -n & , -x & \\ & b & ; 1 - \dfrac{1}{c} \end{matrix}\right). \tag{3.90}$$

Ils satisfont à l'équation aux différences

$$[u(x)E + v(x) + w(x)E^{-1}]M_n(2, c; x) = (c - 1)nM_n(2, c; x), \tag{3.91}$$

où

$$u(x) = c(x+2); \quad v(x) = -[(c+1)x + 2c]; \quad w(x) = x. \tag{3.92}$$

Ils sont orthogonaux et fermés en $\ell^2(0,\infty;\rho^2)$, avec $\rho^2(x) = c^x(x+1)$.

Les fonctions de transformation sont les fonctions $c^{-x}\hat{M}_n(x)$, fonctions propres du même opérateur que le Meixner $M_n(2,c;x)$, correspondant aux valeurs propres $-(c-1)(n+2)$. Précisément, $\hat{M}_n(x) = M_n(2,c;-x-2)$.

Les fonctions transformées

Les nouvelles fonctions de type rationnel sont $\tilde{\Psi}_{\gamma,0}(x), \tilde{\Psi}_{\gamma,n+1}(x), n,\gamma = 0,1,2,...$

$$\begin{aligned} [c(x+2)E + g(x,\gamma)]\tilde{\Psi}_{\gamma,0}(x) &= 0, \\ \tilde{\Psi}_{\gamma,n+1}(x) &= [1 + f(x,\gamma)E^{-1}]M_n(2,c;x) \end{aligned} \tag{3.93}$$

où

$$f(x,\gamma) = -\frac{\hat{M}_\gamma(x)}{c\hat{M}_\gamma(x-1)}; g(x,\gamma) = v(x) - u(x)f(x+1,\gamma) + (\gamma+2)(c-1).$$

Ils satisfont aux équations aux différences aux valeurs propres du second ordre

$$\begin{aligned} [u(x)E + \tilde{v}(x,\gamma) + \tilde{w}(x,\gamma)E^{-1}]\tilde{\Psi}_{\gamma,0}(x) &= -(c-1)(\gamma+2)\tilde{\Psi}_{\gamma,0}(x), \\ [u(x)E + \tilde{v}(x,\gamma) + \tilde{w}(x,\gamma)E_{-1}]\tilde{\Psi}_{\gamma,n+1}(x) &= -(c-1)(\gamma+2)\tilde{\Psi}_{\gamma,n+1}(x), \\ n,\gamma &= 0,1,2,..., \end{aligned} \tag{3.94}$$

où

$$\begin{aligned} \tilde{v}(x,\gamma) &= v(x) + f(x,\gamma)u(x-1) - u(x)f(x+1,\gamma), \\ \tilde{w}(x,\gamma) &= f(x,\gamma)\frac{w(x-1)}{f(x-1,\gamma)}. \end{aligned} \tag{3.95}$$

D'après le théorème 2.2 et la relation (2.52) ils sont aussi orthogonaux et fermé en $\tilde{\ell}^2(0,\infty;\tilde{\rho}^2)$ avec $\tilde{\rho}^2(x,\gamma) = \rho^2(x)g(x,\gamma)$. Comme ils ont le même dénominateur, ils conduisent clairement à de nouvelles polynômes.

L'équation hypergéométrique aux q-différences

Ici, nous utilisons la théorie générale du paragraphe 2.3 où nous posons $\beta(x) = qx$.

Les fonctions transformables et de transformation

Les fonctions transformables sont les polynômes dits de Petit q-Jacobi $p_n(qx; c, q|q)$, un cas particulier des polynômes généraux dits de Petit q-Jacobi définis par [11]

$$p_n(x; a, b|q) = {}_2\phi_1 \left(\begin{array}{cc|c} q^{-n} & , abq^{n+1} & \\ & aq & q; qx \end{array} \right), 0 < a < q^{-1}; b < q^{-1}. \tag{3.96}$$

Ils satisfont l'équation aux q-différences

$$[u(x)E_x + v(x) + w(x)E_x^{-1}]p_n(qx; c, q|q) = \lambda_n p_n(qx; c, q|q), \tag{3.97}$$

où

$$\begin{aligned} u(x) &= -c(q^3x - 1)/x; w(x) = -(xq - 1)/x \\ v(x) &= -(u(x) + w(x)); \lambda_n = q^{1-n}(1 - q^n)(cq^{2+n} - 1). \end{aligned} \tag{3.98}$$

Ils sont orthogonaux et fermés sur l'intervalle $[q^{-1}, \infty]$ par rapport au poids $\rho^2(x) = c^x(xq^2 - 1)$.
Les fonctions de transformation sont des fonctions propres de la même équation aux valeurs propres

$$[u(x)E_x + v(x) + w(x)E_x^{-1}]z_n(x, q) = \gamma_n(q)z_n(x, q), \tag{3.99}$$

avec

$$\gamma_n = q^{1-n}(q^{2+n} - 1)(c - q^n), \tag{3.100}$$

et se trouvent être

$$z_n(x, q) = c^x y_n(x, q^{-1}); y_n(x, q) = p_n(qx; c, q|q). \tag{3.101}$$

Les fonctions transformées

Pour un m donné, les propriétés des fonctions transformées $\tilde{y}_n(x, m), n = 0, 1, ...$ sont celles décrites dans 2.3.
Ils satisfont les équations aux différences de type (2.49), les relations aux différences et de récurrence de types (2.60)-(2.64). Et puisque les conditions d'orthogonalité du théorème 2.2 sont satisfaites, ils sont orthogonaux et fermés dans l'espace euclidien $\tilde{\ell}_2^2(q^{-1}, \infty; \tilde{\rho}^2)$ où $\tilde{\rho}^2$ est donné par la formule en (2.52).

Conclusion

Dans ce travail, on a introduit une méthode de factorisation des équations hypergéométriques aux β-différences.

L' objectif était de présenter une théorie unifiant deux méthodes de factorisation, l'une pour les équations hypergéométriques aux différences, l'autre pour les équations hypergéométriques aux q-différences, incluant l'équation aux q-différences du second ordre d'Askey-Wilson.

Une question qui est ouverte est celle de l'utilisation de la méthode de factorisation pour la "Transformation" des polynômes d'Askey-Wilson.

Bibliographie

[1] ASKEY R. (1985) Some basic hypergeometric orthogonal polynomials that generalize Jacobi polynomials. Mem. *Amer. Math. Soc.*, 54.

[2] BANGEREZAKO G. (1998) Discrete darboux transformation for discrete polynomials of hypergeometric type. *J.Phys.A: Maths. Gen.31*

[3] BANGEREZAKO G. (1999) The factorization method for the Askey–Wilson polynomials. *Journal of computational and applied mathematics*, 107(2):219–232.

[4] BANGEREZAKO G. (2019) The factorization method for the β-difference hypergeometric equation. *Available at SSRN 3351635.*

[5] BANGEREZAKO G. and HOUNKONNOU M. (2001) The transformation of polynomial eigenfunctions of linear second-order difference operators: a special case of Meixner polynomials. *Journal of Physics A: Mathematical and General, 34(28):5653.*

[6] BANGEREZAKO G. and HOUNKONNOU M. (2002) The transformation of polynomial eigenfunctions of linear second-order q-difference operators: a special case of q-Jacobi polynomials. *In Contemporary Problems In Mathematical Physics,* pages 427–439. World Scientific.

[7] BANGEREZAKO G. and HOUNKONNOU M. (2003) The factorization method for the general second-order q-difference equation and the Laguerre–Hahn polynomials on the general q-lattice. *Journal of Physics A: Mathematical and General,* 36(3):765.

[8] DARBOUX G. (1915) *Théorie des surfaces II*, P.123, Gauthier-Villars.

[9] HAMZA A. E., SARHAN A.-S. M., SHEHATA E. M., and ALDWOAH K. (2015) A. A general quantum difference calculus. *Advances in Difference Equations.*

[10] JACKSON F. (1910) q-Difference equations. *American Journal of Mathematics*, 32(4: 305–314.

[11] KOEKOEK R. and SWARTTOUW R. F. (1996) The askey-scheme of hypergeometric orthogonal polynomials and its q-analogue. *Report of the Technical University Delft, Faculty of Technical Mathematics and Informatics.*

[12] KOORNWINDER T. H. (1994) q-Special functions, a tutorial. *arXiv preprint math/9403216.*

[13] MAGNUS A. P. (1998) Associated Askey-Wilson polynomials as Laguerre-Hahn orthogonal polynomials. *In Orthogonal polynomials and theirapplications,* pages 261–278. Springer.