UNIVERSITÉ DU BURUNDI
GRENIER DU SAVOIR DU BURUNDI
Dépôt institutionnel officiel
https://repository.ub.edu.bi

Sur les courbes biharmoniques dans les variétés de Walker de dimension trois

Butotima, Dunia; Sous la direction de : Dr. Nkunzimana Rénovat

2025-12
UB, FS
https://repository.ub.edu.bi/handle/123456789/2188

Document téléchargé depuis le **Grenier du Savoir du Burundi** — https://repository.ub.edu.bi

UNIVERSITÉ DU BURUNDI
FACULTÉ DES SCIENCES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
CENTRE DE RECHERCHE EN MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

SUR LES COURBES BIHARMONIQUES DANS LES VARIÉTÉS DE WALKER DE DIMENSION 3

Par :

DUNIA BUTOTIMA

Mémoire présenté et défendu publiquement en vue de l'obtention du diplôme de

Master en Mathématiques Fondamentales et Appliquées

Sous la direction de :
Dr. NKUNZIMANA Rénovat

Décembre 2025

Composition du Jury

Pr NYANDWI Servat	*(Président)*
Pr NIBIRANTIZA Aboubacar	*(Secrétaire)*
Dr NKUNZIMANA Rénovat	*(Directeur)*
Dr NTAHOMVUKIYE Janvier Pesser	*(Membre)*

Remerciements

Nous tenons à exprimer notre profonde gratitude à notre directeur de mémoire, Dr. NKUNZIMANA Rénovat, pour son encadrement rigoureux, sa disponibilité et la confiance qu'il nous a accordée tout au long de ce travail. Ses orientations scientifiques et ses conseils avisés ont été déterminants dans l'aboutissement de ce mémoire.

Nous adressons également nos remerciements aux membres du jury pour l'honneur qu'ils nous font en acceptant d'évaluer ce travail. Nous ne saurions clore cette page sans réitérer nos remerciements à tous les enseignants de la Faculté des Sciences pour la qualité du travail impeccable dont nous avons bénéficié.

Nous souhaitons témoigner notre reconnaissance à notre famille et nos proches, dont le soutien moral et la patience ont été une source essentielle de motivation.

À nos fils et notre fille : ATONGWE BUTOTIMA Taylor, NGAHANYI BUTOTIMA Descartes, LUKOO BUTOTIMA Einstein, BAKUNGU BUTOTIMA Cayley, AKOKO BUTOTIMA Butros et BWEMERESI BUTOTIMA Duniadi, ainsi qu'à leur mère DIANE BAGALWA, pour avoir enduré et accepté avec sportivité notre démission de l'École du Cinquantenaire, motivée par notre passion pour les mathématiques.

Résumé

Ce travail explore les courbes biharmoniques au sein des variétés de Walker en dimension 3, un sujet central de la géométrie différentielle moderne. Les courbes biharmoniques représentent une généralisation des géodésiques, apparaissant comme des courbes critiques d'une énergie d'ordre supérieur. Leur étude est motivée par leurs applications potentielles en physique mathématique, notamment dans des domaines tels que la relativité générale.

Le mémoire débute par une introduction aux concepts fondamentaux des variétés différentielles, des connexions de Levi-Civita, et des propriétés de courbure. Il établit ensuite un cadre théorique pour les variétés de Walker, en mettant en lumière leur structure métrique et leurs connexions caractéristiques.

L'analyse se concentre sur les courbes biharmoniques, définies par une condition d'énergie nulle pour le champ de bitension associé. Nous dérivons les équations caractérisant ces courbes dans le contexte des variétés de Walker, identifiant des conditions d'existence pour des trajectoires non géodésiques.

Enfin, des exemples explicites illustrent les résultats obtenus, soulignant la richesse dynamique permise par la structure dégénérée des variétés de Walker. Ce mémoire contribue à la compréhension des trajectoires d'énergie d'ordre supérieur, ouvrant la voie à des généralisations futures vers des types de courbes plus complexes.

Mots clés : Courbes biharmoniques, Variétés de Walker, Énergie d'ordre supérieur, Connexions de Levi-Civita, Champ de bitension, Géodésiques, Courbure, Structure métrique.

Abstract

This work explores biharmonic curves within three-dimensional Walker manifolds, a central topic in modern differential geometry. Biharmonic curves represent a generalization of geodesics, appearing as critical curves of higher-order energy. Their study is motivated by potential applications in mathematical physics, particularly in areas such as general relativity.

The thesis begins with an introduction to the fundamental concepts of differentiable manifolds, Levi-Civita connections, and curvature properties. It then establishes a theoretical framework for Walker manifolds, highlighting their metric structure and characteristic connections.

The analysis focuses on biharmonic curves, defined by a zero energy condition for the associated bitension field. We derive the equations characterizing these curves in the context of Walker manifolds, identifying existence conditions for non-geodesic trajectories.

Finally, explicit examples illustrate the results obtained, underscoring the dynamic richness allowed by the degenerate structure of Walker manifolds. This thesis contributes to the understanding of higher-order energy trajectories, paving the way for future generalizations towards more complex types of curves.

Keywords : Biharmonic curves, Walker manifolds, Higher-order energy, Levi-Civita connections, Bitension field, Geodesics, Curvature, Metric structure.

Table des matières

Composition du Jury i

Remerciements ii

Résumé iii

Abstract iv

Table des matières vi

Liste des figures vii

Liste des notations et définitions viii

Avant-propos x

Introduction 1

1 Notions fondamentales dela géométrie différentielle 4
- 1.1 Dérivation vectorielle . . . 4
- 1.2 Variétés différentiables . . . 5
- 1.3 Champs de vecteurs et 1-forme différentielle . . . 6
- 1.4 Sur la géométrie pseudo-riemannienne . . . 7
  - 1.4.1 La géométrie pseudo-riemannienne . . . 7
  - 1.4.2 Variétés lorentziennes . . . 12
  - 1.4.3 Connexion de Levi-Civita . . . 14
- 1.5 Tenseur de courbure de Riemann . . . 20

2 Variétés de Walker de dimension 3 21
- 2.1 Métrique de Walker . . . 21
  - 2.1.1 Préliminaires . . . 21
  - 2.1.2 Base contravariante. . . . 23
  - 2.1.3 Base covariante . . . 24
- 2.2 Produit vectoriel de Walker . . . 30
- 2.3 Connexions de Levi-Civita et tenseur de courbure . . . 33
- 2.4 Courbes géodésiques sur les variétés de Walker de dimension 3 . . . 39

3 Courbes biharmoniques dans les variétés de Walker de dimension 3 **43**
3.1 Courbes paramétrées dans l'espace de Minkowski 43
3.1.1 Repère de Serret–Frenet dans $\mathbb{R}^3_1$ 45
3.1.2 Courbure dans $\mathbb{R}^3_1$ 46
3.1.3 Torsion dans $\mathbb{R}^3_1$ 47
3.1.4 Formules de Serret–Frenet dans $\mathbb{R}^3_1$ 47
3.1.5 Courbes hélices dans $\mathbb{R}^3_1$ 49
3.2 Courbes biharmoniques dans les variétés de Walker de dimension 3 50
3.2.1 Quelques définitions 50
3.2.2 Courbes biharmoniques dans (M, g_f) 52
3.3 Courbes biharmoniques non géodésiques dans les variétés de Walker 3D 58
3.3.1 Résultats principaux 58
3.3.2 Exemples et corollaires 61

Conclusion **69**

Bibliographie **70**

Table des figures

1.1 Classification des vecteurs dans l'espace-temps selon leur nature : temps, espace ou nuls. 13

3.1 Représentation schématique de l'hélice biharmonique dans la variété de Walker 3D. 64

Liste des notations et définitions

Notation	**Signification**
M	Variété différentielle.
g	Métrique pseudo-riemannienne sur M.
γ	Courbe paramétrée dans M.
T	Vecteur tangent unitaire le long de la courbe γ.
N	Vecteur normal principal de la courbe γ.
B	Vecteur binormal, défini par $B = T \wedge N$.
κ	Courbure de la courbe.
τ	Torsion de la courbe.
∇	Dérivée covariante associée à la connexion de Levi-Civita.
R	Tenseur de courbure de Riemann.
$\tau(\gamma)$	Champ de tension associé à la courbe γ.
$\tau_2(\gamma)$	Champ de bitension associé à la courbe γ.
∂_i	Dérivée partielle par rapport à la coordonnée x^i.
ε	Indicateur de type du vecteur (temps ou espace).
$f(x, y, z)$	Fonction de pondération dans la métrique.
Δ	Opérateur de Laplace (Laplacien).
Trace	Trace d'un tenseur.
det	Déterminant d'une matrice.
$\{e_1, e_2, e_3\}$	Base orthonormale dans $\mathbb{R}^3$.
$\|\cdot\|$	Norme dans l'espace vectoriel.
$\langle\gamma'(t), \gamma'(t)\rangle$	Produit scalaire de la vitesse de la courbe γ dans la métrique de Walker.
$L(\gamma)$	Longueur de la courbe γ : $$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{\lvert\langle\gamma'(t), \gamma'(t)\rangle\rvert}\, dt.$$
R_{31}	Composante du tenseur de courbure de Riemann utilisée dans le calcul de $\tau_2(\gamma)$.
$\nabla_T T$	Dérivée covariante du vecteur tangent le long de γ.
$\nabla_T^3 T$	Troisième dérivée covariante le long de γ, intervenant dans la bitension $\tau_2(\gamma)$.
$g_f(T, T)$	Produit scalaire pondéré par la fonction f : $E_f(\gamma) = \int f(s)\|T(s)\|^2 ds$.
Γ_{ij}^k	Symboles de Christoffel pour la métrique de Walker.

suite à la page suivante

Table 1 – suite

Notation	Signification
$\nabla^{\gamma}_{\frac{d}{dt}}$	Dérivée covariante le long de la courbe γ : $\nabla^{\gamma}_{\frac{d}{dt}}V = \nabla_{\gamma'}V$.
$E(\phi)$	Énergie associée à une application ϕ.
(U, ϕ)	Carte locale sur M, avec U ouvert et $\phi : U \to \mathbb{R}^n$.
TM	Fibré tangent de M, union disjointe des espaces tangents T_xM pour $x \in M$.
$\left\{\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right\}$	Base locale naturelle du fibré tangent TM.
T^*M	Fibré cotangent de M, dual du fibré tangent TM.
$\{dx^i\}$	Base locale duale du fibré cotangent T^*M.
T_xM	Espace tangent à M en x, formé des vecteurs tangents en ce point.
$\left\{\dfrac{\partial}{\partial x^i}\Big\vert_x\right\}$	Base naturelle de l'espace tangent T_xM au point x.
T^*_xM	Espace cotangent en x, dual de T_xM, formé des formes linéaires sur T_xM.
$\{dx^i\vert_x\}$	Base naturelle de l'espace cotangent T^*_xM au point x.
$C^\infty(M)$	Ensemble des fonctions infiniment différentiables sur M.
$\Gamma(TM)$ ou $\mathfrak{X}(M)$	Ensemble des champs de vecteurs sur M.
$X(x)$	Valeur du champ de vecteurs X au point x.
$[X, Y]$	Crochet de Lie des champs de vecteurs X et Y.
$\frac{d\gamma}{dt} = \gamma'(t) = \dot{\gamma}(t)$	Dérivée temporelle de la courbe $\gamma(t)$.
$C^\infty(M, \mathbb{R})$	ensemble de toutes les fonctions lisses définies sur la variété M à valeurs réelles(ou fonctions indéfiniment dérivables), c'est-à-dire $C^\infty(M, \mathbb{R}) = \{\, f : M \to \mathbb{R} \mid f$ est de classe $C^\infty \,\}$

Avant-propos

L'élaboration de ce mémoire s'inscrit dans le cadre de la formation de **Master en Mathématiques Fondamentales et Appliquées** à la Faculté des Sciences de l'Université du Burundi. Il constitue l'aboutissement d'un parcours académique marqué par l'acquisition progressive des outils fondamentaux de l'analyse et de la géométrie différentielle, ainsi que par le développement d'un intérêt particulier pour la géométrie pseudo-riemannienne et ses applications.

Le choix du thème de ce travail, consacré à l'étude des *courbes biharmoniques dans les variétés de Walker de dimension trois*, est motivé par la richesse géométrique de ces espaces et par leur importance croissante dans la géométrie différentielle moderne et la physique mathématique. Les variétés de Walker, caractérisées par l'existence d'une distribution isotrope parallèle, offrent un cadre naturel pour l'analyse de phénomènes géométriques subtils, notamment en géométrie lorentzienne et en relativité générale.

Ce mémoire vise avant tout à consolider les bases théoriques acquises au cours de la formation, tout en initiant le lecteur à des problématiques de recherche actuelles. L'étude des courbes biharmoniques, en tant que généralisation des géodésiques, permet de mettre en lumière des trajectoires d'énergie d'ordre supérieur et de révéler des comportements géométriques qui n'apparaissent pas dans le cadre riemannien classique.

Au-delà de l'aspect scientifique, ce travail représente également une première immersion dans la démarche de recherche mathématique : formulation rigoureuse des définitions, maîtrise des calculs tensoriels, interprétation géométrique des résultats et confrontation avec la littérature existante. Les difficultés rencontrées tout au long de ce travail ont été autant d'occasions d'approfondir la compréhension des notions abordées et de renforcer l'autonomie intellectuelle nécessaire à toute activité de recherche.

Nous espérons que ce mémoire pourra constituer une base utile pour de futurs travaux, notamment dans l'étude des courbes f-biharmoniques et bi-f-harmoniques, et qu'il contribuera modestement à l'enrichissement des recherches menées au sein du Département de Mathématiques de l'Université du Burundi.

Introduction

L'étude des courbes dans les variétés semi-riemanniennes constitue un axe central de la géométrie différentielle moderne. Parmi ces courbes, les géodésiques occupent une place fondamentale, car elles représentent les trajectoires critiques de l'énergie classique associée à la métrique. Toutefois, la géométrie différentielle contemporaine s'intéresse également aux courbes biharmoniques, qui apparaissent comme une généralisation naturelle des géodésiques : elles sont les courbes critiques d'une *énergie d'ordre supérieur*, appelée bienergie. Leur étude présente un double intérêt, à la fois analytique et physique, notamment en relation avec la théorie de l'élasticité et la relativité générale.

Pour une application différentiable $\varphi : (M, g) \to (N, h)$ entre variétés riemanniennes ou semi-riemanniennes, l'énergie classique est définie par :

$$E(\varphi) = \frac{1}{2} \int_M \|d\varphi\|^2 \, dv_g,$$

et le champ de tension associé par :

$$\tau(\varphi) = \mathrm{Trace}_g(\nabla d\varphi).$$

Dans le cas particulier d'une courbe $\gamma : I \to N$ paramétrée par l'arc s, on obtient :

$$E(\gamma) = \frac{1}{2} \int_I \|\gamma'(s)\|^2 \, ds, \qquad \tau(\gamma) = \nabla_{\gamma'}\gamma',$$

ce qui montre que les courbes critiques de E sont précisément les géodésiques, c'est-à-dire celles dont le champ de tension s'annule.

Une extension naturelle consiste à considérer la **bienergie** :

$$E_2(\varphi) = \frac{1}{2} \int_M \|\tau(\varphi)\|^2 \, dv_g,$$

dont la variation première conduit au **champ de bitension** :

$$\tau_2(\varphi) = -\Delta^{\varphi}\tau(\varphi) - \mathrm{Trace}_g \left(R^N(d\varphi, \tau(\varphi))\, d\varphi \right).$$

Dans le cas d'une courbe, cette expression se réduit à :

$$\tau_2(\gamma) = \nabla^3_{\gamma'}\gamma' - R(\gamma', \nabla_{\gamma'}\gamma')\gamma',$$

et la condition $\tau_2(\gamma) = 0$ définit les trajectoires dites **biharmoniques**, généralisant les géodésiques en tant que courbes d'énergie d'ordre supérieur.

Au cours des deux dernières décennies, de nombreux travaux ont contribué à la classification des courbes biharmoniques dans divers contextes géométriques :

— Büyükkbaş Çakar (2016) a étudié les géodésiques dans les variétés de Walker tridimensionnelles, mettant en évidence la complexité analytique et géométrique de ces espaces dégénérés ;

— Keltouma (2017) a analysé les courbes harmoniques et biharmoniques dans l'espace euclidien et le groupe de Heisenberg, précisant les conditions d'existence et les caractéristiques géométriques de ces courbes ;

— Körpinar et al. (2020) ont introduit de nouveaux concepts de mouvement uniforme et de dérivée de Fermi–Walker pour les particules biharmoniques dans l'espace de Heisenberg ;

— López (2014) a fourni une étude complète des courbes et surfaces dans l'espace Lorentz-Minkowski, mettant en lumière les différences avec le cadre euclidien et leur rôle en relativité ; enfin,

— Mamadou, Ameth et Nkunzimana (2022) ont étudié les courbes biharmoniques dans les variétés de Walker strictes en dimension trois, établissant des conditions précises d'existence et identifiant des familles de courbes biharmoniques non géodésiques, ce qui complète et étend les résultats précédents dans ce cadre particulier.

Malgré ces contributions, la caractérisation complète des courbes biharmoniques non géodésiques dans les variétés de Walker tridimensionnelles reste une question ouverte. En effet, la dégénérescence partielle de la métrique confère à ces espaces des propriétés analytiques et géométriques singulières : certaines trajectoires biharmoniques n'y coïncident pas avec des géodésiques, traduisant une dynamique interne propre à la structure de Walker.

Le présent travail s'inscrit dans ce contexte. Son objectif principal est de déterminer les conditions analytiques et géométriques permettant l'existence de courbes biharmoniques et en particulier de courbes biharmoniques non géodésiques dans les variétés de Walker de dimension trois. Pour cela, nous établissons d'abord un cadre différentiel rigoureux reposant sur la connexion de Levi-Civita, les symboles de Christoffel et les repères de Frenet adaptés. Nous en déduisons ensuite les équations caractéristiques des géodésiques puis celles des courbes biharmoniques, avant d'en dégager une classification locale selon la nature causale des trajectoires (espace, lumière ou temps) et la dépendance fonctionnelle de $f(x, y, z)$.

Ainsi, ce mémoire constitue une contribution à la compréhension des trajectoires d'énergie d'ordre supérieur dans un cadre géométrique dégénéré. Les résultats obtenus mettent en évidence la richesse analytique et la complexité géométrique des variétés de Walker, tout en ouvrant la voie à de futures généralisations vers les courbes f-biharmoniques et bi-f-biharmoniques, ainsi qu'à d'éventuelles applications physiques en géométrie lorentzienne.

Ce mémoire est structuré en trois chapitres principaux :

— Le Chapitre 1 est consacré au rappel des notions fondamentales de la géométrie différentielle nécessaires à notre étude. On y introduit notamment la dérivée covariante, la connexion de Levi-Civita, le tenseur de courbure ainsi que les repères de Frenet adaptés aux courbes dans une variété semi-riemannienne.

— Le Chapitre 2 présente la géométrie des variétés de Walker et en décrit les propriétés essentielles, particulièrement en dimension trois. Nous y déterminons la forme explicite de la connexion de Levi-Civita associée à la métrique de Walker et en déduisons les équations

caractéristiques des géodésiques, avec une étude détaillée de certains cas particuliers de courbes à composantes constantes.

— Le Chapitre 3 est dédié à l'étude des courbes biharmoniques et non géodésiques dans les variétés de Walker tridimensionnelles. Nous y dérivons les équations de bitension correspondantes, mettons en évidence les conditions analytiques d'existence et illustrons les résultats par des exemples concrets.

Cette structure traduit la progression logique de notre démarche : partir des fondements théoriques de la géométrie différentielle, explorer la structure spécifique des variétés de Walker, puis analyser les courbes biharmoniques et leurs particularités dans ce cadre géométrique dégénéré.

Chapitre 1

Notions fondamentales dela géométrie différentielle

Ce chapitre rassemble les outils essentiels de la géométrie différentielle nécessaires à notre étude. Nous y présentons les notions dérivation vectorielle, de variétés différentiables, de connexion de Levi-Civita, de tenseur de courbure,les symboles de Christoffel ainsi que les bases du formalisme de Frenet. Ces fondements serviront de cadre pour la formulation des équations biharmoniques dans les chapitres suivants.

1.1 Dérivation vectorielle

Si $H(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ est une fonction vectorielle, alors par définition :

$$H'(t) = (x_1'(t), \ldots, x_n'(t)).$$

La règle de Leibniz s'étend aux fonctions bilinéaires. Par exemple :

$$\frac{d}{dt}\langle H(t), K(t)\rangle = \langle H'(t), K(t)\rangle + \langle H(t), K'(t)\rangle, \tag{1.1}$$

et

$$\frac{d}{dt}(H(t) \wedge K(t)) = H'(t) \wedge K(t) + H(t) \wedge K'(t). \tag{1.2}$$

Ces propriétés sont particulièrement utiles dans les cas suivants :

— Si $H(t)$ est un vecteur unitaire pour tout t, alors $H'(t)$ est orthogonal à $H(t)$, car :

$$\langle H(t), H(t)\rangle = 1 \quad \Rightarrow \quad \langle H(t), H'(t)\rangle = 0.$$

— Si $H(t)$ est orthogonal à $S(t)$ pour tout t, alors :

$$\langle H(t), S'(t)\rangle = -\langle H'(t), S(t)\rangle.$$

En effet,

— Soit $H(t)$ un vecteur unitaire pour tout t, c'est-à-dire

$$\|H(t)\|^2 = \langle H(t), H(t)\rangle = 1.$$

Géométriquement, cela signifie que $H(t)$ reste sur la sphère unité. En dérivant cette relation par rapport à t, on obtient :

$$\frac{d}{dt}\langle H(t), H(t)\rangle = 2\langle H'(t), H(t)\rangle = 0,$$

ce qui implique

$$\langle H'(t), H(t)\rangle = 0. \tag{1.3}$$

Ainsi, le vecteur dérivé $H'(t)$ est toujours orthogonal à $H(t)$: la dérivée ne change que la direction de $H(t)$, pas sa norme.

— Soient $H(t)$ et $S(t)$ deux champs de vecteurs orthogonaux pour tout t, c'est-à-dire

$$\langle H(t), S(t)\rangle = 0.$$

En dérivant cette relation, et en utilisant la règle de Leibniz pour le produit scalaire, on obtient :

$$\frac{d}{dt}\langle H(t), S(t)\rangle = \langle H'(t), S(t)\rangle + \langle H(t), S'(t)\rangle.$$

Comme $\langle H(t), S(t)\rangle = 0$ pour tout t, son dérivé est nul :

$$0 = \langle H'(t), S(t)\rangle + \langle H(t), S'(t)\rangle,$$

d'où la relation fondamentale

$$\langle H(t), S'(t)\rangle = -\langle H'(t), S(t)\rangle. \tag{1.4}$$

1.2 Variétés différentiables

Les résultats fondamentaux sur ces types de variétés sont présentés dans [21, 26].
Soit M un espace topologique séparé.

Définition 1.1. *Une carte de M est un couple (U, φ), où U est un ouvert de M et $\varphi(U)$ un ouvert de $\mathbb{R}^m$, tel que $\varphi : U \to \varphi(U)$ soit un homéomorphisme. Le nombre m est appelé la dimension de la carte (U, φ).*

Définition 1.2. *Un atlas différentiable A de dimension m de M est une famille de cartes $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i\in I}$ de même dimension m telle que $M = \bigcup_{i\in I} U_i$, et si $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, alors l'application de changement de cartes*

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \to \varphi_j(U_i \cap U_j) \tag{1.5}$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Définition 1.3. *Une variété différentiable de dimension m est un espace topologique séparé muni d'un atlas différentiable de dimension m.*

Exemple 1.1. *L'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ est une variété différentiable de dimension n avec l'atlas $A = \{(\mathbb{R}^n, \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n})\}$. Tout ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ muni de la carte $(\Omega, \mathrm{Id}_\Omega)$ est également une variété différentiable de dimension n.*

1.3 Champs de vecteurs et 1-forme différentielle

Soit M une variété différentiable de dimension m. On définit son fibré tangent par

$$TM = \bigcup_{x\in M} T_xM,$$

c'est-à-dire l'ensemble de tous les vecteurs tangents à M. Un vecteur Y appartient à TM si et seulement s'il existe un point $x \in M$ tel que $Y \in T_xM$.

Le fibré tangent TM est lui-même une variété différentiable de dimension $2m$.

Définition 1.4. *Un champ de vecteurs sur M est une application différentiable $X : M \to TM$ telle que $X(x) \in T_xM$ pour tout $x \in M$. L'ensemble des champs de vecteurs sur M est noté $\Gamma(TM)$.*

Étant donnée une carte (U, φ) avec la base associée $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1}\Big|_x, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^m}\Big|_x \right\}$ où $x \in U$, notons par $\{dx^1|_x, \ldots, dx^m|_x\}$ la base duale de T_x^*M. Si $\omega_x \in T_x^*M$, il existe alors $\omega_x^1, ..., \omega_x^m \in \mathbb{R}$ telles que :

$$\omega_x = \omega_x^1 dx^1|_x + \cdots + \omega_x^m dx^m|_x. \tag{1.6}$$

On appelle T_x^*M l'espace cotangent de M en x. On note $T^*M = \bigcup_{x\in M} T_x^*M$ le fibré cotangent.

Définition 1.5. *Une 1-forme différentielle sur M est une application différentiable $\omega : M \to T^*M$ telle que $\omega(x) \in T_x^*M$ pour tout $x \in M$. L'ensemble des 1-formes différentielles sur M est noté $\Gamma(T^*M)$.*

Remarque 1.1. *(1) On peut voir $X \in \Gamma(TM)$ (resp. $\omega \in \Gamma(T^*M)$) comme une application $X : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ définie par $X(f)(x) = X_x(f)$ et $\omega : \Gamma(TM) \to C^\infty(M)$ définie par $\omega(X)(x) = \omega_x(X_x)$.*

(2) Si $X \in \Gamma(TM)$, il existe $X^1, \ldots, X^m \in C^\infty(U)$ telles que :

$$X_x = \sum_{i=1}^{m} X^i(x) \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_x. \tag{1.7}$$

Si $\omega \in \Gamma(T^*M)$, alors :

$$\omega_x = \sum_{i=1}^{m} \omega^i(x) dx^i|_x. \tag{1.8}$$

Définition 1.6. *Soit M une variété de dimension n. Pour deux champs de vecteurs $X, Y \in \Gamma(TM)$, on définit le commutateur*

$$[X, Y] := XY - YX,$$

appelé crochet de Lie *de X et Y, qui définit en effet une dérivation. En d'autres termes, c'est un champ de vecteurs appartenant à $\Gamma(TM)$.*

Propriété 1.3.1. *Soient X, Y, Z des champs de vecteurs de classe C^∞ sur M, et soient $f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$. Alors le crochet de Lie*

$$[\cdot, \cdot] : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \longrightarrow \Gamma(TM)$$

vérifie les propriétés suivantes :

1. *Antisymétrie :* $[X,Y] = -[Y,X]$;
2. *Bilinéarité :* $[\alpha X + \beta Y, Z] = \alpha[X,Z] + \beta[Y,Z]$;
3. *Identité de Jacobi :*
$$[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0;$$
4. *Règle de Leibniz généralisée :*
$$[fX,\, gY] = fg[X,Y] + f(Xg)\,Y - g(Yf)\,X, \qquad \forall f,g \in C^\infty(M).$$

1.4 Sur la géométrie pseudo-riemannienne

1.4.1 La géométrie pseudo-riemannienne [25, 16]

La géométrie pseudo-riemannienne est une extension de la géométrie riemannienne ; au même titre qu'en algèbre bilinéaire, l'étude des formes bilinéaires symétriques généralise les considérations sur les métriques euclidiennes. Cependant, cette géométrie présente des aspects non intuitifs des plus surprenants.

Définition 1.7. *Soit M une variété différentiable de dimension n. Une métrique pseudo-riemannienne sur M est un champ de formes bilinéaires*
$$g : TM \times TM \to \mathbb{R}$$
qui satisfait les propriétés suivantes :

1. *Symétrie*
$$g(X,Y) = g(Y,X), \qquad \forall x \in M,\ \forall X,Y \in T_xM.$$
2. *Non-dégénérescence*
$$\forall x \in M, \quad \big(g(X,Y) = 0 \ \ \forall Y \in T_xM\big) \implies X = 0.$$
3. *Signature constante (p,q) : Il existe des entiers $p,q \geq 0$, avec $p+q=n$, tels que pour tout $x \in M$, la matrice associée à g dans n'importe quelle base de T_xM ait la signature (p,q). Ceci garantit l'existence de directions positives et de directions négatives.*

Si (U,φ) est un système de coordonnées locales avec $\varphi = (x^1,\ldots,x^n)$, alors :
— $\left\{\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right\}$ est la base locale du fibré tangent ;
— $\{dx^i\}$ est la base duale du fibré cotangent ;
— On définit les coefficients de la métrique g dans ce système de coordonnées par :
$$g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right).$$
— Comme g est symétrique, on a :
$$g_{ij} = g_{ji},$$
où g désigne la métrique riemannienne (ou pseudo-riemannienne) sur M.

Les variétés pseudo-riemanniennes représentent une classe importante de variétés différentiables, regroupant en particulier les variétés riemanniennes et les variétés lorentziennes :

— Une métrique pseudo-riemannienne est dite *riemannienne* lorsque la signature est $(n, 0)$ ou $(0, n)$; dans ce cas, g est définie positive, c'est-à-dire

$$g(X, X) > 0 \quad \text{pour tout } X \neq 0.$$

— Une métrique pseudo-riemannienne est dite *lorentzienne* lorsque la signature est $(n-1, 1)$ ou parfois $(1, n-1)$ avec $n \geq 2$ selon les conventions de signes.

Définition 1.8. *Étant donné un produit scalaire g sur M, on définit la norme de $v \in M$ par rapport à g de la manière suivante :*

$$\|v\| = \sqrt{|g(v, v)|}. \tag{1.9}$$

Le vecteur v est dit unitaire si $\|v\| = 1$.

Définition 1.9. *Étant donnée une carte (U, φ) de (M, g) avec les champs de base $\{\partial_1, \ldots, \partial_n\}$ associés, on appelle* composantes du tenseur métrique *les $n \times n$ fonctions g_{ij} définies par*

$$g_{ij} = g(\partial_i, \partial_j).$$

Localement, si M est muni d'un système de coordonnées locales (x^i), alors :

$$g = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}\, dx^i \otimes dx^j.$$

L'indice d'une variété pseudo-riemannienne (M, g) est le plus petit des deux entiers p et q :

$$\begin{aligned} \mathrm{Ind}(M, g) &= \min(p, q), \\ &\text{où } p \text{ est le nombre de directions positives,} \\ &\quad q \text{ est le nombre de directions négatives,} \\ p + q &= \dim M. \end{aligned}$$

Remarque 1.2. *[3] Soit (M, g) une variété pseudo-riemannienne, alors :*

— $0 \leq \mathrm{Ind}_M \leq \dim M$,
— *si* $\mathrm{Ind}_M = 0$, (M, g) *est dite variété riemannienne,*
— *si* $\mathrm{Ind}_M = 1$ *et* $\dim M \geq 2$, (M, g) *est dite variété de Lorentz ou variété lorentzienne.*

Exemple 1.2. *Pour $j \in \{0, 1\}$ fixé, on désigne par $\mathbb{R}^3_j$ l'espace $\mathbb{R}^3$ muni du tenseur métrique $\langle \cdot, \cdot \rangle$ défini par*

$$\langle \cdot, \cdot \rangle = dx^2 + dy^2 + (-1)^j\, dz^2. \tag{1.10}$$

(i) Lorsque $j = 0$, l'espace $\mathbb{R}^3_0$ coïncide avec l'espace euclidien de dimension 3, que l'on note simplement $\mathbb{R}^3$. Dans ce cas, (1.10) devient

$$\langle \cdot, \cdot \rangle = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

ce qui définit une métrique riemannienne.

(ii) Lorsque $j = 1$, l'espace $\mathbb{R}^3_1$ est l'espace de Minkowski de dimension 3. Dans ce cas, (1.10) s'écrit

$$\langle \cdot, \cdot \rangle = dx^2 + dy^2 - dz^2,$$

ce qui définit une métrique lorentzienne.

Exemple 1.3. *Soit*

$$g = \sum_{i,j=1}^{3} g_{ij}\, dx^i \otimes dx^j = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2.$$

définie sur une variété différentiable M. La matrice associée à g est :

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{où } g_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & si\ i = j, \\ 0 & si\ i \neq j, \end{cases} \quad \forall i, j = 1, 2, 3.$$

1. *g est bilinéaire. Soient $X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in \Gamma(TM)$ et $f, h \in C^\infty(M)$, alors :*

$$\begin{aligned} g(fX_1 + hX_2, Y) &= dx(fX_1 + hX_2) \cdot dx(Y) + dy(fX_1 + hX_2) \cdot dy(Y) \\ &\quad + dz(fX_1 + hX_2) \cdot dz(Y) \\ &= f\, dx(X_1)dx(Y) + h\, dx(X_2)dx(Y) + f\, dy(X_1)dy(Y) \\ &\quad + h\, dy(X_2)dy(Y) + f\, dz(X_1)dz(Y) + h\, dz(X_2)dz(Y) \\ &= f\, g(X_1, Y) + h\, g(X_2, Y). \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} g(X, fY_1 + hY_2) &= dx(X)dx(fY_1 + hY_2) + dy(X)dy(fY_1 + hY_2) \\ &\quad + dz(X)dz(fY_1 + hY_2) \\ &= f\, g(X, Y_1) + h\, g(X, Y_2). \end{aligned}$$

2. $\det(g_{ij}) = 1 \neq 0$, *donc g est non dégénérée.*
3. $g_{12} = g_{21} = 0$, $g_{13} = g_{31} = 0$, $g_{23} = g_{32} = 0$ *donc g est symétrique.*
4. $\det(g_{ij}) > 0$ *car* $1 > 0$, *donc g est définie positive.*

Ainsi, g est une métrique pseudo-riemannienne de signature $(3, 0)$ et $\mathrm{Ind}(M)$*=0. Donc g est une métrique Riemannienne.*

Exemple 1.4. *Soit*

$$g = x^2\, dx^2 + x\, dy^2 + dz^2$$

une forme quadratique définie sur une variété différentiable M. Nous cherchons à déterminer la nature de g en vérifiant successivement si elle définit :

1. *une métrique riemannienne ;*
2. *une métrique lorentzienne.*

La matrice associée à g est définie par :

$$g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right).$$

Soient (U, x_1, x_2, x_3) un système de coordonnées locales, avec

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right) \quad \textit{repère local, et} \quad (dx^1, dx^2, dx^3) \textit{ le co-repère associé.}$$

On a alors :

$$g_{11} = x^2, \quad g_{12} = g_{21} = 0, \quad g_{22} = x, \quad g_{13} = g_{31} = 0, \quad g_{23} = g_{32} = 0, \quad g_{33} = 1.$$

La matrice (g_{ij}) s'écrit :

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} x^2 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. *Bilinéarité : Soient $X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in \Gamma(TM)$ et $f, h \in C^\infty(M)$, on a :*

$$\begin{aligned} g(fX_1 + hX_2, Y) &= x^2\, dx(fX_1 + hX_2)\, dx(Y) + x\, dy(fX_1 + hX_2)\, dy(Y) \\ &\quad + dz(fX_1 + hX_2)\, dz(Y) \\ &= fx^2\, dx(X_1)dx(Y) + hx^2\, dx(X_2)dx(Y) \\ &\quad + fx\, dy(X_1)dy(Y) + hx\, dy(X_2)dy(Y) \\ &\quad + f\, dz(X_1)dz(Y) + h\, dz(X_2)dz(Y) \\ &= f\, g(X_1, Y) + h\, g(X_2, Y). \end{aligned}$$

   De même :

$$g(X, fY_1 + hY_2) = f\, g(X, Y_1) + h\, g(X, Y_2).$$

2. *Non-dégénérescence :*

$$\det(g_{ij}) = x^2 \cdot x \cdot 1 = x^3.$$

   Donc g est non dégénérée si et seulement si $x \neq 0$.

3. *Symétrie : Comme $g_{ij} = g_{ji}$ pour tous i, j, la matrice (g_{ij}) est symétrique.*

4. *Définie positive : On a $\det(g_{ij}) = x^3 > 0$ si $x > 0$, donc g est définie positive lorsque $x > 0$.*

De ceci découle :

- *g est une métrique riemannienne si et seulement si $x > 0$. Dans ce cas, sa signature est $(3, 0)$ et $\mathrm{Ind}(M) = 0$.*
- *g est une métrique lorentzienne si et seulement si $x < 0$. Dans ce cas, sa signature est $(1, 3-1) = (1, 2)$ et $\mathrm{Ind}(M) = 1$.*

Exemple 1.5. *Sur $M = \mathbb{R}^3$ avec les coordonnées cartésiennes (x_1, x_2, x_3), la métrique euclidienne s'écrit :*

$$g = dx_1 \otimes dx_1 + dx_2 \otimes dx_2 + dx_3 \otimes dx_3.$$

Montrons que le même tenseur, en coordonnées sphériques, s'écrit :

$$g = dr \otimes dr + r^2 \left(d\theta \otimes d\theta + \sin^2\phi\, d\phi \otimes d\phi\right).$$

On sait qu'en coordonnées sphériques, un point (x, y, z) s'écrit :

$$\begin{cases} x = r\sin\phi\cos\theta, \\ y = r\sin\phi\sin\theta, \\ z = r\cos\phi. \end{cases}$$

Calculons les produits tensoriels :

$$\begin{aligned} dx \otimes dx = &(\sin\phi\cos\theta)^2\, dr \otimes dr + r^2\cos^2\phi\cos^2\theta\, d\phi \otimes d\phi \\ &+ r^2\sin^2\phi\sin^2\theta\, d\theta \otimes d\theta + 2r\sin\phi\cos\phi\cos^2\theta\, dr \otimes d\phi \\ &- 2r\sin^2\phi\cos\theta\sin\theta\, dr \otimes d\theta - 2r^2\cos\phi\sin\phi\cos\theta\sin\theta\, d\phi \otimes d\theta \end{aligned} \tag{1.11}$$

$$\begin{aligned} dx \otimes dy = &\sin^2\phi\cos\theta\sin\theta\, dr \otimes dr + r^2\cos^2\phi\cos\theta\sin\theta\, d\phi \otimes d\phi \\ &+ r^2\sin^2\phi\cos\theta\sin\theta\, d\theta \otimes d\theta + r\sin\phi\cos\phi\cos\theta\sin\theta\,(dr \otimes d\phi + d\phi \otimes dr) \\ &+ r\sin^2\phi(\cos^2\theta - \sin^2\theta)\,(dr \otimes d\theta + d\theta \otimes dr) \\ &+ r^2\cos\phi\sin\phi(\cos^2\theta - \sin^2\theta)\,(d\phi \otimes d\theta + d\theta \otimes d\phi) \end{aligned} \tag{1.12}$$

$$\begin{aligned} dx \otimes dz = &\sin\phi\cos\phi\cos\theta\, dr \otimes dr - r\sin^2\phi\cos\theta\, dr \otimes d\phi \\ &+ r\cos^2\phi\cos\theta\, d\phi \otimes dr - r^2\cos\phi\sin\phi\cos\theta\, d\phi \otimes d\phi \\ &- r^2\cos\phi\sin\phi\sin\theta\, d\theta \otimes d\phi \end{aligned} \tag{1.13}$$

$$\begin{aligned} dy \otimes dy = &(\sin\phi\sin\theta)^2\, dr \otimes dr + r^2\cos^2\phi\sin^2\theta\, d\phi \otimes d\phi + r^2\sin^2\phi\cos^2\theta\, d\theta \otimes d\theta \\ &+ 2r\sin\phi\cos\phi\sin^2\theta\, dr \otimes d\phi + 2r\sin^2\phi\sin\theta\cos\theta\, dr \otimes d\theta \\ &+ 2r^2\cos\phi\sin\phi\sin\theta\cos\theta\, d\phi \otimes d\theta \end{aligned} \tag{1.14}$$

$$\begin{aligned} dy \otimes dz = &\sin\phi\cos\phi\sin\theta\, dr \otimes dr - r\sin^2\phi\sin\theta\, dr \otimes d\phi \\ &+ r\cos^2\phi\sin\theta\, d\phi \otimes dr - r^2\cos\phi\sin\phi\sin\theta\, d\phi \otimes d\phi \\ &+ r^2\cos\phi\sin\phi\cos\theta\, d\theta \otimes d\phi \end{aligned} \tag{1.15}$$

$$dz \otimes dz = \cos^2\phi\, dr \otimes dr - 2r\cos\phi\sin\phi\, dr \otimes d\phi + r^2\sin^2\phi\, d\phi \otimes d\phi \tag{1.16}$$

En additionnant les équations (1.11) , (1.14), (1.16) *et en simplifiant (les termes mixtes se compensent ou s'annulent), on obtient finalement :*

$$g = dr \otimes dr + r^2\, d\theta \otimes d\theta + r^2\sin^2\phi\, d\phi \otimes d\phi. \tag{1.17}$$

On en déduit que :

$$g_{11} = 1, \quad g_{22} = r^2, \quad g_{33} = r^2\sin^2\phi,$$

et toutes les autres composantes sont nulles,avec $i \neq j$.

Dans la base $(dr, d\theta, d\phi)$, la matrice de la métrique est donc :

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin^2\phi \end{pmatrix}.$$

Cette métrique a pour signature $(3,0)$ avec $\phi \neq k\pi$,$k \in \mathbb{Z}$.Donc g est une métrique riemannienne.

1.4.2 Variétés lorentziennes

Selon les travaux de [12] sur les variétés pseudo-riemanniennes,on dégage ce qui suit :

Définition 1.10. *Une variété lorentzienne est une variété différentiable M, munie d'une métrique lorentzienne g (i.e. g est bilinéaire, symétrique , non dégénérée et de signature $(-,+,\ldots,+)$ ou $(+,-,\ldots,-)$, c'est-à-dire Ind $M = 1$).*

La variété (M, g) permet de classer les vecteurs tangents en chaque point $x \in M$ en trois catégories, que l'on appelle *caractère causal* des vecteurs.

Exemple 1.6. *Soit $\mathbb{R}^3 = (\mathbb{R}^3, g = -dx^2 + dy^2 + dz^2)$, et soit $v = (x, y, z) \in T_x\mathbb{R}^3$ (avec $x \in \mathbb{R}^3$), alors les vecteurs tangents de type espace, nul, et de type temps sont présentés comme suit :*

$$\begin{aligned} g(v,v) = 0 &\Longleftrightarrow -x^2 + y^2 + z^2 = 0 \\ &\Longleftrightarrow x^2 = y^2 + z^2 \\ &\Longleftrightarrow x = \pm\sqrt{y^2 + z^2} \end{aligned}$$

En effet,dans la base canonique $\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$, la métrique est représentée par la matrice :

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si $v = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}$, alors :

$$g(v,v) = (g_{ij})v^i v^j = -x^2 + y^2 + z^2$$

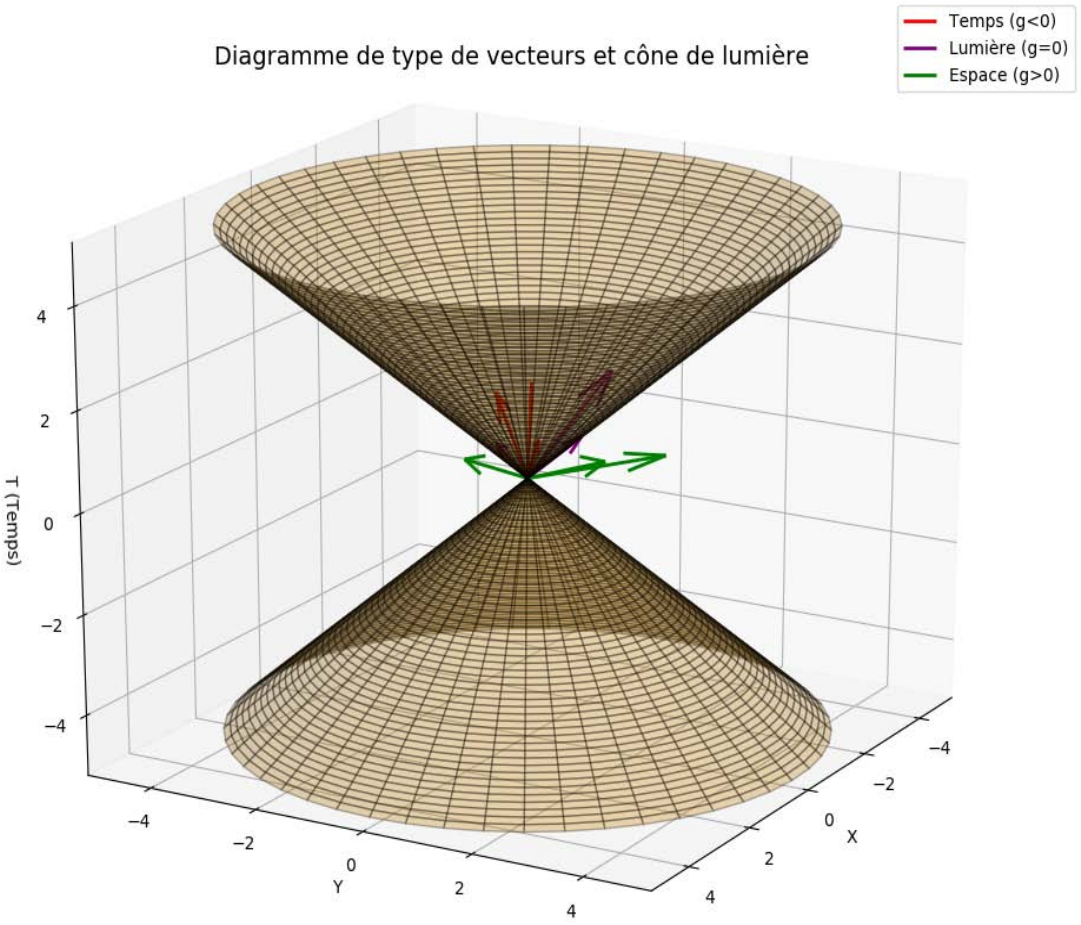


FIGURE 1.1 – Classification des vecteurs dans l'espace-temps selon leur nature : temps, espace ou nuls.

La figure (1.1),nous renseigne ce qui suit :
Le cône de lumière est tracé par

$$x = \pm\sqrt{y^2 + z^2} \quad \text{correspond à } g(v, v) = 0$$

1. Les vecteurs de type temps sont à l'intérieur du cône :

$$g(v, v) < 0$$

2. Les vecteurs de type espace sont à l'extérieur du cône :

$$g(v, v) > 0 \quad \text{ou} \quad v = 0$$

3. Les vecteurs de type lumière sont sur le cône :

$$g(v, v) = 0 \quad \text{et} \quad v \neq 0$$

Définition 1.11. *Une variété lorentzienne (M, g) est dite temps-orientable s'il existe un champ de vecteurs $X \in \Gamma(TM)$ de type-temps, c'est-à-dire :*

$$g(X_x, X_x) < 0, \quad \forall x \in M.$$

Définition 1.12. *L'espace de Lorentz-Minkowski de dimension 3, noté $\mathbb{R}^3_1$, est l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de la métrique lorentzienne g définie par :*

$$g = -dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Dans la base canonique $(\partial_x, \partial_y, \partial_z)$, la métrique est représentée par la matrice :

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Définition 1.13. *Soient $u, v \in \mathbb{R}^3_1$. Le produit vectoriel lorentzien de u et v est l'unique vecteur, noté $u \wedge v$, qui satisfait :*

$$\langle u \wedge v, w \rangle = \det(u, v, w), \tag{1.18}$$

où $\det(u, v, w)$ est le déterminant de la matrice obtenue en plaçant en colonnes les coordonnées des vecteurs u, v, w dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

La bilinéarité de la métrique assure l'existence et l'unicité de ce vecteur $u \wedge v$. Pour

$$u = u_1\vec{\imath} + u_2\vec{\jmath} + u_3\vec{k}, \quad v = v_1\vec{\imath} + v_2\vec{\jmath} + v_3\vec{k},$$

dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on a :

$$u \wedge v = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & -\vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix},$$

.

1.4.3 Connexion de Levi-Civita [25]

Définition 1.14. *Une connexion linéaire sur M est une application :*

$$\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to \Gamma(TM)$$

$$(X, Y) \mapsto \nabla_X Y$$

telle que pour tous $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ et $f \in C^\infty(M)$, on a :

1. $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$,
2. $\nabla_X(fY) = X(f)Y + f\nabla_X Y$,
3. $\nabla_{X+fY} Z = \nabla_X Z + f\nabla_Y Z$.

Dans un système de coordonnées (x^i) sur M, la connexion ∇ est complètement déterminée par les symboles de Christoffel Γ^k_{ij}. Pour deux champs de vecteurs

$$X = X^i\,\partial_i,$$
$$Y = Y^j\,\partial_j,$$

la dérivée covariante de Y dans la direction de X s'écrit :

$$\nabla_X Y = X^i \left(\frac{\partial Y^k}{\partial x^i} + \Gamma_{ij}^k Y^j \right) \partial_k,$$

en effet,
$$\begin{aligned}
\nabla_X Y &= \nabla_X \big(Y^j \partial_j\big) \\
&= X^i \nabla_{\partial_i} \big(Y^j \partial_j\big) \\
&= X^i \Big((\nabla_{\partial_i} Y^j)\partial_j + Y^j \nabla_{\partial_i} \partial_j \Big) \quad \text{(par la formule de Leibniz)} \\
&= X^i \Big(\partial_i (Y^j)\partial_j + Y^j \Gamma_{ij}^k \partial_k \Big) \\
&= X^i \Big(\partial_i (Y^k)\partial_k + Y^j \Gamma_{ij}^k \partial_k \Big) \quad \text{(en renommant l'indice } j \text{ en } k \text{ dans le premier terme)} \\
&= X^i \Big(\partial_i (Y^k) + Y^j \Gamma_{ij}^k \Big) \partial_k \\
&= X^i \left(\frac{\partial Y^k}{\partial x^i} + \Gamma_{ij}^k Y^j \right) \partial_k.
\end{aligned}$$

Définition 1.15. *Soit (M, g) une variété pseudo-riemannienne, une connexion linéaire sur M est dite compatible avec la métrique g, si :*

$$\nabla_X (g(Y, Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z),$$

pour tout $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$.

Définition 1.16. *Soit M une variété différentiable, ∇ une connexion linéaire sur M, la torsion de ∇ est un champ de tenseur de type $(1, 2)$ défini par :*

$$\begin{aligned}
T : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) &\to \Gamma(TM). \\
(X, Y) &\mapsto \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y].
\end{aligned}$$

La connexion ∇ est dite sans torsion si $T(X, Y) = 0$ pour tout $X, Y \in \Gamma(TM)$.

Théorème 1.1. *[12] Soit (M, g) une variété pseudo-riemannienne. L'application :*

$$\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \longrightarrow \Gamma(TM),$$

donnée par la formule de Koszul :

$$\begin{aligned}
2g(\nabla_X Y, Z) = {} & X(g(Y, Z)) + Y(g(Z, X)) - Z(g(X, Y)) \\
& + g(Z, [X, Y]) + g(Y, [Z, X]) - g(X, [Y, Z])
\end{aligned} \tag{1.19}$$

est une connexion linéaire sur M, appelée connexion de Levi-Civita.

Démonstration. Pour tous $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ et $f \in C^\infty(M)$, on a :

$$\begin{aligned}
2g(\nabla_{fX} Y, Z) &= fX(g(Y, Z)) + Y(g(Z, fX)) - Z(g(fX, Y)) \\
&\quad + g(Z, [fX, Y]) + g(Y, [Z, fX]) - g(fX, [Y, Z]) \\
&= fX(g(Y, Z)) + Y(f)g(Z, X) + fY(g(Z, X)) \\
&\quad - Z(f)g(X, Y) - fZ(g(X, Y)) - Y(f)g(Z, X) \\
&\quad + fg(Z, [X, Y]) + Z(f)g(Y, X) + fg(Y, [Z, X]) \\
&\quad - fg(X, [Y, Z]) \\
&= fX(g(Y, Z)) + fY(g(Z, X)) - fZ(g(X, Y)) \\
&\quad + fg(Z, [X, Y]) + fg(Y, [Z, X]) - fg(X, [Y, Z]) \\
&= 2f\, g(\nabla_X Y, Z),
\end{aligned}$$

alors $\nabla_{fX}Y = f\nabla_X Y$.

$$\begin{aligned}
2g(\nabla_{X+W}Y,Z) &= (X+W)(g(Y,Z)) + Y(g(Z,X+W)) - Z(g(X+W,Y)) \\
&\quad + g(Z,[X+W,Y]) + g(Y,[Z,X+W]) - g(X+W,[Y,Z]) \\
&= X(g(Y,Z)) + Y(g(Z,X)) - Z(g(X,Y)) \\
&\quad + g(Z,[X,Y]) + g(Y,[Z,X]) - g(X,[Y,Z]) \\
&\quad + W(g(Y,Z)) + Y(g(Z,W)) - Z(g(W,Y)) \\
&\quad + g(Z,[W,Y]) + g(Y,[Z,W]) - g(W,[Y,Z]) \\
&= 2g(\nabla_X Y,Z) + 2g(\nabla_W Y,Z) \\
&= 2g(\nabla_X Y + \nabla_W Y,Z)
\end{aligned}$$

donc

$$\nabla_X(fY) = X(f)\,Y + f\nabla_X Y.$$

Dela même façon pour tous $X,Y,Z,W \in \Gamma(TM)$, on a :

$$\begin{aligned}
2\,g\big(\nabla_X(Y+Z),W\big) &= X\big(g(Y+Z,W)\big) + (Y+Z)\big(g(W,X)\big) - W\big(g(X,Y+Z)\big) \\
&\quad + g\big(W,[X,Y+Z]\big) + g\big(Y+Z,[W,X]\big) - g\big(X,[Y+Z,W]\big) \\
&= X\big(g(Y,W)\big) + X\big(g(Z,W)\big) + Y\big(g(W,X)\big) + Z\big(g(W,X)\big) \\
&\quad - W\big(g(X,Y)\big) - W\big(g(X,Z)\big) + g\big(W,[X,Y]\big) + g\big(W,[X,Z]\big) \\
&\quad + g\big(Y,[W,X]\big) + g\big(Z,[W,X]\big) - g\big(X,[Y,W]\big) - g\big(X,[Z,W]\big) \\
&= 2\,g\big(\nabla_X Y,W\big) + 2\,g\big(\nabla_X Z,W\big) \\
&= 2\,g\big(\nabla_X Y + \nabla_X Z,\ W\big).
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\nabla_X(Y+Z) \;=\; \nabla_X Y \;+\; \nabla_X Z.$$

□

Théorème 1.2. *Soit (M,g) une variété pseudo-riemannienne. Alors la connexion de Levi-Civita est l'unique connexion linéaire sans torsion et compatible avec g.*

Démonstration. On sait que Le tenseur de torsion associé à une connexion affine ∇ est défini par :

$$T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$$

et

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y]$$

La connexion est dite sans torsion si $T(X,Y) = 0$ pour tous champs de vecteurs X,Y. En effet, On applique la formule (1.19) pour $g(\nabla_X Y,Z)$ et $g(\nabla_Y X,Z)$, puis on soustrait les deux :

$$\begin{aligned}
2g(\nabla_X Y,Z) &= X(g(Y,Z)) + Y(g(Z,X)) - Z(g(X,Y)) \\
&\quad + g([X,Z],Y) + g([Y,Z],X) - g([X,Y],Z) \qquad (1.20)\\
2g(\nabla_Y X,Z) &= Y(g(X,Z)) + X(g(Z,Y)) - Z(g(Y,X)) \\
&\quad + g([Y,Z],X) + g([X,Z],Y) - g([Y,X],Z) \qquad (1.21)
\end{aligned}$$

En soustrayant (1.20) et (1.21) membre à membre,on a :

$$2\left(g(\nabla_X Y, Z) - g(\nabla_Y X, Z)\right) = -2g([X,Y],Z) \Rightarrow g(\nabla_X Y, Z) - g(\nabla_Y X, Z) = g([X,Y],Z)$$

(car g est bilinéaire et symétrique par définition et $[X,Y] = -[Y,X]$).
Ainsi,

$$\begin{aligned} & g(\nabla_X Y, Z) - g(\nabla_Y X, Z) = g([X,Y],Z) \\ \Longleftrightarrow\ & \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] = 0 \\ \Longleftrightarrow\ & T(X,Y) = 0 \end{aligned}$$

D'où, la connexion de Levi-Civita est sans torsion.
Par ailleurs, nous avons également :

$$\frac{1}{2}\left[X(g(Y,Z)) + X(g(Z,Y))\right] = X(g(Y,Z)),$$

et donc,

$$g(\nabla_X Y, Z) + g(\nabla_X Z, Y) = X(g(Y,Z)).$$

Cela prouve que la connexion de Levi-Civita est compatible avec la métrique g sur M. Comme g est non dégénérée,ce qui traduit son unicité.

□

Proposition 1.1. *Soient (M,g) une variété pseudo-riemannienne de dimension m, ∇ la connexion de Levi-Civita, et (U,φ) une carte locale sur M, avec les champs de base associés $\left(\frac{\partial}{\partial x^1},\ldots,\frac{\partial}{\partial x^m}\right)$. Alors, les coefficients de Christoffel Γ_{ij}^k sont donnés par :*

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{m} g^{kl}\left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}\right),$$

où g_{ij} sont les composantes de g dans la carte (U,φ), et $(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$ désigne la matrice inverse.

Démonstration. On pose $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$, comme $[\partial_i, \partial_j] = 0$, $i,j = 1,\ldots,m$, on a :

$$2g(\nabla_{\partial_i}\partial_j, \partial_l) = 2\sum_{s=1}^{m} g(\Gamma_{ij}^s \partial_s, \partial_l) = 2\sum_{s=1}^{m} \Gamma_{ij}^s g_{sl},$$

;d'après la formule (1.19) de Koszul, on a :

$$\begin{aligned} g(Z,[X,Y]) + g(Y,[Z,X]) - g(X,[Y,Z]) &= g([X,Y],Z) - g([X,Z],Y) - g([Y,Z],X) \\ &= 0 \end{aligned}$$

(par définition de l'identité de Koszul, c.-à-d. $g([X,Y],Z) - g([X,Z],Y) - g([Y,Z],X) = 0$.)
et en remplaçant $X = \partial_i$, $Y = \partial_j$, et $Z = \partial_k$, la formule (1.19) devient :

$$2g(\nabla_{\partial_i}\partial_j, \partial_l) = \partial_i\left(g(\partial_j,\partial_l)\right) + \partial_j\left(g(\partial_l,\partial_i)\right) - \partial_l\left(g(\partial_i,\partial_j)\right).$$

donc :

$$\sum_{s=1}^{m} \Gamma_{ij}^s g_{sl} = \frac{1}{2}\left(\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{li} - \partial_l g_{ij}\right),$$

d'où :

$$\sum_{s=1}^{m} \Gamma_{ij}^{s} g_{sl} g^{lk} = \frac{1}{2} g^{lk} \left(\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{li} - \partial_l g_{ij} \right),$$

$$\sum_{s=1}^{m} \sum_{l=1}^{m} \Gamma_{ij}^{s} g_{sl} g^{lk} = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{m} g^{lk} \left(\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{li} - \partial_l g_{ij} \right),$$

comme (g^{ij}) est la matrice inverse de (g_{ij}), on a :

$$\sum_{l=1}^{m} g_{sl} g^{lk} = \delta_s^k,$$

où δ_s^k est le symbole de Kronecker, on obtient ainsi deux expressions équivalentes des symboles de Christoffel :

1. Forme avec sommation explicite :

$$\Gamma_{ij}^{k} = \frac{1}{2} \sum_{\ell=1}^{n} g^{k\ell} \left(\frac{\partial g_{j\ell}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{i\ell}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\ell} \right) \tag{1.22}$$

En dimension trois, la formule (1.22) devient :

$$\Gamma_{ij}^{k} = \frac{1}{2} \left[g^{k1} \left(\frac{\partial g_{j1}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{i1}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^1} \right) + g^{k2} \left(\frac{\partial g_{j2}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{i2}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^2} \right) + g^{k3} \left(\frac{\partial g_{j3}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{i3}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^3} \right) \right] \tag{1.23}$$

2. Forme compacte (convention d'Einstein) :

$$\Gamma_{ij}^{k} = \frac{1}{2} g^{k\ell} \left(\partial_i g_{j\ell} + \partial_j g_{i\ell} - \partial_\ell g_{ij} \right) \tag{1.24}$$

La formule (1.24) devient en dimension trois :

$$\Gamma_{ij}^{k} = \frac{1}{2} \left[g^{k1} \left(\partial_i g_{j1} + \partial_j g_{i1} - \partial_1 g_{ij} \right) + g^{k2} \left(\partial_i g_{j2} + \partial_j g_{i2} - \partial_2 g_{ij} \right) + g^{k3} \left(\partial_i g_{j3} + \partial_j g_{i3} - \partial_3 g_{ij} \right) \right] \tag{1.25}$$

□

Exemple 1.7. *Soit $M = \mathbb{R}^3$ muni de la métrique en coordonnées sphériques :*

$$g = \mathrm{d}r \otimes \mathrm{d}r + r^2 \, \mathrm{d}\theta \otimes \mathrm{d}\theta + r^2 \sin^2 \phi \, \mathrm{d}\phi \otimes \mathrm{d}\phi,$$

avec

$$x^1 = r, \quad x^2 = \theta, \quad x^3 = \phi.$$

La matrice de la métrique est :

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \phi \end{pmatrix},$$

et son inverse :

$$(g^{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2 \sin^2 \phi} \end{pmatrix}.$$

En appliquant la formule (1.24)*, calculons les symboles de Christoffel non nuls :*

$$\Gamma_{22}^1 = \frac{1}{2} g^{11} \left(\partial_2 g_{21} + \partial_2 g_{21} - \partial_1 g_{22} \right)$$

Comme $g_{21} = 0$*, on a* $\partial_2 g_{21} = 0$*, et* $g_{22} = r^2$*, donc* $\partial_1 g_{22} = 2r$*. Alors :*

$$\Gamma_{22}^1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (0 + 0 - 2r) = -r$$

$$\Gamma_{33}^1 = \frac{1}{2} g^{11} \left(\partial_3 g_{31} + \partial_3 g_{31} - \partial_1 g_{33} \right)$$

$g_{31} = 0 \Rightarrow \partial_3 g_{31} = 0$; $g_{33} = r^2 \sin^2 \phi \Rightarrow \partial_1 g_{33} = 2r \sin^2 \phi$.

Donc :

$$\Gamma_{33}^1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (0 + 0 - 2r \sin^2 \phi) = -r \sin^2 \phi$$

$$\Gamma_{21}^2 = \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2} g^{22} \left(\partial_1 g_{22} + \partial_2 g_{12} - \partial_2 g_{12} \right)$$

$g_{12} = 0 \Rightarrow \partial_2 g_{12} = 0$; $g_{22} = r^2 \Rightarrow \partial_1 g_{22} = 2r$

Donc :

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot 2r = \frac{1}{r}$$

$$\Gamma_{31}^3 = \Gamma_{13}^3 = \frac{1}{2} g^{33} \left(\partial_1 g_{33} + \partial_3 g_{13} - \partial_3 g_{13} \right)$$

$g_{13} = 0 \Rightarrow \partial_3 g_{13} = 0$; $g_{33} = r^2 \sin^2 \phi \Rightarrow \partial_1 g_{33} = 2r \sin^2 \phi$

Donc :

$$\Gamma_{13}^3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{r^2 \sin^2 \phi} \cdot 2r \sin^2 \phi = \frac{1}{r}$$

$$\Gamma_{32}^3 = \Gamma_{23}^3 = \frac{1}{2} g^{33} \left(\partial_2 g_{33} + \partial_3 g_{23} - \partial_3 g_{23} \right)$$

$g_{23} = 0 \Rightarrow \partial_3 g_{23} = 0$; $\quad \partial_2 g_{33} = \partial_\theta (r^2 \sin^2 \phi) = 2r^2 \sin \phi \cos \phi$

Alors :

$$\Gamma_{23}^3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{r^2 \sin^2 \phi} \cdot 2r^2 \sin \phi \cos \phi = \cot \phi$$

$$\Gamma_{33}^2 = \frac{1}{2} g^{22} \left(\partial_3 g_{32} + \partial_3 g_{32} - \partial_2 g_{33} \right)$$

$g_{32} = 0 \Rightarrow \partial_3 g_{32} = 0$; $\quad \partial_2 g_{33} = 2r^2 \sin \phi \cos \phi$

Donc :

$$\Gamma_{33}^2 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot 2r^2 \sin \phi \cos \phi = -\sin \phi \cos \phi$$

Exemple 1.8 (Coordonnées cylindriques)**.** *On a les relations de changement de coordonnées suivantes :*

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad z = z.$$

La métrique euclidienne $g = dx^2 + dy^2 + dz^2$ devient alors, en coordonnées cylindriques :

$$g = dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2.$$

De la même façon qu'à l'exemple 1.7 ,on peut trouver tous les symboles de Christoffel.

1.5 Tenseur de courbure de Riemann

Sur une variété pseudo-riemannienne (M, g) munie de la connexion de Levi-Civita, la fonction

$$R : \Gamma(TM)^3 \longrightarrow \Gamma(TM)$$

définie par

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z \tag{1.26}$$

est un champ tensoriel de type $(1,3)$ sur M, appelé *tenseur de courbure de Riemann* de M. On note parfois $R(X,Y)Z$ sous la forme $R_{XY}Z$.

Si $X, Y \in T_x(M)$, alors l'opérateur f-linéaire

$$R(X,Y) : T_x(M) \longrightarrow T_x(M)$$

qui envoie Z sur $R(X,Y)Z$ est appelé *opérateur de courbure.*

Le tenseur de courbure de Riemann vérifie les symétries suivantes :

Proposition 1.2 ([11])**.** *Soient $X, Y, Z, W \in T_x(M)$, alors :*

1. $R(X,Y) = -R(Y,X)$,
2. $\langle R(X,Y)Z, W\rangle = -\langle R(X,Y)W, Z\rangle$,
3. $R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0$ *(première identité de Bianchi),*
4. $\langle R(X,Y)Z, W\rangle = \langle R(Z,W)X, Y\rangle$ *(symétrie par paires).*

Lemme 1.1 ([25])**.** *Sur un voisinage de coordonnées $(x^1, \ldots, x^n)$, on a*

$$R(\partial_i, \partial_j)\,\partial_k = \sum_{\ell=1}^{n} R^{\ell}_{kij}\,\partial_\ell, \tag{1.27}$$

où les composantes du tenseur de courbure sont données par :

$$\begin{aligned} R^{\ell}_{kij} &= \frac{\partial \Gamma^{\ell}_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma^{\ell}_{jk}}{\partial x^i} + \sum_{m=1}^{n} \left(\Gamma^{\ell}_{jm}\Gamma^{m}_{ik} - \Gamma^{\ell}_{im}\Gamma^{m}_{jk}\right) \\ \Leftrightarrow \quad R^{\ell}_{kij} &= \partial_j \Gamma^{\ell}_{ik} - \partial_i \Gamma^{\ell}_{jk} + \sum_{m=1}^{n} \left(\Gamma^{\ell}_{jm}\Gamma^{m}_{ik} - \Gamma^{\ell}_{im}\Gamma^{m}_{jk}\right) \end{aligned} \tag{1.28}$$

Définition 1.17. *Une variété pseudo-riemannienne (M, g) est dite* plate *si son tenseur de courbure de Riemann est identiquement nul, c'est-à-dire :*

$$R(X,Y)Z = 0 \qquad \forall\, X, Y, Z \in \Gamma(TM). \tag{1.29}$$

De manière équivalente, en coordonnées locales :

$$R^{\ell}{}_{ijk} = 0 \qquad \text{pour tout } i, j, k, \ell.$$

Chapitre 2

Variétés de Walker de dimension 3

Dans ce chapitre, nous commençons d'abord à voir ce qui se passe dans les variétés de Walker de dimension 2 avant de parler des variétés de Walker tridimensionnelles et introduire la classe particulière y afférente. Après avoir rappelé leur structure métrique caractéristique, nous en étudions les connexions et les courbes géodésiques, afin de préparer l'analyse biharmonique à venir.

2.1 Métrique de Walker [5, 12]

2.1.1 Préliminaires

Définition 2.1. *Un champ de vecteurs parallèle dégénéré est une distribution de dimension 1, engendrée par un champ de vecteurs X, tel que :*

(i) $g(X,X)=0$ *(dégénéré, donc $X\neq 0$ est un vecteur lumière),*

(ii) $\nabla_Y X = 0$ *pour tout champ de vecteurs $Y\in\Gamma(TM)$ (X est un champ de vecteurs parallèle).*

Définition 2.2. *Une variété lorentzienne (M,g) de dimension 2 est dite de Walker s'il existe localement un champ de vecteurs isotrope $K\neq 0$ (champ dégénéré) tel que*

$$\nabla K = 0 \quad \textit{(champ de vecteurs parallèle).}$$

En coordonnées locales (x,y), la métrique d'une variété de Walker de dimension 2 s'écrit :

$$g = 2\,dx\,dy + f(x,y)\,dx^2,$$

où $f(x,y)$ est une fonction de pondération en direction de x.

La matrice associée à cette métrique est :

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} f(x,y) & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

et son inverse est :

$$(g^{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -f \end{pmatrix}.$$

Vérifions que (M,g_f) possède un champ

$$K = \partial_y$$

dégénéré et parallèle :

(iii) Symboles de Christoffel

On note

$$f_x = \partial_x f, \qquad f_y = \partial_y f.$$

En appliquant la formule générale (1.24), pour cette métrique, les symboles de Christoffel non nuls sont :

$$\Gamma^x_{xx} = \tfrac{1}{2} f_x, \qquad \Gamma^y_{xx} = \tfrac{1}{2}(f f_x - f_y), \qquad \Gamma^y_{xy} = \Gamma^y_{yx} = \tfrac{1}{2} f_x. \tag{2.1}$$

(a) Dans la base contravariante $\{\partial_x, \partial_y\}$:

$$g(\partial_y, \partial_y) = (0 \quad 1) \begin{pmatrix} f(x,y) & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} (0 \quad 1)^t = 0.$$

(b) Vérification de la parallélité :

$$\nabla_{\partial_i} \partial_y = \Gamma^x_{iy} \partial_x + \Gamma^y_{iy} \partial_y = 0,$$

car tous les

$$\Gamma^k_{iy} = 0.$$

Donc :

$$\nabla_X \partial_y = 0 \quad \textit{pour tout champ } X.$$

(c) Déterminons la signature de (M, g_f)

On considère le déterminant de la matrice $g_f - \lambda I$:

$$\det(g_f - \lambda I) = \begin{vmatrix} f(x,y) - \lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

On a donc :

$$[f(x,y) - \lambda](-\lambda) - 1 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda^2 - f(x,y)\,\lambda - 1 = 0.$$

Le discriminant est :

$$\Delta = f(x,y)^2 + 4 > 0 \quad \forall f.$$

Les deux valeurs propres simples sont :

$$\lambda_1 = \frac{f - \sqrt{f^2+4}}{2} < 0, \qquad \lambda_2 = \frac{f + \sqrt{f^2+4}}{2} > 0.$$

Ainsi, la signature de (M, g_f) est $(1,1)$.

(iv) Courbure de Riemann

En utilisant la formule générale (1.28) des composantes du tenseur de courbure de Riemann, en dimension 2 on a :

- $R^x{}_{yxy} = \partial_y \Gamma^x_{xy} - \partial_x \Gamma^x_{yy} + \Gamma^m_{xy}\Gamma^x_{ym} - \Gamma^m_{yy}\Gamma^x_{xm} = 0.$
- $R^y{}_{xyx} = \partial_y \Gamma^y_{xx} - \partial_x \Gamma^y_{yx} + \Gamma^m_{xx}\Gamma^y_{ym} - \Gamma^m_{yx}\Gamma^y_{xm}$
$$= \frac{1}{2}(f f_{xy} - f_{yy}) - \frac{1}{2} f_{xx} + \frac{1}{4} f_x^2$$
$$= \frac{1}{2}\Big(f f_{xy} - f_{yy} - f_{xx} + \frac{1}{2} f_x^2\Big)$$

Ainsi, la seule composante indépendante non nulle est :

$$\begin{aligned} R^{y}{}_{xyx} &= \partial_y \Gamma^y_{xx} - \partial_x \Gamma^y_{yx} + \Gamma^m_{xx}\Gamma^y_{ym} - \Gamma^m_{yx}\Gamma^y_{xm} \\ &= \frac{1}{2}(f f_{xy} - f_{yy}) - \frac{1}{2} f_{xx} + \frac{1}{4} f_x^2 \\ &= \frac{1}{2}\Big(f f_{xy} - f_{yy} - f_{xx} + \frac{1}{2} f_x^2\Big) \end{aligned}$$

On remarque qu'en partant de la signature dela variété lorentzienne,la variété de Walker de dimension 1 *est impossible à trouver.*

Définition 2.3. *Une variété de Walker de dimension* 3*,* (M, g_f)*, est une variété lorentzienne de dimension* 3 *admettant un champ de vecteurs parallèles dégénérés.Selon [20],dans un système des cordonnées locales* (x, y, z)*,la métrique de Walker est donnée par :*

$$g_f = 2\,dx\,dz + \varepsilon\,dy^2 + f(x, y, z)\,dz^2, \tag{2.2}$$

où $\varepsilon = \pm 1$ *et* $f : M \to \mathbb{R}$ *est une fonction différentiable appelée* fonction de pondération. *Sous forme matricielle cette métriqiue s'écrit*

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 1 & 0 & f(x,y,z) \end{pmatrix}, \qquad \textit{et son inverse est} \qquad (g^{ij}) = \begin{pmatrix} -f(x,y,z) & 0 & 1 \\ 0 & \varepsilon^{-1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.3}$$

où f *est une fonction différentiable définie sur la variété* M*, jouant le rôle de* pondération *de la composante* dz^2*, et où* $\varepsilon = \pm 1$*.*

2.1.2 Base contravariante.

La base contravariante correspond à la base naturelle du fibré tangent et on écrit

$$\{\partial_x, \partial_y, \partial_z\}.$$

Ici, $\partial_x, \partial_y, \partial_z$ *sont les vecteurs tangentiels aux axes de coordonnées* x, y, z*. Un vecteur* $V \in TM$ *s'écrit :*

$$V = V^x \partial_x + V^y \partial_y + V^z \partial_z,$$

où (V^x, V^y, V^z) *sont les composantes contravariantes.*

Ainsi, les vecteurs de la base s'expriment naturellement en composantes contravariantes :

$$\partial_x = (1, 0, 0), \quad \partial_y = (0, 1, 0), \quad \partial_z = (0, 0, 1).$$

Ici,le champ des vecteurs parallèles dégénérés est ∂_x *et engendre le plan totalement isotrope parallèle de dimension 1.*

En effet, pour la métrique de Walker (2.3) *:*

$$g_f(\partial_x, \partial_x) = g_{11} = 0.$$

Donc ∂_x *est un vecteur* lumière *ou* isotrope*.*

La dérivée covariante est donnée par :

$$\nabla_{\partial_i} \partial_j = \sum_k \Gamma^k_{ij}\, \partial_k,$$

où les symboles de Christoffel s'expriment par :

$$\Gamma_{ij}^{k} = \frac{1}{2}\sum_{l} g^{kl}\left(\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}\right).$$

Pour la métrique de Walker, un calcul direct montre que :

$$\Gamma_{1j}^{k} = \frac{1}{2}\, g^{k\ell}\big(\partial_1 g_{j\ell} + \partial_j g_{1\ell} - \partial_\ell g_{1j}\big) = \frac{1}{2}\, g^{k\ell}(0+0-0) = 0 \qquad \forall\, j,k.$$

Ainsi, pour tout j,

$$\nabla_{\partial_j}\partial_x = \Gamma_{1j}^{k}\,\partial_k = 0, \qquad d'où \qquad \nabla_{\partial_j}\partial_x = 0.$$

Ainsi, ∂_x est un champ de vecteurs parallèle.

2.1.3 Base covariante

La base covariante correspond à la base duale (1-formes) :

$$\{dx,\, dy,\, dz\}.$$

Les composantes covariantes d'un vecteur V sont obtenues par la relation :

$$V_i = g_{ij}V^j. \tag{2.4}$$

Dans la base contravariante $\{\partial_x, \partial_y, \partial_z\}$, on obtient alors :

$$(\partial_x)^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 1 & 0 & f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad (\partial_x)^* = dz.$$

$$(\partial_y)^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 1 & 0 & f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad (\partial_y)^* = \varepsilon\, dy.$$

$$(\partial_z)^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 1 & 0 & f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad (\partial_z)^* = dx + f(x,y,z)\, dz.$$

Donc la base covariante associée est formée des 1-formes :

$$(\partial_x)^* = g_f(\partial_x) = dz, \qquad (\partial_y)^* = g_f(\partial_y) = \varepsilon\, dy, \qquad (\partial_z)^* = g_f(\partial_z) = dx + f(x,y,z)\, dz.$$

Notons que la variété de Walker (M, g_f) est de signature $(2,1)$ si $\varepsilon = 1$, et de signature $(1,2)$ si $\varepsilon = -1$; elle est donc lorentzienne dans les deux cas. En effet, il suffit pour s'en convaincre de calculer les valeurs propres de la matrice associée à g_f :

— *Pour $\varepsilon = 1$, on a*

$$\det(g_f) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & f-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

si et seulement si

$$-\lambda \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & f-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1-\lambda \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

c'est-à-dire

$$-\lambda(1-\lambda)(f-\lambda) - (1-\lambda) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (1-\lambda)\big[-\lambda(f-\lambda) - 1\big] = 0.$$

Ainsi,

$$\lambda = 1 \quad ou \quad \lambda^2 - f\lambda - 1 = 0.$$

Le discriminant est

$$\Delta = f^2 + 4 \ > \ 0, \quad \textit{quelle que soit la fonction de pondération } f,$$

d'où

$$\lambda_1 = 1, \qquad \lambda_2 = \frac{f - \sqrt{f^2+4}}{2} < 0, \qquad \lambda_3 = \frac{f + \sqrt{f^2+4}}{2} > 0.$$

Par conséquent, la signature de g_f est $(2,1)$, et (M, g_f) est donc une variété de Walker de dimension trois.

— *On vérifie de la même façon que, pour $\varepsilon = -1$, la signature de g_f est $(1,2)$.*

Définition 2.4. *Les variétés lorentziennes de dimension trois admettant un champ de vecteurs nul parallèle engendré par ∂_x sont appelées variétés de Walker strictes. Une variété de Walker stricte peut être caractérisée par une fonction $f = f(y,z)$, c'est-à-dire que f est indépendante du paramètre x (voir [9]). La métrique d'une variété de Walker stricte en dimension 3 s'écrit sous la forme :*

$$g \ = \ 2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z \ + \ \varepsilon\,\mathrm{d}y^2 \ + \ f(y,z)\,\mathrm{d}z^2, \tag{2.5}$$

avec $\varepsilon = \pm 1$ constant et $f = f(y,z)$ une fonction lisse. Ici $g_{23} = 0$ et la fonction f ne dépend pas de x.

Pour la forme canonique stricte (2.5),
on obtient immédiatement les composantes de la métrique

$$g_{11} = g_{12} = 0, \quad g_{13} = 1, \quad g_{22} = \varepsilon, \quad g_{23} = 0, \quad g_{33} = f(y,z).$$

Le champ ∂_x est isotrope :

$$g(\partial_x, \partial_x) = 0.$$

De plus, la métrique est indépendante de x, ce qui implique

$$\nabla_{\partial_j} \partial_x = 0.$$

L'inverse de la matrice métrique est donné par :

$$(g^{ij}) = \begin{pmatrix} -f(y,z) & 0 & 1 \\ 0 & \varepsilon^{-1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cherchons à présent l'expression analytique (forme quadratique) de la métrique g_f.
Soit $(x^1, x^2, x^3) = (x, y, z)$. Le tenseur métrique s'écrit alors, de manière générale, sous la forme :

$$g_f = \sum_{i,j=1}^{3} g_{ij}\, dx^i \otimes dx^j.$$

À partir de la matrice symétrique (2.3) du tenseur métrique, on a :

$$\begin{aligned} g_f &= g_{11}\, dx^1dx^1 + g_{12}\, dx^1dx^2 + g_{13}\, dx^1dx^3 \\ &\quad + g_{21}\, dx^2dx^1 + g_{22}\, dx^2dx^2 + g_{23}\, dx^2dx^3 \\ &\quad + g_{31}\, dx^3dx^1 + g_{32}\, dx^3dx^2 + g_{33}\, dx^3dx^3 \\ &= 0 + 0 + dx^1dx^3 + 0 + \varepsilon\, dx^2dx^2 + 0 + dx^3dx^1 + 0 + f(x,y,z)\, dx^3dx^3. \end{aligned}$$

Finalement, on obtient :

$$g_f = 2\, dx\, dz + \varepsilon\, dy^2 + f(x,y,z)\, dz^2, \tag{2.6}$$

où l'on a posé $(x^1, x^2, x^3) = (x, y, z)$.

Proposition 2.1. *[25]Soit $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace vectoriel réel de dimension $p+q$ muni d'une forme bilinéaire symétrique non dégénérée de signature (p, q). Alors il existe une base orthonormale adaptée*

$$(e_1, \ldots, e_p, f_1, \ldots, f_q)$$

de V telle que tout vecteur $v \in V$ s'écrit de façon unique

$$v = \sum_{i=1}^{p} x_i e_i + \sum_{k=1}^{q} y_k f_k,$$

avec $x = (x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^p$ et $y = (y_1, \ldots, y_q) \in \mathbb{R}^q$, et on a alors

$$\langle v, v\rangle = \|x\|^2 - \|y\|^2 = \sum_{i=1}^{p} x_i^2 - \sum_{k=1}^{q} y_k^2.$$

Démonstration. Lemme (loi de Sylvester). Pour une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur un espace vectoriel réel de dimension finie, il existe une base dans laquelle la matrice de la forme est diagonale avec p coefficients égaux à $+1$ et q coefficients égaux à -1. Les entiers p et q sont invariants par changement de base.

On choisit alors, d'après ce lemme, une base

$$\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p, f_1, \ldots, f_q)$$

de V telle que

$$\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}, \qquad \langle f_k, f_\ell\rangle = -\delta_{k\ell}, \qquad \langle e_i, f_k\rangle = 0$$

pour tous $i, j \in \{1, \ldots, p\}$ et $k, \ell \in \{1, \ldots, q\}$.

Tout vecteur $v \in V$ s'écrit alors

$$v = \sum_{i=1}^{p} x_i e_i + \sum_{k=1}^{q} y_k f_k,$$

où l'on pose $x = (x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^p$ et $y = (y_1, \ldots, y_q) \in \mathbb{R}^q$. Par bilinéarité et orthogonalité,

$$\begin{aligned}\langle v, v\rangle &= \Big\langle \sum_{i=1}^{p} x_i e_i + \sum_{k=1}^{q} y_k f_k,\ \sum_{j=1}^{p} x_j e_j + \sum_{\ell=1}^{q} y_\ell f_\ell \Big\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{p} x_i^2 - \sum_{k=1}^{q} y_k^2 = \|x\|^2 - \|y\|^2,\end{aligned}$$

□

Proposition 2.2. *Soit (M, g) une variété pseudo-riemannienne de dimension 3. Si (M, g) est une variété de Walker, c'est-à-dire qu'elle admet une distribution totalement isotrope non nulle et parallèle, alors cette distribution est nécessairement de dimension 1. En particulier, (M, g) est une variété de Walker stricte.*

Démonstration. Soit $x \in M$ et $V = T_xM$ l'espace tangent en x, muni de la forme bilinéaire pseudo-riemannienne $\langle \cdot, \cdot \rangle$ associée à g_x. D'après le théorème d'inertie de Sylvester, il existe une base orthogonale de V dans laquelle la matrice de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est

$$\operatorname{diag}(\underbrace{+1, \ldots, +1}_{p \text{ fois}}, \underbrace{-1, \ldots, -1}_{q \text{ fois}}),$$

où $p + q = 3$.

Soit $U \subset V$ un sous-espace totalement isotrope, c'est-à-dire que

$$\langle u, u' \rangle = 0, \quad \forall\, u, u' \in U.$$

Autrement dit, $U \subset U^\perp$, où

$$U^\perp = \{w \in V : \langle w, u \rangle = 0\ \forall u \in U\}.$$

Puisque la forme bilinéaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est non dégénérée, on a

$$\dim U + \dim U^\perp = \dim V = 3.$$

Comme $U \subset U^\perp$, il vient :

$$\dim U \leq \frac{3}{2}.$$

La dimension étant entière, on obtient $\dim U \leq 1$.

Or, par définition même d'une variété de Walker, il existe une distribution isotrope parallèle non nulle, donc $\dim U \geq 1$. On en déduit nécessairement :

$$\dim U = 1.$$

Ainsi, la distribution isotrope parallèle de (M, g) est de dimension maximale possible. Par conséquent, (M, g) est une variété de Walker stricte. □

Proposition 2.3. *L'espace de Minkowski tridimensionnel est un cas particulier (plat) de variété de Walker.*

Démonstration. Considérons l'espace de Minkowski $(\mathbb{R}^3_1, g)$ muni de la métrique

$$g = -\,dt^2 + dx^2 + dy^2,$$

dans les coordonnées globales affines (t, x, y).

Nous constatons que :

(i) La matrice des composantes g_{ij} (indices $i, j \in \{t, x, y\}$) dans la base $\{\partial_t, \partial_x, \partial_y\}$ est

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (g^{ij}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(ii) Les composantes g_{ij} sont constantes dans ces coordonnées ; par conséquent, toutes les dérivées partielles $\partial_k g_{ij}$ s'annulent. Les symboles de Christoffel de Levi–Civita sont donnés par

$$\Gamma^k_{ij} = \tfrac{1}{2}\, g^{k\ell}\big(\partial_i g_{\ell j} + \partial_j g_{\ell i} - \partial_\ell g_{ij}\big),$$

et donc

$$\Gamma^k_{ij} = 0 \quad \text{pour tous } i, j, k.$$

(iii) Le tenseur de Riemann s'écrit en composantes :

$$R^r_{sij} = \partial_i \Gamma^r_{sj} - \partial_j \Gamma^r_{si} + \Gamma^r_{i\ell}\Gamma^\ell_{sj} - \Gamma^r_{j\ell}\Gamma^\ell_{si}.$$

Comme tous les Γ^k_{ij} sont nuls, on a immédiatement

$$R^r_{sij} = 0 \quad \text{pour tous } r, s, i, j.$$

D'où l'espace de Minkowski $(\mathbb{R}^3_1, g)$ est une variété pseudo-riemannienne plate.

Si l'on part de la métrique plane de Minkowski en dimension 3, écrite avec la convention $(+, -, +)$,

$$g = dt^2 - dx^2 + dy^2,$$

introduisons les coordonnées par changement des variables :

$$u = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(t - x), \qquad v = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(t + x).$$

Calculons les différentielles :

$$du = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(dt - dx), \tag{2.7}$$

$$dv = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(dt + dx). \tag{2.8}$$

(2.7) + (2.8) et (2.8) - (2.7) donnent respectivement

$$du + dv = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(dt - dx) + \tfrac{1}{\sqrt{2}}(dt + dx) = \sqrt{2}\, dt,$$

$$dv - du = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(dt + dx) - \tfrac{1}{\sqrt{2}}(dt - dx) = \sqrt{2}\, dx,$$

donc

$$dt = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(du + dv), \qquad dx = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(dv - du).$$

Par substitution dans la partie $dt^2 - dx^2$ de la métrique :

$$\begin{aligned} dt^2 - dx^2 &= \Big(\tfrac{1}{\sqrt{2}}(du+dv)\Big)^2 - \Big(\tfrac{1}{\sqrt{2}}(dv-du)\Big)^2 \\ &= \tfrac{1}{2}\big((du+dv)^2 - (dv-du)^2\big) \\ &= \tfrac{1}{2}\big(du^2 + 2\,du\,dv + dv^2 - (dv^2 - 2\,du\,dv + du^2)\big) \\ &= \tfrac{1}{2}\big(4\,du\,dv\big) = 2\,du\,dv. \end{aligned}$$

Finalement, la métrique s'écrit

$$g = dt^2 - dx^2 + dy^2 = 2\,du\,dv + dy^2. \tag{2.9}$$

En adoptant la convention de signature $(-,+,+)$, on a :

$$\begin{aligned} -dt^2 + dx^2 &= -\Big(\tfrac{1}{\sqrt{2}}(du+dv)\Big)^2 + \Big(\tfrac{1}{\sqrt{2}}(dv-du)\Big)^2 \\ &= -\tfrac{1}{2}(du+dv)^2 + \tfrac{1}{2}(dv-du)^2 \\ &= -\tfrac{1}{2}\big(du^2 + 2\,du\,dv + dv^2\big) + \tfrac{1}{2}\big(dv^2 - 2\,du\,dv + du^2\big) \\ &= -2\,du\,dv. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Ainsi, dans les coordonnées (u,v,y), la métrique s'écrit

$$g = -dt^2 + dx^2 + dy^2 = -2\,du\,dv + dy^2. \tag{2.11}$$

Cette forme correspond à la métrique générale de Walker en dimension 3 :

$$g_f = 2\,dx\,dz + \varepsilon\,dy^2 + f(x,y,z)\,dz^2,$$

avec $f = 0$ et $\varepsilon = 1$.

De plus,

$$g(\partial_v, \partial_v) = (0\ 0\ 1)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Les symboles de Christoffel s'écrivent

$$\Gamma^{\ell}_{ij} = \tfrac{1}{2}\, g^{\ell m}\left(\partial_i g_{mj} + \partial_j g_{mi} - \partial_m g_{ij}\right),$$

et s'annulent tous :

$$\Gamma^{\ell}_{ij} = 0 \quad \text{pour tous } i,j,\ell.$$

Par définition de la dérivée covariante en coordonnées,

$$\nabla_{\partial_i}\partial_v = \Gamma^{\ell}_{iv}\,\partial_\ell.$$

Comme tous les Γ^{ℓ}_{iv} sont nuls, on obtient

$$\nabla_{\partial_i}\partial_v = 0 \quad \text{pour tout } i.$$

Ainsi, $(\mathbb{R}^3_1, g)$ est une variété de Walker. □

Remarque 2.1. *Les variétés de Walker peuvent être vues comme une généralisation courbée de l'espace de Minkowski. En effet, dans la représentation locale standard d'une métrique de Walker en dimension trois,*

$$g_f = 2\,dx\,dz + \varepsilon\,dy^2 + f(x,y,z)\,dz^2,$$

le cas plat *correspond précisément à la fonction nulle $f = 0$. Dans ce cas, la métrique devient*

$$g_0 = 2\,dx\,dz + \varepsilon\,dy^2, \tag{2.12}$$

qui correspond à la métrique de l'espace de Minkowski (de signature $(2,1)$ ou $(1,2)$ selon la valeur de $\varepsilon = \pm 1$).

La matrice associée à cette métrique g_0, dans la base de coordonnées $(\partial_x, \partial_y, \partial_z)$, est donnée par :

$$(g_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En effet, posons

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(t-u),$$
$$z = \frac{1}{\sqrt{2}}(t+u).$$

Calculons les différentielles :

$$dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(dt - du), \tag{2.13}$$
$$dz = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(dt + du). \tag{2.14}$$

En substituant (2.13) et (2.14) dans (2.12), on obtient

$$\begin{aligned} g_0 &= dx\,dz + dz\,dx + \varepsilon\,dy^2 \\ &= \frac{1}{2}(dt-du)(dt+du) + \frac{1}{2}(dt+du)(dt-du) + \varepsilon\,dy^2 \\ &= \frac{1}{2}(dt^2 - du^2) + \frac{1}{2}(dt^2 - du^2) + \varepsilon\,dy^2 \\ &= dt^2 - du^2 + \varepsilon\,dy^2. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Ainsi,

$$g_0 = dt^2 - du^2 + \varepsilon\,dy^2,$$

qui est la métrique associée à l'espace de Minkowski de dimension 3.

2.2 Produit vectoriel de Walker

Nous avons défini le produit vectoriel lorentzien. Nous allons maintenant définir le produit vectoriel pour le cas particulier où la métrique est une métrique de Walker g_f.

Soient $u, v \in T_xM$. Le produit vectoriel $u \wedge_f v$ est le vecteur unique satisfaisant :

$$\langle u \wedge_f v,\ w\rangle = \det(u,v,w) = \begin{vmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

pour tout $w \in T_xM$. Soit

$$u = (u_1, u_2, u_3), \quad v = (v_1, v_2, v_3), \quad w = (w_1, w_2, w_3).$$

On définit le produit vectoriel $u \wedge_f v$ comme le vecteur vérifiant, pour tout $w \in \Gamma(TM)$:

$$g_f(u \wedge_f v,\ w) = \det(u,v,w).$$

Calculons les deux membres de cette égalité :

— Le déterminant des trois vecteurs :

$$\det(u,v,w) = \begin{vmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = w_1(u_2v_3 - u_3v_2) + w_2(u_3v_1 - u_1v_3) + w_3(u_1v_2 - u_2v_1).$$

— Notons $u \wedge_f v = (a, b, c)$. Alors :

$$g_f(u \wedge_f v,\ w) = cw_1 + \varepsilon b w_2 + (a - fc)w_3.$$

Par identification des coefficients de w_1, w_2 et w_3 dans les deux expressions, on obtient :

$$\begin{aligned} c &= u_2v_3 - u_3v_2, \\ \varepsilon b &= u_3v_1 - u_1v_3, \\ a - fc &= u_1v_2 - u_2v_1. \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} a &= u_1v_2 - u_2v_1 + f(u_2v_3 - u_3v_2), \\ b &= \frac{u_3v_1 - u_1v_3}{\varepsilon}, \\ c &= u_2v_3 - u_3v_2. \end{aligned}$$

Dans le cas où $\varepsilon = 1$ (signature $(2,1)$), on simplifie et on obtient :

$$u \wedge_f v = (u_1v_2 - u_2v_1 - (u_2v_3 - u_3v_2)\, f,\ u_1v_3 - u_3v_1,\ u_2v_3 - u_3v_2)\,. \tag{2.16}$$

Dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, l'équation (2.16) devient :

$$\mathbf{u} \wedge_f \mathbf{v} = (u_1v_2 - u_2v_1 - (u_2v_3 - u_3v_2)\, f)\ \vec{\imath} + (u_1v_3 - u_3v_1)\,\vec{\jmath} + (u_2v_3 - u_3v_2)\,\vec{k}.$$

Exemple 2.1.

Soient $u = (0, -1, 0)$ *et* $v = (1, 0, 0)$.

On applique la formule du produit vectoriel adaptée à la métrique de Walker :

$$u \wedge_f v = (0 \cdot 1 - (-1) \cdot 0 - [(-1) \cdot 0 - 0 \cdot 0]f,\ 0 \cdot 0 - 0 \cdot 1,\ (-1) \cdot 0 - 0 \cdot 0) = (0,0,0).$$

Ainsi,

$$u \wedge_f v = 0.$$

Exemple 2.2. *Soit* $u = (0, 1, 0)$ *et* $v = \left(0, 0, \frac{1}{\sqrt{|f|}}\right)$. *On applique la formule du produit vectoriel adaptée à la métrique de Walker :*

$$u \wedge_f v = (u_1v_2 - u_2v_1 - (u_2v_3 - u_3v_2)f,\ u_1v_3 - u_3v_1,\ u_2v_3 - u_3v_2)$$

On remplace les composantes :

$$\begin{aligned} &u_1 = 0, \quad u_2 = 1, \quad u_3 = 0, \\ &v_1 = 0, \quad v_2 = 0, \quad v_3 = \frac{1}{\sqrt{|f|}} \end{aligned}$$

Calculons chaque composante :

$$\begin{aligned} (u \wedge_f v)_1 &= 0 \cdot 0 - 1 \cdot 0 - \left(1 \cdot \frac{1}{\sqrt{|f|}} - 0 \cdot 0\right) f = -\frac{f}{\sqrt{|f|}} = -\sqrt{|f|} \\ (u \wedge_f v)_2 &= 0 \cdot \frac{1}{\sqrt{|f|}} - 0 \cdot 0 = 0 \\ (u \wedge_f v)_3 &= 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{|f|}} - 0 \cdot 0 = \frac{1}{\sqrt{|f|}} \end{aligned}$$

Donc :

$$u \wedge_f v = \left(-\sqrt{|f|},\ 0,\ \frac{f}{\sqrt{|f|}}\right)$$

Remarque 2.2. *Notons que*

$$\|u\| = \|v\| = \|u \wedge_f v\| = 1.$$

Ici, nous supposons que $f > 0$, *puisque le cas* $f < 0$ *peut être étudié de manière analogue. On obtient alors un repère orthonormé :*

$$\begin{aligned} e_1 &= -\sqrt{f}\,\partial_x + \frac{1}{\sqrt{f}}\,\partial_z, \\ e_2 &= \partial_y, \\ e_3 &= \frac{1}{\sqrt{f}}\,\partial_z. \end{aligned} \tag{2.17}$$

De plus, vérifions que :

$$\langle e_1, e_1\rangle = -1, \quad \langle e_2, e_2\rangle = -1, \quad \langle e_3, e_3\rangle = 1.$$

En effet,dans la base canonique $(\partial_x, \partial_y, \partial_z)$, la métrique de Walker s'écrit :

$$(g_f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 1 & 0 & f \end{pmatrix}$$

D'où les produits de base suivants :

$$\begin{aligned} g_f(\partial_x, \partial_x) &= 0, \\ g_f(\partial_x, \partial_z) &= g_f(\partial_z, \partial_x) = 1, \\ g_f(\partial_y, \partial_y) &= \varepsilon, \\ g_f(\partial_z, \partial_z) &= f, \\ \text{et les autres produits croisés} &= 0. \end{aligned}$$

À partir de (2.17) ,calculons :

i)

$$\begin{aligned} g_f(e_1, e_1) &= g_f\left(-\sqrt{f}\,\partial_x + \frac{1}{\sqrt{f}}\,\partial_z,\ -\sqrt{f}\,\partial_x + \frac{1}{\sqrt{f}}\,\partial_z\right) \\ &= f \cdot g_f(\partial_x, \partial_x) - 2 \cdot \sqrt{f} \cdot \frac{1}{\sqrt{f}} \cdot g_f(\partial_x, \partial_z) + \frac{1}{f} \cdot g_f(\partial_z, \partial_z) \\ &= f \cdot 0 - 2 + \frac{1}{f} \cdot f \\ &= -2 + 1 = -1 \end{aligned}$$

ii)

$$g_f(e_2, e_2) = g_f(\partial_y, \partial_y) = \varepsilon$$

iii)

$$g_f(e_3, e_3) = \left(\frac{1}{\sqrt{f}}\right)^2 \cdot g_f(\partial_z, \partial_z) = \frac{1}{f} \cdot f = 1$$

D'après la formule (1.9), les vecteurs e_1, e_2 et e_3 sont unitaires, et l'on peut également vérifier que

$$g_f(e_i, e_j) = 0 \quad \text{pour } i \neq j.$$

Ainsi, $\{e_1, e_2, e_3\}$ forme une base orthonormée du fibré tangent $T(M)$ pour la métrique g_f, à condition que $\varepsilon = \pm 1$.

2.3 Connexions de Levi-Civita et tenseur de courbure

Proposition 2.4. *Nous pouvons calculer les symboles de Christoffel à l'aide de la formule suivante :*

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{n} g^{il} \left(\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l} \right), \tag{2.18}$$

où g^{il} désigne les composantes de l'inverse de la matrice métrique (g_{ij}).

La connexion de Levi-Civita est exprimée à partir des symboles de Christoffel par la relation :

$$\nabla_{\partial_i} \partial_j = \sum_{k=1}^{n} \Gamma^k_{ij} \partial_k, \quad \text{pour } 1 \leq i, j \leq n. \tag{2.19}$$

et d'après [24], nous trouvons les symboles de Christoffel non nuls possibles d'une métrique de Walker g_f comme suit :

$$\Gamma^1_{13} = \Gamma^1_{31} = \frac{1}{2} f_x,$$
$$\Gamma^1_{23} = \Gamma^1_{32} = \frac{1}{2} f_y,$$
$$\Gamma^1_{33} = \frac{1}{2}(f_z + f f_x),$$
$$\Gamma^2_{33} = \frac{1}{2} f_y,$$
$$\Gamma^3_{33} = -\frac{1}{2} f_x.$$

Démonstration. Nous utilisons la formule classique des symboles de Christoffel :

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{3} g^{il} \left(\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l} \right).$$

La matrice inverse de g_f étant :

$$(g^{ij}) = \begin{pmatrix} -f & 0 & 1 \\ 0 & \varepsilon^{-1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a :

$$\Gamma^1_{11} = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{3} g^{1l} \left(\partial_1 g_{1l} + \partial_1 g_{1l} - \partial_l g_{11} \right).$$

Toutes les dérivées sont nulles car $g_{11} = g_{12} = 0$ et $g_{13} = 1$ est constante. Donc :

$$\Gamma^1_{11} = 0.$$

$$\Gamma^1_{13} = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{3} g^{1l} \left(\partial_1 g_{3l} + \partial_3 g_{1l} - \partial_l g_{13} \right).$$

Les seuls termes non nuls sont :

$$g^{13} = 1, \quad \partial_1 g_{33} = -f_x.$$

Donc :

$$\Gamma^1_{13} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (-f_x) = \frac{1}{2} f_x. \quad \text{Par symétrie : } \Gamma^1_{31} = \Gamma^1_{13}.$$

$$\Gamma^1_{23} = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{3} g^{1l} \left(\partial_2 g_{3l} + \partial_3 g_{2l} - \partial_l g_{23} \right).$$

Seul $g^{13} = 1$, et $\partial_2 g_{33} = -f_y$, donc :

$$\Gamma^1_{23} = \frac{1}{2} f_y = \Gamma^1_{32}.$$

$$\Gamma^1_{33} = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{3} g^{1l} \left(2\partial_3 g_{3l} - \partial_l g_{33} \right).$$

Seul $g^{13} = 1$, $\partial_3 g_{33} = -f_z$, $\partial_1 g_{33} = -f_x$, donc :

$$\Gamma^1_{33} = \frac{1}{2}(f_z + f f_x).$$

$$\Gamma^2_{33} = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{3} g^{2l}\left(2\partial_3 g_{3l} - \partial_l g_{33}\right).$$

Seul $g^{22} = \varepsilon$, et $\partial_2 g_{33} = -f_y$, donc :

$$\Gamma^2_{33} = \frac{1}{2}\varepsilon(-f_y) = \frac{1}{2}f_y.$$

$$\Gamma^3_{33} = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{3} g^{3l}\left(2\partial_3 g_{3l} - \partial_l g_{33}\right).$$

Seul $g^{31} = 1$, et $\partial_1 g_{33} = -f_x$, donc :

$$\Gamma^3_{33} = \frac{1}{2}\cdot 1 \cdot (-f_x) = -\frac{1}{2}f_x.$$

□

Théorème 2.1. *[24] Les composantes non nulles possibles de la connexion de Levi-Civita associée à toute métrique g_f de Walker sont :*

$$\begin{aligned}
\nabla_{\partial_x}\partial_z &= \frac{1}{2}f_x\,\partial_x,\\
\nabla_{\partial_y}\partial_z &= \frac{1}{2}f_y\,\partial_x,\\
\nabla_{\partial_z}\partial_z &= \frac{1}{2}(f f_x + f_z)\,\partial_x + \frac{1}{2}f_y\,\partial_y - \frac{1}{2}f_x\,\partial_z.
\end{aligned}$$

Démonstration. Nous utilisons la relation :

$$\nabla_{\partial_i}\partial_j = \sum_{k=1}^{3}\Gamma^k_{ij}\partial_k,$$

et les symboles de Christoffel donnés dans la Proposition 2.4.

$$\nabla_{\partial_x}\partial_x = \sum_{k=1}^{3}\Gamma^k_{11}\partial_k = \Gamma^1_{11}\partial_x + \Gamma^2_{11}\partial_y + \Gamma^3_{11}\partial_z = 0.$$

$$\nabla_{\partial_x}\partial_z = \sum_{k=1}^{3}\Gamma^k_{13}\partial_k = \Gamma^1_{13}\partial_x + \Gamma^2_{13}\partial_y + \Gamma^3_{13}\partial_z.$$

D'après la proposition précédente, tous les termes sauf $\Gamma^1_{13} = \frac{1}{2}f_x$ sont nuls. Donc :

$$\nabla_{\partial_x}\partial_z = \frac{1}{2}f_x\partial_x.$$

$$\nabla_{\partial_y}\partial_z = \sum_{k=1}^{3}\Gamma_{23}^k\partial_k = \Gamma_{23}^1\partial_x + \Gamma_{23}^2\partial_y + \Gamma_{23}^3\partial_z = \frac{1}{2}f_y\,\partial_x.$$

$$\nabla_{\partial_z}\partial_z = \sum_{k=1}^{3}\Gamma_{33}^k\partial_k = \Gamma_{33}^1\partial_x + \Gamma_{33}^2\partial_y + \Gamma_{33}^3\partial_z.$$

On remplace les symboles :

$$\Gamma_{33}^1 = \frac{1}{2}(ff_x + f_z), \quad \Gamma_{33}^2 = \frac{1}{2}f_y, \quad \Gamma_{33}^3 = -\frac{1}{2}f_x,$$

donc :

$$\nabla_{\partial_z}\partial_z = \frac{1}{2}(ff_x + f_z)\,\partial_x + \frac{1}{2}f_y\,\partial_y - \frac{1}{2}f_x\,\partial_z.$$

□

Théorème 2.2. *[10] Comme donné en (1.26),*

$$R(\partial_i,\partial_j)\partial_k = \nabla_{\partial_i}\nabla_{\partial_j}\partial_k - \nabla_{\partial_j}\nabla_{\partial_i}\partial_k - \nabla_{[\partial_i,\partial_j]}\partial_k, \tag{2.20}$$

où ∂_i, ∂_j, ∂_k sont les vecteurs de la base de coordonnées, la courbure de Riemann de la variété M est déterminée par les composantes éventuellement non nulles suivantes :

$$\begin{aligned}
R(\partial_x,\partial_z)\partial_x &= \tfrac{1}{2}f_{xx}\,\partial_x,\\
R(\partial_x,\partial_z)\partial_z &= \tfrac{1}{2}ff_{xx}\,\partial_x - \frac{\varepsilon}{2}f_{xy}\,\partial_y - \tfrac{1}{2}f_{xx}\,\partial_z,\\
R(\partial_x,\partial_z)\partial_y &= \tfrac{1}{2}f_{xy}\,\partial_x,\\
R(\partial_y,\partial_z)\partial_x &= \tfrac{1}{2}f_{xy}\,\partial_x,\\
R(\partial_y,\partial_z)\partial_y &= \tfrac{1}{2}f_{yy}\,\partial_x,\\
R(\partial_y,\partial_z)\partial_z &= \tfrac{1}{2}ff_{xy}\,\partial_x - \frac{\varepsilon}{2}f_{yy}\,\partial_y - \tfrac{1}{2}f_{xy}\,\partial_z.
\end{aligned}$$

Démonstration. Soit une variété de Walker tridimensionnelle (M, g_f), dont la métrique en base $(\partial_x,\partial_y,\partial_z)$ est donnée en (2.3).

La version covariante du tenseur de courbure s'écrit :

$$R(\partial_i,\partial_j)\partial_k = \sum_{\ell=1}^{3}R_{kij}^{\ell}\,\partial_\ell$$

$$\text{où } R_{kij}^{\ell} = \partial_i(\Gamma_{jk}^{\ell}) - \partial_j(\Gamma_{ik}^{\ell}) + \sum_{m=1}^{3}\left(\Gamma_{im}^{\ell}\Gamma_{jk}^{m} - \Gamma_{jm}^{\ell}\Gamma_{ik}^{m}\right)$$

D'après la Proposition 2.4, les seuls symboles de Christoffel non nuls sont :

$$\begin{aligned}
&\Gamma_{13}^1 = \Gamma_{31}^1 = \tfrac{1}{2}f_x, \qquad \Gamma_{23}^1 = \Gamma_{32}^1 = \tfrac{1}{2}f_y, \qquad \Gamma_{33}^1 = \tfrac{1}{2}(ff_x + f_z),\\
&\Gamma_{33}^2 = -\tfrac{1}{2}f_y, \qquad \Gamma_{33}^3 = -\tfrac{1}{2}f_y.
\end{aligned}$$

En utilisant la formule du tenseur de courbure :

$$R^{\ell}_{kij} = \partial_i \Gamma^{\ell}_{kj} - \partial_j \Gamma^{\ell}_{ki} + \sum_{m=1}^{3} \left(\Gamma^{m}_{kj} \Gamma^{\ell}_{mi} - \Gamma^{m}_{ki} \Gamma^{\ell}_{mj} \right),$$

nous obtenons successivement :

$$\begin{aligned} R(\partial_y, \partial_z)\partial_x = R(\partial_2, \partial_3)\partial_1 &= R^1{}_{323}\, \partial_1 + R^2{}_{323}\, \partial_2 + R^3{}_{323}\, \partial_3 \\ R(\partial_y, \partial_z)\partial_x &= R^1{}_{323}\, \partial_x + R^2{}_{323}\, \partial_y + R^3{}_{323}\, \partial_z \\ &= \partial_y\Big(\frac{1}{2} f_x\Big)\partial_x = \frac{1}{2} f_{xy}\, \partial_x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R(\partial_y, \partial_z)\partial_y = R(\partial_2, \partial_3)\partial_2 &= R^1{}_{323}\, \partial_x + R^2{}_{323}\, \partial_y + R^3{}_{323}\, \partial_z \\ &= \partial_y\Big(\frac{1}{2} f_y\Big)\partial_x = \frac{1}{2} f_{yy}\, \partial_x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R(\partial_1, \partial_3)\partial_3 &= R^1{}_{313}\, \partial_1 + R^2{}_{313}\, \partial_2 + R^3{}_{313}\, \partial_3 \\ R(\partial_x, \partial_z)\partial_z &= R^1{}_{313}\, \partial_x + R^2{}_{313}\, \partial_y + R^3{}_{313}\, \partial_z \\ &= R^1{}_{313}\, \partial_x + R^2{}_{313}\, \partial_y + R^3{}_{313}\, \partial_z \\ &= \Big\{ \partial_1 \Gamma^1_{33} - \partial_3 \Gamma^1_{13} + \Gamma^1_{11}\Gamma^1_{33} - \Gamma^1_{31}\Gamma^1_{13} \\ &\quad + \Gamma^1_{12}\Gamma^2_{33} - \Gamma^1_{32}\Gamma^2_{13} + \Gamma^1_{13}\Gamma^3_{33} - \Gamma^1_{33}\Gamma^3_{13} \Big\}\partial_x \\ &\quad + \Big\{ \partial_1 \Gamma^2_{33} - \partial_3 \Gamma^2_{13} + \Gamma^2_{11}\Gamma^1_{33} - \Gamma^2_{31}\Gamma^1_{13} \\ &\quad + \Gamma^2_{12}\Gamma^2_{33} - \Gamma^2_{32}\Gamma^2_{13} + \Gamma^2_{13}\Gamma^3_{33} - \Gamma^2_{33}\Gamma^3_{13} \Big\}\partial_y \\ &\quad + \Big\{ \partial_1 \Gamma^3_{33} - \partial_3 \Gamma^3_{13} + \Gamma^3_{11}\Gamma^1_{33} - \Gamma^3_{31}\Gamma^1_{13} \\ &\quad + \Gamma^3_{12}\Gamma^2_{33} - \Gamma^3_{32}\Gamma^2_{13} + \Gamma^3_{13}\Gamma^3_{33} - \Gamma^3_{33}\Gamma^3_{13} \Big\}\partial_z. \end{aligned}$$

En utilisant les symboles de Christoffel connus :

$$\Gamma^1_{13} = \frac{1}{2} f_x, \quad \Gamma^1_{33} = \frac{1}{2}(f f_x + f_z), \quad \Gamma^2_{33} = -\frac{1}{2} f_y, \quad \Gamma^3_{33} = -\frac{1}{2} f_y,$$

et tous les autres Γ^k_{ij} intervenant ici sont nuls.

Alors :

$$\begin{aligned} R(\partial_x, \partial_z)\partial_z &= \Big\{ \partial_x\big(\tfrac{1}{2}(f f_x + f_z)\big) - \partial_z\big(\tfrac{1}{2} f_x\big) - \frac{1}{4} f_x^2 - \frac{1}{4} f_x^2 \Big\}\partial_x \\ &\quad + \Big\{ \partial_x\big(-\tfrac{1}{2} f_y\big) \Big\}\partial_y + \Big\{ \partial_x\big(-\tfrac{1}{2} f_y\big) \Big\}\partial_z \\ &= \frac{1}{2} f f_{xx}\, \partial_x - \frac{\varepsilon}{2} f_{xy}\, \partial_y - \frac{1}{2} f_{xx}\, \partial_z. \end{aligned}$$

$$R(\partial_x, \partial_z)\partial_z = \frac{1}{2} f f_{xx}\, \partial_x - \frac{\varepsilon}{2} f_{xy}\, \partial_y - \frac{1}{2} f_{xx}\, \partial_z.$$

$$\begin{aligned}
R(\partial_2,\partial_3)\partial_3 &= R^1{}_{323}\,\partial_1 + R^2{}_{323}\,\partial_2 + R^3{}_{323}\,\partial_3\\
R(\partial_y,\partial_z)\partial_z &= R^1{}_{323}\,\partial_x + R^2{}_{323}\,\partial_y + R^3{}_{323}\,\partial_z\\
&= \Big\{\partial_2\Gamma^1_{33} - \partial_3\Gamma^1_{23} + \Gamma^1_{21}\Gamma^1_{33} - \Gamma^1_{31}\Gamma^1_{23}\\
&\quad + \Gamma^1_{22}\Gamma^2_{33} - \Gamma^1_{32}\Gamma^2_{23} + \Gamma^1_{23}\Gamma^3_{33} - \Gamma^1_{33}\Gamma^3_{23}\Big\}\partial_x\\
&\quad + \Big\{\partial_2\Gamma^2_{33} - \partial_3\Gamma^2_{23} + \Gamma^2_{21}\Gamma^1_{33} - \Gamma^2_{31}\Gamma^1_{23}\\
&\quad + \Gamma^2_{22}\Gamma^2_{33} - \Gamma^2_{32}\Gamma^2_{23} + \Gamma^2_{23}\Gamma^3_{33} - \Gamma^2_{33}\Gamma^3_{23}\Big\}\partial_y\\
&\quad + \Big\{\partial_2\Gamma^3_{33} - \partial_3\Gamma^3_{23} + \Gamma^3_{21}\Gamma^1_{33} - \Gamma^3_{31}\Gamma^1_{23}\\
&\quad + \Gamma^3_{22}\Gamma^2_{33} - \Gamma^3_{32}\Gamma^2_{23} + \Gamma^3_{23}\Gamma^3_{33} - \Gamma^3_{33}\Gamma^3_{23}\Big\}\partial_z.
\end{aligned}$$

En utilisant les symboles de Christoffel connus :

$$\Gamma^1_{23} = \frac{1}{2}f_y, \quad \Gamma^1_{33} = \frac{1}{2}(ff_x + f_z), \quad \Gamma^2_{33} = -\frac{\varepsilon}{2}f_{yy}, \quad \Gamma^3_{33} = -\frac{1}{2}f_{xy},$$

et tous les autres Γ^k_{ij} intervenant ici sont nuls .

Alors :

$$\begin{aligned}
R(\partial_y,\partial_z)\partial_z &= \partial_y\Big(\frac{1}{2}ff_x + \frac{1}{2}f_z\Big)\partial_x - \frac{\varepsilon}{2}f_{yy}\,\partial_y - \frac{1}{2}f_{xy}\,\partial_z\\
&= \frac{1}{2}ff_{xy}\,\partial_x - \frac{\varepsilon}{2}f_{yy}\,\partial_y - \frac{1}{2}f_{xy}\,\partial_z.
\end{aligned}$$

$$R(\partial_y,\partial_z)\partial_z = \frac{1}{2}ff_{xy}\,\partial_x - \frac{\varepsilon}{2}f_{yy}\,\partial_y - \frac{1}{2}f_{xy}\,\partial_z.$$

$$\begin{aligned}
R(\partial_1,\partial_3)\partial_1 &= R^1{}_{113}\,\partial_1 + R^2{}_{113}\,\partial_2 + R^3{}_{113}\,\partial_3\\
R(\partial_x,\partial_z)\partial_x &= R^1{}_{113}\,\partial_x + R^2{}_{113}\,\partial_y + R^3{}_{113}\,\partial_z\\
&= \Big\{\partial_1\Gamma^1_{31} - \partial_3\Gamma^1_{11} + \Gamma^1_{11}\Gamma^1_{31} - \Gamma^1_{31}\Gamma^1_{11}\\
&\quad + \Gamma^1_{12}\Gamma^2_{31} - \Gamma^1_{32}\Gamma^2_{11} + \Gamma^1_{13}\Gamma^3_{31} - \Gamma^1_{33}\Gamma^3_{11}\Big\}\partial_x\\
&\quad + \Big\{\partial_1\Gamma^2_{31} - \partial_3\Gamma^2_{11} + \Gamma^2_{11}\Gamma^1_{31} - \Gamma^2_{31}\Gamma^1_{11} + \cdots\Big\}\partial_y\\
&\quad + \Big\{\partial_1\Gamma^3_{31} - \partial_3\Gamma^3_{11} + \Gamma^3_{11}\Gamma^1_{31} - \Gamma^3_{31}\Gamma^1_{11} + \cdots\Big\}\partial_z.
\end{aligned}$$

En utilisant les symboles de Christoffel connus :

$$\Gamma^1_{31} = \frac{1}{2}f_x, \quad \Gamma^1_{11} = \Gamma^2_{11} = \Gamma^3_{11} = 0,$$

et tous les autres Γ^k_{ij} intervenant ici sont nuls .

Alors :

$$\begin{aligned}
R(\partial_x,\partial_z)\partial_x &= \partial_1\Gamma^1_{31}\,\partial_x\\
&= \partial_x\left(\frac{1}{2}f_x\right)\partial_x\\
&= \frac{1}{2}f_{xx}\,\partial_x.
\end{aligned}$$

$$R(\partial_x, \partial_z)\partial_x = \frac{1}{2} f_{xx}\, \partial_x.$$

□

2.4 Courbes géodésiques sur les variétés de Walker de dimension 3

Ici, nous étudions les courbes géodésiques tracées sur une variété de Walker tridimensionnelle, en mettant l'accent sur les courbes ayant une composante constante ou linéaire.

Rappelons qu'une courbe γ dans M est dite de type temps (respectivement de type espace, de type lumière) à l'instant t si $\gamma'(t)$ est un vecteur de type temps (respectivement de type espace, de type lumière). La courbe γ est dite de type temps (respectivement de type espace, de type lumière) si $\gamma'(t)$ est de type temps (respectivement de type espace, de type lumière) pour tout $t \in I$ [19, 11].

La géométrie euclidienne ne possède pas de courbure, et une droite y représente le chemin le plus court entre deux points. En revanche, en Relativité Générale, l'espace est courbé par la masse. Une géodésique est la notion de ligne droite adaptée à un espace courbe, c'est-à-dire qu'une géodésique est (localement) le chemin le plus court entre deux points de l'espace ou une courbe qui minimise la longueur.

Définition 2.5. *Soit $\gamma : I \to (M, g)$ une courbe. On dit que γ est une* géodésique *ou une* courbe harmonique *si elle est solution de l'équation d'Euler–Lagrange*

$$\tau(\gamma) = \nabla_{\gamma'}\gamma'(t) = 0, \tag{2.21}$$

où $\tau(\gamma)$ est la tension (ou courbure vectorielle) et $\gamma'(t)$ est le vecteur tangent unitaire à γ.

La fonction énergie associée est

$$\begin{aligned} E(\gamma) &= \tfrac{1}{2}\int_I \|\gamma'(t)\|^2\, dt \\ &= \frac{1}{2}\int_I g(\gamma'(t),\, \gamma'(t))\; dt. \end{aligned}$$

Remarque 2.3. *Soit $\gamma(t)$ une courbe définie sur un ouvert $U \subset M$, avec les fonctions coordonnées $\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t)$. Alors γ est une géodésique ou une courbe harmonique de M si et seulement si ses fonctions coordonnées γ_k vérifient :*

$$\frac{d^2\gamma_k}{dt^2} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k(\gamma(t))\frac{d\gamma_i}{dt}\frac{d\gamma_j}{dt} = 0, \quad \textit{pour } \gamma'(t) = (\gamma_k'(t)), k = 1, 2, 3. \tag{2.22}$$

En effet,On part de la définition de la dérivée covariante le long de la courbe $\gamma(t)$:

$$\nabla_{\gamma'}\gamma',$$

où $\gamma'(t)$ est le vecteur tangent à la courbe.

En coordonnées locales $\{\partial_i\}$, on peut écrire

$$\gamma'(t) = \frac{d\gamma}{dt} = \dot{\gamma}_i\, \partial_i.$$

La dérivée covariante le long de γ est alors :

$$\nabla_{\gamma'}\gamma' = \nabla_{\dot\gamma_i\partial_i}(\dot\gamma_j\partial_j).$$

En utilisant la linéarité et la règle de Leibniz pour la dérivée covariante :

$$\nabla_X(fY) = X(f)Y + f\nabla_X Y,$$

on obtient

$$\begin{aligned}\nabla_{\gamma'}\gamma' &= \dot\gamma_i\,\nabla_{\partial_i}(\dot\gamma_j\,\partial_j)\\ &= \dot\gamma_i\Big[(\partial_i\dot\gamma_j)\,\partial_j + \dot\gamma_j\,\nabla_{\partial_i}\partial_j\Big]\\ &= \dot\gamma_i\,\ddot\gamma_k\,\partial_k + \dot\gamma_i\,\dot\gamma_j\,\Gamma^k_{ij}\,\partial_k\,.\end{aligned} \tag{2.23}$$

En factorisant ∂_k et, en utilisant la simplification $\dot\gamma_i\,\ddot\gamma_k \to \ddot\gamma_k$, on arrive à la forme classique des équations géodésiques :

$$\nabla_{\gamma'}\gamma' = \Big(\ddot\gamma_k + \Gamma^k_{ij}(\gamma)\,\dot\gamma_i\,\dot\gamma_j\Big)\partial_k. \tag{2.24}$$

À partir de l'équation (2.24), on a

$$\nabla_{\gamma'}\gamma' = 0 \iff \ddot\gamma_k + \Gamma^k_{ij}(\gamma)\,\dot\gamma_i\dot\gamma_j = 0.$$

Ceci s'écrit avec la sommation par

$$\nabla_{\gamma'}\gamma' = 0 \iff \ddot\gamma_k + \sum_{i,j}\Gamma^k_{ij}(\gamma)\,\dot\gamma_i\dot\gamma_j = 0.$$

(a) Équations caractéristiques des géodésiques dans une variété de Walker 3D.
Soit (M, g_f) une variété de Walker de dimension 3, munie de la métrique

$$g_f = 2\,dx\,dz + \varepsilon\,dy^2 + f(x,y,z)\,dz^2,$$

où $\varepsilon = \pm 1$ et f est une fonction lisse.
D'après l'équation géodésique, on obtient :

$$\begin{cases}\ddot\gamma_1 + 2\Gamma^1_{13}(\gamma)\,\dot\gamma_1\dot\gamma_3 + 2\Gamma^1_{23}(\gamma)\,\dot\gamma_2\dot\gamma_3 + \Gamma^1_{33}(\gamma)\,(\dot\gamma_3)^2 = 0,\\ \ddot\gamma_2 + \Gamma^2_{33}(\gamma)\,(\dot\gamma_3)^2 = 0,\\ \ddot\gamma_3 + \Gamma^3_{33}(\gamma)\,(\dot\gamma_3)^2 = 0.\end{cases} \tag{2.25}$$

En substituant les symboles de Christoffel dans (2.25), le système géodésique devient :

$$\begin{cases}\ddot\gamma_1 + f_x(\gamma(t))\,\dot\gamma_1\dot\gamma_3 + f_y(\gamma(t))\,\dot\gamma_2\dot\gamma_3 + \dfrac{1}{2}\big(f(\gamma(t))\,f_x(\gamma(t)) + f_z(\gamma(t))\big)\,(\dot\gamma_3)^2 = 0,\\ \ddot\gamma_2 - \dfrac{1}{2}f_y(\gamma(t))\,(\dot\gamma_3)^2 = 0,\\ \ddot\gamma_3 - \dfrac{1}{2}f_y(\gamma(t))\,(\dot\gamma_3)^2 = 0.\end{cases} \tag{2.26}$$

Ainsi, une courbe

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t))$$

est une géodésique de (M, g_f) si et seulement si elle satisfait le système (2.26). Ces équations sont appelées les *équations caractéristiques des géodésiques* de la métrique de Walker g_f.

(b) Courbes avec composante constante dans (M, g_f) pour une fonction f arbitraire.

(i) Si γ_1 est constante, alors

$$\gamma(t) = (c, \gamma_2(t), \gamma_3(t))$$

est une géodésique si :

$$\begin{cases} f_y(\gamma(t))\,\dot\gamma_2\dot\gamma_3 + \dfrac{1}{2}\big(f(\gamma(t))\,f_x(\gamma(t)) + f_z(\gamma(t))\big)(\dot\gamma_3)^2 = 0, \\ \ddot\gamma_2 - \dfrac{1}{2} f_y(\gamma(t))\,(\dot\gamma_3)^2 = 0. \end{cases}$$

Le produit métrique le long de γ est :

$$\langle\gamma', \gamma'\rangle = (\dot\gamma_1, \dot\gamma_2, \dot\gamma_3) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 1 & 0 & f(x,y,z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot\gamma_1 \\ \dot\gamma_2 \\ \dot\gamma_3 \end{pmatrix} = 2\dot\gamma_1\dot\gamma_3 + \varepsilon(\dot\gamma_2)^2 + f(\dot\gamma_3)^2.$$

Si $\dot\gamma_1 = 0$:

$$\langle\dot\gamma, \dot\gamma\rangle = \varepsilon(\dot\gamma_2)^2 + f(\dot\gamma_3)^2,$$

et son caractère causal est :

$$\langle\dot\gamma, \dot\gamma\rangle \begin{cases} < 0, & \text{si } \gamma \text{ est de type temps,} \\ = 0, & \text{si } \gamma \text{ est de type lumière,} \\ > 0, & \text{si } \gamma \text{ est de type espace.} \end{cases}$$

(ii) Si γ_2 est constante :

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), c, \gamma_3(t))$$

est une géodésique si :

$$\begin{cases} \ddot\gamma_1 + f_x(\gamma(t))\,\dot\gamma_1\dot\gamma_3 + \dfrac{1}{2}\big(f(\gamma(t))f_x(\gamma(t)) + f_z(\gamma(t))\big)(\dot\gamma_3)^2 = 0, \\ \ddot\gamma_3 - \dfrac{1}{2} f_y(\gamma(t))(\dot\gamma_3)^2 = 0. \end{cases}$$

Le produit scalaire par la métrique g le long de γ est :

$$\langle\dot\gamma, \dot\gamma\rangle = 2\dot\gamma_1\dot\gamma_3 + f(\dot\gamma_3)^2,$$

et son caractère causal :

$$\langle\dot\gamma, \dot\gamma\rangle \begin{cases} < 0, & \text{si } \gamma \text{ est de type temps,} \\ = 0, & \text{si } \gamma \text{ est de type lumière,} \\ > 0, & \text{si } \gamma \text{ est de type espace.} \end{cases}$$

(iii) Si γ_3 est constante :

$$\dot\gamma_1 = 0, \quad \dot\gamma_2 = 0, \quad \dot\gamma_3 = 0.$$

Alors

$$\gamma(t) = (a_1 t + a_2, b_1 t + b_2, c), \quad \langle\dot\gamma, \dot\gamma\rangle = a_1^2 + b_1^2,$$

et le caractère causal est :

$$\langle\dot{\gamma},\dot{\gamma}\rangle \begin{cases} > 0, & \text{si } \gamma \text{ est de type espace,} \\ = 0, & \text{si } \gamma \text{ est de type lumière.} \end{cases}$$

Ainsi, $\gamma(t) = (a_1t + a_2, b_1t + b_2, c)$ est de type espace si $a_1^2 + b_1^2 \neq 0$, et de type lumière si $a_1^2 + b_1^2 = 0$.

Remarque 2.4. *Soit M une 3-variété de Walker stricte, admettant un champ vectoriel parallèle nul engendré par ∂_x. Alors M peut être caractérisée par une fonction $f = f(y, z)$, indépendante de x. Les courbes géodésiques satisfont :*

$$\begin{cases} \ddot{\gamma}_1 + f_y(\gamma(t))\,\dot{\gamma}_2\dot{\gamma}_3 + \dfrac{1}{2}f_z(\gamma(t))\,(\dot{\gamma}_3)^2 = 0, \\ \ddot{\gamma}_2 - \dfrac{1}{2}f_y(\gamma(t))\,(\dot{\gamma}_3)^2 = 0, \\ \ddot{\gamma}_3 - \dfrac{1}{2}f_y(\gamma(t))\,(\dot{\gamma}_3)^2 = 0. \end{cases}$$

Si $\dot{\gamma}_3 = c_1$, alors toute courbe de la forme

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), c_1t + c_2)$$

est une géodésique. Si $c_1 = 0$, la géodésique est une droite

$$\gamma(t) = (a_1t + a_2, b_1t + b_2, c_2),$$

avec caractère causal dépendant de b_1 :

- *$b_1 = 0$: type lumière,*
- *$b_1 \neq 0$: type temps.*

Chapitre 3

Courbes biharmoniques dans les variétés de Walker de dimension 3

Ce chapitre constitue le noeud de notre travail. Nous y établissons les équations différentielles caractérisant les courbes biharmoniques dans une variété de Walker, puis nous en déduisons les conditions d'existence des trajectoires non géodésiques correspondantes.
Enfin, nous illustrons ces résultats à travers des exemples concrets.

3.1 Courbes paramétrées dans l'espace de Minkowski [15, 19]

Définition 3.1. *On peut définir une courbe dans l'espace de Minkowski $\mathbb{R}^3_1$ de deux manières :*

1. *Paramétrisation :*

$$\gamma : [a,b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3_1, \qquad t \longmapsto \gamma(t) = \big(\gamma_0(t), \gamma_1(t), \gamma_2(t)\big),$$

où $\gamma_0(t)$ est la composante temporelle et $\gamma_1(t), \gamma_2(t)$ sont les composantes spatiales.
Le vecteur tangent

$$\gamma'(t) = \big(\gamma_0'(t), \gamma_1'(t), \gamma_2'(t)\big)$$

définit une direction tangente (droite orientée) si et seulement si

$$\gamma'(t) \neq (0,0,0).$$

2. *Équation implicite : Si la courbe est définie par une fonction $f : \mathbb{R}^3_1 \to \mathbb{R}$ telle que*

$$f(x^0, x^1, x^2) = 0,$$

alors le plan tangent à la courbe en un point $P = (x^0_0, x^1_0, x^2_0)$ est donné par

$$\frac{\partial f}{\partial x^0}(P)\,(x^0 - x^0_0) + \frac{\partial f}{\partial x^1}(P)\,(x^1 - x^1_0) + \frac{\partial f}{\partial x^2}(P)\,(x^2 - x^2_0) = 0.$$

Remarque 3.1. *Dans $\mathbb{R}^3_1$, le vecteur tangent $\gamma'(t)$ peut être :*
— du type temps *si* $\langle \gamma', \gamma' \rangle < 0$,
— du type espace *si* $\langle \gamma', \gamma' \rangle > 0$,

— du type lumière *si* $\langle\gamma',\gamma'\rangle = 0$,
ce qui définit le caractère causal *de la courbe.*

Définition 3.2. *Soit une courbe paramétrée*

$$\gamma : [a,b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2_1, \qquad t \longmapsto \gamma(t) = (x^0(t), x^1(t)),$$

ou plus généralement dans $\mathbb{R}^3_1$ *:*

$$\gamma(t) = (x_0(t), x_1(t), x_2(t)),$$

où $x_0(t)$ *est la composante temporelle et* $x_i(t)$ *les composantes spatiales.*
Un point singulier $\gamma(t_0)$ *est un point où*

$$\gamma'(t_0) = (x_{0\prime}(t_0), x_{1\prime}(t_0), x_{2\prime}(t_0)) = (0,0,0).$$

Pour une courbe définie implicitement par $f : \mathbb{R}^2_1 \to \mathbb{R}$ *ou* $f : \mathbb{R}^3_1 \to \mathbb{R}$*, un* point singulier (x^0_0, x^1_0, x^2_0) *est un point où*

$$\frac{\partial f}{\partial x_0} = \frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0.$$

Par un changement de paramétrisation, si $\gamma(t)$ *définit une courbe paramétrée, et si*

$$\phi : [c,d] \longrightarrow [a,b]$$

est une fonction lisse, alors

$$\tilde{\gamma}(u) = \gamma(\phi(u))$$

définit une nouvelle courbe paramétrée. C'est la même courbe parcourue à une vitesse différente. Pour les dérivées, on a :

$$\tilde{\gamma}'(u) = \phi'(u)\,\gamma'(\phi(u)), \qquad \tilde{\gamma}''(u) = \phi''(u)\,\gamma'(\phi(u)) + (\phi'(u))^2\,\gamma''(\phi(u)).$$

Remarque 3.2. *Dans* $\mathbb{R}^3_1$*, le vecteur tangent* $\gamma'(t)$ *peut être* temporel *(*$\langle\gamma',\gamma'\rangle < 0$*),* spatial *(*$\langle\gamma',\gamma'\rangle > 0$*) ou* lumière *(*$\langle\gamma',\gamma'\rangle = 0$*), ce qui définit le* caractère causal *de la courbe.*

Définition 3.3. *Soit*

$$\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^3_1, \qquad t \longmapsto \gamma(t) = \big(\gamma_0(t), \gamma_1(t), \gamma_2(t)\big),$$

une courbe paramétrée dans l'espace de Minkowski muni de la métrique

$$\langle x, y\rangle = -x_0y_0 + x_1y_1 + x_2y_2.$$

On dit qu'une courbe régulière dans l'espace de Minkowski γ *est :*
— *spatiale (ou de type espace) si tous ses vecteurs tangents sont de type espace, c'est-à-dire*

$$\langle\gamma'(t), \gamma'(t)\rangle > 0;$$

— *temporelle (ou de type temps) si tous ses vecteurs tangents sont de type temps, c'est-à-dire*

$$\langle\gamma'(t), \gamma'(t)\rangle < 0;$$

— *lumière(ou isotrope) si tous ses vecteurs tangents sont de type lumière, c'est-à-dire*

$$\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle = 0.$$

Définition 3.4. *La* longueur de la courbe *dépend de son caractère causal :*

— *Si γ est du type espace, on pose :*

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle}\, dt = \int_a^b \|\gamma'(t)\|\, dt. \tag{3.1}$$

— *Si γ est du type temps, la quantité $\sqrt{-\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle}$ est appelée* longueur propre *:*

$$L'(\gamma) = \int_a^b \sqrt{-\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle}\, dt. \tag{3.2}$$

— *Si γ est lumière (nulle), alors $\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle = 0$ pour tout t et la longueur propre est identiquement nulle. Dans ce cas, on ne peut pas paramétrer la courbe par sa longueur ; on utilise un* paramètre affine λ *tel que*

$$\gamma'(\lambda) \neq 0 \quad et \quad \nabla_{\gamma'(\lambda)} \gamma'(\lambda) = 0. \tag{3.3}$$

Définition 3.5. *Une courbe paramétrée $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^3_1$ est dite* régulière *en t_0 si $\gamma'(t_0) \neq 0$. Elle est dite k-*régulière *en t_0 si elle est k-fois dérivable en t_0 et si les vecteurs*

$$\gamma'(t_0),\ \gamma''(t_0),\ \ldots,\ \gamma^{(k)}(t_0)$$

sont linéairement indépendants au sens de la géométrie de Minkowski.

$$g(\gamma'(t), \gamma'(t)) \neq 0 \qquad \text{pour tout } t \in [a, b].$$

On peut alors la reparamétriser par sa *longueur d'arc* .

On définit, pour tout $t \in [a, b]$,

$$s(t) = \int_a^t \sqrt{\big|\, g(\gamma'(u), \gamma'(u))\,\big|}\, du = \int_a^t \|\gamma'(u)\|\, du, \tag{3.4}$$

Où $s(t)$ est la rectification de la courbe γ, c'est-à-dire sa longueur d'arc depuis le point initial $t = a$.

3.1.1 Repère de Serret–Frenet dans $\mathbb{R}^3_1$

Soit

$$\gamma : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3_1$$

une courbe paramétrée par la longueur d'arc (c'est-à-dire une courbe unitaire de type espace ou temps).

On pose

$$\langle T(s), T(s) \rangle = \varepsilon_1, \qquad \text{où} \quad \varepsilon_1 = \begin{cases} +1, & \text{si la courbe est de type espace,} \\ -1, & \text{si la courbe est de type temps.} \end{cases}$$

En appliquant la relation (1.1), on obtient

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}\langle T(s),T(s)\rangle = 0 &\Leftrightarrow \langle T'(s),T(s)\rangle + \langle T(s),T'(s)\rangle = 0\\ &\Leftrightarrow 2\,\langle T'(s),T(s)\rangle = 0\\ &\Leftrightarrow \langle T'(s),T(s)\rangle = 0\end{aligned}$$

Ainsi, le vecteur $T'(s)$ est orthogonal à $T(s)$ et donc colinéaire au vecteur normal unitaire $N(s)$ tel que

$$\langle N(s),N(s)\rangle = \varepsilon_2 = \pm 1.$$

Il existe alors une fonction bien définie $\kappa(s)$ telle que

$$T'(s) = \varepsilon_2\,\kappa(s)\,N(s). \tag{3.5}$$

Le vecteur binormal unitaire est défini par

$$\begin{aligned}B(s) &= T(s)\wedge N(s)\\ &= \begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ T_1 & T_2 & T_3\\ N_1 & N_2 & N_3\end{vmatrix},\end{aligned}$$

On peut éviter de calculer explicitement $N(s)$ et utiliser la formule alternative du trièdre de Frenet :

$$B(t) = \frac{\gamma'(t)\wedge\gamma''(t)}{\|\gamma'(t)\wedge\gamma''(t)\|},$$

où
$\gamma'(t)$ = vecteur vitesse, $\gamma''(t)$ = vecteur accélération,
et où $\wedge$ désigne le produit vectoriel lorentzien dans $\mathbb{R}^3_1$.
Enfin, on a

$$\langle B(s),B(s)\rangle = \varepsilon_3 = \varepsilon_1\,\varepsilon_2.$$

Ainsi, le triplet $\{T(s),N(s),B(s)\}$, où $T(s)$ est le vecteur tangent unitaire, $N(s)$ le vecteur normal principal et $B(s)$ le vecteur binormal, forme un repère de Serret–Frenet pseudo-orthonormé direct au point $\gamma(s)$ dans $\mathbb{R}^3_1$.

3.1.2 Courbure dans $\mathbb{R}^3_1$

Soit

$$\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3_1$$

une courbe paramétrée par la longueur d'arc. Ainsi, la norme lorentzienne du vecteur tangent reste constante :

$$\langle T(s),T(s)\rangle = \varepsilon_1 = \pm 1.$$

La direction de $T(s)$ peut varier même si sa norme est constante. Cette variation mesure l'écart entre la courbe et une géodésique rectiligne.

Définition 3.6. *On appelle* courbure *de la courbe, la fonction définie par*

$$\kappa(s) = \sqrt{|\langle T'(s),T'(s)\rangle|}\,. \tag{3.6}$$

3.1.3 Torsion dans $\mathbb{R}^3_1$

En appliquant la relation (1.2) sur le vecteur binormal

$$B(s) = T(s) \wedge N(s),$$

on obtient

$$B'(s) = T'(s) \wedge N(s) + T(s) \wedge N'(s) = T(s) \wedge N'(s). \tag{3.7}$$

On écrit alors $B'(s)$ comme combinaison linéaire des vecteurs de la base $\{T, N, B\}$:

$$B'(s) = \varepsilon_1 \langle B'(s), T(s)\rangle\, T(s) + \varepsilon_2 \langle B'(s), N(s)\rangle\, N(s) + \varepsilon_3 \langle B'(s), B(s)\rangle\, B(s).$$

D'après (3.7), $B'(s)$ est orthogonal à $T(s)$ et à $B(s)$, donc colinéaire à $N(s)$. Ainsi,

$$\langle B'(s), T(s)\rangle = 0, \qquad \langle B'(s), B(s)\rangle = 0.$$

Définition 3.7. *Il existe donc une fonction réelle $\tau(s)$ telle que*

$$B'(s) = \varepsilon_2\, \tau(s)\, N(s), \tag{3.8}$$

et $\tau(s)$ est appelée torsion *de la courbe γ.*

3.1.4 Formules de Serret–Frenet dans $\mathbb{R}^3_1$

Proposition 3.1. *Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^3_1$ une courbe paramétrée par la longueur d'arc, et $\{T, N, B\}$ son repère mobile de Serret–Frenet. Alors les équations de Frenet–Serret dans $\mathbb{R}^3_1$ s'écrivent sous forme matricielle :*

$$\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_2\kappa(s) & 0 \\ -\varepsilon_1\kappa(s) & 0 & \varepsilon_3\tau(s) \\ 0 & -\varepsilon_2\tau(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}. \tag{3.9}$$

où

$$\varepsilon_1 = \langle T, T\rangle, \quad \varepsilon_2 = \langle N, N\rangle, \quad \varepsilon_3 = \langle B, B\rangle = \varepsilon_1\varepsilon_2,$$

et

$$\kappa(s) = \sqrt{|\langle T'(s), T'(s)\rangle|} = \|T'(s)\|, \qquad \tau(s) = \varepsilon_3 \langle N'(s), B(s)\rangle,$$

sont respectivement la courbure *et la* torsion *de la courbe γ.*

Les relations entre les vecteurs T, N et B sont :

$$T \wedge N = \varepsilon_1\varepsilon_2 B, \qquad N \wedge B = \varepsilon_1 T, \qquad B \wedge T = \varepsilon_2 N,$$

où $\wedge$ est le produit vectoriel lorentzien dans $\mathbb{R}^3_1$.

Démonstration. Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^3_1$ une courbe paramétrée par la longueur d'arc et $\{T, N, B\}$ son repère de Serret–Frenet.

Par définition, $T(s)$ est le vecteur tangent unitaire :

$$T(s) = \gamma'(s), \quad \langle T, T\rangle = \varepsilon_1 = \pm 1.$$

La dérivée $T'(s)$ est orthogonale à $T(s)$:

$$\langle T', T\rangle = \frac{1}{2}\frac{d}{ds}\langle T, T\rangle = 0.$$

On définit la courbure comme

$$\kappa(s) = \sqrt{|\langle T', T'\rangle|}.$$

Ainsi, $T'(s)$ est colinéaire au vecteur normal $N(s)$:

$$T'(s) = \varepsilon_2\kappa(s)N(s),$$

où $\varepsilon_2 = \langle N, N\rangle$.

Le vecteur binormal étant défini par

$$B(s) = T(s) \wedge N(s), \qquad \langle B, B\rangle = \varepsilon_3 = \varepsilon_1\varepsilon_2.$$

On dérive $B(s)$ et on a :

$$B'(s) = T'(s) \wedge N(s) + T(s) \wedge_1 N'(s) = T(s) \wedge N'(s),$$

puisque $T'(s) \wedge N(s)$ est colinéaire à $B \wedge N = 0$.

Écrivons $N'(s)$ dans la base $\{T, N, B\}$:

$$N'(s) = a\,T(s) + b\,N(s) + c\,B(s),$$

avec $a = \varepsilon_1\langle N', T\rangle$, $b = \varepsilon_2\langle N', N\rangle = 0$, et $c = \varepsilon_3\langle N', B\rangle = \tau(s)$ par définition de la torsion.

En utilisant $B' = T \wedge N'$ et la linéarité

$$B'(s) = T(s) \wedge N'(s) = a\,T \wedge T + b\,T \wedge N + c\,T \wedge B = c\,T \wedge B.$$

Or $T \wedge B = -\varepsilon_2 N$, donc :

$$B'(s) = -\varepsilon_2 c\,N(s) = -\varepsilon_2\tau(s)N(s).$$

On obtient ainsi le système matriciel (3.9) . □

Remarque 3.3. *Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^3_1$ une courbe paramétrée par la longueur d'arc. Alors examinons les cas suivants :*

— *Cas d'une courbe de type espace avec un vecteur normal de type espace ou temps. Alors les formules de Serret–Frenet s'écrivent :*

$$\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_2\kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \varepsilon_3\tau \\ 0 & -\varepsilon_2\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}, \tag{3.10}$$

avec

$$\varepsilon_1 = \langle T, T\rangle = 1, \quad \varepsilon_2 = \langle N, N\rangle, \quad \varepsilon_3 = \langle B, B\rangle = \varepsilon_1\varepsilon_2.$$

Si $\varepsilon_2 = \langle N, N\rangle = 1$ (c'est-à-dire N est de type espace) et $\varepsilon_3 = \langle B, B\rangle = \varepsilon_1\varepsilon_2 = 1 \cdot 1 = 1$ (donc B est également de type espace), alors le système (3.10) devient :

$$\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}, \tag{3.11}$$

Le système (3.11) a pour dimension 9.

— *Cas d'une courbe de type temps avec un vecteur normal de type espace ou temps. Alors les formules de Serret–Frenet s'écrivent matriciellement :*

$$\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_2\kappa & 0 \\ \kappa & 0 & \varepsilon_3\tau \\ 0 & -\varepsilon_2\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix},$$

avec

$$\varepsilon_1 = \langle T, T\rangle = -1, \quad \varepsilon_2 = \langle N, N\rangle, \quad \varepsilon_3 = \langle B, B\rangle = \varepsilon_1\varepsilon_2.$$

3.1.5 Courbes hélices dans $\mathbb{R}^3_1$

Définition 3.8. *L'ensemble des courbes dont le vecteur tangent fait un angle constant avec un vecteur parallèle le long de la courbe est appelé* l'espace des courbes hélices.

Définition 3.9. *[22] Soit $\gamma : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3_1$ une courbe régulière, paramétrée par la longueur d'arc, et munie d'un vecteur tangent unitaire T (i.e. $\|T\| = 1$).*
On dit que γ est une courbe hélice *si, pour tout champ de vecteurs X parallèle le long de la courbe (i.e. $\nabla_T X = 0$), on a*

$$\langle T, X\rangle = c,$$

où c est une constante non nulle.

Remarque 3.4. *Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^3_1$ une courbe paramétrée régulière et normale, de vecteur tangent unitaire T. Alors γ est une courbe hélice si le rapport*

$$\frac{\tau}{\kappa} = c \quad \textit{(constante non nulle)},$$

où κ est la courbure et τ la torsion.

Exemple 3.1. *Soit la courbe donnée par*

$$\gamma(t) = (a\cos t, a\sin t, bt), \quad a, b > 0,$$

appelée hélice. *On trouve sa reparamétrisation par la longueur d'arc ou sa rectification :*

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{(a\sin u)^2 + (a\cos u)^2 + b^2}\, du = t\sqrt{a^2+b^2}.$$

Si l'on suppose que $a^2 + b^2 = 1$, on peut se ramener à $s = t$. Alors :

$$T(s) = \gamma'(s) = (-a\sin s, a\cos s, b), \quad T'(s) = (-a\cos s, -a\sin s, 0),$$

et donc

$$\kappa(s) = a, \quad N(s) = \frac{T'(s)}{\|T'(s)\|} = (-\cos s, -\sin s, 0).$$

On en tire

$$B(s) = T(s) \wedge N(s) = (b\sin s, -b\cos s, a) = -bN(s) + \ldots$$

La courbure est constante $\kappa(s) = a$ ainsi que la torsion $\tau(s) = b$, donc τ/κ est constante non nulle.

Si l'on suppose $(a^2+b^2 \neq 1$ *, on obtient en général :*

$$\kappa(s) = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \tau(s) = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

On donne maintenant des formules pour calculer la courbure et la torsion dans le cas d'une paramétrisation quelconque (mais toujours bi-régulière).

Soit $\gamma(s)$ *la reparamétrisation par sa longueur de la courbe* $\gamma(t)$*, i.e.*

$$\gamma(t) = \gamma(s(t)),$$

alors :

$$\gamma'(t) = s'(t)T(s(t)), \quad \gamma''(t) = s''(t)T(s(t)) + (s'(t))^2\kappa(s(t))N(s(t)),$$
$$\gamma'''(t) = s'''(t)T(s(t)) + (s''(t)s'(t) + (s'(t))^3\kappa(s(t)))N(s(t)) + (s'(t))^3\tau(s(t))B(s(t)).$$

On en tire donc :

$$\det(\gamma'(t), \gamma''(t), \gamma'''(t)) = (s'(t))^6\kappa(s(t))^2\tau(s(t)),$$

d'où les formules classiques :

$$\kappa(t) = \frac{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3}, \quad \tau(t) = \frac{\det(\gamma'(t), \gamma''(t), \gamma'''(t))}{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|^2}. \tag{3.12}$$

Enfin, le repère de Serret-Frenet (T, N, B) *dans* $\mathbb{R}^3_1$ *est donné par :*

$$\begin{cases} T' = \kappa N, \\ N' = -\kappa T + \tau B, \\ B' = -\tau N. \end{cases} \tag{3.13}$$

Le système (3.13) *s'écrit matriciellement par :*

$$\frac{d}{ds}\begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 \\ -\kappa(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}, \tag{3.14}$$

où $\kappa(s)$ *et* $\tau(s)$ *désignent respectivement la courbure et la torsion de la courbe paramétrée par l'arc* s*.*

3.2 Courbes biharmoniques dans les variétés de Walker de dimension 3 [20, 8]

3.2.1 Quelques définitions

Définition 3.10. *Soient* (M, g_f) *et* (G, h_f) *deux variétés pseudo-riemanniennes de dimension trois. Une application lisse*

$$\varphi : (M, g_f) \longrightarrow (G, h_f)$$

est dite harmonique *si elle est un point critique de la fonctionnelle d'énergie*

$$E(\varphi) = \frac{1}{2}\int_M |d\varphi|^2 \, dv_{g_f}, \tag{3.15}$$

où dv_{g_f} est l'élément de volume associé à g_f.

Le champ de tension associé est

$$\tau(\varphi) := \operatorname{trace} \nabla d\varphi = 0, \tag{3.16}$$

où ∇ est la connexion induite par les connexions de Levi-Civita de M et G.

Définition 3.11. *Une application φ est dite* biharmonique *si elle est un point critique de la fonctionnelle de biénergie*

$$E_2(\varphi) = \frac{1}{2}\int_M |\tau(\varphi)|^2 \, dv_{g_f}. \tag{3.17}$$

Son équation d'Euler–Lagrange est

$$\tau_2(\varphi) = \operatorname{trace}\left(\nabla^\varphi\nabla^\varphi - \nabla^\varphi_\nabla\right)\tau(\varphi) - \operatorname{trace} R^H(d\varphi, \tau(\varphi))d\varphi = 0, \tag{3.18}$$

où $\tau_2(\varphi)$ est appelé champ de bitension.

Définition 3.12. *Soit $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ avec $f > 0$. Une application φ est dite* f-harmonique *si elle est un point critique de*

$$E_f(\varphi) = \frac{1}{2}\int_M f\,|d\varphi|^2 \, dv_{g_f}. \tag{3.19}$$

L'équation d'Euler–Lagrange correspondante est

$$\tau_f(\varphi) = f\,\tau(\varphi) + d\varphi(\operatorname{grad} f) = 0. \tag{3.20}$$

Définition 3.13. *Une application φ est dite* f-biharmonique *si elle est un point critique de*

$$E_{2,f}(\varphi) = \frac{1}{2}\int_M f\,|\tau(\varphi)|^2 \, dv_{g_f}. \tag{3.21}$$

L'équation d'Euler–Lagrange est

$$\tau_{2,f}(\varphi) = f\,\tau_2(\varphi) + (\Delta f)\,\tau(\varphi) + 2\,\nabla^\varphi_{\operatorname{grad} f}\tau(\varphi) = 0. \tag{3.22}$$

Définition 3.14. *Une application φ est dite* bi-f-harmonique *si elle est un point critique de*

$$E_{f,2}(\varphi) = \frac{1}{2}\int_M |\tau_f(\varphi)|^2 \, dv_{g_f}. \tag{3.23}$$

Son équation d'Euler–Lagrange est

$$\tau_{f,2}(\varphi) = \operatorname{trace}\left(\nabla^\varphi f\,\nabla^\varphi\tau_f(\varphi) - f\,\nabla^\varphi\nabla^\varphi\tau_f(\varphi)\right) + f\,R^H(\tau_f(\varphi), d\varphi)d\varphi = 0. \tag{3.24}$$

Définition 3.15. *Soit $\gamma : I \to (M, g)$ une courbe non nulle paramétrée par la longueur d'arc s ou par la rectification s. La courbe est biharmonique si elle satisfait à l'équation d'Euler-Lagrange*

$$\tau_2(\gamma) = \nabla_T^3 T - R(T, \nabla_T T)T = 0. \tag{3.25}$$

où $T = \gamma'(s)$ est le vecteur tangent unitaire ,

$$\tau_2(\gamma) = \nabla_T^2\big(\tau(\gamma)\big) - R\big(T, \tau(\gamma)\big)T, \quad \textit{avec}$$

$$\begin{aligned} \tau(\gamma) = \nabla_T T \quad & \textit{(champ de tension)},\\ \nabla_T^3 T \quad & \textit{(troisième dérivée covariante de } T\textit{)},\\ R(T, \nabla_T T)\, T \quad & \textit{(terme correctif dû à la courbure)}. \end{aligned}$$

La fonction de biénergie associée à (3.25) est :

$$\begin{aligned} E_2(\gamma) &= \tfrac{1}{2}\int_I \|\tau(\gamma)\|^2\, ds \\ &= \frac{1}{2}\int_I g(\tau(\gamma),\, \tau(\gamma))\; ds. \end{aligned} \tag{3.26}$$

3.2.2 Courbes biharmoniques dans (M, g_f)

Soit (M, g_f) une variété de Walker de dimension 3, dont la métrique est donnée par

$$g_f = 2\,dx\,dz + \varepsilon\, dy^2 + f(x, y, z)\, dz^2, \quad \varepsilon = \pm 1.$$

D'après le théorème 2.1, les composantes non nulles de la connexion de Levi-Civita associée à g_f sont :

$$\begin{aligned} \nabla_{\partial_x}\partial_z &= \frac{1}{2} f_x\, \partial_x,\\ \nabla_{\partial_y}\partial_z &= \frac{1}{2} f_y\, \partial_x,\\ \nabla_{\partial_z}\partial_z &= \frac{1}{2}(f f_x + f_z)\, \partial_x + \frac{1}{2} f_y\, \partial_y - \frac{1}{2} f_x\, \partial_z. \end{aligned} \tag{3.27}$$

La courbure de Riemann est donnée par les composantes éventuellement non nulles :

$$\begin{aligned} &R(\partial_x, \partial_z)\partial_x = \tfrac{1}{2} f_{xx}\, \partial_x, && R(\partial_x, \partial_z)\partial_y = \tfrac{1}{2} f_{xy}\, \partial_x,\\ &R(\partial_y, \partial_z)\partial_x = \tfrac{1}{2} f_{xy}\, \partial_x, && R(\partial_y, \partial_z)\partial_y = \tfrac{1}{2} f_{yy}\, \partial_x,\\ &R(\partial_x, \partial_z)\partial_z = \tfrac{1}{2} f f_{xx}\, \partial_x + \tfrac{1}{2} f_{xy}\, \partial_y - \tfrac{1}{2} f_{xy}\, \partial_z, && R(\partial_y, \partial_z)\partial_z = \tfrac{1}{2} f f_{xy}\, \partial_x + \tfrac{1}{2} f_{yy}\, \partial_y - \tfrac{1}{2} f_{xy}\, \partial_z. \end{aligned} \tag{3.28}$$

(a) Calcul du champ de bitension $\tau_2(\gamma)$

Soit $\gamma : I \to (M, g_f)$ une courbe régulière paramétrée par l'arc (paramètre s), de vecteur tangent unitaire $T = \gamma'(s)$ tel que

$$\langle T, T\rangle = \varepsilon_1 \in \{-1, +1\}.$$

On suppose que γ n'est pas géodésique, c'est-à-dire $\nabla_T T \neq 0$. Le repère de Frenet (T, N, B) le long de γ satisfait :

$$\nabla_T T = \kappa N, \qquad \nabla_T N = -\varepsilon_1\varepsilon_2\kappa T + \tau B, \qquad \nabla_T B = -\varepsilon_2\varepsilon_3\tau N,$$

où $\varepsilon_2 = \langle N, N\rangle$, $\varepsilon_3 = \langle B, B\rangle$, et κ, τ sont la courbure et la torsion. Ici T agit comme la dérivation le long de la courbe : $T(\kappa) = \dfrac{d\kappa}{ds}$, $T^2(\kappa) = \dfrac{d^2\kappa}{ds^2}$.
Le champ de tension est

$$\tau(\gamma) = \nabla_T T = \kappa N,$$

et le champ de bitension est défini par

$$\tau_2(\gamma) = \nabla_T^2\tau(\gamma) - R(T, \tau(\gamma))T.$$

En calculant terme à terme, on obtient :

$$\nabla_T\tau(\gamma) = \nabla_T(\kappa N) = T(\kappa)N + \kappa\nabla_T N.$$

Or

$$\nabla_T N = -\varepsilon_1\varepsilon_2\kappa T + \tau B,$$

donc

$$\nabla_T\tau(\gamma) = T(\kappa)\, N - \varepsilon_1\varepsilon_2\,\kappa^2 T + \kappa\tau B. \tag{3.29}$$

En dérivant l'expression (3.29) terme à terme ,on obtient :

$$\begin{aligned}
\nabla_T^2\tau(\gamma) = \nabla_T^3 T &= \nabla_T\big(\nabla_T\tau(\gamma)\big)\\
&= \nabla_T\big(T(\kappa)\, N - \varepsilon_1\varepsilon_2\,\kappa^2\, T + \kappa\tau\, B\big)\\
&= \nabla_T\big(T(\kappa)\, N\big) + \nabla_T\big(-\varepsilon_1\varepsilon_2\,\kappa^2\, T\big) + \nabla_T(\kappa\tau\, B)\\
&= T^2(\kappa)\, N + T(\kappa)\,\nabla_T N - \varepsilon_1\varepsilon_2\big(T(\kappa^2)\, T + \kappa^2\nabla_T T\big) + T(\kappa\tau)\, B + \kappa\tau\,\nabla_T B\\
&= T^2(\kappa)\, N + T(\kappa)\big(-\varepsilon_1\varepsilon_2\kappa\, T + \tau\, B\big) - 2\varepsilon_1\varepsilon_2\kappa\, T(\kappa)\, T - \varepsilon_1\varepsilon_2\,\kappa^3\, N\\
&\quad + \big(\kappa\, T(\tau) + \tau\, T(\kappa)\big)\, B - \varepsilon_2\varepsilon_3\,\kappa\tau^2\, N.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\tau_2(\gamma) &= -3\,\varepsilon_1\varepsilon_2\,\kappa\, T(\kappa)\, T + \big(T^2(\kappa) - \varepsilon_1\varepsilon_2\,\kappa^3 - \varepsilon_2\varepsilon_3\,\kappa\tau^2\big)\, N\\
&\quad + \big(\kappa\, T(\tau) + 2\,\tau\, T(\kappa)\big)\, B - R(T, \nabla_T T)T\\
&= -3\,\varepsilon_1\varepsilon_2\,\kappa\, T(\kappa)\, T + \big(T^2(\kappa) - \varepsilon_1\varepsilon_2\,\kappa^3 - \varepsilon_2\varepsilon_3\,\kappa\tau^2\big)\, N\\
&\quad + \big(\kappa\, T(\tau) + 2\,\tau\, T(\kappa)\big)\, B - \kappa\, R(T, N)T.
\end{aligned} \tag{3.30}$$

(b) Calcul de $R(T, \nabla_T T)T$ dans (M, g_f)

Dans les coordonnées (x, y, z), les composantes non nulles de la métrique g sont :

$$g_{xz} = g_{zx} = 1, \qquad g_{yy} = \varepsilon, \qquad g_{zz} = f,$$

et l'inverse de la matrice des composantes est

$$(g^{ij}) = \begin{pmatrix} -f & 0 & 1\\ 0 & 1/\varepsilon & 0\\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(i) En appliquant la formule

$$\Gamma_{ij}^{k} = \tfrac{1}{2} g^{k\ell}\big(\partial_i g_{j\ell} + \partial_j g_{i\ell} - \partial_\ell g_{ij}\big),$$

on obtient les coefficients de Christoffel non nuls (symétriques en i, j) suivants :

$$\begin{aligned} \Gamma_{xz}^{x} = \Gamma_{zx}^{x} &= \tfrac{1}{2}\, f_x, & \Gamma_{yz}^{x} = \Gamma_{zy}^{x} &= \tfrac{1}{2}\, f_y, \\ \Gamma_{zz}^{x} &= \tfrac{1}{2}\big(f\, f_x + f_z\big), & \Gamma_{zz}^{y} &= -\frac{1}{2\varepsilon}\, f_y, \\ \Gamma_{zz}^{z} &= -\tfrac{1}{2}\, f_x. \end{aligned} \tag{3.31}$$

(ii) Le tenseur de courbure R_{ijk}^{m} ($R(\partial_i, \partial_j)\partial_k = R_{ijk}^{m}\partial_m$) a pour seules composantes non nulles, pertinentes pour nos calculs, des expressions contenant les dérivées secondes de f. Les composantes non nulles essentielles s'écrivent :

$$\begin{aligned} R_{xzx}^{x} &= \tfrac{1}{2}\, f_{xx}, & R_{xzy}^{x} &= \tfrac{1}{2}\, f_{xy}, & R_{xzz}^{x} &= \tfrac{1}{2}\, f\, f_{xx}, \\ R_{yzx}^{x} &= \tfrac{1}{2}\, f_{xy}, & R^{x}{}_{yzy} &= \tfrac{1}{2}\, f_{yy}, & R_{yzz}^{x} &= \tfrac{1}{2}\, f\, f_{xy}, \\ R_{zzx}^{y} &= \frac{1}{2\varepsilon}\, f_{xy}, & R_{zzy}^{y} &= \frac{1}{2\varepsilon}\, f_{yy}, & & \\ R_{zzx}^{z} &= -\tfrac{1}{2}\, f_{xx}, & R_{zzy}^{z} &= -\tfrac{1}{2}\, f_{xy}. & & \end{aligned} \tag{3.32}$$

Toutes les autres composantes indépendantes peuvent se déduire par les symétries classiques du tenseur de Riemann ; ci-dessus seules apparaissent celles qui seront effectivement utilisées (elles montrent que la courbure dépend uniquement des dérivées secondes de f).

(iii) Soient les composantes de T et N dans la base $(\partial_x, \partial_y, \partial_z)$:

$$T = T^x\partial_x + T^y\partial_y + T^z\partial_z, \qquad N = N^x\partial_x + N^y\partial_y + N^z\partial_z.$$

Le tenseur agit comme

$$\big(R(T,N)T\big)^{m} = R^{m}{}_{bcd}\, T^b\, N^c\, T^d,$$

et, en utilisant les composantes (3.32), on obtient les composantes de $R(T,N)T$ dans la base canonique :

$$\begin{aligned} \big(R(T,N)T\big)^{x} &= \tfrac{1}{2}\, T^z\Big(-N^x\, T^x\, f_{xx} - \big(N^x\, T^y + N^y\, T^x\big)\, f_{xy} - N^y\, T^y\, f_{yy}\Big) \\ &\qquad + \tfrac{1}{2}\, T^z\, N^z\, T^z\, (f\, f_{xx} + f_x f), \end{aligned} \tag{3.33}$$

$$\big(R(T,N)T\big)^{y} = \frac{T^z}{2\varepsilon}\Big(N^x\, T^z\, f_{xy} + N^y\, T^z\, f_{yy} - N^z\, T^y\, f_{yy}\Big), \tag{3.34}$$

$$\big(R(T,N)T\big)^{z} = \tfrac{1}{2}\, T^z\Big(N^x\, T^z\, f_{xx} + N^y\, T^z\, f_{xy} - N^z\, T^y\, f_{xy}\Big). \tag{3.35}$$

(iv) En procédant par une projection sur la base de Frenet et en souhaitant maintenant exprimer $R(T,N)T$ dans la base (T,N,B) ; écrivons

$$R(T,N)T \;=\; R_1\,T \;+\; R_2\,N \;+\; R_3\,B,$$

où, par définition des projections et la non dégénérescence de la métrique,

$$R_1 = \varepsilon_1\,\langle R(T,N)T,\; T\rangle, \tag{3.36}$$
$$R_2 = \varepsilon_2\,\langle R(T,N)T,\; N\rangle, \tag{3.37}$$
$$R_3 = \varepsilon_3\,\langle R(T,N)T,\; B\rangle. \tag{3.38}$$

Ici $\varepsilon_i = \langle E_i, E_i\rangle \in \{\pm 1\}$ pour $E_1 = T, E_2 = N, E_3 = B$.

En utilisant les composantes (3.33)–(3.35) et la forme du produit scalaire g, on obtient des expressions explicites (en coordonnées) :

$$R_1 = \varepsilon_1\Big(-f\,\big(R(T,N)T\big)^x + \big(R(T,N)T\big)^z\Big),$$
$$R_2 = \varepsilon_2\Big(\varepsilon\,\big(R(T,N)T\big)^y\Big),$$
$$R_3 = -f\,\big(R(T,N)T\big)^x + \big(R(T,N)T\big)^z,$$

Puisque pour deux champs de vecteurs

$$U = (U^x, U^y, U^z), \qquad V = (V^x, V^y, V^z),$$

le produit scalaire associé à la métrique g_f s'écrit

$$\langle U, V\rangle_f = g_{ij}U^iV^j = U^xV^z + U^zV^x + \varepsilon\,U^yV^y + f(x,y,z)\,U^zV^z,$$

où g_{ij} désigne les coefficients de g_f (forme équivalente à l'utilisation directe de g et de g^{-1}), la substitution des expressions (3.33)–(3.35) dans cette formule fournit alors les composantes

$$R_1,\; R_2,\; R_3$$

en fonction des composantes de T, N et des dérivées secondes de f.

On sait que $\nabla_T T = \kappa N$, on a

$$R(T,\nabla_T T)T \;=\; \kappa\,R(T,N)T \;=\; \kappa\,(R_1\,T + R_2\,N + R_3\,B). \tag{3.39}$$

Donc, par substitution de (3.39) dans (3.30) , on obtient la décomposition complète de la bitension $\tau_2(\gamma)$ sur la base de Frenet :

$$\begin{aligned}\tau_2(\gamma) \;=\; &\Big(-3\,\varepsilon_1\varepsilon_2\,\kappa\,T(\kappa) - \kappa\,R_1\Big)\,T\\ &+\Big(T^2(\kappa) - \varepsilon_1\varepsilon_2\,\kappa^3 - \varepsilon_2\varepsilon_3\,\kappa\tau^2 - \kappa\,R_2\Big)\,N\\ &+\Big(T(\kappa\tau) + \kappa\,T(\tau) - \kappa\,R_3\Big)\,B.\end{aligned}$$

L'annulation de $\tau_2(\gamma)$ se réduit donc au système explicite de trois équations scalaires (composantes le long de T, N, B) :

$$\begin{cases} -3\,\varepsilon_1\varepsilon_2\,\kappa\,T(\kappa) - \kappa\,R_1 = 0, \\ T^2(\kappa) - \varepsilon_1\varepsilon_2\,\kappa^3 - \varepsilon_2\varepsilon_3\,\kappa\tau^2 - \kappa\,R_2 = 0, \\ T(\kappa\tau) + \kappa\,T(\tau) - \kappa\,R_3 = 0. \end{cases} \tag{3.40}$$

Exemple 3.2. *Considérons le cas linéaire $f(x, y, z) = ax + by + c$. Dans ce cas particulier les dérivées secondes de f s'annulent :*

$$f_{xx} = f_{xy} = f_{yy} = 0.$$

D'après les formules pour les composantes du tenseur de courbure (voir (3.32)) toutes les composantes pertinentes de R^m_{ijk} s'annulent, donc

$$R^m_{bcd} \equiv 0 \quad \Longrightarrow \quad R(T, N)T \equiv 0.$$

Ainsi $R_1 = R_2 = R_3 = 0$ et le système (3.40) se simplifie en :

$$\begin{cases} -3\,\varepsilon_1\varepsilon_2\,\kappa\,T(\kappa) = 0, \\ T^2(\kappa) - \varepsilon_1\varepsilon_2\,\kappa^3 - \varepsilon_2\varepsilon_3\,\kappa\tau^2 = 0, \\ T(\kappa\tau) + \kappa\,T(\tau) = 0. \end{cases} \tag{3.41}$$

Étudions les solutions géométriques non triviales (cas $\kappa \neq 0$, la courbe n'est pas géodésique).

1. Pour la première équation de (3.40).
Comme $\kappa \neq 0$ on a

$$T(\kappa) = 0,$$

donc κ est une constante le long de γ.

2.Pour la deuxième équation de (3.40).
Puisque κ est constante, $T^2(\kappa) = 0$. La deuxième équation devient donc

$$-\varepsilon_1\varepsilon_2\,\kappa^3 - \varepsilon_2\varepsilon_3\,\kappa\tau^2 = 0.$$

En divisant par κ (non nul) et par ε_2 (qui vaut ± 1), on obtient

$$-\varepsilon_1\,\kappa^2 - \varepsilon_3\,\tau^2 = 0,$$

ou encore

$$\tau^2 \;=\; -\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3}\,\kappa^2. \tag{3.42}$$

Interprétation : *la relation (3.42) implique $\tau^2 = (-\varepsilon_1/\varepsilon_3)\,\kappa^2$. Puisque $\kappa^2 \geq 0$, on en déduit que $\tau \in \mathbb{R} \iff -\varepsilon_1/\varepsilon_3 \geq 0$. Autrement dit :*

— *Si ε_1 et ε_3 sont de signes opposés alors la relation peut être satisfaite par des constantes réelles κ, τ ;*

— *Si ε_1 et ε_3 sont de même signe, alors l'égalité entraîne nécessairement $\kappa = 0$, ce qui ramène au cas géodésique trivial , en contradiction avec l'hypothèse $\kappa \neq 0$.*

3.Pour la troisième équation (3.40)***.***
Développons $T(\kappa\tau) + \kappa T(\tau)$. Puisque κ est constant,

$$T(\kappa\tau) + \kappa T(\tau) = \kappa\, T(\tau) + \kappa\, T(\tau) = 2\kappa\, T(\tau).$$

La troisième équation s'écrit donc

$$2\kappa\, T(\tau) = 0.$$

Avec $\kappa \neq 0$, on conclut $T(\tau) = 0$, donc τ est aussi constante le long de γ.

En conclusion, dans le cas linéaire $f = ax + by + c$, toutes les solutions non géodésiques de l'équation $\tau_2(\gamma) = 0$ satisfont :

(i) κ est une constante non nulle ;

(ii) τ est une constante ;

(iii) les constantes vérifient la relation $\tau^2 = -(\varepsilon_1/\varepsilon_3)\,\kappa^2$.

Donc, geométriquement, on obtient des hélices *(courbure et torsion constantes) sous la contrainte de signature ci-dessus. Si la contrainte de signe ne permet pas τ réel alors il n'y a pas de solution non géodésique réelle dans ce cas particulier ,la seule solution réelle est la géodésique $\kappa = 0$.*

3.3 Courbes biharmoniques non géodésiques dans les variétés de Walker 3D

Cette section est consacrée à l'exposé des résultats essentiels de notre travail, regroupés dans les Théorèmes 3.1, 3.2 et 3.3.

3.3.1 Résultats principaux

Soit (M, g_f) une variété de Walker de dimension 3 munie de la métrique

$$g_f = 2\,dx\,dz + \varepsilon\,dy^2 + f(x,y,z)\,dz^2, \quad \varepsilon = \pm 1,$$

et $\gamma(s) : I \subset \mathbb{R} \to M$ une courbe paramétrée par la longueur d'arc s. On note $T = \gamma'(s)$ le vecteur tangent, N le vecteur normal principal et B le binormal, avec les signatures

$$\varepsilon_1 = g_f(T,T), \quad \varepsilon_2 = g_f(N,N), \quad \varepsilon_3 = g_f(B,B).$$

Théorème 3.1. *Si une courbe $\gamma(s)$ dans (M, g_f) est biharmonique, alors ses invariants de Frenet satisfont nécessairement :*

$$\begin{cases} \kappa \neq 0, \\ \kappa^2 + \tau^2 = R(T,N,T,N), \\ \tau' = -\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\, R(T,N,T,B), \end{cases}$$

où κ et τ désignent respectivement la courbure et la torsion de γ, et R est le tenseur de courbure associé à g_f.

Démonstration. La condition biharmonique pour une courbe paramétrée par l'arc est donnée par :

$$\tau_2(\gamma) := \nabla_T^3 T - R(T, \nabla_T T)T = 0.$$

À l'aide du trièdre de Frenet (T, N, B) :

$$\nabla_T T = \kappa N, \qquad \nabla_T N = -\varepsilon_1\varepsilon_2\kappa T + \tau B, \qquad \nabla_T B = -\varepsilon_2\varepsilon_3\tau N,$$

on obtient :

$$\begin{aligned} \nabla_T^2 T &= \kappa' N - \varepsilon_1\varepsilon_2\kappa^2 T + \kappa\tau B, \\ \nabla_T^3 T &= (\kappa'' - \kappa\tau^2 - \varepsilon_1\varepsilon_2\kappa^3)N + (3\kappa'\tau + \kappa\tau')B - \varepsilon_1\varepsilon_2\kappa\kappa' T. \end{aligned}$$

Comme $\nabla_T T = \kappa N$:

$$R(T, \nabla_T T)T = \kappa\, R(T,N)T.$$

En utilisant les symétries du tenseur de courbure :

$$R(T,N)T = \frac{R(T,N,T,N)}{\varepsilon_2} N + \frac{R(T,N,T,B)}{\varepsilon_3} B,$$

d'où

$$R(T, \nabla_T T)T = \kappa \left(\frac{R(T,N,T,N)}{\varepsilon_2} N + \frac{R(T,N,T,B)}{\varepsilon_3} B \right).$$

$$\tau_2(\gamma) = \nabla_T^3 T - R(T, \nabla_T T)T = 0,$$

où, avec les formules de Frenet,

$$\nabla_T^3 T = (\kappa'' - \kappa\tau^2 - \varepsilon_1\varepsilon_2\kappa^3)\, N + (3\kappa'\tau + \kappa\tau')\, B - \varepsilon_1\varepsilon_2\kappa\kappa'\, T,$$

et

$$R(T, \nabla_T T)T = \kappa \left(\frac{R(T,N,T,N)}{\varepsilon_2}\, N + \frac{R(T,N,T,B)}{\varepsilon_3}\, B \right).$$

En substituant dans $\tau_2(\gamma) = 0$, on obtient l'équation vectorielle complète

$$\left(\kappa'' - \kappa\tau^2 - \varepsilon_1\varepsilon_2\kappa^3 - \kappa\frac{R(T,N,T,N)}{\varepsilon_2}\right)N + \left(3\kappa'\tau + \kappa\tau' - \kappa\frac{R(T,N,T,B)}{\varepsilon_3}\right)B - \varepsilon_1\varepsilon_2\kappa\kappa'\, T = 0.$$

En identifiant les composantes devant T, N et B dans $\tau_2(\gamma) = 0$, il vient :

$$\begin{aligned} &- \varepsilon_1\varepsilon_2\kappa\kappa' = 0, \\ &\kappa'' - \kappa\tau^2 - \varepsilon_1\varepsilon_2\kappa^3 - \kappa\frac{R(T,N,T,N)}{\varepsilon_2} = 0, \\ &3\kappa'\tau + \kappa\tau' - \kappa\frac{R(T,N,T,B)}{\varepsilon_3} = 0. \end{aligned}$$

Si $\kappa \neq 0$,alors la première équation entraîne $\kappa' = 0$, donc $\kappa'' = 0$. En simplifiant alors par κ, on obtient :

$$-\tau^2 - \varepsilon_1\varepsilon_2\kappa^2 - \frac{R(T,N,T,N)}{\varepsilon_2} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \kappa^2 + \tau^2 = R(T,N,T,N),$$

et

$$\tau' = -\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 R(T,N,T,B).$$

Ainsi, γ est biharmonique implique

$$\begin{cases} \kappa \neq 0, \\ \kappa^2 + \tau^2 = R(T,N,T,N), \\ \tau' = -\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 R(T,N,T,B). \end{cases}$$

ce qui établit le théorème. □

Théorème 3.2. *Soit $\gamma(s)$ une courbe dans (M, g_f). Si γ est biharmonique non géodésique, alors ses invariants de Frenet vérifient nécessairement :*

$$\begin{cases} \kappa = \textit{constante non nulle}, \\ \tau = \textit{constante}, \\ \kappa^2 + \tau^2 = -\dfrac{\varepsilon}{2}\, f_{yy}\, (N^y)^2 (T^z)^2, \\ \tau' = \dfrac{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon}{2}\, f_{yy}\, N^y T^z B^y, \end{cases}$$

où T^i, N^i, B^i désignent les composantes de (T, N, B) dans la base $(\partial_x, \partial_y, \partial_z)$.

Démonstration. Pour la métrique g_f, les symboles de Christoffel non nuls (symétriques en i, j) sont :

$$\Gamma^x_{xz} = \Gamma^x_{zx} = \tfrac{1}{2} f_x, \qquad \Gamma^x_{yz} = \Gamma^x_{zy} = \tfrac{1}{2} f_y,$$
$$\Gamma^x_{zz} = \tfrac{1}{2}(f f_x + f_z), \qquad \Gamma^y_{zz} = -\frac{1}{2\varepsilon} f_y, \qquad \Gamma^z_{zz} = -\tfrac{1}{2} f_x.$$

Les seules composantes du tenseur de courbure $R(T,N)T$ qui interviennent dans le système biharmonique sont :

$$\begin{aligned} R(T,N,T,N) &= -\frac{\varepsilon}{2} f_{yy} (N^y)^2 (T^z)^2, \\ R(T,N,T,B) &= -\frac{\varepsilon}{2} f_{yy}\, N^y T^z B^y. \end{aligned} \tag{3.43}$$

En substituant ces composantes dans le système du Théorème 3.1, on obtient :

$$\kappa^2 + \tau^2 = -\frac{\varepsilon}{2} f_{yy} (N^y)^2 (T^z)^2,$$

c'est-à-dire

$$\tau^2 = -\frac{\varepsilon}{2} f_{yy} (N^y)^2 (T^z)^2 - \kappa^2.$$

De plus, la seconde équation du système donne :

$$\tau' = -\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 \left(-\frac{\varepsilon}{2} f_{yy} N^y T^z B^y \right) = \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon}{2} f_{yy}\, N^y T^z B^y.$$

On en déduit finalement le système

$$\begin{cases} \kappa \neq 0, \\ \tau^2 = -\dfrac{\varepsilon}{2} f_{yy} (N^y)^2 (T^z)^2 - \kappa^2, \\ \tau' = \dfrac{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon}{2} f_{yy}\, N^y T^z B^y. \end{cases}$$

□

Théorème 3.3. *Soit $\gamma(s)$ une hélice dans (M, g_f), c'est-à-dire une courbe avec $\kappa, \tau \neq 0$ constants. Si γ est biharmonique, alors elle satisfait nécessairement :*

$$\begin{cases} \kappa^2 + \tau^2 = -\dfrac{\varepsilon}{2} f_{yy}\, (N^y)^2 (T^z)^2, \\ R(T,N,T,B) = -\dfrac{\varepsilon}{2} f_{yy}\, N^y T^z B^y = 0. \end{cases} \tag{3.44}$$

Démonstration. Soit $\gamma(s)$ une hélice dans (M, g_f), c'est-à-dire une courbe telle que $\kappa \neq 0$ et $\tau \neq 0$ sont constants. Comme γ est paramétrée par la longueur d'arc, sa tension biharmonique est donnée par

$$\tau_2(\gamma) = \nabla^3_{\gamma'}\gamma' + R(\gamma', \nabla_{\gamma'}\gamma')\gamma' = 0.$$

En projetant cette équation sur la base de Frenet (T, N, B), on obtient :

$$\begin{cases} \kappa'' + \kappa\tau^2 - \kappa^3 = g(R(T,N)T, N) = R(T,N,T,N)\,\kappa, \\ 2\kappa'\tau + \kappa\tau' = g(R(T,N)T, B) = R(T,N,T,B). \end{cases} \tag{3.45}$$

Comme γ est une hélice, on a

$$\kappa' = 0, \qquad \tau' = 0.$$

Ainsi, la seconde équation de (3.45) devient immédiatement

$$R(T, N, T, B) = 0.$$

La première équation de (3.45) se réduit à

$$-\kappa(\kappa^2 + \tau^2) = R(T, N, T, N)\,\kappa.$$

Puisque $\kappa \neq 0$, on obtient

$$\kappa^2 + \tau^2 = -\,R(T, N, T, N). \tag{3.46}$$

Dans la géométrie de (M, g_f), la composante de courbure pertinente est donnée par

$$R(T, N, T, N) = -\frac{\varepsilon}{2}\, f_{yy}\, (N^y)^2 (T^z)^2. \tag{3.47}$$

En substituant (3.47) dans (3.46), on obtient finalement

$$\kappa^2 + \tau^2 = -\frac{\varepsilon}{2}\, f_{yy}\, (N^y)^2 (T^z)^2, \qquad \text{car } -\varepsilon = \varepsilon = \pm 1.$$

et la seconde condition s'écrit

$$R(T, N, T, B) = -\frac{\varepsilon}{2}\, f_{yy}\, N^y T^z B^y = 0.$$

Ce qui achève la démonstration. □

3.3.2 Exemples et corollaires

Exemple 3.3. *Considérons la variété de Walker (M, g_f) définie par la métrique associée est*

$$g_f = 2\,dx\,dz + dy^2 + (ay^2 + bz^2)\,dz^2$$

avec

$$f(x, y, z) = a\,y^2 + b\,z^2, \qquad a, b \in \mathbb{R}, \qquad \varepsilon = 1.$$

On étudie une courbe $\gamma(s) = (x(s), y(s), z(s))$ paramétrée par la longueur d'arc s, de vecteur tangent :

$$T = \gamma'(s) = (x', y', z').$$

Pour simplifier, nous prenons :

$$x(s) = s, \qquad z(s) = s, \qquad y(s) \text{ à déterminer.}$$

Ainsi,

$$T = (1, y', 1).$$

La norme de T relativement à g_f est

$$g_f(T, T) = 2x'z' + (y')^2 + f(x, y, z)\,(z')^2 = 2 + (y')^2 + ay^2 + bs^2.$$

On impose que γ soit paramétrée par l'arc :

$$g_f(T, T) = \varepsilon_1 = 1.$$

(a) Conditions biharmoniques

Pour une variété de Walker 3D, le Théorème 3.1 impose pour une courbe biharmonique non géodésique :

$$\begin{cases} \kappa \neq 0, \\ \kappa^2 + \tau^2 = R(T,N,T,N), \\ \tau' = -\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\, R(T,N,T,B). \end{cases}$$

Or, le tenseur de courbure d'une métrique de Walker donne ici :

$$R(T,N,T,N) = -\frac{\varepsilon}{2} f_{yy} (N^y)^2 (T^z)^2 = -\frac{1}{2}\,(2a)\,(N^y)^2 (1)^2 = -a(N^y)^2.$$

En choisissant $N^y = 1$ (normalisation simple), on obtient :

$$\kappa^2 + \tau^2 = -a.$$

Pour que γ soit réelle et non géodésique, il faut

$$\kappa^2 + \tau^2 > 0 \quad \Longrightarrow \quad a < 0.$$

(b) Construction d'une solution explicite

Prenons par exemple :

$$a = -1 \quad \Rightarrow \quad \kappa^2 + \tau^2 = 1.$$

Un choix simple consiste à prendre

$$\kappa = \tau = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

On choisit alors une fonction linéaire :

$$y(s) = \frac{\sqrt{2}}{2}\, s, \qquad \Rightarrow \qquad y' = \frac{\sqrt{2}}{2} = cste.$$

Ainsi, la courbe

$$\gamma(s) = \left(s, \frac{\sqrt{2}}{2} s,\ s \right)$$

vérifie les équations de Frenet avec

$$T = \left(1, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 \right), \qquad \kappa = \tau = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

et le tenseur de courbure donne bien :

$$\kappa^2 + \tau^2 = 1 = R(T,N,T,N).$$

Toutes les équations du Théorème 3.1 sont donc satisfaites : la courbe γ est biharmonique non géodésique dans (M, g_f) lorsque $f(x,y,z) = -y^2 + bz^2$.

Exemple 3.4. *Considérons la variété de Walker 3D munie de la métrique*

$$g_f = 2\,dx\,dz + \varepsilon\,dy^2 + f(x,y,z)\,dz^2, \quad \varepsilon = 1.$$

Définissons une hélice paramétrée par la longueur d'arc s dans (x,y,z) :

$$\gamma(s) = \big(\rho\cos(\omega s),\ \rho\sin(\omega s),\ cs\big),$$

où $\rho > 0$ est le rayon de l'hélice, $\omega > 0$ la fréquence angulaire, et $c > 0$ la pente le long de l'axe z. Le vecteur tangent est alors :

$$T = \gamma'(s) = \big(-\rho\omega\sin(\omega s),\ \rho\omega\cos(\omega s),\ c\big), \quad \|T\| = \sqrt{\rho^2\omega^2 + c^2}.$$

Par normalisation de T, on a le vecteur unitaire :

$$T = \frac{1}{\sqrt{\rho^2\omega^2 + c^2}}\big(-\rho\omega\sin(\omega s),\ \rho\omega\cos(\omega s),\ c\big).$$

On définit la trièdre (T,N,B) par :

$$N = \frac{T'}{\|T'\|} = \frac{1}{\|T'\|}\big(-\rho\omega^2\cos(\omega s),\ -\rho\omega^2\sin(\omega s),\ 0\big),$$
$$B = T \times N \quad \textit{(orthonormalisé pour compléter le trièdre).}$$

Choisissons une hélice de courbure et de torsion constantes :

$$\kappa = 1, \quad \tau = 2.$$

Ainsi, pour qu'une hélice vérifie la propriété de biharmonicité, il est nécessaire que la condition du Théorème 3.2 soit respectée.

$$\kappa^2 + \tau^2 = R(T,N,T,N) = -\frac{\varepsilon}{2} f_{yy}(N^y)^2(T^z)^2.$$

Substituons les composantes choisies, par exemple :

$$N^y = \sin\phi, \quad T^z = \sin\theta, \quad \varepsilon = 1.$$

Alors :

$$5 = 1^2 + 2^2 = -\frac{1}{2} f_{yy}(\sin\phi)^2(\sin\theta)^2 \quad \Rightarrow \quad f_{yy} = -\frac{10}{(\sin\phi)^2(\sin\theta)^2}.$$

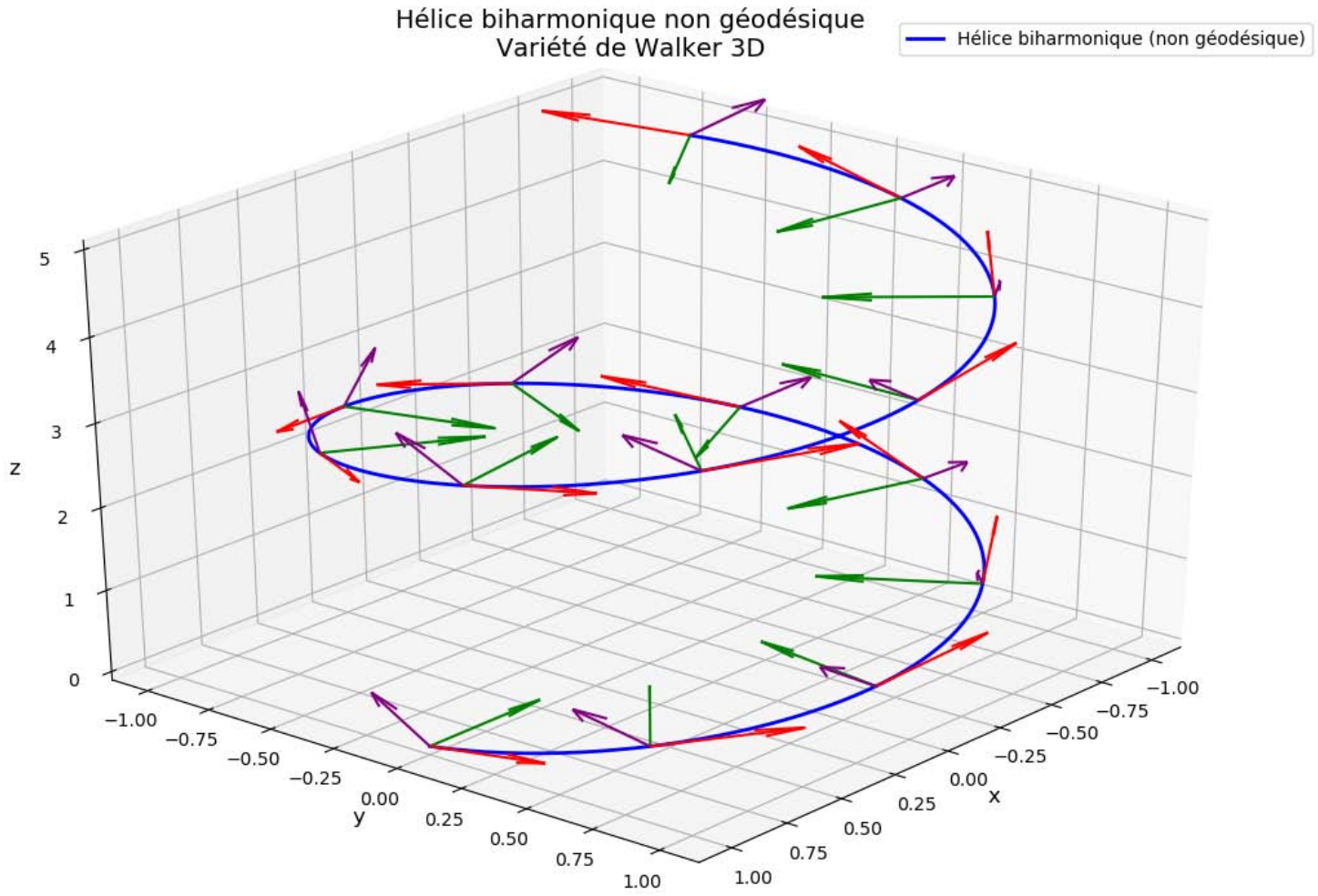
Pour que l'hélice soit complètement biharmonique, il faut également :

$$R(T,N,T,B) = -\frac{\varepsilon}{2} f_{yy} N^y T^z B^y = 0.$$

Cette condition est satisfaite en choisissant :

$$B^y = 0.$$

Nous constatons que la fonction $f(x,y,z)$ peut donc être choisie de sorte que $f_{yy} = -10/((\sin\phi)^2(\sin\theta)^2)$ le long de la courbe. Alors, la courbe $\gamma(s)$ définie par le trièdre (T,N,B) avec $\kappa = 1$, $\tau = 2$ et $B^y = 0$ est une hélice biharmonique non géodésique dans (M, g_f).



$g_f = 2\,dx\,dz + \varepsilon\,dy^2 + f(x,y,z)\,dz^2$, $\varepsilon = \pm 1$, $f(x,y,z)$: fonction quelconque.
T : vecteur tangent unitaire (rouge)
N : vecteur normal principal (vert)
B = **T** $\wedge$ **N** : vecteur binormal (violet)

FIGURE 3.1 – Représentation schématique de l'hélice biharmonique dans la variété de Walker 3D.

Corollaire 3.4. *Dans une variété de Walker de dimension* 3*, toute géodésique est biharmonique. Réciproquement, une courbe biharmonique* γ *est une géodésique si et seulement si sa courbure géodésique est nulle, c'est-à-dire*

$$\kappa = 0.$$

Démonstration. Soit (M, g_f) une variété de Walker de dimension 3, et soit

$$\gamma : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow M, \quad s \mapsto \gamma(s)$$

une courbe paramétrée par sa longueur d'arc. On note $T = \gamma'(s)$ le vecteur tangent unitaire, et ∇_T la dérivée covariante le long de γ.

L'équation d'une courbe *biharmonique* s'écrit

$$\tau_2(\gamma) = \nabla_T^3 T - R(T, \nabla_T T)T = 0,$$

où R désigne le tenseur de courbure de la variété. La courbure géodésique de γ est donnée par

$$\kappa = \|\nabla_T T\|,$$

et l'on a, d'après les formules de Frenet,

$$\nabla_T T = \kappa N,$$

où N est le vecteur normal unitaire.

(1) Toute géodésique est biharmonique.
Si γ est une géodésique, alors par définition $\nabla_T T = 0$. En substituant dans l'équation (3.25), on obtient :

$$\tau_2(\gamma) = \nabla_T^3 T - R(T, \underbrace{\nabla_T T}_{=0})T = \nabla_T^3 T.$$

Mais $\nabla_T T = 0$ implique successivement $\nabla_T^2 T = 0$ et $\nabla_T^3 T = 0$, donc $\tau_2(\gamma) = 0$. Ainsi, toute géodésique est bien biharmonique.

(2) Réciproque : condition sur la courbure géodésique.
Si la courbe biharmonique γ vérifie $\kappa = 0$, alors

$$\nabla_T T = \kappa N = 0,$$

ce qui signifie que γ est une géodésique.

Réciproquement, si γ est une géodésique, alors par définition $\nabla_T T = 0$, donc $\kappa = 0$.

Ainsi, une courbe biharmonique γ est géodésique si et seulement si sa courbure géodésique est nulle :

$$\gamma \text{ géodésique } \iff \kappa = 0.$$

□

Corollaire 3.5. *Soit $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to (M, g)$ une courbe biharmonique dans une variété de dimension 3. Alors γ est une géodésique si et seulement si sa courbure κ est nulle, c'est-à-dire :*

$$\kappa = \|\nabla_{\gamma'}\gamma'\| = 0.$$

En particulier, si $\gamma^{(4)} = 0$, c'est-à-dire si la quatrième dérivée covariante de γ par rapport à sa paramétrisation par la longueur d'arc est nulle :

$$\nabla_{\gamma'}^4 \gamma' = 0,$$

alors γ est de la forme

$$\gamma(s) = \frac{1}{6}C_1 s^3 + \frac{1}{2}C_2 s^2 + C_3 s + C_4,$$

avec $C_i \in \mathbb{R}^3$ des constantes vectorielles.

Dans ce cas, γ est une géodésique si et seulement si $C_1 = C_2 = 0$, ce qui équivaut à

$$\gamma''(s) = 0 \quad ou \quad \kappa = 0.$$

Ainsi, γ est alors une droite paramétrée, conformément à la définition des géodésiques en dimension 3.

Démonstration. Soit $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to (M, g_f)$ une courbe paramétrée par sa longueur d'arc, avec $\gamma' = T$ la tangente unitaire. Rappelons que la courbure κ de γ est définie par

$$\kappa = \|\nabla_T T\|.$$

La courbe γ est une géodésique si et seulement si

$$\nabla_T T = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \kappa = 0.$$

En effet, par définition, une géodésique est une courbe dont l'accélération covariante est nulle.

Une courbe γ est biharmonique si elle satisfait l'équation

$$\tau_2(\gamma) := \nabla_T^3 T - R(T, \nabla_T T)T = 0,$$

où R est le tenseur de courbure de la variété (M, g_f).

Si γ est une géodésique, alors $\nabla_T T = 0$. En substituant dans l'équation de biharmonicité, on obtient

$$\tau_2(\gamma) = \nabla_T^3 T - R(T, 0)T = 0 - 0 = 0.$$

Ainsi, toute géodésique est automatiquement biharmonique.

Supposons que

$$\nabla_T^4 \gamma = 0.$$

En dimension 3, cela implique que $\gamma(s)$ est une courbe cubique dans un repère adapté :

$$\gamma(s) = \frac{1}{6} C_1 s^3 + \frac{1}{2} C_2 s^2 + C_3 s + C_4,$$

où $C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}^3$ sont des constantes vectorielles.

La condition de géodésique $\nabla_T T = 0$ se traduit alors par

$$C_1 = C_2 = 0,$$

ce qui réduit $\gamma(s)$ à une droite paramétrique :

$$\gamma(s) = C_3 s + C_4.$$

Ainsi, dans une variété de Walker de dimension 3, la géodésicité d'une courbe biharmonique est équivalente à

$$\kappa = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \nabla_T T = 0.$$

□

Exemple 3.5. *Soit $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to (M, g_f)$ la courbe donnée par*

$$\gamma(s) = \begin{pmatrix} 9s^3 \\ 3s^2 \\ 3s^3 + s + 6 \end{pmatrix}.$$

Vérifions que γ est une géodésique dans une variété de Walker généralisée.

Méthode 1 : via la dérivée covariante.
La métrique de Walker généralisée en dimension 3 est

$$g_f = 2\,dx\,dz + dy^2 + f(x,y,z)\,dz^2.$$

Le vecteur tangent à la courbe est

$$T = \gamma'(s) = \begin{pmatrix} 27s^2 \\ 6s \\ 9s^2+1 \end{pmatrix}.$$

Dans la base $\{\partial_x, \partial_y, \partial_z\}$*, on a*

$$\nabla_T T = (\nabla_T T)^1\,\partial_x + (\nabla_T T)^2\,\partial_y + (\nabla_T T)^3\,\partial_z,$$

où

$$(\nabla_T T)^k = x^{k\prime\prime}(s) + \sum_{i,j=1}^{3} \Gamma_{ij}^k x^{i\prime}(s)\,x^{j\prime}(s), \qquad k = 1,2,3.$$

Les seuls symboles de Christoffel non nuls sont :

$$\Gamma_{zz}^x = -\frac{1}{2}f_x, \quad \Gamma_{zz}^y = -\frac{1}{2}f_y, \quad \Gamma_{xz}^z = \frac{1}{2}f_x, \quad \Gamma_{yz}^z = \frac{1}{2}f_y, \quad \Gamma_{zz}^z = \frac{1}{2}f_z.$$

On obtient alors :

$$(\nabla_T T)^1 = x'' - \frac{1}{2}f_x(z')^2, \tag{3.48}$$

$$(\nabla_T T)^2 = y'' - \frac{1}{2}f_y(z')^2, \tag{3.49}$$

$$(\nabla_T T)^3 = z'' + 2f_x x' z' + 2f_y y' z' + \frac{1}{2}f_z(z')^2. \tag{3.50}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \nabla_T T &= \Big(x'' - \tfrac{1}{2}f_x(z')^2\Big)\partial_x + \Big(y'' - \tfrac{1}{2}f_y(z')^2\Big)\partial_y + \Big(z'' + 2f_x x' z' + 2f_y y' z' + \tfrac{1}{2}f_z(z')^2\Big)\partial_z \\ &\iff \nabla_T T = \begin{pmatrix} x'' - \frac{1}{2}f_x(z')^2 \\ y'' - \frac{1}{2}f_y(z')^2 \\ z'' + 2f_x x' z' + 2f_y y' z' + \frac{1}{2}f_z(z')^2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{3.51}$$

Comme

$$x' = 27s^2, \qquad y' = 6s, \qquad z' = 9s^2+1,$$

on obtient

$$\begin{cases} x'' - \frac{1}{2}f_x(z')^2 = 54s - \frac{1}{2}f_x(9s^2+1)^2, \\ y'' - \frac{1}{2}f_y(z')^2 = 6 - \frac{1}{2}f_y(9s^2+1)^2, \\ z'' + 2f_x x' z' + 2f_y y' z' + \frac{1}{2}f_z(z')^2 = 18s + 54s^2 f_x(9s^2+1) + 12s f_y(9s^2+1) + \frac{1}{2}f_z(9s^2+1)^2. \end{cases}$$

En choisissant le long de la courbe

$$f_x = \frac{108s}{(9s^2+1)^2}, \qquad f_y = \frac{12}{(9s^2+1)^2}, \qquad f_z = -\frac{36s + 108s^2 f_x + 24s f_y}{(9s^2+1)},$$

chaque composante de (3.51) *s'annule.*

Ainsi,

$$\nabla_T T = 0 \quad \Longrightarrow \quad \gamma \text{ est une géodésique dans } (M, g_f).$$

Méthode 2 : via la dérivée quatrième.

On remarque que $\gamma(s)$ *est polynomiale de degré 3 en* s*. Calculons les dérivées successives :*

$$\gamma'(s) = \begin{pmatrix} 27s^2 \\ 6s \\ 9s^2+1 \end{pmatrix}, \quad \gamma''(s) = \begin{pmatrix} 54s \\ 6 \\ 18s \end{pmatrix},$$

$$\gamma'''(s) = \begin{pmatrix} 54 \\ 0 \\ 18 \end{pmatrix}, \quad \gamma^{(4)}(s) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Comme $\gamma^{(4)}(s) = 0$*, la courbe est cubique et vérifie une équation géodésique du type*

$$\nabla_T T = 0,$$

ce qui confirme une nouvelle fois que γ *est une géodésique dans* (M, g_f)*.*

Conclusion

Au terme de ce travail, nous avons étudié en détail la géométrie différentielle des variétés de Walker tridimensionnelles, en mettant particulièrement l'accent sur les géodésiques et les courbes biharmoniques qu'elles admettent.

Dans un premier temps, nous avons déterminé explicitement la connexion de Levi-Civita associée à la métrique

$$g_f = 2\,dx\,dz + \varepsilon\,dy^2 + f(x,y,z)\,dz^2,$$

puis en avons déduit les équations caractéristiques des géodésiques. Ces équations ont permis d'identifier plusieurs classes de courbes selon le type causal (spatial, lumineux ou temporel), notamment les géodésiques à composantes constantes, dont la nature dépend étroitement de la fonction f.

Dans un second temps, nous avons étudié les courbes biharmoniques en calculant explicitement leur champ de bitension et en établissant les conditions nécessaires des courbes biharmoniques non géodésiques. Cette analyse met en évidence l'existence des telles courbes, phénomène rendu possible par la structure dégénérée des variétés de Walker, où la présence d'une distribution isotrope autorise des trajectoires d'énergie d'ordre supérieur distinctes des géodésiques classiques. Nous avons également montré l'influence déterminante de la fonction $f(x,y,z)$ sur la structure géométrique, en particulier lorsque f ne dépend pas de x, correspondant aux variétés de Walker strictes. Dans ce cas, les équations se simplifient et révèlent certaines symétries, confirmées par les exemples présentés, qui illustrent la richesse géométrique obtenue.

Les résultats obtenus constituent une contribution à la classification locale des courbes biharmoniques dans les géométries de Walker et ouvrent plusieurs perspectives :

— l'étude des courbes f-biharmoniques et bi-f-biharmoniques ;
— l'extension aux variétés de Walker de dimensions supérieures.

Ainsi, les variétés de Walker apparaissent comme un cadre naturel pour l'analyse des équations variationnelles d'ordre supérieur, offrant un terrain propice à de futures investigations.

Bibliographie

[1] Aicha, B., & Mohammed, C. A. (2022). Deformations of metrics and biharmonic maps. *Compositio Mathematica*, 28(2020), 263–275. https://doi.org/10.2478/cm-2020-0022

[2] Annali, D. (1960). Les variétés riemanniennes (1/4)-pincées. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa*, 14(2), 161–170. http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1960_3_14_2_161_0

[3] Bakrou, S. (2018). Géodésique sur les variétés de Walker de dimension 3 [Mémoire]. Saida - Dr Moulay Tahar.

[4] Bahous, Y. (2024). *Sur la géométrie des courbes dans les variétés lorentziennes* (Thèse de doctorat, Université Abdelhamid Ibn Badis de Mostaganem).

[5] Berger, M., & Gostiaux, B. (1992). *Géométrie différentielle : variétés, courbes et surfaces*. Paris : Presses Universitaires de France.

[6] Buddadev, P., Mahendra, K., & Santosh, K. (2025). Study of bi-f-harmonic curves along Riemannian map. *International Journal of Maps in Mathematics, 8*(1), 55–73. www.simadp.com/journalmim

[7] Bozdağ, Ş. N., & Erdoğan, F. E. (2021). F-biharmonic and bi-f-harmonic magnetic curves in three-dimensional normal almost paracontact metric manifolds. *International Electronic Journal of Geometry, 14*(2), 331–347. https://doi.org/10.36890/IEJG.808379

[8] Bozdağ, Ş. N., & Erdoğan, F. E. (2022). On F-biharmonic and bi-f-harmonic Frenet Legendre curves. *International Journal of Maps in Mathematics, 5*(2), 112–138. www.journalmim.com

[9] Brozos-Vázquez, M., García-Río, E., & Gavino-Fernández, S. (2007). Locally symmetric three-dimensional Lorentzian manifolds. *Glasgow Mathematical Journal*, 49(2), 241–257.

[10] Brozos-Vázquez, M., García-Río, E., Gilkey, P., Nikčević, S., & Vázquez-Lorenzo, R. (2009). *The geometry of Walker manifolds*. Springer-Verlag.

[11] Büyükkbaş Çakar, G. (2016). *Geodesics of three-dimensional Walker manifolds* (Master's thesis, Bilkent University). https://acikbilim.yok.gov.tr/bitstream/handle/20.500.12812/34089/yokAcikBilim_10118521.pdf

[12] Cherif, D. A. M. (2015). Géométrie semi-Riemannienne [Cours M2]. Université de Mascara. https://www.researchgate.net/publication/322599980

[13] Davidov, J., Díaz-Ramos, J. C., & García-Río, E. (2006). Almost Kähler Walker 4-manifolds. *Journal of Geometry and Physics*, 1075–1088. https://doi.org/10.1016/j.geomphys.2006.05.010

[14] Davidov, J., Díaz-Ramos, J. C., García-Río, E., Matsushita, Y., Muškarov, O., & Vázquez-Lorenzo, R. (2008). Hermitian–Walker 4-manifolds. *Journal of Geometry and Physics, 58*, 307–323. https://doi.org/10.1016/j.geomphys.2007.11.006

[15] do Carmo, M. (1976). *Differential geometry of curves and surfaces*. Englewood Cliffs, NJ : Prentice Hall.

[16] Hired, K., & Kasmi, K. (2022). *Introduction aux solitons de Ricci par l'étude des équations différentielles* (Mémoire de master, Université Ibn Khaldoun de Tiaret, Faculté des Mathématiques et Informatique, Département des Mathématiques).

[17] Keltouma, T. (2017). Les courbes harmoniques et biharmoniques dans l'espace euclidien et le groupe Heisenberg [Mémoire]. Dr Tahar Moulay, Saïda.

[18] Körpinar, T., Körpinar, Z., Chu, Y.-M., Akinlar, M. A., & Inc, M. (2020). New uniform motion and Fermi–Walker derivative of normal magnetic biharmonic particles in Heisenberg space. *Symmetry, 12*(10), Article 1017. https://doi.org/10.3390/sym12061017

[19] Lòpez, R. (2014). Differential geometry of curves and surfaces in Lorentz-Minkowski space. *International Electronic Journal of Geometry*, 7, 44–107.

[20] Mamadou, G., Ameth, N., & Rénovat, N. (2022). Biharmonic curves in a strict Walker 3-manifold. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 2022*, Article ID 3855033. https://doi.org/10.1155/2022/3855033

[21] Mohammed, C. A. (2020). Applications harmoniques. https://www.researchgate.net/publication/346021849

[22] Moumene, A. K. (2017). *Les courbes harmoniques et biharmoniques dans l'espace de Minkowski et le groupe d'Heisenberg Lorentzien* (Mémoire de Master académique en Analyse, géométrie et applications). Université Dr Tahar Moulay – Saïda.

[23] Murat, A. (2021). On f-biharmonic curves in the three-dimensional Lorentzian Sasakian manifolds. *HSJG, 3*(2), 24–30.

[24] Niang, A., Ndiaye, A., & Diallo, A. S. (2021). A classification of strict Walker 3-manifolds. *Konuralp Journal of Mathematics, 9*(1), 148–153. https://dergipark.org.tr/en/pub/konuralpjournalmath

[25] O'Neill, B. (1983). *Semi-Riemannian geometry with applications to relativity*. Academic Press.

[26] Pierre, M., & Aimé. (1999). *Géométrie et applications : Introduction à la géométrie différentielle*. Ellipses Édition.

[27] Sternberg, S. (2009). *Semi-Riemannian geometry and general relativity*. Orange Grove Texts Plus.