UNIVERSITÉ DU BURUNDI
GRENIER DU SAVOIR DU BURUNDI
Dépôt institutionnel officiel
https://repository.ub.edu.bi

# Orbites co-adjointes associées aux réalisations concrètes du groupe affine de la droite réelle

**KWIZERA, Dieudonné; Sous la direction de : Dr. NGENDAKUMANA Ancille**

**2024**
UB-ENS
https://repository.ub.edu.bi/handle/123456789/950

Document téléchargé depuis le **Grenier du Savoir du Burundi** — https://repository.ub.edu.bi

**UNIVERSITE DU BURUNDI - ECOLE NORMALE SUPERIEURE**

**Institut de Pédagogie Appliquée**
**Département de Mathématiques**

**Département des Sciences Naturelles**
**Section de Mathématiques**

**MASTER CONJOINT EN DIDACTIQUES DES SCIENCES**

# ORBITES COADJOINTES ASSOCIEES AUX REALISATIONS CONCRETES DU GROUPE AFFINE DE LA DROITE REELLE

**Par**
**KWIZERA Dieudonné**

**Sous la direction de**

**Dr. NGENDAKUMANA Ancille**

.

Mémoire présenté et défendu publiquement

en vue de l'obtention du Diplôme de Master

en **Didactiques des Sciences, Option : Mathématiques**

**Bujumbura, mai 2024**

# Composition du Jury

| | | |
|---|---|---|
| Président | : | Pr. NDAYIRUKIYE Domitien |
| Secrétaire | : | Pr. NIBARUTA Gilbert |
| Membre | : | Pr. NIBIRANTIZA Aboubacar |
| Directeur de Mémoire | : | Dr. NGENDAKUMANA Ancille |

# Dédicaces

*À* Dieu Tout Puissant ;

*À* nos chers parents ;

*À* nos soeurs et frères ;

*À* nos cousins et cousines ;

*À* toute notre famille ;

*À* tous ceux qui nous sont chers ;

Nous dédions ce mémoire.

# Remerciements

Tout d'abord, nous remercions notre créateur, Dieu Tout Puissant pour nous avoir donné la force, la volonté, la patience, l'espoir et le courage pour accomplir ce travail.

Ce travail a bénéficié du soutien de plusieurs personnes qui en ont facilité le bon déroulement à bien des égards. Nous tenons à leur exprimer, à travers ces lignes, notre profonde gratitude.
Nous tenons à exprimer notre reconnaissance à Madame Dr. NGENDAKUMANA Ancille, Directeur et Promoteur de ce mémoire, qui malgré ses multiples occupations s'est donné corps et âme pour guider nos premiers pas dans la recherche. Sa disponibilité, sa patience, son soutien indéfectible, sa rigueur scientifique, sa vivacité, ses précieux conseils et ses remarques pertinentes nous ont permis de réaliser ce travail dans des meilleures conditions. Qu'elle trouve, ici, nos sincères sentiments de reconnaissance.

Nous remercions nos anciens camarades de classe, spécialement Capitaine AHISHAKIYE Willy et Monsieur MUHIRE Paris-Esdras pour les moments que nous avons partagé avec eux.
Nous remercions également Messieurs IRAKOZE Yves, NDIKUMUKIZA Nelson et NDORIYOBIJA Jean Bosco pour les passionnantes discussions de mathématiques, de physique et de la vie que nous avons eues ensemble ainsi que pour toute l'aide qu'ils nous ont apporté tout au long de notre cursus de formation.
Nous tenons à remercier également tous nos enseignants du Département des Sciences Naturelles pour la formation tant humaine que scientifique que nous avons bénéficié au près d'eux.

Un grand merci à tous ceux qui ont participé et contribué, de près ou de loin, à la réalisation de ce mémoire. A tous et à chacun, nous disons sincèrement merci.

KWIZERA Dieudonné

# Résume

Le mémoire intitulé "Orbites coadjointes associées aux réalisations concrètes du groupe affine de la droite réelle" détermine les structures symplectiques correspondant aux réalisations concrètes du groupe affine de la droite réelle en utilisant la méthode des orbites coadjointes. Ces réalisations concrètes sont en réalité quatre groupes de Lie : le groupe d'Aristote, le groupe de Galilée, le groupe de Weyl-Heisenberg et le groupe de Carroll.
Les structures symplectiques obtenues à partir des secondes extensions des groupes de Lie cihaut cités sont des systèmes dynamiques élémentaires dont les équations du mouvement ont été déterminées explicitement.
De plus, les nouveaux paramètres d'extensions donnent lieu à de nouvelles grandeurs dont l'interprétation physique a été précisée dans le travail.

**Mots-clés** : système dynamique élémentaire, réalisation symplectique, représentation adjointe, représentation coadjointe, orbite coadjointe.

# Abstract

The dissertation entitled "Coadjoint orbits associated with coadjoint the concrete achievements of the group affine of the real line" determines the symplectic structures corresponding to the realizations concrete expressions of the affine group of the real line using the orbit method coadjoint. These concrete realizations are in reality four groups of Lie : the group of Aristotle, the Galileo group, the Weyl-Heisenberg group and the Carroll group.
Symplectic structures obtained from second extensions of Lie groups cited above are elementary dynamic systems whose equations of motion were explicitly determined.
In addition, the new extension parameters give rise to new quantities including the physical interpretation was clarified in the work.

Keywords : elementary dynamic system, symplectic realization, representation adjoint, coadjoint representation, coadjoint orbit.

# Table des matières

**composition du jury** i

**Dédicaces** ii

**Remerciements** iii

**Résume** iv

**Abstract** v

**Table des matières** vii

**Liste des sigles et abréviations** viii

**AVANT-PROPOS** ix

**Introduction générale** 1

**1 METHODE DES ORBITES COADJOINTES** 3

1.1 Notions de Variété symplectique . . . . . 3

1.1.1 Définitions . . . . . 3

1.1.2 Exemples de variétés symplectiques . . . . . 3

1.1.3 Propriétés élémentaires . . . . . 4

1.1.4 Théorème de Darboux . . . . . 4

1.2 Méthode des orbites coadjointes . . . . . 5

1.2.1 Représentation adjointe . . . . . 5

1.2.2 Représentation coadjointe . . . . . 7

1.3 Forme de Kirillov . . . . . 9
1.4 Réalisation symplectique sur un groupe de Lie . . . . . 9
1.5 Extension centrale . . . . . 12

**2 REALISATIONS SYMPLECTIQUES ASSOCIEES A LA PREMIERE EXTENSION CENTRALE DU GROUPE AFFINE 13**

2.1 Groupe affine et l'algèbre de Lie associée . . . . . 13
2.2 Groupe et algèbre de Lie étendu . . . . . 14
2.3 Les quatre réalisations concrètes associées aux premières extensions centrales 15
2.3.1 Groupe d'Aristote en une dimension spatiale . . . . . 15
2.3.2 Groupe de Galilée en une dimension spatiale . . . . . 19
2.3.3 Groupe de Weyl-Heisenberg en une dimension spatiale . . . . . 23
2.3.4 Groupe de Carroll en une dimension spatiale . . . . . 26

**3 REALISATIONS SYMPLECTIQUES ASSOCIEES A LA SECONDE EXTENSION CENTRALE DU GROUPE AFFINE 31**

3.1 Introduction . . . . . 31
3.2 Orbite coadjointe associée à la seconde extension du groupe d'Aristote . . . . 32
3.3 Orbite coadjointe associée à la seconde extension du groupe de Galilée . . . . 38
3.4 Orbite coadjointe associée à la seconde extension du groupe de Weyl-Heisenberg 44
3.5 Orbite coadjointe associée à la seconde extension du groupe de Carroll . . . . 49

**Conclusion 55**

# Liste des sigles et abréviations

| | | |
|---|---|---|
| $G$ | : | Groupe de Lie |
| $\mathcal{G}$ | : | Algèbre de Lie |
| $\mathcal{G}^*$ | : | Algèbre de Lie duale |
| $eG$ | : | L'élément neutre du groupe |
| $T_xM$ | : | Espace vectoriel tangent à M en $x$ |
| $(M,\omega)$ | : | Variété symplectique, $\omega$ étant une 2-forme symplectique |
| $L_g$ | : | La translation à gauche |
| $R_g$ | : | La translation à droite |
| $Ad_g$ | : | La représentation adjointe du groupe de Lie $G$ sur son algèbre de Lie |
| $Ad_g^*$ | : | la représentation coadjointe du groupe de Lie $G$ sur l'algèbre de Lie duale |
| $O_G$ | : | L'orbite adjointe du groupe de Lie $G$ |
| $O_G^*$ | : | L'orbite coadjointe du groupe de Lie $G$ |
| $\hat{G}$ | : | Groupe de Lie étendu |
| $\hat{\mathcal{G}}$ | : | Algèbre de Lie étendue |
| B-C-H | : | Baker-Campbell-Hausdorff |
| GA | : | Groupe affine |

# AVANT-PROPOS

L'idée de ce mémoire nous a permis d'obtenir les types de réalisations symplectiques associées au groupe affine de la droite réelle par la méthode des orbites coadjointes.
Le sujet traité se trouve à cheval entre les mathématiques et la physique à travers le lien étroit entre la géométrie symplectique et la mécanique classique.
Notre travail intitulé "Orbites coadjointes associées aux réalisations concrètes du groupe affine de la droite réelle" construit les structures symplectiques ( orbites coadjointes maximales) correspondant aux quatre réalisations concrètes (le groupe d'Aristote, le groupe de Galilée, le groupe de Weyl-Heisenberg et le groupe de Carroll.) du groupe affine de la droite réelle.
A partir des premières extensions centrales des réalisations concrètes ci-haut évoquées, nous avons obtenus quatre types de variétés symplectiques de dimension 2 localement isomorphe à $\mathbb{R}^2$ et les orbites coadjointes obtenues à partir des secondes extensions des groupes de Lie correspondent à quatre types de systèmes dynamiques élémentaires dont les équations du mouvement ont été déterminées ainsi que leurs intégrales premières.
L'analyse dimensionnelle des nouveaux paramètres d'extension a été effectuée et des constantes physiques ont été associées à chaque cas de réalisations concrètes du groupe affine de la droite réelle.

# Introduction générale

Ce mémoire s'inscrit dans le cadre de la géométrie symplectique, c'est-à-dire celle qui étudie des variétés de Poisson particulières munies d'une 2-forme symplectique. La géométrie symplectique étant le cadre géométrique de la mécanique classique, il a été démontré dans [1, 2] que les orbites de l'action coadjointe des groupes de Lie qui sont des variétés symplectiques correspondent à des systèmes dynamiques élémentaires dont ces groupes de Lie sont des groupes de symétrie.

Lorsque ces groupes de Lie sont de plus des groupes de Lie cinématiques tels que les groupes d'Aristote, de Galilée, de Weyl-Heisenberg, de Carroll, etc..., leurs extensions (centrales ou non centrales) permettent de construire des structures symplectiques généralisées. Aux nouveaux paramètres d'extension correspondent des grandeurs dont les dimensions physiques sont déterminées à travers l'analyse dimensionnelle. Plusieurs travaux ont été réalisés dans ce cadre et des structures symplectiques généralisées ont été construites par différents auteurs [1–4].

Notre travail intitulé : "Orbites coadjointes associées aux réalisations concrètes du groupe affine de la droite réelle" part du groupe affine de la droite réelle qui est un groupe purement abstrait et construit les orbites coadjointes des réalisations concrètes associées à ce groupe de Lie.

Ces quatre réalisations concrètes sont explicitement :

1. le groupe d'Aristote lorsque les paramètres du groupe considérés sont le paramètre spatial et le paramètre temporel ;
2. le groupe de Galilée lorsqu'on a considéré le paramètre temporel et le paramètre associé aux boosts comme paramètres du groupe ;
3. le groupe de Weyl-Heisenberg lorsqu'on a considéré le paramètre spatial et le paramètre associé aux boosts comme paramètres du groupe ;
4. le groupe de Carroll lorsqu'on a considéré le paramètre spatial et le spin comme paramètres du groupe.

Ce sujet nous a intéressé pour plus d'une raison :

— La première raison est que le sujet traité se trouve à cheval entre les mathématiques et la physique à travers le lien étroit entre la géométrie symplectique et la mécanique classique.
— Une autre raison est que les réalisations symplectiques du groupe affine n'avaient pas encore été déterminées jusqu'ici.

L'objectif principal du travail est de déterminer les types de réalisations symplectiques associées au groupe affine par la méthode des orbites coadjointes.
Avec la méthode des orbites coadjointes, nous avons obtenu quatre types de réalisations symplectiques associées au groupe affine de la droite réelle.

En effet, les premières extensions centrales des réalisations concrètes du groupe affine de la droite réelle nous ont permis d'obtenir des variétés symplectiques de dimension 2 localement isomorphes à $\mathbb{R}^2$.
De plus, la seconde extension centrale du groupe d' Aristote a permis d'obtenir une orbite coadjointe dont les coordonnées correspondent à la décélération $s$ et à une force $f$.
Les nouveaux paramètres d'extension ont permis d'obtenir une énergie $h$ et un moment linéaire $y$ comme grandeurs physiques.
De même, pour le cas du groupe de Galilée, la seconde extension a permis d'obtenir une orbite coadjointe dont les coordonnées $p$ et $q$ correspondent à un moment linéaire et à une position respectivement.
Les nouveaux paramètres d'extension ont permis d'obtenir, une masse $m$ et une force $f$ comme grandeurs physiques.
Ensuite, pour le cas du groupe de Weyl-Heisenberg, la seconde extension a permis d'obtenir une orbite coadjointe dont les coordonnées correspondent à la période $\xi$ et à une masse $m$.
Les nouveaux paramètres d'extension ont permis d'obtenir un moment linéaire $\alpha$ et un moment statique $\lambda$ comme grandeurs physiques.
En fin, pour le cas du groupe de Carroll, la seconde extension a permis d'obtenir une orbite coadjointe dont les coordonnées correspondent à une durée $t$ et une énergie $e$.
Les nouveaux paramètres d'extension ont permis d'obtenir un moment linéaire $p'$ et une force $f$ comme grandeurs physiques.

Le travail s'articule sur trois chapitres. Le premier chapitre introduit quelques notions élémentaires qui permettent de comprendre la suite du travail. Il s'agit principalement des notions sur les variétés symplectiques, la représentation adjointe et coadjointe d'un groupe de Lie sur son algèbre de Lie et sur l'algèbre de Lie duale respectivement, la forme de Kirillov, la réalisation symplectique sur un groupe de Lie, l'extension centrale d'une algèbre de Lie et du groupe de Lie associée.
Ce chapitre élucide également de façon détaillée les différentes étapes de la méthode des orbites coadjointes qui est utilisée dans les deux autres chapitres du travail.

Le deuxième chapitre utilise la méthode des orbite coadjointes développée dans le premier chapitre, et construit de façon détaillée les réalisations symplectiques des premières extensions centrales des groupes d'Aristote, de Galilée, de Weyl-Heisenberg et de Carroll.
Rappelons que ces quatre groupes de Lie constituent les réalisations concrètes du groupe affine de la droite réelle.

Dans le troisième et dernier chapitre du travail, les secondes extensions centrales des groupes ci-haut cités sont déterminés et ont permis, par la méthode des orbites coadjointes, d'obtenir des systèmes dynamiques élémentaires dont les équations du mouvement ont été intégrées.

Une conclusion générale est donnée à la fin du travail et reprend les principaux résultats ainsi que quelques perspectives.

# Chapitre 1

# METHODE DES ORBITES COADJOINTES

Dans ce travail, nous avons supposé connues certaines notions de géométrie différentielle, de groupes et d'algèbres de Lie ainsi que celles liées aux actions de groupes sur un ensemble quelconque.

Le lecteur soucieux d'en approfondir ces notions pourra consulter les ouvrages généraux tels que [5], [6], [7]. Cependant, comme la méthode des orbites coadjointes a été utilisée pour la construction des systèmes dynamiques élémentaires dans ce travail, il a été nécessaire de développer cette méthode dans ce chapitre.
De plus, étant donné que les orbites de l'action coadjointe d'un groupe de Lie sur le dual de son algèbre de Lie fournissent un des exemples importants d'une variété symplectique, le chapitre développe en premier lieu les notions relatives aux variétés symplectiques et introduit la méthode des orbites coadjointes.

## 1.1 Notions de Variété symplectique

### 1.1.1 Définitions

**Définition 1** *Une forme symplectique sur une variété différentiable M [5] est une 2- forme différentielle* $\omega$ *fermée (c'est-à-dire vérifiant* $d\omega = 0$*) et partout non dégénérée (c'est-à-dire partout de rang égal à la dimension de M).*

**Définition 2** *Une variété différentiable M munie d'une 2- forme symplectique* $\omega$ *est appelée variété symplectique et est notée* $(M, \omega)$.

### 1.1.2 Exemples de variétés symplectiques

1. Si $V$ est une variété, considérons l'espace total de son fibré cotangent avec la projection $\alpha : T^\star V \to V$. La 2-forme différentielle $\omega = d\alpha$ est non dégénérée et est fermée.

Si$(p_1,\ldots,p_n)$ sont les moments linéaires et $(q^1,\ldots,q^n)$ sont les coordonnées généralisées alors $(p_1,\ldots,p_n;q^1,\ldots,q^n)$ est un système de coordonnées locales dans lequel $\alpha=\sum_{i=1}^n p_i dq^i$ et $\omega=\sum_{i=1}^n dp_i\wedge dq^i$. On dit souvent que $\omega$ est la forme symplectique canonique sur le fibré cotangent.

2. $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ avec la forme constante $\sum dp_i\wedge dq^i$ où $\quad i=1,\ldots,n$ est une variété symplectique .
3. L'espace $\mathcal{D}_n$ des droites orientées de $\mathbb{R}^{n+1}$ est une variété symplectique de dimension $2n$.

### 1.1.3 Propriétés élémentaires

1. Soit $(M,\omega)$ une variété symplectique. Pour tout point $x$ de $M$, l'espace vectoriel tangent en $x$ noté $T_xM$, muni de la forme bilinéaire $\omega(x)$, est un espace vectoriel symplectique.
2. L'espace $\mathbb{R}^{2n}$ muni de la 2-forme

$$\Omega=\sum_{i=1}^{n} dx^{n+i}\wedge dx^i,$$

dans le système de coordonnées $(x^1,\ldots,x^{2n})$ est une variété symplectique.
3. Plus généralement, un espace vectoriel symplectique $(V,\omega)$ peut être considéré comme une variété symplectique, $\omega$ étant considérée comme une 2-forme différentielle sur $V$. En effet, à toute base de $V$ correspond une carte, dans laquelle $\omega$ a des composantes constantes, ce qui prouve que $d\omega=0$.
4. Soit $(M,\omega)$ une variété symplectique de dimension 2n. La 2n-forme $\omega^n$ est une forme élément de volume sur $M$. Par suite, $M$ est orientable.
5. Sur une variété différentiable de dimension 2, toute 2-forme différentielle est automatiquement fermée. Par suite, toute variété différentiable de dimension 2 orientable peut être munie d'une structure symplectique.
6. Soient $(M_1,\omega_1)$ et $(M_2,\omega_2)$ deux variétés symplectiques. On note $p_1:M_1\times M_2\to M_1$ et $p_2:M_1\times M_2\to M_2$ les projections de $M_1\times M_2$ sur ses deux facteurs. Les 2-formes $p_1^*\omega_1+p_2^*\omega_2$ et $p_1^*\omega_1-p_2^*\omega_2$ sur la variété produit $M_1\times M_2$, sont toutes deux des 2-formes symplectiques, qu'on notera simplement $\omega_1+\omega_2$ et $\omega_1-\omega_2$ , pour alléger l'écriture [5].

### 1.1.4 Théorème de Darboux

**Théorème 1** *Soit $\omega$ une 2- forme symplectique définie sur un ouvert $U$ de $\mathbb{R}^{2n}$ et soit $x$ un point de $U$. Il existe un système de coordonnées locales $(p_i,q^i)$ défini au voisinage du point $x$ tel que sur cet ouvert,*

$$\omega=\sum_{i=1}^{n} dp_i\wedge dq^i$$

*avec $p=(p_1,\ldots\ldots,p_n)$ et $q=(q^1,\ldots\ldots,q^n)$.*
*$\omega$ est la 2- forme symplectique standard sur $\mathbb{R}^{2n}$.*
*De façon générale, les variétés symplectiques $(M,\omega)$ de dimension $2n$ sont localement isomorphes à $\mathbb{R}^{2n}$ muni de sa 2- forme symplectique standard [5].*

## 1.2 Méthode des orbites coadjointes

Historiquement, la méthode des orbites coadjointes a été proposée par A.A.Kirillov [8] pour la description du dual unitaire de groupes de Lie nilpotents. Il s'est avéré que la méthode résout non seulement ce problème mais donne également des solutions simples et visuelles à tous les autres principales questions de théorie des représentations : structure topologique du dual unitaire, la description explicite des fonctions de restriction et d'induction, les formules pour les caractères généralisés et infinitésimaux, la mesure du calcul de Plancherel,... [9].

La théorie a été étendue plus tard au cas des groupes solubles dans les travaux de B.Kostant [10] et a également ouvert la voie à la quantification naturelle [1]. De plus, alors que l'idée selon laquelle la symétrie déterminerait le système qui le porte [11], c'est Souriau [1] qui a mis la méthode des orbites coadjointes sous une forme précise. Son théorème important dit que lorsqu'un groupe de symétrie $G$ agit de manière transitive sur l'espace des phases, alors ce dernier est une orbite coadjointe de $G$ sur le dual de son algèbre de Lie dotée de sa structure symplectique canonique (Kirillov-Kostant-Souriau).

Comme les orbites de la représentation coadjointe constituent l'ingrédient principal de la méthode des orbites coadjointes, il s'avère important de développer les notions relatives à la représentation adjointe d'un groupe de Lie sur son algèbre de Lie d'une part, et à la représentation coadjointe d'un groupe de Lie sur le dual de son algèbre de Lie d'autre part.
De plus, les notions de 2-forme de Kirillov et de réalisation symplectique seront définies de façon détaillée dans cette section.

### 1.2.1 Représentation adjointe

Soit $G$ un groupe de Lie et $g$ un élément de $G$. Le groupe de Lie $G$ opère sur lui-même par une translation à gauche

$$L_g : G \to G; h \mapsto gh$$

et une translation à droite

$$R_g : G \to G; h \mapsto hg$$

Par l'associativité de la loi du groupe, on a :

$$\begin{aligned} L_g L_h &= L_{gh} \\ R_g L_h &= R_{hg} \\ L_{g^{-1}} &= L_g^{-1} \\ R_{g^{-1}} &= R_g^{-1}. \end{aligned}$$

En utilisant les relations de commutation entre $L_g$ et $R_g$ ci-haut définies, considérons l'automorphisme intérieur du groupe $G$ sur lui-même (ou conjugaison).

$$R_g^{-1} L_g : G \to G, h \mapsto g\ h\ g^{-1} \tag{1.1}$$

L'élément neutre $eG$ du groupe $G$ reste fixe

$$R_g^{-1} L_g(eG) = g\ eG\ g^{-1} = eG \tag{1.2}$$

Nous pouvons définir la dérivée de $R_g^{-1}L_g$ en fonction de $eG$, c'est-à-dire l'application induite sur les espaces tangents comme suit :

$$Ad_g : \mathcal{G} \to \mathcal{G}, \xi \mapsto \frac{d}{dt} R_g^{-1} L_g(exp^{t\xi})|_{t=0} \tag{1.3}$$

où $\mathcal{G} \equiv T_{eG}G$ est l'algèbre de Lie du groupe $G$, c'est l'espace tangent à $G$ en son unité $eG$. Cette définition a bien un sens car $R_g^{-1}L_g(exp^{t\xi})$ est une courbe dans $G$ et passe par l'identité en $t = 0$ ; alors l'élément $g\ \xi\ g^{-1} \in \mathcal{G}$ [2].

**Proposition 1** *Pour tout élément $\xi \in \mathcal{G}$ , on a*

$$Ad_g(\xi) = g\ \xi\ g^{-1}, g \in G. \tag{1.4}$$

En effet,
De (1.3), ona :

$$Ad_g(\xi) = \frac{d}{dt} R_g^{-1} L_g(exp^{t\xi})|_{t=0}.$$

En utilisant (1.2), on a :

$$\begin{aligned}
Ad_g(\xi) &= \frac{d}{dt}\ g\ exp^{t\xi}\ g^{-1}|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}\ g\ (\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n\ \xi^n}{n!})\ g^{-1}|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}\ g\ \xi^n\ g^{-1})|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \underbrace{g\ \xi\ g^{-1}\ g\ \xi\ g^{-1}\ g\ \xi\ g^{-1} \dots\ g\ \xi\ g^{-1}}_{n-fois}|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} (g\ \xi\ g^{-1})^n|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt} exp^{t(g\ \xi\ g^{-1})}|_{t=0} \\
&= g\ \xi\ g^{-1}.
\end{aligned}$$

□

Nous vérifions aussi que

$$Ad_{gh} = Ad_g \cdot Ad_h$$

En effet :

$$Ad_{gh}(\xi) = gh\ \xi\ (gh)^{-1}$$

$$Ad_{gh}(\xi) = gh\ \xi\ h^{-1}g^{-1} \tag{1.5}$$

puis

$$Ad_g \cdot Ad_h(\xi) = Ad_g(h\ \xi\ h^{-1})$$

$$Ad_g \cdot Ad_h(\xi) = gh\ \xi\ h^{-1}g^{-1} \tag{1.6}$$

En égalisant les équations (1.5) et (1.6) , nous obtenons :

$$Ad_{gh}(\xi) = Ad_g \cdot Ad_h(\xi). \qquad \square$$

**Définition 3** *L'application*

$$Ad_g : G \to G, \xi \mapsto \frac{d}{dt} R_g^{-1} L_g(exp^{t\xi})|_{t=0} = g\ \xi\ g^{-1}, g \in G.$$

*s'appelle la représentation adjointe (ou action adjointe) du groupe G sur son algèbre de Lie* $\mathcal{G}$ *[2].*

**Définition 4** *Une orbite adjointe de* $\xi$ *sous l'action de la représentation adjointe du groupe G sur son algèbre de Lie* $\mathcal{G}$ *[2] est définie par :*

$$O_G(\xi) = \{Ad_g(\xi) : g \in G\} \subset \mathcal{G}.$$

### 1.2.2 Représentation coadjointe

Un groupe de Lie agit sur le dual $\mathcal{G}^*$ de son algèbre de Lie $\mathcal{G}$.

**Proposition 2** *L'application* $Ad_g$ *est un homéomorphisme d'algèbres de Lie, c'est-à-dire*

$$Ad_g[\xi, \eta] = [Ad_g\xi, Ad_g\eta], (\xi, \eta \in \mathcal{G}).$$

En effet,

$$\begin{aligned} Ad_g[\xi, \eta] &= Ad_g(\xi\eta - \eta\xi) \\ &= g\ (\xi\eta - \eta\xi)\ g^{-1} \\ &= g\ \xi\eta\ g^{-1} - g\ \eta\xi\ g^{-1} \\ &= g\ \xi\ g^{-1} g\ \eta\ g^{-1} - g\ \eta\ g^{-1} g\ \xi\ g^{-1} \\ &= [g\ \xi\ g^{-1}, g\ \eta\ g^{-1}] \\ &= [Ad_g\xi, Ad_g\eta]. \end{aligned} \qquad \square$$

Considérons maintenant la fonction

$$Ad : G \to End(\mathcal{G}), g \mapsto Ad(g) = Ad_g$$

où $End(\mathcal{G})$ est l'espace des opérateurs linéaires sur l'algèbre $\mathcal{G}$.
L'application $Ad$ est différentiable et sa dérivée $Ad_{*eG}$ en l'unité du groupe $G$ est une application linéaire de l'algèbre $T_{eG}G \equiv \mathcal{G}$ dans l'espace vectoriel $T_{eG}End(\mathcal{G}) \equiv End(\mathcal{G})$.
Cette application est notée par :

$$ad \equiv Ad_{*eG} : \mathcal{G} \to End(\mathcal{G}); \xi \mapsto ad_\xi = \frac{d}{dt} Ad_{g(t)}|_{t=0}, \tag{1.7}$$

où $g(t)$ est un groupe à un paramètre tel que : $\frac{d}{dt} g(t)|_{t=0} = \xi$ et $g(0) = eG$.

**Proposition 3** *Soit $\xi \in \mathcal{G}$ et $\eta \in End(\mathcal{G})$. En posant $ad_\xi = Ad_{*eG}(\xi)$ ; alors*

$$ad_\xi(\eta) = [\xi, \eta].$$

En effet,
D'après (1.7), on a

$$\begin{aligned} ad_\xi(\eta) &= Ad_{*eG}(\xi)(\eta) \\ &= \frac{d}{dt} Ad_{g(t)}\eta|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}(g(t)\ \eta\ g^{-1}(t))|_{t=0} \\ &= \dot{g}(t)\ \eta\ g^{-1}(t)|_{t=0} - g(t)\ \eta\ g^{-1}(t)\ \dot{g}(t)\ g^{-1}(t)|_{t=0} \\ &= \dot{g}(t)\ \eta\ g^{-1}(t)|_{t=0} - \eta\ \dot{g}(t)\ g^{-1}(t)|_{t=0} \\ &= \dot{g}(0)\ \eta - \eta\ \dot{g}(0) \\ &= \xi\eta - \eta\xi \\ &= [\xi, \eta]. \end{aligned}$$

□

Soit $T_g^*G$, l'espace cotangent au groupe de Lie $G$ en $g$ qui est le dual de l'espace tangent $T_gG$ ; un élément $\rho \in T_g^*G$ est une forme linéaire sur $T_gG$ et sa valeur sur $\eta \in T_gG$ sera désignée par la dualité

$$\rho(\eta) = < \rho, \eta > \tag{1.8}$$

Plus particulièrement, soit $\mathcal{G}^* \equiv T_{eG}^*G$, l'espace vectoriel dual de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ ; c'est l'espace cotangent au groupe $G$ en son unité $eG$.

**Définition 5** *L'opérateur dual $Ad_g^* : \mathcal{G}^* \to \mathcal{G}^*$, de $ad_g$ est défini par*

$$< Ad_g^*(\rho), \eta > = < \rho, Ad_g\eta >, \rho \in \mathcal{G}^*, \eta \in \mathcal{G}. \tag{1.9}$$

*$Ad_g^*$ s'appelle représentation coadjointe (ou action coadjointe) du groupe de Lie $G$ sur le dual de son algèbre de Lie $\mathcal{G}$ [2].*

Ainsi, comme nous avons défini la représentation adjointe de $\mathcal{G}$ à partir de la représentation adjointe de $G$, nous pouvons définir la représentation coadjointe de $G$ sur le dual de l'algèbre de Lie par :
$Ad^* : \mathcal{G} \to L(\mathcal{G}^*), ad_x^* = \frac{d}{dt} ad^*_{exp(tx)} n$ avec $t = 0$

$$ad_x^* = -(ad_x)^*(n), x \in \mathcal{G}, n \in \mathcal{G}^*$$

La représentation $ad^*$ est en fait un objet purement algébrique sur $\mathcal{G}$.

**Définition 6** *L'orbite coadjointe (appelée aussi orbite de Kostant-Kirillov-Souriau) au point $x \in \mathcal{G}^*$ [2] est définie par :*

$$O_G^*(x) = \left\{ Ad_g^*(x) : g \in G, x \in \mathcal{G}^* \right\} \subset \mathcal{G}^*.$$

## 1.3 Forme de Kirillov

Soient $G$ un groupe de Lie, $\mathcal{G}$ son algèbre de Lie et $\mathcal{G}^*$ l'algèbre de Lie duale de $\mathcal{G}$.
Supposons que l'algèbre de Lie est définie à partir des constantes de structures $C_{ij}^k$ et que la variété différentiable $M$ à utiliser a la même dimension que celle de $G$ qui est en même temps un espace vectoriel d'élément $x = x_i d^i$ (convention de sommation d'Einstein) dans une base $d^i$ de $M$.
Posons

$$K_{ij}(x) = -x_k C_{ij}^k \tag{1.10}$$

Si le crochet de Poisson vérifie les propriétés de linéarité, l'identité de Jacobi et l'antisymétrie ainsi que la règle de Leibniz, ce crochet sera appelé crochet de Lie- Poisson. Si l'on identifie $M$ au dual $\mathcal{G}^*$ de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ alors les $K_{ij}(x)$ sont les composantes d'une 2-forme appelée forme de Kirillov définie sur $\mathcal{G}^*$ [9].

Partons d'un groupe de Lie $G$, l'algèbre de Lie duale de l'algèbre de Lie du groupe de Lie $G$ est une structure dite de Lie-Poisson (sous le crochet de Poisson) qui constitue l'un des plus importants exemples de structure de Poisson pour son rôle joué dans la géométrisation de la mécanique que ce soit classique ou quantique.
Soit

$$\sigma(x) = K(x)/_{O(x)} \tag{1.11}$$

la restriction de la forme de Kirillov à l'orbite $O_G^*(x)$.
$\sigma(x)$ est $Ad_g^*$ invariant et $O_G^*(x)$ munie de cette 2-forme $\sigma$ définie par :

$$\sigma_{ab}(x)\sigma^{bc}(x) = \delta_a^c \tag{1.12}$$

où $\sigma_{ab}$ et $\sigma^{bc}$ sont inverses et où $\delta_a^c$ est le symbole de Kronecker, est une variété symplectique [9].

En conclusion, toute orbite de la représentation coadjointe d'un groupe de Lie $G$ sur le dual $\mathcal{G}^*$ de son algèbre de Lie muni de l'inverse de la restriction de la forme de Kirillov à l'orbite est une variété symplectique dont la dimension est égale au rang (pair) de la forme de Kirillov. La structure symplectique est une structure de Poisson particulière. En particulier, l'algèbre de Lie dual $(\mathcal{G}^*, K(x))$ est une variété de Poisson où $K(x)$ est la forme de Kirillov.

## 1.4 Réalisation symplectique sur un groupe de Lie

Soit $G$ un groupe de Lie et $\mathcal{G}$ son algèbre de Lie. Soit $Ad : G \to Aut(\mathcal{G})$ la représentation adjointe de $G$ sur son algèbre de Lie $\mathcal{G}$ telle que l'automorphisme $Ad_g$ associé à $g \in G$ est défini par la relation (1.1).
Si $\mathcal{G}^*$est le dual de $\mathcal{G}$, il est bien connu que l'action coadjointe de $G$ sur $\mathcal{G}^*$
$Ad^* : \mathcal{G}^* \times \mathcal{G} \to \mathbb{R}$ est défini dans (1.9) comme le dual de l'application $Ad$.

Nous savons que $\{H, f\} =< x, [\nabla H(x), \nabla f(x)] >$ exprime une dualité entre $\mathcal{G}^*$ et $\mathcal{G}$ avec $x \in \mathcal{G}^*$ et $[\nabla H(x), \nabla f(x)] \in \mathcal{G}$,

alors pour un élément donné $\alpha \in \mathcal{G}^*$, les orbites coadjointes passant par $\alpha$ sont obtenues comme les images de l'application :

$$g \to Ad^*{}_g$$

où la notation habituelle est

$$O_\alpha = \{Ad^*_g \alpha, \alpha \in \mathcal{G}^*\},\ g \in G.$$

Dans la suite du travail, nous allons privilégier cette nouvelle notation de l'orbite coadjointe $O_\alpha$ au lieu de $O^*_G(\alpha)$ où $\alpha \in \mathcal{G}^*$.

Considérons maintenant la dérivée (push-forward) de $Ad^*$. Cela peut être défini comme le dual de la dérivée de $Ad$. Il est normalement noté $ad$ et il définit une application :

$$(Ad_g)_* \equiv ad_x : \mathcal{G} \to \mathcal{G}$$

tel que

$$ad_X Y = [X, Y]$$

où $X$ désigne l'élément d'algèbre de Lie correspondant à $g \in G$. De même, nous définissons $ad^*$ comme la dérivée de l'application $Ad^*$, c'est à dire :

$$(Ad^*_g)_* = ad^*_X$$

tel que :

$$< ad^*_X(\alpha), Y > = < \alpha, [X, Y] > .$$

Si $\alpha = \alpha^i\ \zeta^i \in \mathcal{G}^*$, $X = d_i\ x_i$, $Y = d_j\ Y_j \in \mathcal{G}$ alors

$$< ad^*_X(\alpha), Y > = K_{ij}(\alpha)\ x^i\ Y^j$$

où $K_{ij}(\alpha)$ est de la forme (1.10), la 2-forme de Kirillov [12] sur $\mathcal{G}^*$.

La représentation $\rho : \mathcal{G} \to \mathcal{F}(\mathcal{G}^*)$ de $\mathcal{G}$ sur l'espace des champs vectoriels sur $\mathcal{G}^*$ défini par

$$\rho(X_i) = K_{ij}(\alpha)\ \frac{\partial}{\partial \alpha_j}$$

est un homomorphisme d'algèbre de Lie tel que

$$Ker(K(\alpha)) = \{f \in C^\infty(\mathcal{G}^*, \Re) : \rho(X) f = 0, X \in \mathcal{G}\}.$$

Cela signifie que $Ker(K(\alpha))$ est l'ensemble de tous les invariants $f$ de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{G}^*$satisfaisant la relation suivante :

$$K_{ij}(\alpha)\ \frac{\partial}{\partial \alpha_j} = 0 \tag{1.13}$$

L'espace quotient

$$O_\alpha = \mathcal{G}^* / \ Ker(K(\alpha))$$

appelé l'orbite coadjointe de $G$ dans $\mathcal{G}^*$, une variété symplectique [13] dont la forme symplectique $\sigma^{ij}$ est obtenue à partir de

$$\Omega_{ij}\ \sigma^{jk} = \delta_i^k$$

où $\Omega_{ij} = K_{ij}/O_\alpha$ , c'est-à-dire la restriction de la forme de Kirillov à l'orbite. Explicitement, la forme bisymplectique est donnée par la relation suivante :

$$\sigma = (\Omega^{-1})^{ab} dx_b \wedge dx_a \tag{1.14}$$

qui prend la forme $\sigma = dp_i \wedge dq^i$ dans les coordonnées de Darboux. Le fait que $\alpha$ est arbitraire signifie que l'on peut choisir les invariants sous l'action de $G$ pour étiqueter l'orbite [3].

Soit maintenant $(M,\sigma)$ une variété symplectique et soit $G$ un groupe de Lie.
L'application $D : G \to Aut(M)$ est un symplectomorphisme si

$$D_g^* \sigma = \sigma \tag{1.15}$$

On l'appelle aussi réalisation symplectique de G sur $(M,\sigma)$.

**Proposition 4** *Si $X$ est un élément de $\mathcal{G}$ et si $D_{exp(tX)}$ est un symplectomorphisme de $(M,\sigma)$, alors $X$ est un champ vectoriel localement hamiltonien.*

En fait, le fait que $D_{exp(tX)}$ est un symplectomorphisme de $(M,\sigma)$, signifie que

$$D^*_{exp(tX)} \sigma = \sigma \tag{1.16}$$

Il s'ensuit que $L_X \sigma = 0$ où $L_X \sigma$ est la dérivée de Lie de vecteurs d'une k-forme différentielle $\sigma$ par rapport à $X$ donc $i_X(\sigma)$ est fermé où $i_X(\sigma)$ est le produit intérieur d'une k-forme différentielle $\sigma$ par un champ de vecteurs $X$, ce qui signifie effectivement que $X$ est localement hamiltonien. Comme un champ vectoriel hamiltonien est localement Hamiltonien, on peut conclure qu'à un champ vectoriel hamiltonien correspond un réalisation symplectique [3].

## Remarques

1. Soient $(M_1,\sigma_1)$ et$(M_2,\sigma_2)$ deux variétés symplectiques de même dimension et $\varphi : M_1 \to M_2$ une application différentielle.
   — On dit que $\varphi$ est un symplectomorphisme local [5] si

   $$\varphi^* \sigma_2 = \sigma_1.$$

   — on dit que $\varphi$ est un symplectomorphisme si c'est à la fois un symplectomorphisme local et un difféomorphisme.

En particulier, un symplectomorphisme local est un difféomorphisme local.
En effet, si $\varphi : M_1 \to M_2$ est un symplectomorphisme local, on a

$$\varphi^* \sigma_2 = \sigma_1$$

donc aussi

$$\varphi^*(\sigma_2^n) = (\sigma_1)^n$$

Comme $\sigma_2^n$ et $\sigma_1^n$ sont des formes éléments de volume, respectivement sur $M_2$ et $M_1$, cela prouve que $\varphi$ est de rang $2n$ en tout point de $M_1$, donc est un difféomorphisme local.

2. Si $\varphi : M_1 \to M_2$ est un symplectomorphisme, son inverse $\varphi^{-1} : M_2 \to M_1$ est aussi un symplectomorphisme.
3. Un élément général d'un groupe de Lie à un paramètre généré par $x$ prend la forme $exp(xX)$. Cela signifie que $xX$ doit être sans dimension puisque la dimension physique du paramètre $x$ doit être l'inverse de celle de $X$.

## 1.5 Extension centrale

Soit $\mathcal{G}$ l'algèbre de Lie définie par les constantes de structure

$$[X_i, Y_j] = C_{ij}{}^k \, X_k$$

avec $C_{ij}{}^k = -C_{ji}{}^k$.

De l'identité de Jacobi du crochet de Lie, on a :

$$\begin{aligned}
[[X_i,X_j],X_k] + [[X_j,X_k],X_i] + [[X_k,X_i],X_j] &= 0 \\
[C_{ij}^l \, X_l, X_k] + [C_{jk}^l \, X_l, X_i] + [C_{ki}^l \, X_l, X_j] &= 0 \\
C_{ij}^l \, [X_l, X_k] + C_{jk}^l \, [X_l, X_i] + C_{ki}^l \, [X_l, X_j] &= 0 \\
C_{ij}^l \, C_{lk}^m \, X_m + C_{jk}^l \, C_{li}^m \text{`} X_m + C_{ki}^l \, C_{lj}^m \, X_m &= 0 \\
(C_{ij}^l \, C_{lk}^m + C_{jk}^l \, C_{li}^m + C_{ki}^l \, C_{lj}^m) X_m &= 0 \\
C_{ij}^l \, C_{lk}^m + C_{jk}^l \, C_{li}^m + C_{ki}^l \, C_{lj}^m &= 0
\end{aligned}$$

Une extension centrale $A$ de $\mathcal{G}$ est une algèbre de Lie engendrée par les générateurs $X_i$ de $\mathcal{G}$ et de nouveaux générateurs $Y$.
Si $Y_j$ commutent avec tous les $X_i$ c'est-à-dire $[Y_j, X_i] = 0$ pour tous $i, j$, on dit que $A$ est une extension abélienne de $\mathcal{G}$.
Si $Y_j$ génère le centre de $\mathcal{G}$, on dira que $A$ est une extension centrale de $\mathcal{G}$.

Dans ce chapitre, nous venons de définir les notions préliminaires qui nous permettent d'aborder le reste du travail sans entraves. Nous avons passé en revue les différentes étapes de la méthode des orbites coadjointes et introduit la notion de réalisation symplectique associée à un groupe de Lie.
Dans le chapitre qui va suivre, nous allons présenter le groupe affine et déterminer les différentes orbites coadjointes à partir de la première extension centrale de son algèbre de Lie.

# Chapitre 2

# REALISATIONS SYMPLECTIQUES ASSOCIEES A LA PREMIERE EXTENSION CENTRALE DU GROUPE AFFINE

## 2.1 Groupe affine et l'algèbre de Lie associée

**Définition 7** *Soit N un espace affine.*

1. *On appelle transformation affine toute application affine bijective de N dans lui-même ( ce qui revient à dire que sa partie linéaire est bijective).*
2. *On appelle groupe affine de N l'ensemble des transformations affines de N. Le groupe affine de N est un groupe pour la loi de composition des applications. Le groupe des transformations affines de N (groupe affine de N) est noté $GA(N)$ [14].*

Considérons le groupe affine de la droite réelle $G = \{(a,b)/(a,b).(a',b') = (a+a', b+b')\}$ où $a$ et $b$ sont des paramètres réels.

L'élément neutre du groupe $G$ est $eG(0,0)$.
Par définition, l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ de $G$ est isomorphe à $T_{eG}G$.
Les générateurs de cette algèbre de Lie sont les champs de vecteurs invariants à gauche définis par la relation :

$$X_i^L = \frac{\partial}{\partial x'^i}\left(gg'\right)^k /_{g'=eG}\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right) \tag{2.1}$$

où $gg'$ est la loi du groupe.
Soient $A$ le générateur associé au paramètre $a$ et $B$ le générateur associé au paramètre $b$.
En utilisant l'expression (2.1), nous obtenons $A = \frac{\partial}{\partial a}$ et $B = \frac{\partial}{\partial b}$.
L'algèbre de Lie associée $\mathcal{G}$ est une algèbre de Lie abélienne.

Les deux sous-groupes à un paramètre associés sont : $exp(aA)$ et $exp(bB)$ et l'élément général $g$ du groupe s'écrit donc comme le produit d'exponentiels :

$$g = exp(aA).exp(bB)$$

ou de façon équivalente

$$g = exp(aA + bB)$$

puisque $A$ et $B$ commutent.

## 2.2 Groupe et algèbre de Lie étendu

L'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ admet la première extension centrale engendrée par les trois générateurs $A$, $B$ et $C$ où le générateur $C$ appartient au centre de $\mathcal{G}$.
Sa structure de Lie est donnée par $[A,B] = C$ , les autres crochets étant tous nuls.

Soit $\hat{g}$ l'élément général de la composante connexe à l'identité.

$$\hat{g} = exp(cC)\ exp(aA + bB) \tag{2.2}$$

avec $c$ le paramètre du groupe associé au générateur $C$.

La loi du groupe $G$ est donnée par la multiplication $\hat{g}\hat{g}'$ :

$$\begin{aligned}\hat{g}\hat{g}' &= exp(cC)\ exp(aA + bB)\ exp(c'C)\ exp(a'A + b'B)\\ &= exp((c + c')C)\ exp(aA + bB)\ exp(a'A + b'B).\end{aligned}$$

En utilisant les formules de Baker-Campbell-Hausdorff (B-C-H) [15, 16], nous obtenons :

$$\begin{aligned}\hat{g}\hat{g}' &= exp((c + c')C)\ exp((a + a')A + (b + b')B)\ exp(\frac{1}{2}(ab' - a'b)C)\\ &= exp(c + c' + \frac{1}{2}(ab' - a'b)C)\ exp((a + a')A + (b + b')B).\end{aligned}$$

En posant $\hat{g} = (c, g)$, nous avons :

$$\hat{g}\hat{g}' = (c, g)(c', g') = (c' + c' + \alpha_1(g, g'), g.g')$$

où $g.g'$ est la loi du groupe $G$ et $\alpha_1(g, g')$ est un 2-cocycle avec

$$\alpha_1(g, g') = \frac{1}{2}(ab' - a'b)$$

ou de façon équivalente

$$2\alpha_1(g, g') = ab' - a'b.$$

Soit $\varphi$ une application telle que $\varphi : G \to \mathbb{R}$ définie par :

$$g \mapsto \varphi(g) = \frac{1}{2}ab.$$

Ceci permet de vérifier que le cocycle $\alpha_2$ donné par $2\alpha_2(g,g') = ab' + a'b$ est trivial.
Le cocycle $\alpha_1$ est alors équivalent à $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ donné par $\alpha(g,g') = ab'$.
On obtient donc

$$\hat{g}\hat{g}^{'} = (c,g)(c',g') = (c'+c'+\alpha_1(g,g'),g.g')$$

avec $\alpha(g,g') = ab'$.

La loi du groupe étendu s'écrit de façon équivalente

$$\hat{G} = \left\{\hat{g} = (a,b,c)/\hat{g}\hat{g}' = (a+a',b+b',c+c'+ab')\right\}.$$

Nous venons de déterminer la première extension centrale de l'algèbre de Lie associée au groupe affine et la loi du groupe étendu associé.
Dans la section suivante, nous allons déterminer les quatre réalisations possibles associées à cette algèbre de Lie étendue.

## 2.3 Les quatre réalisations concrètes associées aux premières extensions centrales

La première extension centrale admet quatre réalisations concrètes obtenues en donnant une interprétation physique à chaque paramètre du groupe.

### 2.3.1 Groupe d'Aristote en une dimension spatiale

Posons $[a] = x$ : longueur et $[b] = t$ : temps.
La loi du groupe $G$ devient

$$gg' = \left\{(x,t)/(x,t).(x',t') = (x+x',t+t')\right\}.$$

Considérons l'algèbre de Lie dont la structure de Lie est donnée par le crochet de Lie

$$[P,E] = 0$$

où $P = \frac{\partial}{\partial x}$ et $E = \frac{\partial}{\partial t}$
avec $P$ le générateur des translations (c'est-à-dire associé au paramètre $x$) et $E$ le générateur des translations temporelles (c'est-à-dire associé au paramètre $t$).

Pour obtenir la première extension centrale de l'Algèbre de Lie du groupe d'Aristote, posons $[P,E] = C$, le nouveau générateur tel que $[P,E] = C$ (et les autres crochets de Lie étant tous nuls) soit la structure de Lie de l'algèbre de Lie étendue.

Effectuons une analyse dimensionnelle du nouveau paramètre d'extension :
Nous savons qu'en physique, une action a pour dimension le produit d'une énergie par le temps. C'est-à-dire

$$[\text{Action}]=ml^2t^{-1}$$

où $m$ est une masse, $l$ une longueur et $t$ le temps.
De façon générale, en utilisant la notion de dualité entre l'algèbre de Lie et l'algèbre de Lie duale puis en posant $Z$ le paramètre du groupe et $N$ un paramètre conjugué de l'algèbre de Lie duale, nous avons :

$$\begin{aligned}[Z][N] &= [Action] \\ [N] &= \tfrac{[Action]}{[Z]}.\end{aligned}$$

Les paramètres associés aux différents champs de vecteurs ont les dimensions d'une longueur, une vitesse et une durée. Leurs paramètres conjugués seront une dynamique linéaire $p$, une dynamique statique $k$ et une énergie $e$.

De façon particulière pour le cas du groupe d'Aristote en une dimension spatiale, nous avons :

$$[xt][\omega] = [Action]$$

où $\omega$ est un paramètre conjugué de l'algèbre de Lie duale et $x$, $t$ les paramètres du groupe.
En effet, nous pouvons en déduire la dimension de $\omega$ selon celle de $xt$.
Si $[x]$ a la dimension d'une longueur et $[t]$ a pour dimension d'une durée, nous avons :

$$\begin{aligned}[xt][\omega] &= ml^2t^{-1} \\ [\omega] &= \frac{ml^2t^{-1}}{lt} \\ [\omega] &= mlt^{-2}\end{aligned}$$

$[\omega] = m.a = F$ (Loi de Newton).
L'analyse dimensionnelle du nouveau paramètre d'extension associé à $C$ a la dimension d'une force.
Donc $\omega$ est une force.
Nous pouvons poser : $[P,E] = F$.
Finalement, l'algèbre de Lie est engendrée par les champs de vecteur $F$, $P$, $E$ avec la structure de Lie

$$[P,E] = F$$

les autres crochets de Lie étant nuls.

Déterminons à présent la loi du groupe étendu associé à cette nouvelle algèbre de Lie étendue.
L'élément général $\hat{g}$ de la composante connexe à l'identité de $\hat{G}$ s'écrit comme suit :

$$\hat{g} = exp(\eta F)exp(xP+tE).$$

La loi du groupe $\hat{G}$ est donnée par la multiplication :

$$\begin{aligned}\hat{g}\hat{g}' &= exp(\eta F)exp(xP+tE)exp(\eta' F)exp(x'P+t'E) \\ &= exp((\eta+\eta')F)exp(xP+tE)exp(x'P+t'E).\end{aligned}$$

En utilisant les formules de B-C-H [15, 16], nous obtenons :

$$\begin{aligned}\hat{g}\hat{g}' &= exp((\eta+\eta')F)exp((x+x')P+(t+t')E)exp(\frac{1}{2}(xt'-x't)F)\\ &= exp((\eta+\eta'+\frac{1}{2}(xt'-x't))F)exp((x+x')P+(t+t')E).\end{aligned}$$

En posant $\hat{g}=(\eta,g)$

$$\hat{g}\hat{g}^{'}=(\eta,g)(\eta',g')=(\eta+\eta'+\alpha_1(g,g'),g\cdot g')$$

où $g\cdot g'$ est la loi du groupe $G$ et $\alpha_1(g,g')$ : 2-cocycle
avec

$$\begin{aligned}\alpha_1(g,g') &= \frac{1}{2}(xt'-x't)\\ 2\alpha_1(g,g') &= (xt'-x't).\end{aligned}$$

Soit $\varphi$ une application telle que $\varphi : G\to\mathbb{R}$ définie par :

$$g\mapsto\varphi(g)=\frac{1}{2}xt.$$

Ceci permet de vérifier que le cocycle $\alpha_2$ donné par $2\alpha_2(g,g')=xt'+t'x$ est trivial.
Le cocycle $\alpha_1$ est alors équivalent à $\alpha=\alpha_1+\alpha_2$ donné par $\alpha(g,g')=xt'$

$$\hat{g}\hat{g}'=(\eta,g)(\eta',g')=(\eta+\eta'+\alpha(g,g'),g\cdot g')$$

avec $\alpha(g,g')=xt'$.

La loi du groupe étendu s'écrit de façon équivalente

$$\hat{G}=\{\hat{g}=(\eta,x,t)/\hat{g}\cdot\hat{g}'=(\eta+\eta'+xt',x+x',t+t')\}.$$

Nous vérifions que l'élément neutre du groupe étendu pour ce cas est $eG=(0,0,0)$ et l'élément inverse de $\hat{g}$ noté $\hat{g}^{-1}$ est

$$\hat{g}^{-1}=(xt-\eta,-x,-t).$$

La représentation adjointe de $\hat{G}$ est donnée par la relation $\hat{g}X\hat{g}^{-1}$, avec $\hat{g}\in\hat{G}$ et $X\in\hat{\mathcal{G}}$.
Sachant que $Ad_{\hat{g}}X=\hat{g}X\hat{g}^{-1}$, en posant $X=(\delta\eta,\delta x,\delta t)$, nous avons :

$$\begin{aligned}Ad_{(\eta,x,t)}(\delta\eta,\delta x,\delta t) &= (\eta,x,t)(\delta\eta,\delta x,\delta t)(xt-\eta,-x,-t)\\ &= (\eta,x,t)(\delta\eta-\eta+xt-t\delta x,\delta x-x,\delta t-t)\\ &= (\delta\eta-t\delta x+x\delta t,\delta x,\delta t).\end{aligned}$$

$$Ad_{(\eta,x,t)}(\delta\eta,\delta x,\delta t)=(\delta\eta-t\delta x+x\delta t,\delta x,\delta t) \tag{2.3}$$

**est la représentation adjointe du groupe sur l'algèbre de Lie.**

Nous déterminons maintenant la représentation coadjointe de $\hat{G}$ sur $\hat{\mathcal{G}}^*$.

Soient $f$, $p$ et $e$ les éléments de $\hat{\mathcal{G}}^*$ paramètres conjugués à $\eta$, $x$ et $t$ respectivement.
Posons

$$Ad^*_{(\eta,x,t)}(f,p,e) = (f',p',e')$$

et

$$Ad_{(\eta,x,t)}(\delta\eta,\delta x,\delta t) = (\delta\eta',\delta x',\delta t').$$

De la dualité entre $\hat{\mathcal{G}}$ et $\hat{\mathcal{G}}^*$, nous obtenons :

$$\begin{gathered}\langle (f',p',e'),(\delta\eta',\delta x',\delta t')\rangle = \langle (f,p,e),(\delta\eta,\delta x,\delta t)\rangle \\ f'\delta\eta' + p'\delta x' + e'\delta t' = f\delta\eta + p\delta x + e\delta t.\end{gathered}$$

En utilisation la relation (2.3), nous obtenons :

$$f'\delta\eta - f't\delta x + f'x\delta t + p'\delta x + e'\delta t = f\delta\eta + p\delta x + e\delta t. \tag{2.4}$$

Si le second membre de l'équation (2.4) a la dimension physique d'une action, alors $f$, $p$ et $e$ ont respectivement les dimensions physiques d'une force, un moment linéaire et une énergie.
Par identification :

$$\begin{cases} f' = f \\ p' - f't = p \\ f'x + e' = e \end{cases}$$

on obtient

$$Ad^*_{(\eta,x,t)}(f,p,e) = (f,p+ft,e-fx)$$

**la représentation coadjointe du groupe sur l'algèbre de Lie duale.**

A travers l'expression de la représentation coadjointe, nous remarquons que $f$ est un invariant immédiat.
En utilisant la relation (1.10), la forme de Kirillov associée à ce groupe est donnée par

$$K = (K_{ij}(\alpha)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -f \\ 0 & f & 0 \end{pmatrix}.$$

La restriction de la forme de Kirillov à l'orbite de la représentation coadjointe est

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -f \\ f & 0 \end{pmatrix}$$

et son inverse est

$$\Omega^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{f} \\ -\frac{1}{f} & 0 \end{pmatrix} \quad avec \quad f \neq 0.$$

Nous en déduisons la forme symplectique suivante :

$$\begin{aligned}\sigma &= \begin{pmatrix} dp & de \end{pmatrix} \Omega^{-1} \begin{pmatrix} dp \\ de \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} dp & de \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{f} de \\ -\frac{1}{f} dp \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$\sigma = \frac{1}{f} dpde - \frac{1}{f} dedp$ en coordonnées quelconques $(p,e)$.
Posons

$$q = \frac{e}{f},\ f \neq 0. \tag{2.5}$$

En utilisant la relation (2.5), on a $\sigma = dpdq - dqdp$ ou de façon équivalente

$$\sigma = dp \wedge dq \tag{2.6}$$

est la 2-forme symplectique standard en coordonnées de Darboux.

L'orbite maximale ( car $f \neq 0$) de la représentation coadjointe notée $O_{(f)}$ est une variété symplectique de dimension 2 dont les coordonnées sont $p$ et $q$. Elle est localement isomorphe à $\mathbb{R}^2$ d'après le théorème de Darboux.

### 2.3.2 Groupe de Galilée en une dimension spatiale

Posons $[a] = v$ : vitesse et $[b] = t$ : temps.
La loi du groupe $G$ devient

$$gg' = \left\{ (v,t)/(v,t) \cdot (v',t') = (v+v', t+t') \right\}.$$

Considérons l'algèbre de Lie dont la structure de Lie est donnée par le crochet de Lie

$$[K,E] = 0$$

où $K = \frac{\partial}{\partial v}$ et $E = \frac{\partial}{\partial t}$
avec $K$ le générateur des boots (c'est-à dire associé au paramètre $v$) et $E$ le générateur des translations temporelles (c'est-à dire associé au paramètre $t$).
Pour obtenir la première extension centrale de l'Algèbre de Lie du groupe d'Aristote, posons $[K,E] = C$ le nouveau générateur tel que $[K,E] = C$ (et les autres crochets de Lie étant tous nuls) soit la structure de Lie de l'algèbre de Lie étendue.

De même que pour le cas d'Aristote, en effectuant une analyse dimensionnelle du nouveau paramètre d'extension, nous obtenons pour ce cas :

En utilisant la notion de dualité entre l'algèbre de Lie et l'algèbre de Lie duale, nous avons :

$$[vt][\omega] = [Action]$$

où $\omega$ est un paramètre conjugué de l'algèbre de Lie duale et $v$, $t$ les paramètres conjugués du groupe.
Nous pouvons en déduire la dimension de $\omega$ selon celle de $vt$.
Si $[v]$ a la dimension d'une vitesse et $[t]$ a pour dimension d'une durée, nous avons :

$$[vt][\omega] = ml^2t^{-1}$$
$$[\omega] = \frac{ml^2t^{-1}}{lt^{-1}\cdot t}$$

$[\omega] = mlt^{-1}$(Moment linéaire).
L'analyse dimensionnelle du nouveau paramètre d'extension associé à $C$ a la dimension d'un moment linéaire.
Donc, nous pouvons poser : $[K,E] = P$.
Finalement, l'algèbre de Lie est engendrée par les champs de vecteur $P$, $K$, $E$ avec la structure de Lie :

$$[K,E] = P$$

les autres crochets de Lie étant nuls.

Déterminons à présent la loi du groupe étendu associé à cette nouvelle algèbre de Lie étendue. L'élément général $\hat{g}$ de la composante connexe à l'identité de $\hat{G}$ s'écrit comme suit :

$$\hat{g} = exp(xP)\ exp(vK+tE).$$

La loi du groupe $\hat{G}$ est donnée par la multiplication :

$$\begin{aligned}\hat{g}\hat{g}' &= exp(xP)\ exp(vK+tE)\ exp(x'P)\ exp(v'K+t'E)\\ &= exp((x+x')P)\ exp(vK+tE)\ exp(v'K+t'E).\end{aligned}$$

En utilisant les formules de B-C-H [15, 16], nous obtenons :

$$\begin{aligned}\hat{g}\hat{g}' &= exp((x+x')P)\ exp((v+v')K+(t+t')E)\ exp(\frac{1}{2}(vt'-v't)P)\\ &= exp((x+x'+\frac{1}{2}(vt'-v't))P)\ exp((v+v')K+(t+t')E).\end{aligned}$$

En posant $\hat{g} = (x,g)$

$$\hat{g}\hat{g}' = (x,g)(x',g') = (x+x'+\alpha_1(g,g'),g\cdot g')$$

où $g\cdot g'$ est la loi du groupe $G$ et $\alpha_1(g,g')$ est un 2-cocycle.
avec

$$\alpha_1(g,g') = \frac{1}{2}(vt'-v't)$$
$$2\alpha_1(g,g') = (vt'-v't).$$

Soit $\varphi$ une application telle que $\varphi : G \to \mathbb{R}$ définie par :

$$g \mapsto \varphi(g) = \frac{1}{2}vt.$$

Ceci permet de vérifier que le cocycle $\alpha_2$ donné par $2\alpha_2(g,g') = vt'+tv'$ est trivial.
Le cocycle $\alpha_1$ est alors équivalent à $\alpha = \alpha_1+\alpha_2$ donné par $\alpha(g,g') = vt'$.

$$\hat{g}\hat{g}' = (x,g)(x',g') = (x+x'+\alpha(g,g'),g\cdot g')$$

avec $\alpha(g,g') = vt'$.

La loi du groupe étendu s'écrit de façon équivalente

$$\hat{G} = \left\{\hat{g} = (x,v,t)/\hat{g}\cdot\hat{g}' = (x+x'+vt', v+v', t+t')\right\}.$$

Nous vérifions que l'élément neutre du groupe étendu pour ce cas est $eG = (0,0,0)$ et l'élément inverse de $\hat{g}$ noté $\hat{g}^{-1}$ est

$$\hat{g}^{-1} = (vt - x, -v, -t).$$

La représentation adjointe de $\hat{G}$ est donnée par la relation $\hat{g}X\hat{g}^{-1}$, avec $\hat{g} \in \hat{G}$ et $X \in \hat{\mathcal{G}}$.
Sachant que $Ad_{\hat{g}}X = \hat{g}X\hat{g}^{-1}$, en posant $X = (\delta x, \delta v, \delta t)$, nous avons :

$$\begin{aligned} Ad_{(x,v,t)}(\delta x, \delta v, \delta t) &= (x,v,t)(\delta x, \delta v, \delta t)(vt - x, -v, -t) \\ &= (x,v,t)(\delta x - x + vt - t\delta v, \delta v - v, \delta t - t) \\ &= (\delta x - t\delta v + v\delta t, \delta v, \delta t). \end{aligned}$$

$$Ad_{(x,v,t)}(\delta x, \delta v, \delta t) = (\delta x - t\delta v + v\delta t, \delta v, \delta t) \tag{2.7}$$

**est la représentation adjointe du groupe sur l'algèbre de Lie.**

Nous déterminons la représentation coadjointe de $\hat{G}$ sur $\hat{\mathcal{G}}^*$.
Soient $p$, $k$ et $e$ les éléments de $\hat{\mathcal{G}}^*$ paramètres conjugués à $x$, $v$ et $t$ respectivement.
Posons

$$Ad^*_{(x,v,t)}(p,k,e) = (p',k',e')$$

et

$$Ad_{(x,v,t)}(\delta x, \delta v, \delta t) = (\delta x', \delta v', \delta t').$$

De la dualité entre $\hat{\mathcal{G}}$ et $\hat{\mathcal{G}}^*$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \langle (p',k',e'), (\delta x', \delta v', \delta t')\rangle &= \langle (p,k,e), (\delta x, \delta v, \delta t)\rangle \\ p'\delta x' + k'\delta v' + e'\delta t' &= p\delta x + k\delta v + e\delta t. \end{aligned}$$

En utilisant (2.7), nous obtenons :

$$p'\delta x - p't\delta v + p'v\delta t + k'\delta v + e'\delta t = p\delta x + k\delta v + e\delta t. \tag{2.8}$$

Si le second membre de l'équation (2.8) a la dimension physique d'une action, alors $p$, $k$ et $e$ ont respectivement les dimensions physiques d'un moment linéaire, un moment statique et une énergie.
Par identification :

$$\begin{cases} p' = p \\ k' - p't = k \\ p'v + e' = e \end{cases}.$$

On obtient

$$Ad^*_{(x,v,t)}(p,k,e) = (p, k+pt, e-pv)$$

**la représentation coadjointe du groupe sur l'algèbre de Lie duale.**

A travers l'expression de la représentation coadjointe, nous remarquons que $p$ est un invariant immédiat.
De la relation (1.10), la forme de Kirillov associée à ce groupe est donnée par

$$K = (K_{ij}(\alpha)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p \\ 0 & p & 0 \end{pmatrix}.$$

La restriction de la forme de Kirillov à l'orbite de la représentation coadjointe est

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -p \\ p & 0 \end{pmatrix}$$

avec $p$ un invariant immédiat sous l'action coadjointe.
et son inverse est

$$\Omega^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{p} \\ -\frac{1}{p} & 0 \end{pmatrix}.$$

Nous en déduisons la forme symplectique suivante

$$\begin{aligned} \sigma &= \begin{pmatrix} dk & de \end{pmatrix} \Omega^{-1} \begin{pmatrix} dk \\ de \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} dk & de \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{p} de \\ -\frac{1}{p} dk \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\sigma = \frac{1}{p} dkde - \frac{1}{p} dedk$ en coordonnées quelconques $(k,e)$.
Posons

$$p = -\frac{e}{v}; \quad q = \frac{k}{m},\ v \neq 0,\ m \neq 0. \tag{2.9}$$

En utilisant la relation (2.9), on a $\sigma = dpdq - dqdp$ ou de façon équivalente

$$\sigma = dp \wedge dq \tag{2.10}$$

est la 2-forme symplectique standard en coordonnées de Darboux.

De même, pour le groupe de Galilée en une dimension spatiale, l'orbite maximale de l'action coadjointe notée $O_{(p)}$ est une variété symplectique de dimension 2 dont les coordonnées sont $p$ et $q$. Elle est localement isomorphe à $\mathbb{R}^2$ d'après le théorème de Darboux.

### 2.3.3 Groupe de Weyl-Heisenberg en une dimension spatiale

Posons $[a] = x$ : longueur et $[b] = v$ : vitesse.
La loi du groupe $G$ devient

$$gg^{'} = \big\{(x,v)/(x,v).(x',v') = (x+x',v+v')\big\}.$$

Considérons l'algèbre de Lie dont la structure de Lie est donnée par le crochet de Lie

$$[P,K] = 0$$

où $P = \frac{\partial}{\partial x}$ et $K = \frac{\partial}{\partial v}$
avec $P$ le générateur des translations spatiales (c'est-à-dire associé au paramètre $x$) et $K$ le générateur des boosts (c'est-à-dire associé au paramètre $v$).

Pour obtenir la première extension centrale de l'Algèbre de Lie du groupe de Weyl-Heisenberg en une dimension spatiale, posons $[P,K] = C$ le nouveau générateur tel que $[P,K] = C$ (et les autres crochets de Lie étant tous nuls) soit la structure de Lie de l'algèbre de Lie étendue.
De même, en effectuant une analyse dimensionnelle du nouveau paramètre d'extension, nous obtenons pour ce cas :

$$[xv][\omega] = [Action]$$

où $\omega$ est un paramètre conjugué de l'algèbre de Lie duale et $x$, $v$ les paramètres conjugués du groupe.
Nous pouvons en déduire la dimension de $\omega$ selon celle de $xv$.
Si $[x]$ a la dimension d'une longueur et $[v]$ a pour dimension d'une vitesse, nous avons :
$[xv][\omega] = ml^2t^{-1}$
$[\omega] = \frac{ml^2t^{-1}}{l\cdot lt^{-1}} = m$.
L'analyse dimensionnelle du nouveau paramètre d'extension associé à $C$ a la dimension d'une masse.
Donc $\omega$ est une masse.
Nous pouvons poser : $[P,K] = M$.
Finalement, l'algèbre de Lie est engendrée par les champs de vecteur $M$, $P$, $K$ avec la structure de Lie :

$$[P,K] = M$$

les autres crochets de Lie étant nuls.

Déterminons à présent la loi du groupe étendu associé à cette nouvelle algèbre de lie étendue.
L'élément général $\hat{g}$ de la composante connexe à l'identité de $\hat{G}$ s'écrit comme suit :
$\hat{g} = exp(\phi M)\ exp(xP+vK)$.
La loi du groupe $\hat{G}$ est donnée par la multiplication :

$$\begin{aligned}\hat{g}\hat{g}' &= exp(\phi M)\ exp(xP+vK)\ exp(\phi' M)\ exp(x'P+v'K)\\ &= exp((\phi+\phi')M)\ exp(xP+vK)\ exp(x'P+v'K).\end{aligned}$$

En utilisant les formules de B-C-H [15, 16], nous obtenons :

$$\begin{aligned}\hat{g}\hat{g}' &= exp((\phi+\phi')M)\ exp((x+x')P+(v+v')K)\ exp(\frac{1}{2}(xv'-x'v)M)\\ &= exp((\phi+\phi'+\frac{1}{2}(xv'-x'v))M)\ exp((x+x')P+(v+v')K).\end{aligned}$$

En posant $\hat{g}=(\phi,g)$

$$\hat{g}\hat{g}^{'}=(\phi,g)(\phi',g')=(\phi+\phi'+\alpha_1(g,g'),g\cdot g')$$

où $g\cdot g'$ est la loi du groupe $G$ et $\alpha_1(g,g')$ est un 2-cocycle.
avec $\alpha_1(g,g')=\frac{1}{2}(xv'-x'v) \iff 2\alpha_1(g,g')=(xv'-x'v)$.

Soit $\varphi$ une application telle que $\varphi : G\to\mathbb{R}$ définie par :

$$g\mapsto\varphi(g)=\frac{1}{2}xv.$$

Ceci permet de vérifier que le cocycle $\alpha_2$ donné par $2\alpha_2(g,g^{'})=xv'+vx'$ est trivial.
Le cocycle $\alpha_1$ est alors équivalent à $\alpha=\alpha_1+\alpha_2$ donné par $\alpha(g,g')=xv'$

$$\hat{g}\hat{g}^{'}=(\phi,g)(\phi',g')=(\phi+\phi'+\alpha(g,g'),g\cdot g')$$

avec $\alpha(g,g')=xv'$.

La loi du groupe étendu s'écrit de façon équivalente

$$\hat{G}=\left\{\hat{g}=(\phi,x,v)/\hat{g}\cdot\hat{g}'=(\phi+\phi'+xv',x+x',v+v')\right\}.$$

Nous vérifions que l'élément neutre du groupe étendu pour le cas du groupe de Weyl-Heinsenberg est $eG=(0,0,0)$ et l'élément inverse de $\hat{g}$ noté $\hat{g}^{-1}$ est

$$\hat{g}^{-1}=(-\phi+xv,-x,-v).$$

La représentation adjointe de $\hat{G}$ est donnée par la relation $\hat{g}X\hat{g}^{-1}$, avec $\hat{g}\in\hat{G}$ et $X\in\hat{\mathcal{G}}$.
Sachant que $Ad_{\hat{g}}X=\hat{g}X\hat{g}^{-1}$ , en posant $X=(\delta\phi,\delta x,\delta v)$, nous avons :

$$\begin{aligned}Ad_{(\phi,x,v)}(\delta\phi,\delta x,\delta v) &= (\phi,x,v)(\delta\phi,\delta x,\delta v)(xv-\phi,-x,-v)\\ &= (\phi,x,v)(\delta\phi-\phi+xv-v\delta x,\delta x-x,\delta v-v)\\ &= (\delta\phi-v\delta x+x\delta v,\delta x,\delta v).\end{aligned}$$

$$Ad_{(\phi,x,v)}(\delta\phi,\delta x,\delta v)=(\delta\phi-v\delta x+x\delta v,\delta x,\delta v) \tag{2.11}$$

**est la représentation adjointe du groupe sur l'algèbre de Lie.**

Nous déterminons maintenant la représentation coadjointe de $\hat{G}$ sur $\hat{g}^*$ .
Soient $m$, $p$ et $k$ les éléments de $\hat{g}^*$ paramètres conjugués à $\phi$, $x$, $v$ respectivement.
Posons

$$Ad^*_{(\phi,x,v)}(m,p,k)=(m',p',k')$$

et

$$Ad_{(\phi,x,v)}(\delta\phi,\delta x,\delta v)=(\delta\phi',\delta x',\delta v').$$

De la dualité entre $\hat{\mathcal{G}}$ et $\hat{\mathcal{G}}^*$, nous avons :

$$\begin{gathered}\langle(m',p',k'),(\delta\phi',\delta x',\delta v')\rangle=\langle(m,p,k),(\delta\phi,\delta x,\delta v)\rangle\\ m'\delta\phi'+p'\delta x'+k'\delta v'=m\delta\phi+p\delta x+k\delta v.\end{gathered}$$

En utilisant (2.11), nous obtenons :

$$m'\delta\phi-m'v\delta x+m'x\delta v+p'\delta x+k'\delta v=m\delta\phi+p\delta x+k\delta v. \tag{2.12}$$

Si le second membre de l'équation (2.12) a la dimension physique d'une action, alors $m$, $p$ et $k$ ont respectivement les dimensions physiques d'une masse, un moment linéaire et un moment statique.
Par identification :

$$\begin{cases}m'=m\\ p'-m'v=p\\ m'x+k'=k\end{cases}.$$

A travers l'expression de l'action coadjointe, nous remarquons que $m$ est un invariant immédiat.
on obtient

$$Ad^*_{(\phi,x,v)}(m,p,k)=(m,p+mv,k-mx) \tag{2.13}$$

**la représentation coadjointe du groupe sur l'algèbre de Lie duale.**

En utilisant la relation (1.10), la forme de Kirillov associée à ce groupe est donnée par :

$$K=(K_{ij}(\alpha))=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-m\\0&m&0\end{pmatrix}.$$

La restriction de la forme de Kirillov à l'orbite de la représentation coadjointe est

$$\Omega=\begin{pmatrix}0&-m\\m&0\end{pmatrix}$$

avec $m$ un invariant immédiat sous la représentation coadjointe
et son inverse est

$$\Omega^{-1}=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{m}\\-\frac{1}{m}&0\end{pmatrix}\quad avec\quad m\neq 0.$$

Nous en déduisons la forme symplectique suivante

$$\begin{aligned}\sigma&=\begin{pmatrix}dp&dk\end{pmatrix}\Omega^{-1}\begin{pmatrix}dp\\dk\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}dp&dk\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{m}dk\\-\frac{1}{m}dp\end{pmatrix}\quad avec\quad m\neq 0\end{aligned}$$

$\sigma = \frac{1}{m} dpdk - \frac{1}{m} dkdp$ en coordonnées quelconques $(p,k)$.
Posons

$$q = \frac{k}{m}; \ \ m \neq 0. \tag{2.14}$$

En utilisant la relation (2.14), on a $\sigma = dpdq - dqdp$ ou de façon équivalente

$$\sigma = (dp \wedge dq) \tag{2.15}$$

est la 2-forme symplectique en coordonnées de Darboux (la 2-forme symplectique standard de $\mathbb{R}^2$).

De même, pour le groupe d'Aristote en une dimension spatiale, l'orbite maximale (car $m \neq 0$) de l'action coadjointe notée $O_{(m)}$ est une variété symplectique de dimension 2 dont les coordonnées sont $p$ et $q$. Elle est localement isomorphe à $\mathbb{R}^2$ d'après le théorème de Darboux.

### 2.3.4 Groupe de Carroll en une dimension spatiale

Posons $[a] = s$ : décélération (slowness) et $[b] = x$ : longueur.
La loi du groupe $G$ devient

$$gg^{'} = \left\{(s,x)/(s,x).(s',x') = (s+s',x+x')\right\}.$$

Considérons l'algèbre de lie dont la structure de Lie est donnée par le crochet de Lie

$$[\Sigma, P] = 0$$

où $P = \frac{\partial}{\partial x}$ et $\Sigma = \frac{\partial}{\partial s}$
avec $\Sigma$ le générateur de spin (c'est-à-dire associé au paramètre $s$) et $P$ le générateur des translations spatiales (c'est-à-dire associé au paramètre $x$).

Pour obtenir la première extension centrale de l'Algèbre de Lie du groupe de Carroll, posons $[\Sigma, P] = C$ le nouveau générateur tel que $[\Sigma, P] = C$ (et les autres crochets de Lie étant tous nuls) soit la structure de Lie de l'algèbre de Lie étendue.

En se référant sur les résultats de l'analyse dimensionnelle du cas de Weyl-Heinsenberg pour le cas de Carroll en une dimension spatiale, nous avons :

$$[sx][\omega] = [Action]$$

où $\omega$ est un paramètre conjugué de l'algèbre de Lie duale et $s$, $x$ les paramètres conjugués du groupe.
Nous pouvons en déduire la dimension de $\omega$ selon celle de $sx$.
Si $[x]$ a la dimension d'une longueur et $[s]$ a pour dimension d'une décélération, nous avons :

$$\begin{aligned} [sx][\omega] &= ml^2t^{-1} \\ [\omega] &= \frac{ml^2t^{-1}}{l-1t \cdot l} \\ [\omega] &= ml^2t^{-2}. \end{aligned}$$

L'analyse dimensionnelle du nouveau paramètre d'extension associé à $C$ a la dimension d'une énergie.
Donc $\omega$ est une énergie.
Nous pouvons poser : $[\Sigma, P] = E$.
Finalement, l'algèbre de Lie est engendrée par les champs de vecteur $E$, $\Sigma$, $P$ avec la structure de Lie :

$$[\Sigma, P] = E$$

les autres crochets de Lie étant nuls.

Déterminons à présent la loi du groupe étendu associé à cette nouvelle algèbre de Lie étendue.

L'élément général $\hat{g}$ de la composante connexe à l'identité de $\hat{G}$ s'écrit comme suit :

$$\hat{g} = exp(tE)\ exp(s\Sigma + xP).$$

La loi du groupe $\hat{G}$ est donnée par la multiplication :

$$\begin{aligned}\hat{g}\hat{g}' &= exp(tE)\ exp(s\Sigma + xP)\ exp(t'E)\ exp(s'\Sigma + x'P) \\ &= exp((t+t')E)\ exp(s\Sigma + xP)\ exp(s'\Sigma + x'P).\end{aligned}$$

En utilisant les formules de B-C-H [15, 16], nous obtenons :

$$\begin{aligned}\hat{g}\hat{g}' &= exp((t+t')E)\ exp((s+s')\Sigma + (x+x')P)\ exp(\frac{1}{2}(sx' - s'x)E) \\ &= exp((t+t' + \frac{1}{2}(sx' - s'x))E)\ exp((x+x')P + (s+s')\Sigma).\end{aligned}$$

En posant $\hat{g} = (t, g)$.

$$\hat{g}\hat{g}' = (t,g)(t',g') = (t + t' + \alpha_1(g,g'), g \cdot g')$$

où $g \cdot g'$ est la loi du groupe $G$ et $\alpha_1(g,g')$ est 2-cocycle.
avec $\alpha_1(g,g') = \frac{1}{2}(sx' - s'x) \iff 2\alpha_1(g,g') = (sx' - s'x)$.

Soit $\varphi$ une application telle que $\varphi : G \to \mathbb{R}$ définie par :

$$g \mapsto \varphi(g) = \frac{1}{2}sx.$$

Ceci permet de vérifier que le cocycle $\alpha_2$ donné par $2\alpha_2(g,g') = sx' + xs'$ est trivial.
Le cocycle $\alpha_1$ est alors équivalent à $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ donné par $\alpha(g,g') = sx'$.

$$\hat{g}\hat{g}' = (t,g)(t',g') = (t + t' + \alpha(g,g'), g \cdot g')$$

avec $\alpha(g,g') = sx'$.

La loi du groupe étendu s'écrit de façon équivalente

$$\hat{G} = \left\{\hat{g} = (t,s,x) / \hat{g} \cdot \hat{g}' = (t + t' + sx', s + s', x + x')\right\}.$$

Nous vérifions que l'élément neutre du groupe étendu pour le cas du groupe de Carroll en une dimension spatiale est $eG = (0,0,0)$ et l'élément inverse de $\hat{g}$ noté $\hat{g}^{-1}$ est

$$\hat{g}^{-1} = (sx - t, -s, -x).$$

La représentation adjointe de $\hat{G}$ est donnée par la relation $\hat{g}X\hat{g}^{-1}$, avec $\hat{g} \in \hat{G}$ et $X \in \hat{\mathcal{G}}$.
Sachant que $Ad_{\hat{g}}X = \hat{g}X\hat{g}^{-1}$ , en posant $X = (\delta t, \delta s, \delta x)$, nous avons :

$$\begin{aligned} Ad_{(t,s,x)}(\delta t, \delta s, \delta x) &= (t,s,x)(\delta t, \delta s, \delta x)(st - t, -s, -x) \\ &= (t,s,x)(\delta t - t + sx - x\delta s, \delta s - s, \delta x - x) \\ &= (\delta t - x\delta s + s\delta x, \delta s, \delta x). \end{aligned}$$

$$Ad_{(t,s,x)}(\delta t, \delta s, \delta x) = (\delta t - x\delta s + s\delta x, \delta s, \delta x) \tag{2.16}$$

**est la représentation adjointe du groupe sur l'algèbre de Lie.**

Nous déterminons la représentation coadjointe de $\hat{G}$ sur $\hat{\mathcal{G}}^*$.
Soient $e$, $\varepsilon$ et $p$ les éléments de $\hat{\mathcal{G}}^*$ paramètres conjugués à $t$, $s$ et $x$ respectivement.
Posons

$$Ad^*_{(t,s,x)}(e, \varepsilon, p) = (e', \varepsilon', p')$$

et

$$Ad_{(t,s,x)}(\delta t, \delta s, \delta x) = (\delta t', \delta s', \delta x').$$

De la dualité entre $\hat{\mathcal{G}}$ et $\hat{\mathcal{G}}^*$, nous avons :

$$\begin{gathered} \langle (e', \varepsilon', p'), (\delta t', \delta s', \delta x') \rangle = \langle (e, \varepsilon, p), (\delta t, \delta s, \delta x) \rangle \\ e'\delta t' + \varepsilon'\delta s' + p'\delta x' = e\delta t + \varepsilon\delta s + p\delta x. \end{gathered}$$

En utilisant la relation (2.16), nous obtenons :

$$e'\delta t - e'x\delta s + e's\delta x + \varepsilon'\delta s + p'\delta x = e\delta t + \varepsilon\delta s + p\delta x. \tag{2.17}$$

Si le second membre de l'équation (2.17) a la dimension physique d'une action, alors $e$, $\varepsilon$ et $p$ ont respectivement les dimensions physiques d'une énergie, une pseudo-action et un moment linéaire.
Par identification :

$$\begin{cases} e' = e \\ \varepsilon' - e'x = \varepsilon \\ e's + p' = p \end{cases}.$$

A travers l'expression de l'action coadjointe, nous remarquons que $e$ est un invariant immédiat. on obtient

$$Ad^*_{(t,s,x)}(e, \varepsilon, p) = (e, \varepsilon + ex, p - es) \tag{2.18}$$

**la représentation coadjointe du groupe sur l'algèbre de Lie duale.**

De la relation (1.10), la forme de Kirillov associée à ce groupe est donnée par :

$$K = (K_{ij}(\alpha)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -e \\ 0 & e & 0 \end{pmatrix}.$$

La restriction de la forme de Kirillov à l'orbite de la représentation coadjointe est

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -e \\ e & 0 \end{pmatrix}$$

et son inverse est

$$\Omega^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{e} \\ -\frac{1}{e} & 0 \end{pmatrix} \quad avec \;\; e \neq 0.$$

Nous en déduisons la forme symplectique suivante

$$\sigma = \begin{pmatrix} d\varepsilon & dp \end{pmatrix} \Omega^{-1} \begin{pmatrix} d\varepsilon \\ dp \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} d\varepsilon & dp \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{e} dp \\ -\frac{1}{e} d\varepsilon \end{pmatrix} \quad avec \;\; e \neq 0$$

$\sigma = \frac{1}{e} d\varepsilon dp - \frac{1}{e} dp d\varepsilon$ en coordonnées quelconques $(\varepsilon, p)$.
Posons

$$q = -\frac{\varepsilon}{e}, e \neq 0 \tag{2.19}$$

En utilisant (2.19), on a $\sigma = dpdq - dqdp$ ou de façon équivalente

$$\sigma = (dp \wedge dq) \tag{2.20}$$

est la 2-forme symplectique en coordonnées de Darboux ( la 2-forme symplectique standard de $\mathbb{R}^2$).

L'orbite maximale de l'action coadjointe notée $O_{(e)}$ est une variété symplectique de dimension 2 dont les coordonnées sont $p$ et $q$ et elle est localement isomorphe à $\mathbb{R}^2$.

Au terme de ce chapitre, les premières extensions centrales nous ont permis d'obtenir des orbites coadjointes associées aux quatre réalisations concrètes du groupe affine :

1. pour le cas du groupe d'Aristote, la première extension a permis d'obtenir une orbite coadjointe maximale notée $O_{(f)}$, $f \neq 0$ de dimension 2.
   Le nouveau générateur d'extension a permis d'obtenir une force $(f)$ comme grandeur physique ;
2. pour le cas du groupe d'Aristote, la première extension a permis d'obtenir une orbite coadjointe maximale notée $O_{(p)}$, $p \neq 0$ de dimension 2.
   Le nouveau générateur d'extension a permis d'obtenir un moment linéaire $(p)$ comme grandeur physique ;

3. pour le cas du groupe d'Aristote, la première extension a permis d'obtenir une orbite coadjointe maximale notée $O_{(m)}$, $m \neq 0$ de dimension 2.
   Le nouveau générateur d'extension a permis d'obtenir une masse ($m$) comme grandeur physique ;
4. pour le cas du groupe d'Aristote, la première extension a permis d'obtenir une orbite coadjointe maximale notée $O_{(e)}$, $e \neq 0$ de dimension 2.
   Le nouveau générateur d'extension a permis d'obtenir une énergie ($e$) comme grandeur physique.

Toutes ces orbites sont des variétés symplectiques localement isomorphes à $\mathbb{R}^2$.

Dans le chapitre suivant, nous allons considérer les secondes extensions centrales associées aux quatre réalisations concrètes du groupe affine et construire les structures symplectiques correspondantes par la méthode des orbites coadjointes.

# Chapitre 3

# REALISATIONS SYMPLECTIQUES ASSOCIEES A LA SECONDE EXTENSION CENTRALE DU GROUPE AFFINE

## 3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous construisons les orbites coadjointes des secondes extensions centrales des réalisations concrètes du groupe affine.
En effet, la seconde extension centrale du groupe d'Aristote en une dimension spatiale permet d'obtenir l'orbite de l'action coadjointe correspondant à un espace de phase d'un système dynamique élémentaire dont les constantes physiques sont une force, une énergie et un moment linéaire.

De même pour le cas du groupe de Galilée, la seconde extension centrale permet d'obtenir l'orbite de l'action coadjointe correspondant à un espace de phase d'un système dynamique élémentaire dont les constantes physiques sont une masse, une force, un moment linéaire, un moment statique et une énergie.

Puis pour le cas du groupe de Weyl-Heisenberg, la seconde extension centrale permet d'obtenir l'orbite de l'action coadjointe correspondant à un espace de phase d'un système dynamique élémentaire dont les constantes physiques sont un moment linéaire, un moment statique et une masse.

Enfin pour le cas du groupe de Carroll, la seconde extension centrale permet d'obtenir l'orbite de l'action coadjointe correspondant à un espace de phase d'un système dynamique élémentaire dont les constantes physiques sont un moment linéaire, une force , une énergie et une pseudo-action.

Le détail de ces résultats fait l'objet des sections suivantes de ce chapitre.

## 3.2 Orbite coadjointe associée à la seconde extension du groupe d'Aristote

D'après les résultats du chapitre précédent, la première extension centrale du groupe d'Aristote en une dimension spatiale est donnée par le crochet de Lie non nul suivant :

$$[P,E] = F.$$

Pour obtenir la deuxième extension centrale de cette algèbre de Lie, posons $A$ et $B$ deux nouveaux générateurs tels que $[P,E] = F$, $[P,F] = A$ et $[E,F] = B$ soit la structure de Lie de l'algèbre de Lie étendue.
Vérifions les identités de Jacobi possibles pour que l'algèbre engendrée par $P$, $E$, $F$, $A$, $B$ soit effectivement une algèbre de Lie.

$$\begin{gathered}[[P,E],F] + [[E,F],P] + [[F,P],E] = 0 \\ [F,F] + [B,P] - [A,E] = 0 \\ [B,P] = [A,E]\ .\end{gathered}$$

Comme on calcule une extension centrale, les nouveaux générateurs commutent avec les anciens donc $[A,E] = 0$ et $[B,P] = 0$.
Donc, il n'y a pas de contraintes sur les nouveaux générateurs $A$ et $B$ donc la deuxième extension centrale existe et est l'algèbre de Lie engendrée par $P$, $E$, $F$, $A$, $B$ est définie par les crochets de Lie non nuls suivants :

$$\begin{aligned}[P,E] &= F \\ [P,F] &= A \\ [E,F] &= B\ .\end{aligned}$$

En effectuant une analyse dimensionnelle, nous avons :
comme $[P,F] = A$, soit $\omega$ le paramètre conjugué associé à $A$ :

$$\begin{aligned}[P][F][\omega] &= ml^2t^{-1} \\ [\omega] &= \frac{ml^2t^{-1}}{ml^2t^{-2}} \\ [\omega] &= t.\end{aligned}$$

Donc $\omega$ a la dimension d'une durée et nous pouvons poser $[P,F] = H$.
De même

$$\begin{aligned}[E][F][\omega] &= ml^2t^{-1} \\ [\omega] &= \frac{ml^2t^{-1}}{mlt^{-1}} \\ [\omega] &= l.\end{aligned}$$

Donc $\omega$ a la dimension d'une longueur et nous pouvons poser $[E,F] = Y$.
Finalement, la seconde extension centrale de l'algèbre de Lie associée au groupe d'Aristote en une dimension spatiale est engendrée par les champs de vecteur $H$, $Y$, $F$, $P$, $E$ avec la structure de Lie :

$$[P,E] = F$$
$$[P,F] = H$$
$$[E,F] = Y.$$

Déterminons à présent la loi du groupe étendu associé.
Soit $\hat{g}$ l'élément général du groupe de Lie étendu, c'est-à-dire la composante connexe à l'identité de $G$ notée $\hat{G}$. Il s'écrit :

$$\hat{g} = exp(\gamma H + \tau Y)\ exp(\eta F)\ exp(xP + tE).$$

La loi du groupe de Lie étendu est donnée par la multiplication suivante :

$$\hat{g}\hat{g}' = exp(\gamma H + \tau Y)\ exp(\eta F) exp(xP + tE)\ exp(\gamma' H + \tau' Y)\ exp(\eta' F)\ exp(x'P + t'E).$$

En insérant l'élément neutre, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\hat{g}\hat{g}' &= exp(\gamma H + \tau Y)\ exp(\eta F)\ exp(\eta' F)\ exp(-\eta' F)\ exp(xP + tE)\ exp(\gamma' H + \tau' Y)\ exp(\eta' F)\ exp(x'P + t'E) \\ &= exp((\gamma+\gamma')H + (\tau+\tau')Y)\ exp((\eta+\eta')F)\ \underbrace{exp(-\eta' F)\ exp(xP + tE)\ exp(\eta' F)}_{I_1}\ exp(x'P + t'E).\end{aligned}$$

En utilisant les formules de B-C-H [15, 16], nous aurons :

$$I_1 = exp(xP + tE + \eta' xH + \eta' tY).$$

La loi du groupe de Lie étendu devient

$$\hat{g}\hat{g}' = exp((\gamma+\gamma'+\eta' x)H + (\tau+\tau'+\eta' t)Y)\ exp((\eta+\eta')F)\ \underbrace{exp(xP + tE)\ exp(x'P + t'E)}_{I_2}$$

or $I_2 = exp((x+x')P + (t+t')E + \frac{1}{2}(xt' - tx')F)$

$$\hat{g}\hat{g}' = exp((\gamma+\gamma'+\eta' x)H + (\tau+\tau'+\eta' t)Y)\ exp((\eta+\eta')F)\ exp((x+x')P + (t+t')E + \frac{1}{2}(xt' - tx')F).$$

De façon simplifiée $I_2 = exp((x+x')P + (t+t')E + xt'F)$ et donc

$$\hat{g}\hat{g}' = exp((\gamma+\gamma'+\eta' x)H + (\tau+\tau'+\eta' t)Y)\ exp((\eta+\eta'+xt')F)\ exp((x+x')P + (t+t')E).$$

La loi du groupe étendu s'écrit de façon équivalente

$$\hat{G} = \left\{\hat{g} = (\gamma,\tau,\eta,x,t)/\hat{g}\cdot\hat{g}' = (\gamma+\gamma'+\eta' x, \tau+\tau'+\eta' t, \eta+\eta'+xt', x+x', t+t')\right\}.$$

L'élément neutre du groupe étendu est $eG = (0,0,0,0,0)$ et l'élément inverse de $\hat{g} = (\gamma,\tau,\eta,x,t)$ est

$$\hat{g}^{-1} = (-\gamma+\eta x - x^2 t, -\tau+\eta t - xt^2, -\eta+xt, -x, -t).$$

En utilisant la relation (1.4), nous obtenons l'expression de la représentation adjointe du groupe de Lie étendu sur son algèbre de Lie

$$Ad_{(\eta,x,t)}(\delta\gamma;\delta\tau,\delta\eta,\delta x,\delta t) = (\delta\gamma - \eta\delta x + x\delta\eta, \delta\tau + xt\delta t - \eta\delta t + t\delta\eta - t^2\delta x, \delta\eta - t\delta x + x\delta t, \delta x, \delta t) \quad (3.1)$$

Déterminons maintenant la représentation coadjointe du groupe de Lie étendu sur l'algèbre de Lie duale.
Soient pour cela $h, y, f, p$ et $e$ les paramètres conjugués aux paramètres du groupe c'est-à-dire des éléments de l'algèbre de Lie duale $\hat{\mathcal{G}}^*$.
Posons

$$Ad^*_{(\eta,x,t)}(h,y,f,p,e) = (h',y',f',p',e')$$

et

$$Ad_{(\eta,x,t)}(\delta\gamma,\delta\tau,\delta\eta,\delta x,\delta t) = (\delta\gamma',\delta\tau',\delta\eta',\delta x',\delta t').$$

Soit $\alpha = (h,y,f,p,e) \in \hat{\mathcal{G}}^*$, soit $\delta X = (\delta\gamma,\delta\tau,\delta\eta,\delta x,\delta t)$ le champ de vecteurs infinitésimaux appartenant à $\hat{\mathcal{G}}$.
Par le principe de dualité entre l'algèbre de Lie et l'algèbre de Lie duale, nous avons :

$$\langle \alpha, \delta X\rangle = \langle Ad^*_g(\alpha), Ad_g(\delta X)\rangle. \tag{3.2}$$

Pour le cas qui nous concerne, nous en déduisons :

$$\begin{gathered}\langle (h,y,f,p,e),(\delta\gamma,\delta\tau,\delta\eta,\delta x,\delta t)\rangle = \langle (h',y',f',p',e'),(\delta\gamma',\delta\tau',\delta\eta',\delta x',\delta t')\rangle \\ h\delta\gamma + y\delta\tau + f\delta\eta + p\delta x + e\delta t = h'\delta\gamma' + y'\delta\tau' + f'\delta\eta' + p'\delta x' + e'\delta t'.\end{gathered}$$

En utilisant (3.1), nous obtenons :

$$\begin{aligned}h\delta\gamma + y\delta\tau + f\delta\eta + p\delta x + e\delta t = {} & h'(\delta\gamma - \eta\delta x + x\delta\eta) + y'(\delta\tau + xt\delta t - \eta\delta t + t\delta\eta - t^2\delta x) \\ & + f'(\delta\eta - t\delta x + x\delta t) + p'\delta x + e'\delta t. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Si le premier membre de l'équation (3.3) a la dimension physique d'une action, alors $h$ et $e$ ont les dimensions physiques d'une énergie, $y$ et $p$ ont les dimensions physiques d'un moment linéaire et $f$ a la dimension d'une force.

Par identification :

$$\begin{cases} h' = h \\ y' = y \\ h'x + ty' + f' = f \\ -\eta h' - t^2 y' - tf' + p' = p \\ y'xt + xf' - \eta y' + e' = e \end{cases} \iff \begin{cases} h' = h \\ y' = y \\ f' = f - hx - ty \\ p' = p + \eta h - htx + tf \\ e' = e + \eta y + hx^2 - xf \end{cases}.$$

On obtient la représentation coadjointe du groupe de Lie étendu sur l'algèbre de Lie duale

$$Ad^*_{(\eta,x,t)}(h,y,f,p,e) = (h,y,f - hx - ty, p + \eta h - htx + tf, e + \eta y + hx^2 - xf).$$

D'après (1.10), la forme de Kirillov associée :

$$K = (K_{ij}(\alpha)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h & y \\ 0 & 0 & -h & 0 & -f \\ 0 & 0 & -y & f & 0 \end{pmatrix}$$

est une matrice antisymétrique d'ordre impair, donc de déterminant nul.

D'après la représentation coadjointe, étant donné que $h$ et $y$ sont deux invariants immédiats, en supprimant les entrées correspondantes, nous obtenons une sous matrice de $K$ :

$$\begin{pmatrix} 0 & h & y \\ -h & 0 & -f \\ -y & f & 0 \end{pmatrix}$$

d'ordre 3 et de rang 2.
On conclut qu'il existe un autre invariant $I$ à calculer en utilisation l'expression (1.13).
En d'autres termes, nous en déduisons le système suivant :

$$\begin{cases} h\dfrac{\partial I}{\partial p} + y\dfrac{\partial I}{\partial e} = 0 & \text{(3.4a)} \\ -h\dfrac{\partial I}{\partial f} - f\dfrac{\partial I}{\partial e} = 0 & \text{(3.4b)} \\ -y\dfrac{\partial I}{\partial f} + f\dfrac{\partial I}{\partial p} = 0 & \text{(3.4c)} \end{cases}$$

En posant

$$\frac{\partial I}{\partial e} = 1 \tag{3.5}$$

et en intégrant par rapport à $e$, nous aurons

$$I = e + I_1(f,p) \tag{3.6}$$

où la constante d'intégration $I_1$ est une fonction de $f$ et $p$.
En remplaçant (3.5) dans (3.4a), nous avons :

$$h\frac{\partial I}{\partial p} + y = 0 \iff \frac{\partial I}{\partial p} = -\frac{y}{h} \tag{3.7}$$

. Par intégration (3.7) membre à membre, nous obtenons :

$$\int \frac{\partial I}{\partial p}dp = -\int \frac{y}{h}dp$$
$$I_1 = -\frac{y}{h}p + I_2(f).$$

En remplaçant aussi (3.5) dans (3.4b), nous avons :

$$h\frac{\partial I}{\partial f} - f = 0 \tag{3.8}$$
$$\frac{\partial I}{\partial f} = -\frac{f}{h}. \tag{3.9}$$

De même, en intégrant membre à membre l'équation (3.9), nous obtenons :

$$\int \frac{\partial I}{\partial f}df = -\int \frac{f}{h}df$$
$$I_2 = -\frac{f^2}{2h} + c$$

L'équation (3.6) devient : $I = e - \frac{y}{h}p - \frac{f^2}{2h} + c$ ou de façon équivalente

$$e = \frac{y}{h}p + \frac{f^2}{2h} + I. \tag{3.10}$$

Comme l'énergie totale d'un système dynamique est la somme d'une énergie cinétique, d'une énergie potentielle et d'une énergie interne du système, en posant $I = U$, l'équation (3.10) s'écrit de façon suivante

$$e = \frac{y}{h}p + \frac{f^2}{2h} + U. \tag{3.11}$$

En posant

$$s = \frac{y}{h},\ h \neq 0. \tag{3.12}$$

En remplaçant (3.12) dans (3.11), nous obtenons le résultat similaire que le résultat trouvé dans [15] :

$$e = U + ps + \frac{f^2}{2h}. \tag{3.13}$$

La forme symplectique est donnée par :

$$\sigma = \begin{pmatrix} df & dp \end{pmatrix} \Omega^{-1} \begin{pmatrix} df \\ dp \end{pmatrix}$$

avec

$$\Omega^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{h} \\ \frac{1}{h} & 0 \end{pmatrix}$$

l' inverse de la restriction de la forme de kirillov à l'orbite.

$$\sigma = \begin{pmatrix} df & dp \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{h}df \\ -\frac{1}{h}dp \end{pmatrix}$$

$\sigma = \frac{1}{h}dpdf - \frac{1}{h}dfdp$ en coordonnées quelconques $(p, f)$.
En utilisant (3.12), nous obtenons la 2-forme symplectique suivante

$$\sigma = ds \wedge df.$$

Pour le cas de la seconde extension du groupe d'Aristote, l'orbite de la représentation coadjointe du groupe de Lie sur le duale de son algèbre de Lie notée $(O_{(h,y,e)}, \sigma)$ est une variété symplectique de dimension 2 dont les coordonnées sont $s$ et $f$.

La réalisation symplectique est par sa définition donnée par :

$$L_{(\eta,x,t)}(f,\mu) = (f - hx - ty, \mu h + \eta h - htx + tf).$$

Sa restriction à l'orbite est donnée par :

$$(f(t), \mu(t)) = L_{(0,0,t)}(f,\mu) = (f - ty, \mu h + tf).$$

ou

$$\begin{cases} f(t) = f - ty \\ \mu(t) = \mu h + tf \end{cases}. \tag{3.14}$$

Les équations du système (3.14) sont des fonctions hamiltoniennes ou des observables classiques.
Il en résulte que les équations du mouvement sont données par le système :

$$\begin{cases} \frac{df(t)}{dt} = -y(t) \\ \frac{d\mu(t)}{dt} = f(t) \end{cases}. \tag{3.15}$$

De façon équivalente en utilisant la notation des physiciens, le système (3.15) s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{f} = -y & \text{(3.16a)} \\ \dot{\mu} \ = f & \text{(3.16b)} \end{cases}$$

La résolution de ce système nous donne les intégrales premières du système dynamique élémentaire.
La dérivée de l'équation (3.16b) donne

$$\ddot{\mu} = \dot{f}. \tag{3.17}$$

Remplaçons (3.16a) dans (3.17), on a :

$$\ddot{\mu} = -y. \tag{3.18}$$

Par intégration membre à membre de l'équation (3.18), on aura :

$$\int \ddot{\mu} = -\int y \tag{3.19}$$

$$\dot{\mu} = -yt + c. \tag{3.20}$$

De même par intégration membre à membre de (3.20), on a :

$$\int \frac{\mu(t)}{dt} = \int (-yt + c)$$

$$\mu(t) = -y\frac{t^2}{2} + ct + c_1.$$

Donc, on obtient les intégrales premières du système élémentaire

$$\begin{cases} f(t) = -yt + c \\ \mu(t) = -y\frac{t^2}{2} + ct + c_1 \end{cases}$$

où $c$ et $c_1$ sont des constantes d'intégration qui pourront être déterminées par la donnée d'une condition initiale.

## 3.3 Orbite coadjointe associée à la seconde extension du groupe de Galilée

D'après les résultats du chapitre précédent, la première extension centrale du groupe de Galilée en une dimension spatiale est donnée par le crochet de Lie non nul suivant :

$$[K,E] = P.$$

Pour déterminer la deuxième extension centrale de cette algèbre de Lie, posons $A$ et $B$ deux nouveaux générateurs tels que $[K,E] = P$, $[K,P] = A$ et $[E,P] = B$ soit la structure de Lie de l'algèbre de Lie étendue.
Vérifions les identités de Jacobi possibles pour que l'algèbre engendrée par $P$, $K$, $E$, $A$, $B$ soit effectivement une algèbre de Lie.

$$\begin{gathered}[[K,E],P] + [[E,P],K] + [P,K],E] = 0 \\ [P,P] + [B,K] - [A,E] = 0 \\ [B,K] = [A,E]\ .\end{gathered}$$

Comme on calcule une extension centrale, les nouveaux générateurs commutent avec les anciens donc $[A,E] = 0$ et $[B,K] = 0$.
Pas de contraintes sur les nouveaux générateurs $A$ et $B$ donc la deuxième extension centrale existe et est l'algèbre de Lie engendrée par $P$, $K$, $E$, $A$, $B$ est définie par les crochets de Lie non nuls suivants :

$$\begin{gathered}[K,E] = P \\ [K,P] = A \\ [E,P] = B.\end{gathered}$$

En se référant sur les résultats de l'analyse dimensionnelle, nous obtenons pour ce cas : Comme $[K,P] = A$, soit $\omega$ le paramètre conjugué associé à $A$ ; nous avons :

$$[\omega] = \frac{ml^2t^{-1}}{lt^{-1}l} = m.$$

Posons donc $[K,P] = M$. Cela signifie que le paramètre conjugué a la dimension d'une masse. De même

$$\begin{aligned}[\omega] &= \frac{ml^2t^{-1}}{lt} \\ [\omega] &= mlt^{-2} = F.\end{aligned}$$

Posons donc $[E,P] = F$. Cela signifie que le paramètre conjugué a la dimension d'une force.

Finalement, la seconde extension centrale de l'algèbre de Lie associée au cas du groupe de Galilée en une dimension spatiale est engendrée par les champs de vecteur $M$, $F$, $P$, $K$, $E$ avec la structure de Lie :

$$[K,E] = P$$
$$[K,P] = M$$
$$[E,P] = F.$$

Déterminons à présent la loi du groupe étendu associé.
Soit $\hat{g}$ l'élément général du groupe de Lie étendu, c'est-à-dire la composante connexe à l'identité de $G$ notée $\hat{G}$. Il s'écrit :

$$\hat{g} = exp(\psi M + \eta F)\ exp(xP)\ exp(vK + tE).$$

La loi du groupe étendue est donnée par la multiplication suivante :

$$\hat{g}\hat{g}' = exp(\psi M + \eta F)\ exp(xP)\ exp(vK + tE)\ exp(\psi' M + \eta' F)\ exp(x'P)\ exp(v'K + t'E).$$

En insérant l'élément neutre, on obtenons :

$$\begin{aligned}\hat{g}\hat{g}' &= exp(\psi M + \eta F)\ exp(xP)\ exp(x'P)\ exp(-x'P) exp(vK + tE)\ exp(\psi' M + \eta' F)\ exp(x'P)\ exp(v'K + t'E) \\ &= exp((\psi + \psi')M + (\eta + \eta')F)\ exp((x + x')P)\ \underbrace{exp(-x'P)\ exp(vK + tE)\ exp(x'P)}_{I_1}\ exp(v'K + t'E).\end{aligned}$$

En utilisant les formules de B-C-H [15, 16], nous obtenons :

$$I_1 = exp(vK + tE + x'vM + x'tF)$$

$$\hat{g}\hat{g}' = exp((\psi + \psi' + x'v)M + (\eta + \eta' + x't)F)\ exp((x + x')P)\ \underbrace{exp(vK + tE)\ exp(v'K + t'E)}_{I_2}$$

or $I_2 = exp((v + v')K + (t + t')E + \frac{1}{2}(vt' - tv')P)$
D'où

$$\begin{aligned}\hat{g}\hat{g}' = exp((\psi + \psi' + x'v)M + (\eta + \eta' + x't)F)\ exp((x + x')P) \\ exp((v + v')K + (t + t')E + \frac{1}{2}(vt' - tv')P).\end{aligned}$$

De façon simplifiée $I_2 = exp((v + v')K + (t + t')E + vt'P$ et donc

$$\hat{g}\hat{g}' = exp((\psi + \psi' + x'v)M + (\eta + \eta' + x't)F)\ exp((x + x' + vt')P)\ exp((v + v')K + (t + t')E).$$

La loi du groupe étendu s'écrit de façon équivalente

$$\hat{G} = \left\{\hat{g} = (\psi, \eta, x, v, t)/\hat{g} \cdot \hat{g}^{'} = (\psi + \psi' + x'v, \eta + \eta' + x't, x + x' + vt', v + v', t + t')\right\}.$$

L'élément neutre du groupe étendue est $eG = (0,0,0,0,0)$ et l'élément inverse de $\hat{g} = (\psi, \eta, x, v, t)$ de $G$ est

$$\hat{g}^{-1} = (-\psi + xv - v^2 t, -\eta + xt - vt^2, -x + vt, -v, -t).$$

En utilisant la relation (1.4), nous obtenons la représentation adjointe du groupe de Lie étendu sur l'algèbre de Lie étendue

$$Ad_g \delta X = (\delta\psi - x\delta v + v\delta x, \delta\eta + vt\delta t - x\delta t + t\delta x - t^2\delta v, \delta x - t\delta v + v\delta t, \delta v, \delta t) \qquad (3.21)$$

avec $g = (x, v, t)$ et $\delta X = (\delta\psi, \delta\eta, \delta x, \delta v, \delta t)$.

Déterminons maintenant la représentation coadjointe du groupe de Lie étendu $\hat{G}$ sur le dual de l'algèbre de Lie étendue $\hat{\mathcal{G}}^*$.
Soient pour cela $m$, $f$, $p$, $k$ et $e$ les paramètres conjugués aux paramètres du groupe c'est-à-dire des éléments de l'algèbre de Lie duale $\hat{\mathcal{G}}^*$.
Posons

$$Ad^*_{(x,v,t)}(m, f, p, k, e) = (m', f', p', k', e')$$

et

$$Ad_{(x,v,t)}(\delta\psi, \delta\eta, \delta x, \delta v, \delta t) = (\delta\psi', \delta\eta', \delta x', \delta v', \delta t').$$

En utilisant la dualité entre $\hat{\mathcal{G}}$ et $\hat{\mathcal{G}}^*$, nous obtenons pour le cas du groupe de Galilée en une dimension spatiale :

$$\langle (m, f, p, k, e), (\delta\psi, \delta\eta, \delta x, \delta v, \delta t) \rangle = \langle (m', f', p', k', e'), (\delta\psi', \delta\eta', \delta x', \delta v', \delta t') \rangle$$

$$m\delta\psi + f\delta\eta + p\delta x + k\delta v + e\delta t = m'\delta\psi' + f'\delta\eta' + p'\delta x' + k'\delta v' + e'\delta t'.$$

En utilisant (3.21), nous avons :

$$\begin{aligned} m\delta\psi + f\delta\eta + p\delta x + k\delta v + e\delta t = {} & m'(\delta\psi - \delta v + v\delta x) + f'(\delta\eta + vt\delta t - x\delta t + t\delta x - t^2\delta v) \\ & + p'(\delta x - t\delta v + v\delta t) + k'\delta v + e'\delta t. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Si le premier membre de l'équation (3.22) a la dimension physique d'une action, alors $m, f, p, k$ et $e$ ont respectivement les dimensions physiques d'une masse, une force, un moment linéaire, un moment statique et une énergie.
Par identification :

$$\begin{cases} m' = m \\ f' = f \\ m'v + f't + p' = p \\ -m'x - t^2 f' - tp' + k' = k \\ f'vt + xf' - vp' + e' = e \end{cases} \iff \begin{cases} m' = m \\ f' = f \\ p' = p - mv - ft \\ k' = k + mx - mvt + pt \\ e' = e + fx + mv^2 - pv \end{cases}.$$

On obtient la représentation coadjointe du groupe de Lie étendu sur l'algèbre de Lie duale

$$Ad^*_{(x,v,t)}(m, f, p, k, e) = (m, f, p - mv - ft, k + mx - mvt + pt, e + fx + mv^2 - pv).$$

En utilisant la relation (1.10), la forme de Kirillov associée est

$$K = (K_{ij}(\alpha)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m & f \\ 0 & 0 & -m & 0 & -p \\ 0 & 0 & -f & p & 0 \end{pmatrix}$$

est une matrice antisymétrique d'ordre impair de déterminant nul.

D'après la représentation coadjointe, étant donné que $m$ et $f$ sont deux invariants immédiats, en supprimant les deux entrées correspondantes, nous obtenons une sous matrice de $K$ :

$$\begin{pmatrix} 0 & m & f \\ -m & 0 & -p \\ -f & p & 0 \end{pmatrix}$$

d'ordre 3 et de rang 2.
On conclut qu'il existe un autre invariant $I$ à calculer en utilisant l'expression (1.13).
En d'autre termes, le système équivalent à résoudre s'écrit :

$$\begin{cases} m\dfrac{\partial I}{\partial k} + f\dfrac{\partial I}{\partial e} = 0 & \text{(3.23a)} \\ -m\dfrac{\partial I}{\partial p} - p\dfrac{\partial I}{\partial e} = 0 & \text{(3.23b)} \\ -f\dfrac{\partial I}{\partial p} + p\dfrac{\partial I}{\partial k} = 0 & \text{(3.23c)} \end{cases}$$

Posons

$$\frac{\partial I}{\partial e} = 1 \tag{3.24}$$

et en intégrant par rapport à $e$, nous aurons

$$I = e + I(p,k) \tag{3.25}$$

où la constante d'intégration $I$ est une fonction de $p$ et $k$ (constante par rapport à $e$).
En remplaçant l'équation (3.24) dans (3.23a), nous avons :

$$m\frac{\partial I}{\partial k} + f = 0 \tag{3.26}$$

$$\frac{\partial I}{\partial k} = -\frac{f}{m}. \tag{3.27}$$

Par intégration de (3.27) membre à membre, nous obtenons :

$$\int \frac{\partial I}{\partial k} dk = -\int \frac{f}{m} dk$$

$$I_1 = -\frac{f}{m}k + I_2(p).$$

Remplaçons aussi l'équation (3.24) dans (3.23b) :

$$m\frac{\partial I}{\partial p} - p = 0 \tag{3.28}$$

$$\frac{\partial I}{\partial p} = -\frac{p}{m}. \tag{3.29}$$

En intégrant membre à membre l'équation (3.29), on a :

$$\int \frac{\partial I}{\partial p} dp = -\int \frac{p}{m} dp$$

$$I_2 = -\frac{p^2}{2m} + c$$

$I = e - \frac{f}{m}k - \frac{p^2}{2m} + c$ ou de façon équivalente $e = \frac{f}{m}k + \frac{p^2}{2m} + I$.
comme l'énergie totale d'un système dynamique qui est la somme de l'énergie cinétique, de l'énergie potentielle et d'une énergie interne du système, en posant $I = U$, l'équation (3.25) s'écrit comme suit

$$e = U + \frac{k}{m}f + \frac{p^2}{2m}. \tag{3.30}$$

En posant

$$q = \frac{k}{m},\ m \neq 0. \tag{3.31}$$

En remplaçant (3.31) dans (3.58), nous obtenons

$$e = U + fq + \frac{p^2}{2m}$$
$$e = U + m\omega^2 q^2 + \frac{p^2}{2m}$$

où $\frac{p^2}{2m}$ est l'énergie cinétique du système, $m\omega^2 q^2$ est l'énergie potentielle du système et $U$ est l'énergie interne du système.
La forme symplectique est donnée par :

$$\sigma = \begin{pmatrix} dp & dk \end{pmatrix} \Omega^{-1} \begin{pmatrix} dp \\ dk \end{pmatrix} \qquad avec\ \ \Omega^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{m} \\ \frac{1}{m} & 0 \end{pmatrix}$$
$$\sigma = \begin{pmatrix} dp & dk \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{m}dk \\ \frac{1}{m}dp \end{pmatrix}$$

$\sigma = \frac{1}{m}dkdp - \frac{1}{m}dpdk$ en coordonnées quelconques $(p,k)$.
En posant $q = -\frac{k}{m}$, la 2-forme symplectique s'écrit

$$\sigma = dpdq - dqdp = dp \wedge dq$$

la forme symplectique standard.

Pour le cas de la seconde extension du groupe de Galilée, l'orbite coadjointe maximale notée $(O_{(m,f,e)}, \sigma)$, avec $(m,f,e) \neq (0,0,0)$ est une variété symplectique de dimension 2 dont les coordonnées sont $q$ et $p$.

La réalisation symplectique relative à cette extension centrale est par sa définition :

$$L_{(x,v,t)}(p,q) = (p - mv - ft, -mq + mx + pt - mvt).$$

La restriction à l'orbite est par conséquent :

$$(p(t), q(t)) = L_{(0,0,t)}(p,q) = (p - ft, mq + pt).$$

Les fonctions hamiltoniennes sont données par le système suivant :

$$\begin{cases} p(t) = p - ft \\ q(t) = mq + pt \end{cases}$$

et les équations du mouvement sont données par le système

$$\begin{cases} \frac{dp(t)}{dt} = -f(t) \\ \frac{dq(t)}{dt} = p(t) \end{cases} . \tag{3.32}$$

De façon équivalente en utilisant la notation des physiciens, le système (3.32) s'écrit

$$\begin{cases} \dot{p} = -f & \text{(3.33a)} \\ \dot{q} \ \ = p & \text{(3.33b)} \end{cases}$$

La résolution du système (3.32) donne les intégrales premières du système élémentaire (système dynamique) :
La dérivée de (3.33b) nous donne

$$\ddot{q} = \dot{p}. \tag{3.34}$$

En substituant l'équation (3.33a) dans (3.34), nous obtenons :

$$\ddot{q} = -f \tag{3.35}$$

Par intégration de (3.35) membre à membre , nous obtenons :

$$\int \ddot{q} = -\int f \tag{3.36}$$

$$\dot{q} = -ft + c. \tag{3.37}$$

De même, l'intégration de (3.37) membre à membre nous donne

$$\int \dot{q} = \int (-ft + c)$$

$$q = -f\frac{t^2}{2} + ct + c_1.$$

On obtient les intégrales premières du système élémentaire

$$\begin{cases} p(t) = -ft + c \\ q(t) = -f\frac{t^2}{2} + ct + c_1 \end{cases}$$

où $c$ et $c_1$ sont des constantes d'intégration qui pourront être déterminées par la donnée d'une condition initiale.

## 3.4 Orbite coadjointe associée à la seconde extension du groupe de Weyl-Heisenberg

D'après les résultats du chapitre précédent, la première extension centrale du groupe de Weyl-Heisenberg en une dimension spatiale est donnée par le crochet de Lie non nul suivant :

$$[P,K] = M.$$

Pour déterminer l' extension centrale de cette algèbre de Lie, posons $A$ et $B$ deux nouveaux générateurs tels que $[P,K] = M$, $[P,M] = A$ et $[K,M] = B$ soit la structure de Lie de l'algèbre de Lie étendue.
Vérifions les identités de Jacobi possibles pour que l'algèbre engendrée par $M$, $P$, $K$, $A$, $B$ soit effectivement une algèbre de Lie.

$$\begin{gathered}[[P,K],M] + [[K,M],P] + [M,P],K] = 0 \\ [M,M] + [B,P] - [A,K] = 0 \\ [B,P] = [A,K].\end{gathered}$$

Comme, on calcule une deuxième extension centrale, les nouveaux générateurs commutent avec les anciens donc $[A,K] = 0$ et $[B,P] = 0$.
Il n'y a pas de contraintes sur les nouveaux générateurs $A$ et $B$ donc la deuxième extension centrale existe et est l'algèbre de Lie engendrée par $M$, $P$, $K$, $A$, $B$ est définie par les crochets de Lie non nuls suivants :

$$\begin{gathered}[P,K] = M \\ [P,M] = A \\ [K,M] = B.\end{gathered}$$

En se référant sur les résultats de l'analyse dimensionnelle, nous obtenons pour le cas de Weyl-Heisenberg :

$$\begin{aligned}[P][M][\omega] &= ml^2t^{-1} \\ [\omega] &= \frac{ml^2t^{-1}}{ml} \\ [\omega] &= lt^{-1}.\end{aligned}$$

Donc $\omega$ est une vitesse.
Posons donc $[P,M] = K'$. Cela signifie que le paramètre conjugué a la dimension d'une vitesse.
De même

$$\begin{aligned}[K][M][\omega] &= ml^2t^{-1} \\ [\omega] &= \frac{ml^2t^{-1}}{lt^{-1}.m} \\ [\omega] &= l.\end{aligned}$$

Donc $\omega$ est une longueur.
Posons donc $[K,M] = P'$. Cela signifie que le paramètre conjugué a la dimension d'une longueur.

Finalement, la seconde extension centrale de l'algèbre de Lie associée au cas du groupe de Weyl-Heisenberg est engendrée par les champs de vecteur $P'$, $K'$, $M$, $P$, $K$ avec la structure de Lie :

$$\begin{aligned}[P,K] &= M\\ [P,M] &= K'\\ [K,M] &= P'.\end{aligned}$$

Déterminons à présent la loi du groupe étendu associé.
Soit $\hat{g}$ l'élément général du groupe de Lie étendu associé, c'est-à-dire composante connexe à l'identité de $G$ notée $\hat{G}$. Il s'écrit :

$$\hat{g} = exp(\theta P' + \beta K')\ exp(\psi M)\ exp(xP + vK).$$

La loi du groupe étendue est donnée par la multiplication suivante :

$$\hat{g}\hat{g}' = exp(\theta P' + \beta K')\ exp(\psi M)\ exp(xP + vK)\ exp(\theta' P' + \beta' K')\ exp(\psi' M)\ exp(x'P + v'K).$$

En insérant l'élément neutre, nous obtenons :

$$\hat{g}\hat{g}' = exp((\theta+\theta')P' + (\beta+\beta')K')\ exp(\psi M)exp(\psi' M)\ \underbrace{exp(-\psi' M)exp(xP+vK)exp(\psi' M)}_{I_1}\ exp(x'P+v'K).$$

En utilisant les formules B-C-H [15, 16], nous aurons :
$I_1 = exp(vK + tE + x'vM + x'tF)$

$$\hat{g}\hat{g}' = exp((\theta+\theta'+\psi' v)P' + (\beta+\beta'+\psi' x)K')\ exp((\psi+\psi')M\ \underbrace{exp(xP+vK)\ exp(x'P+v'K)}_{I_2}.$$

Or $I_2 = exp((x+x')P + (v+v')K + \frac{1}{2}(xv' - vx')M)$

D'où

$$\hat{g}\hat{g}' = exp((\theta+\theta'+\psi' v)P' + (\beta+\beta'+\psi' x)K')\ exp((\psi+\psi'+xv')M)\ exp((x+x')P + (v+v')K).$$

De façon équivalente, la loi du groupe étendu s'écrit :

$$\hat{G} = \left\{\hat{g} = (\theta,\beta,\psi,x,v)/\hat{g}\cdot\hat{g}^{'} = (\theta+\theta'+\psi' v, \beta+\beta'+\psi' x, \psi+\psi'+xv', x+x', v+v')\right\}.$$

L'élément neutre du groupe étendu est $eG = (0,0,0,0,0)$ et l'élément inverse de
$\hat{g} = (\theta,\beta,\psi,x,v)$ de $G$ est

$$\hat{g}^{-1} = (-\theta - xv^2 + \psi v, -\beta - vx^2 + \psi x, -\psi + xv, -x, -v).$$

En utilisant la relation (1.4), nous obtenons la représentation adjointe du groupe de Lie étendu sur l'algèbre de Lie étendue

$$Ad_g \delta X = (\delta\theta + xv\delta v - \psi\delta v + v\delta\psi - v^2\delta x, \delta\beta - \psi\delta x + x\delta\psi, \delta\psi - v\delta x + x\delta v, \delta x, \delta v) \quad (3.38)$$

avec $g = (\psi, x, v)$ et $\delta X = (\delta\theta; \delta\beta, \delta\psi, \delta x, \delta v)$.

Déterminons maintenant la représentation coadjointe du groupe de Lie étendu $\hat{G}$ sur sur le dual de l'algèbre de Lie étendue $\hat{\mathcal{G}}^*$.
Soient pour cela $\alpha$, $\lambda$, $m$, $p$ et $k$ les paramètres conjugués du groupe c'est-à-dire des éléments de l'algèbre de Lie duale $\hat{\mathcal{G}}^*$.
Posons

$$Ad^*_{(\psi,x,v)}(\alpha,\lambda,m,p,k) = (\alpha',\lambda',m',p',k')$$

et

$$Ad_{(\psi,x,v)}(\delta\theta,\delta\beta,\delta\psi,\delta x,\delta v) = (\delta\theta';\delta\beta',\delta\psi',\delta x',\delta v').$$

En utilisant la dualité entre $\hat{\mathcal{G}}$ et $\hat{\mathcal{G}}^*$, nous obtenons pour le cas du groupe de Weyl-Heisenberg en une dimension spatiale :

$$\langle(\alpha,\lambda,m,p,k),(\delta\theta,\delta\beta,\delta\psi,\delta x,\delta v)\rangle = \langle(\alpha',\lambda',m',p',k'),(\delta\theta',\delta\beta',\delta\psi',\delta x',\delta v')\rangle$$

$$\alpha\delta\theta+\lambda\delta\beta+m\delta\psi+p\delta x+k\delta v = \alpha'\delta\theta'+\lambda'\delta\beta'+m'\delta\psi'+p'\delta x'+k'\delta v'.$$

En utilisant l'expression (3.38), on aura :

$$\begin{aligned}\alpha\delta\theta+\lambda\delta\beta+m\delta\psi+p\delta x+k\delta v = \alpha'(\delta\theta+xv\delta v-\psi\delta v+v\delta\psi-v^2\delta x)+\lambda'(\delta\beta-\psi\delta x+x\delta\psi)\\ +m'(\delta\psi-v\delta x+x\delta v)+p'\delta x+k'\delta v. \quad (3.39)\end{aligned}$$

Si le premier membre de l'équation (3.39) a la dimension physique d'une action, alors $\alpha$ et $p$ ont les dimensions physiques d'un moment linéaire, $\lambda$ et $k$ ont les dimensions physiques d'un moment statique et $m$ a la dimension physique d'une masse.
Par identification :

$$\begin{cases}\alpha'=\alpha\\ \lambda'=\lambda\\ \alpha'v+\lambda'x+m'=m\\ -\alpha'v^2-\lambda\psi-m'v+p'=p\\ \alpha'xv-\alpha'\psi+m'x+k'=k\end{cases} \iff \begin{cases}\alpha'=\alpha\\ \lambda'=\lambda\\ m'=m-\alpha v-\lambda x\\ p'=p+\lambda\psi-\lambda xv+mv\\ k'=k+\alpha\psi+\lambda x^2-mx\end{cases}.$$

On obtient la représentation coadjointe du groupe de Lie étendu sur l'algèbre de Lie duale

$$Ad^*_{(\psi,x,v)}(\alpha,\lambda,m,p,k) = (\alpha,\lambda,m-\alpha v-\lambda x,p+\lambda\psi-\lambda xv+mv,k+\alpha\psi+\lambda x^2-mx).$$

La forme de Kirillov associée

$$K=(K_{ij}(\alpha)) = \begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&\lambda&\alpha\\0&0&-\lambda&0&-m\\0&0&-\alpha&m&0\end{pmatrix}$$

est une matrice antisymétrique d'ordre impair de déterminant nul.
D'après la représentation coadjointe, étant donné que $\lambda$ et $\alpha$ sont deux invariants immédiats, en supprimant les deux entrées correspondantes, nous obtenons une sous-matrice

$$\begin{pmatrix}0&\lambda&\alpha\\-\lambda&0&-m\\-\alpha&m&0\end{pmatrix}$$

d'ordre 3 et de rang 2.
On conclut qu'il existe un autre invariant à calculer en utilisant l'expression (1.13).
En d'autres termes, le système équivalent à résoudre s'écrit :

$$\begin{cases} \lambda\dfrac{\partial I}{\partial p}+\alpha\dfrac{\partial I}{\partial k}=0 & (3.40a)\\ -\lambda\dfrac{\partial I}{\partial m}-m\dfrac{\partial I}{\partial k}=0 & (3.40b)\\ -\alpha\dfrac{\partial I}{\partial m}+m\dfrac{\partial I}{\partial p}=0 & (3.40c) \end{cases}$$

En posant

$$\frac{\partial I}{\partial k}=1 \tag{3.41}$$

et en intégrant par rapport à $e$, nous aurons :

$$I=k+I_1(m,p) \tag{3.42}$$

où la constante d'intégration $I_1$ est une fonction de $m$ et $p$ (constante par rapport à $e$).
La substitution de (3.41) dans (3.40a), nous donne

$$\lambda\frac{\partial I}{\partial p}+\alpha=0 \tag{3.43}$$

$$\frac{\partial I}{\partial p}=-\frac{\alpha}{\lambda}. \tag{3.44}$$

Par intégration de (3.44) membre à membre, nous obtenons :

$$\int\frac{\partial I}{\partial p}dp=-\int\frac{\alpha}{\lambda}dp$$
$$I_1=-\frac{\alpha}{\lambda}p+I_2(m).$$

De plus, la substitution de (3.41) dans (3.40b), nous donne

$$\lambda\frac{\partial I}{\partial m}-m=0 \tag{3.45}$$

$$\frac{\partial I}{\partial m}=-\frac{m}{\lambda}. \tag{3.46}$$

De même, par intégration de (3.46) membre à membre, nous obtenons :

$$\int\frac{\partial I}{\partial m}dm=-\int\frac{m}{\lambda}dm$$
$$I_2=-\frac{m^2}{2\lambda}+c.$$

L'équation (3.42) devient :

$$I=k-\frac{\alpha}{\lambda}p-\frac{m^2}{2\lambda}+c.$$

ou de façon équivalente

$$k=\frac{\alpha}{\lambda}p+\frac{m^2}{2\lambda}+I.$$

La 2-forme symplectique est donnée par :

$$\sigma = \begin{pmatrix} dm & dp \end{pmatrix} \Omega^{-1} \begin{pmatrix} dm \\ dp \end{pmatrix} \qquad avec \;\; \Omega^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\lambda} \\ \frac{1}{\lambda} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} dm & dp \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\lambda} dm \\ \frac{1}{\lambda} dp \end{pmatrix}$$

$\sigma = -\frac{1}{\lambda} dmdp + \frac{1}{\lambda} dpdm$ en coordonnées quelconques $(m, p)$.
Posons $\xi = -\frac{1}{\lambda} p \iff d\xi = -\frac{1}{\lambda} dp$

$$\sigma = d\xi dm - dmd\xi = d\xi \wedge dm.$$

Pour le cas du groupe de Weyl-Heisenberg, l'orbite de la représentation coadjointe du groupe de Lie étendu sur le dual de son algèbre de Lie notée $(O_{(\alpha,\lambda,k)}, \sigma)$ est une variété symplectique de dimension 2 dont les coordonnées sont $\xi$ et $m$ (coordonnées de Darboux).

La réalisation symplectique relative à la seconde extension centrale est par sa définition

$$L_{(\psi,x,v)}(q, p) = (\lambda q - \alpha v - \lambda x, p + \lambda\psi + \lambda q v - \lambda x v).$$

Sa restriction à l'orbite est par conséquent :

$$(q(v), p(v)) = L_{(0,0,v)}(q, p) = (\lambda q - \alpha v, p + \lambda q v).$$

Les fonctions hamiltoniennes sont données par le système

$$\begin{cases} q(v) = \lambda q - \alpha v \\ p(v) = p + \lambda q v \end{cases}$$

et les équations du mouvement sont données par le système

$$\begin{cases} \dfrac{dq(v)}{dv} = -\lambda(v) & \text{(3.47a)} \\ \dfrac{dp(v)}{dv} = \lambda q(v) & \text{(3.47b)} \end{cases}$$

La résolution de ce système nous donne les intégrales premières du système dynamique élémentaire.
En dérivant par rapport à $v$ l'équation (3.47b), on a

$$\frac{d}{dv}\left(\frac{dp(v)}{dv}\right) = \lambda \frac{dq}{dv}. \tag{3.48}$$

La substitution de l'équation (3.47a) dans (3.48) donne

$$\frac{d}{dv}\left(\frac{dp(v)}{dv}\right) = -\lambda^2. \tag{3.49}$$

Par intégration membre à membre de (3.49), nous avons :

$$\int \frac{d}{dv}\left(\frac{dp(v)}{dv}\right) = -\int \lambda^2$$
$$\frac{dp(v)}{dv} = -\lambda^2 v + c.$$

Puis l'intégration de membre à membre nous donne

$$\int \frac{dp(v)}{dv} = \int (-\lambda^2 v + c)$$
$$p(v) = -\frac{\lambda^2 v^2}{2} + cv + c_1.$$

On obtient les intégrales premières du système dynamique élémentaire

$$\begin{cases} q(v) = -\lambda v + c \\ p(v) = -\frac{\lambda^2 v^2}{2} + cv + c_1 \end{cases}$$

où $c$ et $c_1$ sont des constantes d'intégration qui pourront être déterminées par la donnée d'une condition initiale.

## 3.5 Orbite coadjointe associée à la seconde extension du groupe de Carroll

D'après les résultats du chapitre précédent, la première extension centrale du groupe de Carroll en une dimension spatiale est donnée par le crochet de Lie non nul suivant :

$$[\Sigma, P] = E.$$

Pour obtenir la deuxième extension centrale de cette algèbre de Lie, posons $A$ et $B$ deux nouveaux générateurs tels que $[\Sigma, P] = E$, $[\Sigma, E] = A$ et $[P, E] = B$ soit la structure de Lie de l'algèbre de Lie étendue.
Vérifions les identités de Jacobi possibles pour l'algèbre engendrée par $A$, $B$, $\Sigma$, $P$, $E$ soit effectivement une algèbre de Lie.

$$[[\Sigma, P], E] + [[P, E], \Sigma] + [E, \Sigma], P] = 0$$
$$[E, E] + [B, \Sigma] - [A, P] = 0$$
$$[B, \Sigma] = [A, P].$$

Comme on calcule une extension centrale, les nouveaux générateurs commutent avec les anciens donc $[A, P] = 0$ et $[B, \Sigma] = 0$.
Donc, il n'y a pas de contraintes sur les nouveaux générateurs $A$ et $B$ donc la deuxième extension centrale existe et est l'algèbre de Lie engendrée par $A$, $B$, $\Sigma$, $P$, $E$ est définie par les crochets de Lie suivants :

$$[\Sigma, P] = E$$
$$[\Sigma, E] = A$$
$$[P, E] = B\,.$$

En se référant sur les résultats de l'analyse dimensionnelle, nous obtenons pour le cas de Carroll :

$$\begin{aligned}[\Sigma][E][\omega] &= ml^2t^{-1}\\ [\omega] &= \frac{ml^2t^{-1}}{l^{-1}t.t}\\ [\omega] &= mlt^{-1}\times(lt^{-1})^2\\ [\omega] &= c^2P'.\end{aligned}$$

Posons donc $[\Sigma,E]=c^2P'$. signifie que le paramètre conjugué a la dimension d'un moment linéaire.
De même

$$\begin{aligned}[P][E][\omega] &= ml^2t^{-1}\\ [\omega] &= \frac{ml^2t^{-1}}{lt}\\ [\omega] &= mlt^{-2}=m.a=F.\end{aligned}$$

Donc $\omega$ est une force.
Posons donc $[E,P]=F$. Cela signifie que le paramètre conjugué a la dimension d'une force.

Finalement, l'algèbre de Lie étendue est engendrée par les champs de vecteur $P'$, $F$, $\Sigma$, $P$, $E$ avec la structure de Lie :

$$\begin{aligned}[\Sigma,P] &= E\\ [\Sigma,E] &= c^2P'\\ [P,E] &= F.\end{aligned}$$

Déterminons à présent la loi du groupe étendu associé.
Soit $\hat{g}$ l'élément général du groupe de Lie étendu, c'est-à-dire composante connexe à l'identité de $G$ notée $\hat{G}$. Il s'écrit :
$\hat{g}=exp(tE)\ exp(s\Sigma+xP)$.

La loi du groupe étendue est donnée par la multiplication :
$\hat{g}\hat{g}'=exp(yP'+\eta F)\ exp(tE)exp(s\Sigma+xP)\ exp(y'P'+\eta'F)\ exp(t'E)\ exp(s'\Sigma+x'P)$.
En insérant l'élément neutre, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\hat{g}\hat{g}' &= exp(yP'+\eta F)\ exp(tE)\ exp(t'E)\ exp(-t'E)\ exp(s\Sigma+xP)\ exp(y'P'+\eta'F)\ exp(t'E)\ exp(s'\Sigma+x'P)\\ &= exp((y+y')P'+(\eta+\eta')F)\ exp((t+t')E)\ \underbrace{exp(-t'E)\ exp(s\Sigma+xP)\ exp(t'E)}_{I_1}\ exp(s'\Sigma+x'P).\end{aligned}$$

En utilisant les formules de B-C-H [15, 16], nous aurons :
$I_1=exp(s\Sigma+xP+t'sc^2P'+t'xF)$
$\hat{g}\hat{g}'=exp((y+y'+t'sc^2)P'+(\eta+\eta'+t'x)F)\ exp((t+t')E)\ \underbrace{exp(s\Sigma+xP)\ exp(s'\Sigma+x'P)}_{I_2}$.

Or $I_2=exp((s+s')\Sigma+(x+x')P+\frac{1}{2}(sx'-xs')E)$

D'où

$$\hat{g}\hat{g}'=exp((y+y'+t'sc^2)P'+(\eta+\eta'+t'x)F)\ exp((t+t')E)\ exp((s+s')\Sigma+(x+x')P+\frac{1}{2}(sx'-xs')E).$$

De façon simplifiée $I_2 = exp((s+s')\Sigma + (x+x')P + sx'E)$ et donc
$\hat{g}\hat{g}' = exp((y+y'+\frac{t'}{s})P' + (\eta+\eta'+t'x)F)\ exp((t+t'+sx')E)\ exp((s+s')\Sigma + (x+x')P)$.

La loi du groupe étendu s'écrit de façon équivalente

$$\hat{G} = \{\hat{g} = (y,\eta,t,s,x)/\hat{g}\cdot\hat{g}^{'} = (y+y'+c^2t's, \eta+\eta'+t'x, t+t'+sx', s+s', x+x')\}$$

L'élément neutre du groupe étendu est $eG = (0,0,0,0,0)$ et l'élément inverse de
$\hat{g} = (y,\eta,t,s,x)$ est

$$\hat{g}^{-1} = (-y+c^2ts - c^2s^2x, -\eta+xt-sx^2, -t+sx, -s, -x).$$

En utilisant la relation (1.4), nous obtenons la représentation adjointe du groupe de Lie étendu sur l'algèbre de Lie étendue

$$Ad_g\delta X = (\delta y - c^2t\delta s + c^2s\delta t, \delta\eta - t\delta x + sx\delta x + x\delta t - x^2\delta s, \delta t - x\delta s + s\delta x, \delta s, \delta x) \qquad (3.50)$$

avec $\delta X = (\delta y, \delta\eta, \delta t, \delta s, \delta x)$.
Déterminons maintenant la représentation coadjointe du groupe de Lie étendu $\hat{G}$ sur sur le dual de l'algèbre de Lie étendue $\hat{\mathcal{G}}^*$ :
Soient pour cela $\alpha$, $f$, $e$, $\varepsilon$ et $p$ les paramètres conjugués aux paramètres du groupe, c'est-à-dire les éléments de l'algèbre de Lie duale $\hat{\mathcal{G}}^*$
Posons

$$Ad^*_{(t,s,x)}(\alpha,f,e,\varepsilon,p) = (\alpha',f',e',\varepsilon',p')$$

et

$$Ad_{(t,s,x)}(\delta y,\delta\eta,\delta t,\delta s,\delta x) = (\delta y';\delta\eta',\delta t',\delta s',\delta x').$$

En se référant sur les résultats de dualité entre $\hat{\mathcal{G}}$ et $\hat{\mathcal{G}}^*$ du groupe d'Aristote en une dimension spatiale, nous obtenons pour le cas de Carroll en une dimension spatiale :

$$\begin{aligned}\langle(\alpha,f,e,\varepsilon,p),(\delta y,\delta\eta,\delta t,\delta s,\delta x)\rangle &= \langle(\alpha',f',e',\varepsilon',p'),(\delta y',\delta\eta',\delta t',\delta s',\delta t')\rangle\\ &= \alpha'\delta y' + f'\delta\eta' + e'\delta t' + \varepsilon'\delta s' + p'\delta x'.\end{aligned}$$

En utilisant (3.50), on a :

$$\begin{aligned}\alpha\delta y + f\delta\eta + e\delta t + \varepsilon\delta s + p\delta x = \alpha'(\delta y - c^2t\delta s + c^2s\delta t) + f'(\delta\eta - t\delta x + sx\delta x + x\delta t - x^2\delta s)\\ + e'(\delta t - x\delta s + s\delta x) + \varepsilon'\delta s + p'\delta x.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha\delta y + f\delta\eta + e\delta t + \varepsilon\delta s + p\delta x = \alpha'\delta y - \alpha'c^2t\delta s + \alpha'c^2s\delta t + f'\delta\eta - f't\delta x + f'sx\delta x + f'x\delta t - f'x^2\delta s\\ + e'\delta t - e'x\delta s + e's\delta x + \varepsilon'\delta s + p'\delta x. \qquad (3.51)\end{aligned}$$

Si le premier membre de l'équation (3.51) a la dimension physique d'une action, alors $\alpha$ et $p$ ont les dimensions physiques d'un moment linéaire, $f$ a la dimension physique d'une force, $e$ a la dimension physique d'une énergie et $\varepsilon$ a la dimension physique d'un pseudo-action.
Par identification :

$$\begin{cases} \alpha' = \alpha \\ f' = f \\ e' = e - c^2\alpha s - fx \\ \varepsilon' = \varepsilon + c^2\alpha t - c^2\alpha sx + xe \\ p' = p + ft - se + c^2\alpha s^2 \end{cases}.$$

On obtient la représentation coadjointe du groupe de Lie étendu sur l'algèbre de Lie duale

$$Ad^*_{(t,s,x)}(\alpha, f, e, \varepsilon, p) = (\alpha, f, e - c^2\alpha s - fx, \varepsilon + c^2\alpha t - c^2\alpha sx + xe, p + ft - se + c^2\alpha s^2).$$

En utilisant la relation (1.10), la forme de Kirillov associée est

$$K = (K_{ij}(\alpha)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c^2\alpha & f \\ 0 & 0 & -c^2\alpha & 0 & -e \\ 0 & 0 & -f & e & 0 \end{pmatrix}$$

est une matrice antisymétrique d'ordre impair de déterminant nul.

D'après la représentation coadjointe, étant donné que $p'$ et $f$ sont deux invariants immédiats, en supprimant les deux entrées correspondantes, nous obtenons une sous matrice de $K$ :

$$\begin{pmatrix} 0 & c^2\alpha & f \\ -c^2\alpha & 0 & -e \\ -f & e & 0 \end{pmatrix}$$

d'ordre 3 et de rang 2.
On conclut qu'il existe un autre invariant $I$ à calculer en utilisant l'expression (1.13).
En d'autre termes, le système équivalent à résoudre s'écrit :

$$\begin{cases} c^2\alpha \dfrac{\partial I}{\partial \varepsilon} + f \dfrac{\partial I}{\partial p} = 0 & \text{(3.52a)} \\ -c^2\alpha \dfrac{\partial I}{\partial e} - e \dfrac{\partial I}{\partial p} = 0 & \text{(3.52b)} \\ -f \dfrac{\partial I}{\partial e} + e \dfrac{\partial I}{\partial \varepsilon} = 0 & \text{(3.52c)} \end{cases}$$

En posant

$$\frac{\partial I}{\partial p} = 1 \tag{3.53}$$

et en intégrant par rapport à $p$,nous aurons

$$I = p + I_1(e, \varepsilon). \tag{3.54}$$

où la constante d'intégration $I_1$ est une fonction de $e$ et $\varepsilon$.
En substituant (3.53) dans (3.52a), nous obtenons :

$$\frac{\partial I}{\partial \varepsilon} = -\frac{1}{C^2\alpha} f. \tag{3.55}$$

Par intégration de (3.55) membre à membre , nous obtenons :

$$\int \frac{\partial I}{\partial \varepsilon} d\varepsilon = -\int \frac{1}{C^2\alpha} f d\varepsilon$$
$$I_1 = -f\frac{\varepsilon}{C^2\alpha} + I_2(e).$$

En remplaçant (3.53) dans (3.52b), nous avons :

$$C^2\alpha\frac{\partial I}{\partial e} - e = 0$$

$$\frac{\partial I}{\partial e} = -e\frac{1}{C^2\alpha}. \tag{3.56}$$

De même par intégration de (3.56), nous obtenons :

$$I_2 = -\frac{e^2}{2c^2\alpha} + c.$$

Donc, l'équation (3.54) s'écrit $I = p - f\frac{\varepsilon}{c^2\alpha} - \frac{e^2}{2c^2\alpha} + c$ ou de façon équivalente

$$p = f\frac{\varepsilon}{c^2\alpha} + \frac{e^2}{2c^2\alpha} + I. \tag{3.57}$$

La forme symplectique est donnée par :

$$\sigma = \begin{pmatrix} de & d\varepsilon \end{pmatrix} \Omega^{-1} \begin{pmatrix} de \\ d\varepsilon \end{pmatrix} \qquad avec \;\; \Omega^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{c^2\alpha} \\ \frac{1}{c^2\alpha} & 0 \end{pmatrix}$$
$$\sigma = \begin{pmatrix} de & d\varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{c^2\alpha} d\varepsilon \\ \frac{1}{c^2\alpha} de \end{pmatrix}$$

$\sigma = -\frac{1}{c^2\alpha} de d\varepsilon + \frac{1}{c^2\alpha} d\varepsilon de$ en coordonnées quelconques $(e, \varepsilon)$.
En posant $\frac{\varepsilon}{c^2\alpha} = t$, nous avons la 2-forme symplectique suivante $\sigma = dt \wedge de$.

Pour le cas de la seconde extension du groupe de Carroll, l'orbite de la représentation coadjointe du groupe de Lie étendu sur le dual de son algèbre de Lie notée $(O_{(\alpha,f,p)}, \sigma)$ est une variété symplectique de dimension 2 dont les coordonnées sont $t$ et $e$ (coordonnées de Darboux).

La réalisation symplectique relative à la seconde extension centrale est par sa définition

$$L_{(t,s,x)}(e,\varepsilon) = (e - c^2\alpha s - fx, \varepsilon + c^2\alpha sx + xe).$$

Sa restriction à l'orbite est donnée par

$$(e(x), \varepsilon(x)) = L_{(0,0,x)}(e,\varepsilon) = (e - fx, \varepsilon + xe)$$

ou

$$\begin{cases} e(x) = e - fx \\ \varepsilon(x) = \varepsilon + xe \end{cases}. \tag{3.58}$$

Les équations du système (3.58) sont des fonctions hamiltoniennes ou des observables classiques.
Il en résulte les équations du mouvement données par le système :

$$\begin{cases} \dfrac{de(x)}{dx} = -f(x) & \text{(3.59a)} \\ \dfrac{d\varepsilon(x)}{dx} = e(x) & \text{(3.59b)} \end{cases}$$

La dérivée seconde par rapport à $x$ de (3.59b) nous donne :

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{d\varepsilon}{dx}\right) = \frac{de(x)}{dx}. \tag{3.60}$$

En remplaçant (3.59a) dans (3.60), on a

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{d\varepsilon}{dx}\right) = -f. \tag{3.61}$$

La résolution de ce système nous donne les intégrales premières du système dynamique élémentaire.
Par intégration de (3.61) membre à membre, nous obtenons :

$$\frac{d\varepsilon}{dx} = -fx + c. \tag{3.62}$$

De même, en intégrant membre à membre de (3.62), nous avons :
$\varepsilon(x) = -f\frac{x^2}{2} + cx + c_1$.
On obtient les intégrales premières du système dynamique élémentaire
$\begin{cases} e(x) = -fx + c \\ \varepsilon(x) = -f\frac{x^2}{2} + cx + c_1 \end{cases}$
où $c$ et $c_1$ sont des constantes d'intégration qui pourront être déterminées par la donnée d'une condition initiale.

# Tableau de comparaison

| Réalisations possibles | Système dynamique (orbite maximale) | Réalisation symplectique | Equations du mouvement | Solutions générales |
|---|---|---|---|---|
| Groupe d'Aristote | $(O_{(h,y,e)}, \sigma)$ | $L_{(\eta,x,t)}(f,\mu) = (f - hx - ty, \mu h + \eta h - htx + tf)$ | $\frac{df(t)}{dt} = -y(t)$ ; $\frac{d\mu(t)}{dt} = f(t)$ | $f(t) = -y(t) + c$ ; $\mu(t) = -y\frac{t^2}{2} + ct + c_1$ |
| Groupe de Galilée | $(O_{(m,f,e)}, \sigma)$ | $L_{(x,v,t)}(p,k) = (p - mv - ft, -mq + mx + pt - mvt)$ | $\frac{dp(t)}{dt} = -f(t)$ ; $\frac{dq(t)}{dt} = p(t)$ | $p(t) = -ft + c$ ; $q(t) = -f\frac{t^2}{2} + ct + c_1$ |
| Groupe de Weyl-Heisenberg | $(O_{(\alpha,\lambda,k)}, \sigma)$ | $L_{(\psi,x,v)}(m,p) = (\lambda q - \alpha v - \lambda x, p + \lambda\psi + \lambda qv - \lambda xv)$ | $\frac{dq(v)}{dv} = -\lambda(v)$ ; $\frac{dp(v)}{dv} = q(v)$ | $q(v) = -\lambda v + c$ ; $p(v) = -\lambda^2\frac{v^2}{2} + cv + c_1$ |
| Groupe de Carroll | $(O_{(\alpha,f,p)}, \sigma)$ | $L_{(t,s,x)}(e,\varepsilon) = (e - c^2\alpha s - fx, \varepsilon + c^2\alpha sx + xe)$ | $\frac{de(x)}{dx} = -f(x)$ ; $\frac{d\varepsilon(x)}{dx} = e(x)$ | $e(x) = -fx + c$ ; $\varepsilon(x) = -f\frac{x^2}{2} + cx + c_1$ |

# Conclusion

Dans ce travail intitulé "Orbites coadjointes associées aux réalisations concrètes du groupe affine de la droite réelle", il était question de construire les structures symplectiques ( orbites coadjointes maximales) correspondant aux quatre réalisations concrètes du groupe affine de la droite réelle.
Nous sommes partis du groupe affine de la droite réelle puis nous avons déterminé les extensions centrales de ses réalisations concrètes qui sont : le groupe d'Aristote, le groupe de Galilée, le groupe de Weyl-Heisenberg et le groupe de Carroll.
Nous avons appliqué la méthode des orbites coadjointes et avons obtenu quatre types de réalisations symplectiques.
A partir des premières extensions centrales des réalisations concrètes ci-haut évoquées, nous avons obtenus quatre types de variétés symplectiques de dimension 2 localement isomorphe à $\mathbb{R}^2$.
De plus, à partir des secondes extensions des groupes de Lie (Groupe d'Aristote, de Galilée, de Weyl-Heisenberg et de Carroll), les orbites coadjointes obtenues correspondent à quatre types de systèmes dynamiques élémentaires dont les équations du mouvement ont été déterminées ainsi que leurs intégrales premières.
L'analyse dimensionnelle des nouveaux paramètres d'extension a été effectuée et des constantes physiques ont été associées à chaque cas de réalisations concrètes du groupe affine de la droite réelle.

Notre étude sur la construction des systèmes dynamiques élémentaires associés aux groupes de Lie par méthode des orbites coadjointes n'est pas complété.
Les solutions des équations du mouvement pourraient être déterminées explicitement moyennant des conditions initiales.
Dans l'avenir, nous comptons étendre ou généraliser la méthode des orbites coadjointes à d'autres groupes de Lie.

# Bibliographie


[1] **J. M. Souriau**, Stucture des systèmes dynamiques, Dunod, 1970

[2] **A. Lesfari**, Géométrie Symplectique et Mécanique Hamilitonienne, Tunis, 2012.

[3] **A. Ngendakumana**, Group theoretical construction of planar Non commutative systems, Abomey Calavi, December 2013.

[4] **J. Nzotungicimpye**. Mass, Impetus and Force by symplectic Realizations of the Static Group, 2008.

[5] **C.Michèle Marle**, Variétés symplectiques et variétés de Poisson, Université Pierre et Marie Curie, 1998.

[6] **Thierry Masson**, Géométrie Différentielle, groupe et algèbre de Lie, fibré et connexion. Laboratoire de Physique théorique, Université de Paris XI, 2001.

[7] **James Humphreys**. Introduction to Lie algebras and representation Theory. Springer-Verlag GmbH, 1972.

[8] **A. A. Kirillov**, Unitary representations of nilpotent Lie groups, Uspekhi Mat. Nauk 17(1962), 57-110, English transl. in Russian Math. Surveys 17(1962).

[9] **A. A. Kirillov**, Lectures on the Orbit Method, Graduate studies in Mathematics, American Mathematical Society, V 64, 2004.

[10] **B.Kostant**, Quantization and unitary representations. I. Prequantization, in Lectures in Modern Analysis and Applications, III, Lecture Notes in Math., Vol.170, springer, Berlin, 1970, 87-208.

[11] **E. Wigner**, Group theory and its applications to Quantum Mechanics, Academ. Pr., 1959.

[12] **J.M Levy Leblond**, J.Math.Phy. 477-488, 1963.

[13] **R. Giachetti**, Rev. Nuovo Cim.4 163 (1981).

[14] **Dictionnaire des mathématiques** , Géométrie affine. http//www.bibmath.net visité le 15/11/2023 à 19h30'.

[15] **R.Achilles, A. Bonfiglioli** : The early proofs of the theorem of campbell, Baker, Hausdorff, and Dynkin. Arch. Hist. Exact sci. **66**, 295-358 (2012).

[16] **P. Cartier** : Démonstration algébrique de la formule de Hausdorff. Bull. Soc. Math.France **84**, 241-249 (1956).