

2020-04

Problèmes de linéarisation des polynômes de Kravchuk

BYAMWEZI MUNIGWA, Guillaume

UB

<https://repository.ub.edu.bi/handle/123456789/188>

Téléchargé depuis le dépôt institutionnel officiel de l'Université du Burundi

UNIVERSITÉ DU BURUNDI



FACULTÉ DES SCIENCES

Département de Mathématiques

Problèmes de linéarisation des polynômes de Kravchuk

Guillaume BYAMWEZI MUNIGWA

MÉMOIRE

présenté et défendu publiquement en vue d'obtenir le

Diplôme de Mastère en Mathématiques Fondamentales et
Appliquées

Sous la direction du Professeur François NDAYIRAGIJE

Bujumbura, avril 2020

Membres du jury

Professeur Gaspard BANGEREZAKO (**Président**)

Professeur Jean NDIMUBANDI (**Secrétaire**)

Professeur François NDAYIRAGIJE (**Membre**)

Dédicace

A ma Tante ELESİ

A ma Mère SUZANA

A ma Fille RIZIKI

Remerciements

"L'isolement rend stérile une grenouille" dit-on. C'est ce qui m'arriverait si je n'étais pas indéfectiblement entouré et soutenu par beaucoup de personnes que je remercie sincèrement et dont je me permets de ne citer qu'un échantillon.

Mes sentiments de gratitude vont tout droit au Professeur François NDAYIRAGIJE qui a accepté de me parrainer tout au long de ce travail. Ses conseils et encouragements ont conduit à l'aboutissement heureux de ce mémoire. C'est aussi l'occasion de reconnaître la contribution scientifique de tous les enseignants que j'ai rencontrés dans la formation de mastère durant les deux ans à l'Université du Burundi dont particulièrement le Professeur Walter VAN ASSCHE de l'université KU Leuven de Belgique qui m'a envoyé un nombre non négligeable de documents dans le souci d'approfondir mes connaissances dans le domaine.

Je me réjouis d'avoir rencontré des collègues de classe d'une bonté et d'une gentillesse inexprimables. Grâce à leur collaboration, j'ai réussi à surmonter beaucoup d'obstacles. C'est pourquoi, je réitère mes remerciements aux camarades Prime BIZIMANA, David NIYONSENGA, Euphraïm NTIRAMPEBA, Samuel HATUNGIMANA, Thierry NSHIMIRIMANA et particulièrement à Tharcisse ICITEGETSE pour m'avoir hébergé pendant quelques temps. Rien ne peut faire oublier le soutien moral et la convivialité qui règnent au sein de la communauté estudiantine congolaise de l'Université du Burundi.

Merci à toute ma famille pour n'avoir pas cessé de m'encourager. Je pense spécialement à mon épouse FURAHA Thérèse et mes enfants pour avoir enduré pendant les moments de mes absences parfois prolongées et m'avoir démontré leur véritable attachement sans lequel mes efforts seraient nuls.

Je garde d'excellents souvenirs de ceux dont les noms ne sont pas cités ici mais dont les diverses contributions m'ont apporté un soulagement durant ma formation à l'Université du Burundi. Que tous reçoivent ma sincère reconnaissance.

Table des figures

2.1	<i>Les quatre premiers polynômes de Kravchuk (pour $p=1/2$ et $N=10$)</i>	28
2.2	<i>Les quatre premiers polynômes de Kravchuk (pour $p=2$ et $N=10$)</i>	31
2.3	<i>Les quatre premiers polynômes de Kravchuk : cas symétrique pour $N = 10$</i>	33
2.4	<i>Représentation graphique des données du tableau 2.1</i>	46
3.1	<i>Représentation graphique de premiers polynômes de Kravchuk : Cas symétrique 2.1</i>	52

RÉSUMÉ

Les polynômes de Kravchuk sont définis particulièrement par leur fonction de poids qui est exactement la fonction de distribution binomiale de la théorie des probabilité. Le contenu du mémoire est développé de manière à rendre le texte plus explicite et digeste.

Mots clés : *polynôme de Kravchuk, coefficient de linéarisation, fonction génératrice, séries hypergéométriques.*

SUMMARY

Kravchuk polynomials are defined in particular by their weight function which is exactly the binomial distribution function of the probability theory. The linearization coefficients are calculated using the generating function. In order to make the text more explicit and digestible, the content of the memoir is developed.

Key words : *Kravchuk polynomials, linearization coefficient, generating function, hypergeometric series.*

Table des matières

Dédicace	i
Remerciements	ii
Table des figures	iii
RÉSUMÉ	iv
SUMMARY	iv
Table des matières	v
Introduction	1
1 Polynômes Orthogonaux Classiques de Variable Discrète	3
1.1 Équation aux différences de type hypergéométrique	3
1.2 Analogues aux différences finies des polynômes de type hypergéométrique et leurs dérivées - Formule de Rodrigues	7
1.3 Propriété d'orthogonalité	13
1.4 Solutions polynomiales des équations aux différences réelles	17
2 Polynômes de Kravchuk	20
2.1 Distribution binomiale	20
2.2 Séries hypergéométriques	21
2.3 Polynômes de Kravchuk	25
2.3.1 Symétrie	29
2.4 Définition générale	30
2.5 Cas particulier	31
2.6 Polynômes moniques de Kravchuk	34
2.6.1 De la théorie générale	34

2.6.2	Propriétés des solutions polynomiales définies positives	36
2.7	Les zéros des polynômes de Kravchuk	39
2.7.1	Limites pour les zéros extrêmes de polynômes de Kravchuk	44
3	Problème de Linéarisation des Polynômes de Kravchuk	47
3.1	Polynômes de Kravchuk : Cas général	47
3.1.1	Coefficients de linéarisation	48
3.1.1.1	Formule de linéarisation	49
3.1.1.2	Formule de récurrence	49
3.1.2	Transformations de Kravchuk	49
3.1.3	Convolution	50
3.2	Cas particulier des polynômes symétriques	51
3.2.1	Coefficients de linéarisation	52
3.2.2	Calcul des coefficients de linéarisation en utilisant la fonction génératrice	53
3.2.3	Transformations de Kravchuk - Inversion	54
3.2.4	Convolution	54
	Conclusion	55
	Bibliographie	56
	Annexe	58

Introduction

Le produit de deux ou plusieurs polynômes orthogonaux p et q de la base $\{r_k\}_{k=0}^{\infty}$ intéresse beaucoup de chercheurs à travers le monde. Connue sous le nom de Problème de linéarisation générale, cette opération, qui s'inscrit dans le cadre des problèmes contemporains sur les polynômes orthogonaux [25], consiste à déterminer les coefficients C_{nmk} tels que

$$p_n q_m(x) = \sum_{k=0}^{m+n} C_{nmk} r_k(x),$$

où le système orthogonal $\{r_k\}$ respecte une certaine mesure positive μ [21].

Plusieurs méthodes, dont les coefficients de Fourier, sont utilisées dans les calculs et cela marche bien pour certains cas classiques particuliers.

En général, les méthodes de détermination des coefficients de linéarisation servent plus à dégager les propriétés caractéristiques des polynômes orthogonaux concernés telles que la fonction génératrice, la représentation hypergéométrique, la relation de récurrence, le poids d'orthogonalité, la formule de Rodrigues, etc. D'autres éléments d'intérêt sont les coefficients de connexion lorsque $q_n(x) = 1$ et les résultats concernant la positivité. Par exemple, le problème de linéarisation et de connexion ci-haut décrit a été résolu pour les polynômes de Meixner-Pollaczek dans l'article de Tsehaye K. Araaya [21].

Il s'agit, dans ce mémoire, d'identifier les outils nécessaires afin d'établir les propriétés caractéristiques de cette famille des polynômes, l'objectif étant l'explicitation de quelques propriétés importantes des polynômes de Kravchuk dont la fonction de poids d'orthogonalité, les coefficients de linéarisation, la représentation hypergéométrique, la relation de récurrence, la formule de Rodrigues, ...

Pour atteindre les objectifs ci-dessus, il sera nécessaire de recourir aux propositions et leurs démonstrations existantes dans la théorie ainsi que dans les domaines connexes comme la probabilité ou l'analyse en générale.

Afin de visualiser certains résultats, les logiciels Matlab, R et Maple seront utilisés.

Hormis l'Introduction et la Conclusion, ce travail est construit en trois chapitres dont :

- le premier, intitulé *Les Polynômes orthogonaux classiques de variable discrète*, constitue un rappel important sur la théorie générale des polynômes orthogonaux classiques discrets ;
- le deuxième parle des polynômes orthogonaux classiques de Kravchuk avec un

accent particulier est mis sur les propriétés fondamentales ;

- Le dernier présente le problème de linéarisation des polynômes de Kravchuk.

Il sied de signaler que le cadre du présent travail met en évidence le cas des polynômes symétriques moniques.

Chapitre 1

Polynômes Orthogonaux Classiques de Variable Discrète

1.1 Équation aux différences de type hypergéométrique

La théorie des solutions polynomiales de l'équation différentielle du type hypergéométrique [14, 15]

$$\tilde{\sigma}(x)y'' + \tilde{\tau}(x)y' + \lambda y = 0, \quad (1.1)$$

où $\tilde{\sigma}(x)$ est un polynôme de degré au plus deux, $\tilde{\tau}(x)$ un polynôme du premier degré et λ une constante, admet une généralisation lorsque l'équation différentielle ci-dessus est remplacée par l'équation aux différences

$$\begin{aligned} & \tilde{\sigma}(x) \frac{1}{h} \left[\frac{y(x+h) - y(x)}{h} - \frac{y(x) - y(x-h)}{h} \right] + \\ & \frac{1}{2} \tilde{\tau}(x) \left[\frac{y(x+h) - y(x)}{h} + \frac{y(x) - y(x-h)}{h} \right] + \lambda y(x) = 0. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Cette relation (1.2) est obtenue en remplaçant y' par les approximations $\frac{y(x+h) - y(x)}{h}$ ou par $\frac{y(x) - y(x-h)}{h}$ car, par définition pour la variable continue,

$$y'_d = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(x+h) - y(x)}{h} \quad \text{ou} \quad y'_g = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(x) - y(x-h)}{h}.$$

Donc,

$$\begin{aligned} y'' &= \left[\frac{y(x+h) - y(x)}{h} \right]' \\ &= \frac{1}{h} \left[\frac{y(x+h) - y(x)}{h} - \frac{y(x) - y(x-h)}{h} \right]. \end{aligned}$$

Comme (1.1) peut s'écrire :

$$\tilde{\sigma}(x)y'' + \frac{1}{2}\tilde{\tau}(x)(y'_d + y'_g) + \lambda y = 0 \text{ et en utilisant } y'_d \approx \frac{y(x+h) - y(x)}{h} \text{ et } y'_g \approx \frac{y(x) - y(x-h)}{h},$$

on obtient la relation (1.2).

Considérons les opérateurs suivants :

$$\begin{cases} \Delta f(x) = f(x+1) - f(x) \\ \nabla f(x) = f(x) - f(x-1). \end{cases} \quad (1.3)$$

On vérifie que

$$\nabla f(x) = \Delta f(x) - \Delta \nabla f(x), \quad (1.4)$$

$$\Delta f(x) = \nabla f(x+1), \quad (1.5)$$

$$\Delta \nabla f(x) = \nabla \Delta f(x) = f(x+1) - 2f(x) + f(x-1), \quad (1.6)$$

$$\Delta [f(x)g(x)] = f(x)\Delta g(x) + g(x+1)\Delta f(x). \quad (1.7)$$

En effet,

•

$$\begin{aligned} \Delta f(x) - \Delta \nabla f(x) &= \Delta f(x) - \Delta [f(x) - f(x-1)] \\ &= \Delta f(x) - \Delta f(x) + \Delta f(x-1) \\ &= f(x) - f(x-1) \\ &= \nabla f(x). \end{aligned}$$

•

$$\begin{aligned} \nabla f(x+1) &= f(x+1) - f(x) \\ &= \Delta f(x). \end{aligned}$$

• D'après (1.4),

$$\begin{aligned} \Delta \nabla f(x) &= \Delta f(x) - \nabla f(x) \\ &= f(x+1) - f(x) - f(x) + f(x-1) \\ &= f(x+1) - 2f(x) + f(x-1). \end{aligned}$$

• D'après (1.5),

$$\begin{aligned} \Delta [f(x)g(x)] &= f(x+1)g(x+1) - f(x)g(x) \\ &= f(x+1)g(x+1) - f(x)g(x+1) + f(x)g(x+1) - f(x)g(x) \\ &= [f(x+1) - f(x)]g(x+1) + f(x)[g(x+1) - g(x)] \\ &= f(x)\Delta g(x) + g(x+1)\Delta f(x). \end{aligned}$$

Par la relation (1.7), on obtient la formule de sommation par parties :

$$\sum_i f(x_i)\Delta g(x_i) = f(x_i)g(x_i) \Big|_a^b - \sum_i g(x_{i+1})\Delta f(x_i), \quad (1.8)$$

où $x_{i+1} = x_i + 1$ et $a \leq x_i \leq b$.

En effet, (1.7) $\Leftrightarrow f(x)\Delta g(x) = \Delta (f(x)g(x)) - g(x+1)\Delta f(x)$.

$\Rightarrow f(x_i)\Delta g(x_i) = \Delta (f(x_i)g(x_i)) - g(x_i+1)\Delta f(x_i)$.

Par suite,

$$\begin{aligned} \sum_i f(x_i)\Delta g(x_i) &= \sum_i \Delta \left(f(x_i)g(x_i) \right) - \sum_i g(x_i + 1)\Delta f(x_i) \\ \Leftrightarrow \sum_i f(x_i)\Delta g(x_i) &= f(x_i)g(x_i) \Big|_a^b - \sum_i g(x_i + 1)\Delta f(x_i). \end{aligned}$$

Il est utile de constater que pour un polynôme $q_m(x)$ de degré m les expressions $\Delta q_m(x)$ et $\nabla q_m(x)$ sont polynomiales de degré $m - 1$ et que $\Delta^m q_m(x) = \nabla^m q_m(x) = q_m^m(x)$.

En posant $h = 1$, la relation (1.2), devient :

$$\tilde{\sigma}(x) \left[y(x+1) - 2y(x) - y(x-1) \right] + \frac{1}{2} \tilde{\tau}(x) \left[y(x+1) - y(x) + y(x) - y(x-1) \right] + \lambda y(x) = 0$$

et que l'on peut, en utilisant les opérateurs ci-haut définis, écrire :

$$\tilde{\sigma}(x)\Delta\nabla y(x) + \frac{1}{2}\tilde{\tau}(x)(\Delta + \nabla)y(x) + \lambda y(x) = 0. \quad (1.9)$$

En utilisant (1.4) dans le deuxième terme de l'équation (1.9) et en posant $\sigma(x) = \tilde{\sigma}(x) - \frac{1}{2}\tilde{\tau}(x)$ et $\tilde{\tau}(x) = \tau(x)$, on a :

$$\sigma(x)\Delta\nabla y(x) + \tau(x)\Delta y(x) + \lambda y(x) = 0. \quad (1.10)$$

En effet,

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}(x)\Delta\nabla y(x) + \frac{1}{2}\tilde{\tau}(x)(\Delta + \nabla)y(x) + \lambda y(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow \tilde{\sigma}(x)\Delta\nabla y(x) + \frac{1}{2}\tilde{\tau}(x)\Delta y(x) + \frac{1}{2}\tilde{\tau}(x)\nabla y(x) + \lambda y(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow \tilde{\sigma}(x)\Delta\nabla y(x) - \frac{1}{2}\tilde{\tau}(x)(\Delta y(x)\nabla y(x)) + \tilde{\tau}(x)\Delta y(x) + \lambda y(x) &= 0. \end{aligned}$$

Or, $\Delta\nabla y(x) = \Delta y(x) - \nabla y(x)$; d'après (1.4).

$$\text{Donc, } \tilde{\sigma}(x)\Delta\nabla y(x) - \frac{1}{2}\tilde{\tau}(x)\Delta\nabla y(x) + \tilde{\tau}(x)\Delta y(x) + \lambda y(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\left(\tilde{\sigma}(x) - \frac{1}{2}\tilde{\tau}(x) \right)}_{\sigma(x)} \Delta\nabla y(x) + \underbrace{\tilde{\tau}(x)}_{\tau(x)} \Delta y(x) + \lambda y(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sigma(x)\Delta\nabla y(x) + \tau(x)\Delta y(x) + \lambda y(x) = 0.$$

D'où la relation (1.10).

On peut aussi établir un certain nombre de propriétés des solutions de (1.10) qui sont analogues de celles des solutions de (1.1) [14, 13].

Par exemple, on montre que la fonction $v_1(x) = \Delta y(x)$ satisfait l'équation aux différences de la forme (1.10).

En effet, en appliquant l'opérateur Δ aux deux membres de l'équation (1.10), après le remplacement de $\Delta y(x)$ par $v_1(x)$, on a :

$$\begin{aligned}
& \Delta[\sigma(x)\nabla v_1(x)] + \Delta[\tau(x)v_1(x)] + \Delta[\lambda y(x)] = 0 \\
\Leftrightarrow & \sigma(x)\Delta\nabla v_1(x) + \Delta\sigma(x)\nabla v_1(x+1) + \tau(x)\Delta v_1(x) + v_1(x+1)\Delta\tau(x) + \lambda\Delta y(x) = 0 \\
\Leftrightarrow & \sigma(x)\Delta\nabla v_1(x) + \Delta\sigma(x)\Delta v_1(x) + \tau(x)\Delta v_1(x) + [\Delta v_1(x) + v_1(x)]\Delta\tau(x) + \lambda v_1(x) = 0 \\
\Leftrightarrow & \sigma(x)\Delta\nabla v_1(x) + [\Delta\sigma(x) + \tau(x) + \Delta\tau(x)]\Delta v_1(x) + [\lambda + \Delta\tau(x)]v_1(x) = 0 \\
\Leftrightarrow & \sigma(x)\Delta\nabla v_1(x) + \underbrace{[\Delta\sigma(x) + \tau(x+1)]}_{\tau_1(x)}\Delta v_1(x) + \underbrace{[\lambda + \Delta\tau(x)]}_{\mu_1(x)}v_1(x) = 0.
\end{aligned}$$

Ce qu'on peut écrire :

$$\sigma(x)\Delta\nabla v_1(x) + \tau_1(x)v_1(x) + \mu_1 v_1(x) = 0, \quad (1.11)$$

où $\tau_1(x) = \tau(x+1) + \Delta\sigma(x)$ et $\mu = \lambda + \Delta\tau(x)$. Comme $\tau_1(x)$ est un polynôme du premier degré et $\mu_1(x)$ est indépendant de x , l'équation (1.11) pour $v_1(x)$ est de la même forme que (1.10).

Il est aussi facile de vérifier l'inverse : toute solution de (1.11) avec $\lambda \neq 0$ peut être représentée sous la forme $v_1(x) = \Delta y(x)$, où $y(x)$ est une solution de (1.10) qui peut être exprimée en termes de $v_1(x)$ par $y(x) = (-1/\lambda)[\sigma(x)\nabla v_1 + \tau(x)v_1]$.

De la même manière, on obtient une équation aux différences de type hypergéométrique,

$$\sigma(x)\Delta\nabla v_n(x) + \tau_n(x)v_n(x) + \mu_n v_n(x) = 0 \quad (1.12)$$

pour $v_n(x) = \Delta^n y(x)$.

Ici,

$$\tau_n(x) = \tau_{n-1}(x+1) + \Delta\sigma(x), \quad \tau_0(x) = \tau(x), \quad (1.13)$$

$$\mu_n = \mu_{n-1} + \Delta\tau_{n-1}(x), \quad \mu_0(x) = \lambda. \quad (1.14)$$

L'inverse est également valable : chaque solution de (1.12) avec $\mu_k \neq 0$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$) peut être représentée par $v_n(x) = \Delta^n y(x)$, où $y(x)$ est une solution de (1.10).

Si on réécrit (1.13) sous la forme

$$\begin{aligned}
\tau_n(x) &= \tau_{n-1}(x+1) + \sigma(x+1) - \sigma(x), & (1.15) \\
&= \tau_{n-2}(x+2) + \sigma(x+2) - \sigma(x+1) + \sigma(x+1) - \sigma(x) \\
&\vdots \\
&= \tau(x+n) + \sigma(x+n) - \sigma(x)
\end{aligned}$$

Pour obtenir une formule explicite pour μ_n , on doit seulement observer que $\Delta\tau_n(x)$ et $\Delta^2\sigma(x)$ sont indépendants de x .

Par suite,

$$\begin{aligned}
\Delta\tau_n &= \Delta\left(\tau_{n-1}(x+1) + \Delta(\sigma(x))\right); \quad \text{d'après (1.13)} \\
&= \Delta\tau_{n-1}(x) + \Delta^2\sigma(x); \quad \text{car } \Delta\tau \text{ et } \Delta^2\sigma \text{ sont indépendants de } x. \\
&= \Delta\tau_{n-2}(x) + 2\Delta^2\sigma(x) \\
&\vdots \\
&= \Delta\tau + n\Delta^2\sigma,
\end{aligned}$$

et en conséquence $\mu_n = \mu_{n-1} + \Delta\tau + (n-1)\Delta^2\sigma$.

$$\begin{aligned}
\mu_n &= \mu_0 + \sum_{k=1}^n (\mu_k - \mu_{k-1}) \\
&= \lambda + \sum_{k=1}^n (\mu_{k-1} + \Delta\tau_{k-1} - \mu_{k-1}); \quad \text{d'après (1.14)} \\
&= \lambda + \sum_{k=1}^n \left(\Delta\tau + (k-1)\Delta^2\sigma \right) \\
&= \lambda + n\Delta\tau + \frac{1}{2}n(n-1)\Delta^2\sigma \\
&= \lambda + n\tau' + \frac{1}{2}n(n-1)\sigma''. \tag{1.16}
\end{aligned}$$

1.2 Analogues aux différences finies des polynômes de type hypergéométrique et leurs dérivées - Formule de Rodrigues

Les propriétés des différences plus élevées $\Delta^n y(x)$ établies en section précédente permettent de construire une théorie des polynômes orthogonaux classiques d'une variable discrète [13, 14, 15].

Il est clair que $v_n(x) = \text{constante}$, est une solution de (1.12) pour $\mu_n = 0$. Puisque $v_n(x) = \Delta^n y(x)$, cela signifie que si $\lambda = \lambda_n = -n\tau' - \frac{1}{2}n(n-1)\sigma''$, alors il y a une solution particulière $y = y_n(x)$ de (1.10) qui est un polynôme de degré n à condition que $\mu_k \neq 0$ avec $k = 0, 1, \dots, n-1$.

En fait, l'équation

$$\sigma(x)\Delta\nabla v_k(x) + \tau_k(x)\Delta v_k(x) + \mu_k v_k(x) = 0$$

peut s'écrire sous la forme

$$v_k(x) = \left(\frac{-1}{\mu_k} \right) \left[\sigma(x)\Delta v_{k+1}(x) + \tau_k(x)v_{k+1}(x) \right].$$

Il en résulte clairement que si $v_{k+1}(x)$ est un polynôme, alors $v_k(x)$ l'est aussi si $\mu_k \neq 0$. Pour obtenir une expression explicite de $y_n(x)$, on écrit (1.10) et (1.12) sous forme auto-adjointe :

$$\Delta(\sigma \varrho \nabla y) + \lambda \varrho y = 0, \tag{1.17}$$

$$\Delta(\sigma \varrho_n \nabla v_n) + \mu_n \varrho_n v_n = 0. \tag{1.18}$$

Ici, $\varrho(x)$ et $\varrho_n(x)$ satisfont les équations aux différences suivantes :

$$\Delta(\sigma \varrho) = \tau \varrho, \tag{1.19}$$

$$\Delta(\sigma \varrho_n) = \tau_n \varrho_n. \tag{1.20}$$

On peut déterminer la connexion entre $\varrho_n(x)$ et $\varrho(x)$ en écrivant (1.20) sous la forme :

$$\frac{\sigma(x+1)\varrho_n(x+1)}{\varrho_n(x)} = \tau_n(x) + \sigma(x) \quad (1.21)$$

à partir de laquelle on voit que (1.15) équivaut à :

$$\frac{\sigma(x+1)\varrho_n(x+1)}{\varrho_n(x)} = \frac{\sigma(x+2)\varrho_{n-1}(x+2)}{\varrho_{n-1}(x+1)},$$

i.e

$$\frac{\varrho_n(x+1)}{\sigma(x+2)\varrho_{n-1}(x+2)} = \frac{\varrho_n(x)}{\sigma(x+1)\varrho_{n-1}(x+1)} = C_n(x),$$

où $C_n(x)$ est une fonction périodique de période 1. Il suffit de trouver une solution particulière de (1.20), donc on peut prendre $C_n(x) = 1$ pour obtenir :

$$\begin{aligned} \varrho_n(x) &= \sigma(x+1)\varrho_{n-1}(x+1) \\ &= \sigma(x+1)\sigma(x+2)\varrho_{n-2}(x+2) \\ &= \sigma(x+1)\sigma(x+2)\dots\sigma(x+n)\varrho_0(x+n) \\ \varrho_n(x) &= \varrho(x+n) \prod_{k=1}^n \sigma(x+k); \quad \text{lorsque } \varrho_0(x) = \varrho(x). \end{aligned} \quad (1.22)$$

En utilisant la connexion entre $\varrho_n(x)$ et $\varrho_{n+1}(x)$, on peut présenter (1.18) comme une simple relation entre $v_n(x)$ et $v_{n+1}(x)$.

En réalité,

$$\begin{aligned} \varrho_n(x)v_n(x) &= \frac{-1}{\mu_n} \Delta \left[\sigma(x)\varrho_n(x)\nabla v_n(x) \right] \\ &= \frac{-1}{\mu_n} \nabla \left[\underbrace{\sigma(x+1)\varrho_n(x+1)}_{\varrho_{n+1}(x)} \Delta v_n(x) \right]; \quad \text{d'après (1.5) et (1.22)} \\ &= \frac{-1}{\mu_n} \nabla \left[\varrho_{n+1}(x)v_{n+1}(x) \right]. \end{aligned}$$

Pour $m < n$, on obtient successivement

$$\begin{aligned} \varrho_m v_m &= \frac{-1}{\mu_m} \nabla \left(\varrho_{m+1} v_{m+1} \right) \\ &= \left(\frac{-1}{\mu_m} \right) \left(\frac{-1}{\mu_{m+1}} \right) \nabla^2 \left(\varrho_{m+2} v_{m+2} \right) \\ &= \frac{(-1)}{\mu_m} \frac{(-1)}{\mu_{m+1}} \dots \frac{(-1)}{\mu_{m+n-m-1}} \nabla^{n-m} \left(\varrho_{m+n-m} v_{m+n-m} \right) \\ &= \frac{(-1)^{n-m} \mu_0 \dots \mu_{m-1}}{\mu_0 \dots \mu_{m-1} \mu_m \mu_{m+1} \dots \mu_{n-1}} \nabla^{n-m} \left(\varrho_n v_n \right) \\ &= \frac{(-1)^m \prod_{k=0}^{m-1} \mu_k}{(-1)^n \prod_{k=0}^{n-1} \mu_k} \nabla^{n-m} \left(\varrho_n v_n \right) \\ &= \frac{A_m}{A_n} \nabla^{n-m} \left(\varrho_n v_n \right), \end{aligned} \quad (1.23)$$

où

$$A_n = (-1)^n \prod_{k=0}^{n-1} \mu_k, \quad A_0 = 1. \quad (1.24)$$

On procède maintenant à l'obtention d'une forme explicite des polynômes de degré n ; c'est-à-dire $y = y_n(x)$. Si $y = y_n(x)$, on a $v_n(x) = y_n(x) = \text{constante}$, et en utilisant (1.23) on arrive à l'expression suivante pour $v_{mn}(x) = \Delta^m y_n(x)$:

$$v_{mn}(x) = \Delta^m y_n(x) = \frac{A_{mn} B_n}{\varrho_n(x)} \nabla^{n-m} (\varrho_m(x)), \quad (1.25)$$

où

$$\begin{cases} A_{mn} &= A_m(\lambda)|_{\lambda=\lambda_n} = \frac{n!}{(n-m)!} \prod_{k=0}^{n-1} \left(\tau' + \frac{n+k-1}{2} \sigma'' \right) \\ A_{0n} &= 1 \quad (m \leq n) \\ B_n &= \frac{\Delta^n y_n(x)}{A_{nn}} = \frac{1}{A_{nn}} y_n^{(n)}(x). \end{cases} \quad (1.26)$$

Montrons la relation (1.25).

Démonstration.

$$\varrho_m v_m = -\frac{1}{\mu_m} \nabla (\varrho_{m+1} v_{m+1}) = \frac{A_m}{A_n} \nabla^{n-m} (\varrho_m v_n); \text{ avec } A_n = (-1)^n \prod_{k=0}^{n-1} \mu_k$$

D'une part,

$$\begin{aligned} \varrho_m v_m(x) &= -\frac{1}{\mu_m} \nabla (\varrho_{m+1} v_{m+1,n}) \\ &= \left(-\frac{1}{\mu_m} \right) \left(-\frac{1}{\mu_{m+1}} \right) \nabla^2 (\varrho_{m+2} v_{m+2,n}) \\ &= \left(-\frac{1}{\mu_m} \right) \left(-\frac{1}{\mu_{m+1}} \right) \left(-\frac{1}{\mu_{m+2}} \right) \cdots \left(-\frac{1}{\mu_{m+1+n-m-1}} \right) \nabla^{n-m} (\varrho_{m+n-m} v_{m+n-m,n}) \\ &= \left(-\frac{1}{\mu_m} \right) \left(-\frac{1}{\mu_{m+1}} \right) \left(-\frac{1}{\mu_{m+2}} \right) \cdots \left(-\frac{1}{\mu_n} \right) \nabla^{n-m} (\varrho_n(x) v_{nn}(x)) \\ &= \frac{(-1)(-1)^{n-m-1}}{\mu_m \cdot \mu_{m+1} \cdots \mu_n} \nabla^{n-m} (\varrho_n(x) \Delta^n y(x)) \\ &= \frac{(-1)^{n-m} \mu_0 \cdot \mu_1 \cdots \mu^{m-1}}{\mu_0 \cdot \mu_1 \cdots \mu^{m-1} \cdot \mu_m \cdot \mu_{m+1} \cdots \mu_n} \Delta^n y_n(x) \nabla^{n-m} (\varrho_n(x)) \\ &= \frac{(-1)^m \mu_0 \cdot \mu_1 \cdots \mu^{m-1}}{(-1)^n \mu_0 \cdot \mu_1 \cdots \mu_n} \Delta^n y_n(x) \nabla^{n-m} (\varrho_n(x)) \\ &= \frac{(-1)^m \prod_{k=0}^{m-1} \mu_k}{(-1)^n \prod_{k=0}^n \mu_k} \Delta^n y_n(x) \nabla^{n-m} (\varrho_n(x)) \\ &= (-1)^m \prod_{k=0}^{m-1} \mu_k \frac{\Delta^n y_n(x)}{A_{nn}} \nabla^{n-m} (\varrho_n(x)). \end{aligned} \quad (1.27)$$

D'autre part, $\mu_0 \cdot \mu_1 \cdots \mu^{m-1} = \prod_{k=0}^{m-1} \mu_k = \prod_{k=0}^{m-1} \left(\lambda + k\tau' + k(k-1) \frac{\sigma''}{2} \right)$ du fait que $\mu_n = \lambda + n\tau' + n(n-1) \frac{\sigma''}{2}$;

Pour $\lambda = \lambda_n = -n\tau' - n(n-1)\frac{\sigma''}{2}$, on obtient :

$$\begin{aligned}\mu_0 \cdot \mu_1 \dots \mu^{m-1} &= \prod_{k=0}^{m-1} \left(-n\tau' - n(n-1)\frac{\sigma''}{2} + k\tau' + k(k-1)\frac{\sigma''}{2} \right) \\ &= \prod_{k=0}^{m-1} \left((k-n)\tau' + \left(k(k-1) - n(n-1) \right) \frac{\sigma''}{2} \right).\end{aligned}$$

En prenant successivement $k=0$, $k=1$, $k=2$, on trouve :

$$\begin{aligned}-n\tau' - n(n-1)\frac{\sigma''}{2} &= -n\left(\tau' + (n-1)\frac{\sigma''}{2}\right), \\ (1-n)\tau' - n(n-1)\frac{\sigma''}{2} &= -(n-1)\left(\tau' + n\frac{\sigma''}{2}\right), \\ (2-n)\tau' + (2-n)(n-1)\frac{\sigma''}{2} &= -(n-2)\left(\tau' + (n+1)\frac{\sigma''}{2}\right).\end{aligned}$$

De sorte que $\forall k$, on a :

$$(k-n)\tau' + (k-n)(n-1)\frac{\sigma''}{2} = -(n-k)\left(\tau' + (n+k-1)\frac{\sigma''}{2}\right).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\mu_0 \cdot \mu_1 \dots \mu^{m-1} &= \prod_{k=0}^{m-1} -(n-k)\left(\tau' + \frac{n+k-1}{2}\sigma''\right) \\ &= (-1)^m \prod_{k=0}^{m-1} (n-k)\left(\tau' + \frac{n+k-1}{2}\sigma''\right)\end{aligned}$$

En utilisant le produit sur $(n-k)$ pour k variant de 0 à $m-1$, on à :

$$\mu_0 \cdot \mu_1 \dots \mu^{m-1} = \prod_{k=0}^{m-1} \mu_k = (-1)^m \frac{n!}{(n-m)!} \prod_{k=0}^{m-1} \left(\tau' + \frac{n+k-1}{2}\sigma''\right). \quad (1.28)$$

En introduisant (1.28) dans (1.27), on obtient :

$$\begin{aligned}\varrho_m(x)v_{mn}(x) &= (-1)^m (-1)^m \frac{n!}{(n-m)!} \prod_{k=0}^{m-1} \left(\tau' + \frac{n+k-1}{2}\sigma''\right) \frac{\Delta^n y_n(x)}{A_{nn}} \nabla^{n-m} \left(\varrho_n(x)\right) \\ &= \frac{n!}{(n-m)!} \prod_{k=0}^{m-1} \left(\tau' + \frac{n+k-1}{2}\sigma''\right) \frac{\Delta^n y_n(x)}{A_{nn}} \nabla^{n-m} \left(\varrho_n(x)\right) \\ &= A_{mn} B_n \nabla^{n-m} \left(\varrho_n(x)\right),\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}A_{mn} &= \frac{n!}{(n-m)!} \prod_{k=0}^{m-1} \left(\tau' + \frac{n+k-1}{2}\sigma''\right) \\ B_n &= \frac{\Delta^n y_n(x)}{A_{nn}} \quad \text{et} \quad A_{nn} = (-1)^n \prod_{k=0}^{n-1} \mu_k.\end{aligned}$$

□

Ainsi, en particulier, pour $m = 0$, on obtient une expression explicite pour $y_n(x)$:

$$y_n(x) = \frac{B_n}{\varrho(x)} \nabla^n (\varrho_n(x)). \quad (1.29)$$

Par conséquent, les solutions polynomiales de (1.10) sont déterminées par (1.29) jusqu'au facteurs de normalisation B_n

Ces solutions correspondent aux valeurs

$$\lambda = \lambda_n = -n\tau' - \frac{1}{2}n(n-1)\sigma''.$$

En utilisant (1.5) et (1.22), on peut aussi écrire (1.29) sous la forme :

$$y_n(x) = \frac{B_n}{\varrho(x)} \Delta^n (\varrho_n(x-n)) = \frac{B_n}{\varrho(x)} \Delta^n \left[\varrho(x) \prod_{k=0}^{n-1} \sigma(x-k) \right]. \quad (1.30)$$

L'équation (1.25) est analogue aux différences finies de la formule de Rodrigues pour les polynômes orthogonaux classiques et leurs dérivées.

La formule de Rodrigues pour les polynômes $y_n(x)$ et leurs différences $\Delta y_n(x)$ conduisent à la relation entre $\Delta y_n(x)$ et les polynômes eux-mêmes.

Pour trouver cela, il suffit de remarquer que si $m = 1$ dans (1.23) on a $A_{1n} = -\varrho_n$ et selon (1.22), on a $[\varrho_1(x)]_{n-1} = \varrho_n(x)$.

En fait,

$$\begin{aligned} \varrho_1(x) &= \sigma(x+1)\varrho_n(x+1); \quad \text{d'après (1.22)} \\ \text{et, } \frac{\sigma(x+1)\varrho(x+1)}{\varrho_n(x)} &= \tau_n(x) + \sigma(x); \quad \text{d'après (1.21)} \\ [\varrho_1(x)]_{n-1} &= \varrho_1(x+n-1) \prod_{k=1}^{n-1} \sigma(x+k), \quad \text{d'après (1.22)} \\ &= \varrho(x+n) \prod_{k=1}^n \sigma(x+k) \\ &= \varrho_n(x). \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \Delta y_n(x) &= -\lambda_n \frac{B_n}{\varrho_1(x)} \nabla^{n-1} (\varrho_n(x)) \\ &= -\lambda_n \frac{B_n \bar{B}_{n-1}}{\bar{B}_{n-1} \varrho_1(x)} \nabla^{n-1} (\varrho_1(x))_{n-1} \\ &= -\lambda_n \frac{B_n}{\bar{B}_{n-1}} \bar{y}_{n-1}(x). \end{aligned} \quad (1.31)$$

Ici, le polynôme $\bar{y}_n(x)$ est obtenu en remplaçant $\varrho(x)$ par $\varrho_1(x)$ dans la formule pour $y_n(x)$ et \bar{B}_n est la constante de normalisation de \bar{y}_n dans la formule de Rodrigues.

En utilisant (1.25), avec $m = n-1$, on peut facilement calculer les coefficients a_n et b_n des puissances les plus élevées de x dans leur expression

$$y_n(x) = a_n x^n + b_n x^{n-1} + \dots$$

Dans cet objectif, on calcule d'abord la $(n-1)$ ^{ième} différence $\Delta^{n-1}(x^n)$ qui est un polynôme du premier degré.

On a :

$$\Delta^{n-1}(x^n) = \alpha_n(x + \beta_n),$$

où α_n et β_n sont des constantes.

Pour déterminer α_n et β_n , on observe que $\Delta^n(x^n) = \Delta[\alpha_n(x + \beta_n)] = \alpha_n$.

D'où

$$\begin{aligned} \alpha_{n+1}(x + \beta_{n+1}) &= \Delta^n(x^{n+1}) = \Delta^{n-1}(\Delta x^{n+1}) = \Delta^{n-1}[(x+1)^{n+1} - x^{n+1}] \\ &= \Delta^{n-1}\left[(n+1)x^n + \frac{1}{2}n(n+1)x^{n-1} + \dots\right] \\ &= (n+1)\alpha_n(x + \beta_n) + \frac{1}{2}n(n+1)\alpha_{n-1}. \end{aligned}$$

En identifiant les coefficients des puissances de x dans les deux membres de cette équation, on obtient :

$$\begin{aligned} \alpha_{n+1} &= (n+1)\alpha_n \\ \alpha_{n+1}\beta_{n+1} &= (n+1)\alpha_n\beta_n + \frac{1}{2}n(n+1)\alpha_{n-1}. \end{aligned}$$

Comme $\alpha_1 = 1$, la première équation donne $\alpha_n = n!$, d'où $\beta_{n+1} = \beta_n + \frac{1}{2}$.

Puisque $\beta_1 = 0$, on a $\beta_n = \frac{n-1}{2}$.

Donc,

$$\Delta^{n-1}(x^n) = n!\left(x + \frac{n-1}{2}\right)$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \Delta^{n-1}y_n(x) &= \Delta^{n-1}(a_n x^n + b_n x^{n-1}) + \dots \\ &= a_n \alpha_n (x + \beta_n) + b_n \alpha_{n-1} \\ &= n! a_n \left(x + \frac{1}{2}(n-1)\right) + (n-1)! b_n. \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\nabla \varrho_n(x) = \Delta \varrho_n(x-1) = \Delta[\sigma(x)\varrho_{n-1}(x)] = \tau_{n-1}(x)\varrho_{n-1}(x).$$

Par conséquent, si on prend $m = n-1$ dans (1.25), on obtient

$$A_{n-1,n} B_n \tau_n = n! a_n \left(x + \frac{1}{2}(n-1)\right) + (n-1)! b_n.$$

D'où

$$a_n = \frac{A_{n-1,n} B_n \tau'_{n-1}}{n} = B_n \prod_{k=0}^{n-1} \left[\tau' + \frac{n+k-1}{2} \sigma''\right]; \quad a_0 = B_0, \quad (1.32)$$

$$\frac{b_n}{a_n} = n \frac{\tau_{n-1}(0)}{\tau_{n-1}} - \frac{n-1}{2} = n \frac{\tilde{\tau}(0) + (n-1)\tilde{\sigma}'(0)}{\tilde{\tau}' + (n-1)\tilde{\sigma}''}. \quad (1.33)$$

1.3 Propriété d'orthogonalité

On va parler de l'orthogonalité de la solution polynomiale de (1.10) [13, 14, 15]. Il sera question d'écrire les équations pour $y_n(x)$ et $y_m(x)$ sous la forme auto-adjointe.

$$\begin{aligned}\Delta[\sigma(x)\varrho(x)\nabla y_n(x)] + \lambda_n\varrho(x)y_n(x) &= 0, \\ \Delta[\sigma(x)\varrho(x)\nabla y_m(x)] + \lambda_m\varrho(x)y_m(x) &= 0.\end{aligned}$$

Multipliant la première équation par $y_m(x)$ et la deuxième par $y_n(x)$, puis soustrayant la deuxième de la première, on obtient :

$$(\lambda_m - \lambda_n)\varrho(x)y_m(x)y_n(x) = \Delta[\sigma(x)\varrho(x)(y_m(x)\nabla y_n(x) - y_n(x)\nabla y_m(x))].$$

Si on prend $x = x_i$ et $x_{i+1} = x_i + 1$ et on somme sur les indices i pour lesquels $a \leq x_i \leq b-1$, on obtient ;

$$(\lambda_m - \lambda_n) \sum_i \varrho(x_i)y_m(x_i)y_n(x_i) = \sigma(x)\varrho(x) \left(y_m(x)\nabla y_n(x) - y_n(x)\nabla y_m(x) \right) \Big|_a^b.$$

L'expression $y_m\nabla y_n - y_n\nabla y_m$ est un polynôme en x . Donc sous les conditions frontières

$$\sigma(x)\varrho(x)x^k \Big|_{x=a}^{x=b} = 0 \quad (k = 0, 1, \dots), \quad (1.34)$$

les solutions polynomiales de (1.10) sont orthogonales sur l'intervalle $[a, b-1]$ avec le poids $\varrho(x)$.

$$\sum_{x_i=a}^{b-1} \varrho(x_i)y_m(x_i)y_n(x_i) = \delta_{mn}d_n^2. \quad (1.35)$$

On appelle les polynômes $y_n(x)$ **polynômes orthogonaux classiques de variable discrète** à condition que $]a, b[$ soit un intervalle sur l'axe réel et $\varrho(x)$ satisfasse (1.19) et (1.34).

Ils sont souvent considérés sous la condition supplémentaire $\varrho(x_i) \geq 0$ pour $a \leq x_i \leq b-1$.

Les polynômes $\Delta y_n(x)$ satisfont l'équation obtenue de celle de $y_n(x)$ en remplaçant $\varrho(x)$ par $\varrho_1(x) = \sigma(x+1)\varrho(x+1) = [\tau(x) + \sigma(x)]\varrho(x)$ et λ par $\mu_1 = \lambda + \tau'$.

La fonction $\varrho_1(x)$ satisfait évidemment une condition similaire à (1.33) :

$$\sigma(x)\varrho(x)x^k \Big|_{x=a}^{x=b} = 0 \quad (k = 0, 1, \dots).$$

D'où les polynômes $\Delta y_n(x)$ ont la propriété d'orthogonalité

$$\sum_{x_i=a}^{b-2} \Delta y_m(x_i)\Delta y_n(x_i)\varrho_1(x_i) = \delta_{mn}d_{1n}^2.$$

En procédant de manière similaire, on montre facilement que les polynômes $\Delta^k y_n(x)$ satisfont

$$\sum_{x_i=a}^{b-k-1} \Delta^k y_m(x_i) \Delta^k y_n(x_i) \varrho_k(x_i) = \delta_{mn} d_{kn}^2. \quad (1.36)$$

Démonstration.

$$\Delta\left(\sigma(x)\varrho(x)\nabla y_n(x)\right) + \lambda_n \varrho(x) y_n(x) = 0 \quad (1.37)$$

$$\Delta\left(\sigma(x)\varrho(x)\nabla y_m(x)\right) + \lambda_m \varrho(x) y_m(x) = 0 \quad (1.38)$$

Multiplions les équations (1.37) et (1.38) respectivement par $y_m(x)$ et $y_n(x)$ pour avoir :

$$\Delta\left(\sigma(x)\varrho(x)y_m(x)\nabla y_n(x)\right) + \lambda_n \varrho(x) y_m(x) y_n(x) = 0 \quad (1.39)$$

$$\Delta\left(\sigma(x)\varrho(x)y_n(x)\nabla y_m(x)\right) + \lambda_m \varrho(x) y_n(x) y_m(x) = 0. \quad (1.40)$$

(1.40)- (1.39) donne :

$$(\lambda_m - \lambda_n) \varrho(x) y_m(x) y_n(x) = \Delta\left(\sigma(x)\varrho(x)\left(y_m(x)\nabla y_n(x) - y_n(x)\nabla y_m(x)\right)\right).$$

En prenant, $x = x_i$, $x_i = x_{i+1}$ et en sommant sur l'indice i , on trouve :

$$(\lambda_m - \lambda_n) \sum_i y_m(x_i) y_n(x_i) \varrho(x_i) = \sum_i \Delta\left(\sigma(x_i)\varrho(x_i)\left(y_m(x_i)\nabla y_n(x_i) - y_n(x_i)\nabla y_m(x_i)\right)\right);$$

avec $a \leq x_i \leq b-1$

$y_m \nabla y_n - y_n \nabla y_m$ est un polynôme en x .

Avec les conditions frontières $\sigma(x)\varrho(x)x^k \Big|_{x=a, b} = 0$; ($k = 0, \dots$), on obtient les solutions polynomiales qui satisfont :

$$\sum_{x_i=a}^{b-1} y_m(x_i) y_n(x_i) \varrho(x_i) = \delta_{mn} d_n^2. \quad (1.41)$$

Lorsqu'on substitue $\varrho(x)$ par $\varrho_1(x) = \sigma(x+1)\varrho(x+1) = (\tau(x) + \sigma(x))\varrho(x)$ et λ par $\mu_1 = \lambda + \tau'$, $\varrho_1(x)$ satisfait la relation (1.41) :

$$\sigma(x)\varrho_1(x)x^k \Big|_{x=a, b-a} = 0; (k = 0, \dots).$$

L'orthogonalité se déduit :

$$\sum_{x_i=a}^{b-2} \Delta y_m(x_i) \Delta y_n(x_i) \varrho_1(x_i) = \delta_{mn} d_{1k}.$$

Ainsi le polynôme $\Delta^k y_n(x)$ satisfait :

$$\sum_{x_i=a}^{b-k-1} \Delta^k y_m(x_i) \Delta^k y_n(x_i) \varrho_k(x_i) = \delta_{mn} d_{kn}^2.$$

□

Si l'on considère $\varrho(a) > 0$ et

$$\begin{aligned} \sigma(x_i) > 0 & \quad \text{pour tout} & a+1 \leq x_i \leq b-1, \\ \sigma(x_i) + \tau(x_i) > 0 & \quad \text{pour tout} & a \leq x_i \leq b-2. \end{aligned} \quad (1.42)$$

il découle de (1.19) écrit sous la forme :

$$\frac{\varrho(x+1)}{\varrho(x)} = \frac{\sigma(x) + \tau(x)}{\sigma(x+1)}$$

et la forme explicite de $\varrho_k(x_i) > 0$ pour tout $a \leq x_i \leq b-k-1$ ($k = 0, 1, \dots$)

Il reste à choisir a et b pour satisfaire les conditions aux limites (1.34) et la condition de positivité sur $\varrho(x_i)$ sur l'intervalle $[a, b-1]$ d'orthogonalité. Si a est fini, alors par hypothèse $\varrho(a) > 0$; c'est-à-dire a est une racine de $\varrho(x)$.

Comme un changement linéaire de la variable $x \rightarrow x+1$ ne change pas le type de l'équation, il est toujours possible, si $\varrho(x) \neq \text{constante}$, de prendre $\varrho(0) = 0$. Autrement dit, on suppose que $a = 0$. Si b est fini, on a par (1.19),

$$\sigma(b)\varrho(b) = [\sigma(b-1) + \tau(b-1)]\varrho(b-1).$$

Comme $\varrho(b-1) > 0$, on a

$$\sigma(b-1) + \tau(b-1) = 0. \quad (1.43)$$

Lorsque $b = +\infty$, la condition aux limites (1.34) sera satisfaite si

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^k \varrho(x) = 0 \quad (k = 0, 1, \dots).$$

Une remarque similaire s'applique lorsque $a = -\infty$.

Pour calculer les carrés des normes d_n^2 , on établit d'abord le lien entre les carrés des normes d_{kn}^2 et $d_{k+1,n}^2$, où

$$d_{kn}^2 = \sum_{x_i=a}^{b-k-1} v_{kn}^2(x_i) \varrho_k(x_i), \quad d_{0n}^2 = d_n^2, \quad v_{kn}(x) = \Delta^k y_n(x).$$

Pour ce faire, on écrit l'équation aux différences pour $v_{kn}(x)$,

$$\Delta [\sigma(x) \varrho_k(x) \nabla v_{kn}(x)] + \mu_k \varrho_k(x) v_{kn}(x) = 0,$$

où $\mu_{kn} = \mu_k(x) \Big|_{\lambda=\lambda_n} = \lambda_n - \lambda_k$.

Multiplier par $v_{kn}(x)$, et sommer sur les valeurs $x = x_i$, pour lesquelles $a \leq x_i \leq b-k-1$,

$$\sum_i v_{kn}(x_i) \Delta [\sigma(x_i) \varrho_k(x_i) \nabla v_{kn}(x-i)] + \mu_{kn}(x) d_{kn}^2 = 0$$

On utilise la sommation par parties (1.7) et les équations

$$\Delta v_{kn}(x) = v_{k+1,n}(x), \quad \sigma(x+1) \varrho_k(x+1) = \varrho_{k+1}(x).$$

pour trouver que

$$\sum_i v_{kn}(x_i) \Delta [\sigma(x_i) \varrho_k(x_i) \nabla v_{kn}(x-i)] = \sigma(x) \varrho_k(x) \nabla v_{kn}(x) \Big|_a^{b-k} - d_{k+1,n}^2.$$

Comme la première partie du membre de droite est nulle à cause des conditions aux limites (1.34), on a :

$$d_{kn}^2 = \frac{1}{\mu_{kn}} d_{k+1,n}^2.$$

D'où on obtient successivement

$$\begin{aligned} d_n^2 &\equiv d_{0n}^2 = \frac{1}{\mu_{0n}} d_{1n}^2 = \frac{1}{\mu_{0n}} \frac{1}{\mu_{1n}} d_{2n}^2 = \dots = \frac{d_{nn}^2}{\prod_{k=0}^{n-1} \mu_{kn}} \\ &= \frac{v_{nn}^2(x)}{\prod_{k=0}^{n-1} \mu_{kn}} S_n = (-1)^n A_{nn} B_n^2 S_n, \end{aligned} \quad (1.44)$$

où

$$S_n = \sum_{x_i=a}^{b-n-1} \varrho_n(x_i). \quad (1.45)$$

Pour $n = b - a - 1$ (dans le cas où $b - a = N$ est fini) la somme S_n contient seulement un seul terme et est donc facilement calculé

$$S_N - 1 = \varrho_{N-1}(a). \quad (1.46)$$

Pour calculer S_n pour $n < N - 1$ il suffit de pouvoir calculer le rapport S_{n-1}/S_n . Pour ce faire, on transforme l'expression (1.45) pour S_n en utilisant la connexion entre $\varrho_n(x)$ et $\varrho_{n-1}(x)$:

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_i \varrho_n(x_i) \\ &= \sum_i \sigma(x_i + 1) \varrho_{n-1}(x_i + 1) \\ &= \sum_i \sigma(x_i) \varrho_{n-1}(x). \end{aligned}$$

On développe $\sigma(x)$ en puissances du polynôme du premier degré $\tau_{n-1}(x)$:

$$\sigma(x) = A\tau_{n-1}^2 + B\tau_{n-1}(x) + C.$$

Par suite, en utilisant l'équation pour $\varrho_{n-1}(x)$ et en sommant par parties, on obtient :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_i [A\tau_{n-1}(x_i) + B] \tau_{n-1}(x_i) + CS_{n-1} \\ &= \sum_i [A\tau_{n-1}(x_i) + B] \Delta[\sigma(x_i) \varrho_{n-1}(x_i)] + CS_{n-1} \\ &= - \sum_i \sigma(x_i + 1) \varrho_{n-1}(x_i + 1) \Delta[A\tau_{n-1}(x_i) + B] + CS_{n-1} \\ &= -A\tau'_n S_n + CS_{n-1}. \end{aligned}$$

D'où

$$\frac{S_{n-1}}{S_n} = \frac{1 + A\tau'_{n-1}}{C} = \frac{1 + \sigma''/(2\tau'_{n-1})}{\sigma(x_n^*)}, \quad (1.47)$$

où x_n^* est la racine de l'équation $\tau_{n-1}(x) = 0$. On utilise les équations $\sigma'' = 2A(\tau'_{n-1})^2$. A l'aide de la formule (1.44)-(1.47), on obtient finalement :

$$d_n^2 = (-1)^n A_{nn} B_n^2 \varrho_{N-1}(a) \prod_{k=n+1}^{N-1} \left[\frac{1 + \sigma''/(2\tau'_{n-1})}{\sigma(x_n^*)} \right], \quad (1.48)$$

où $N = b - a$, $\tau'_{k-1} = \tau' + (k-1)\sigma''$ et x_n^* est la racine de l'équation

$$\tau(x) + (k-1)\sigma'(x) + (k-1)\tau'(x) + \frac{1}{2}(k-1)^2\sigma'' = 0.$$

1.4 Solutions polynomiales des équations aux différences réelles

Écrivons l'équation (1.1) sous forme

$$(ex^2 + 2fx + g)(\Delta^2 y_n)(x) + (2\varepsilon x + \gamma) + (\Delta y_n)(x) = n(e(n-1) + 2\varepsilon)y_n(x+1), [11] \quad (1.49)$$

pour $n = 0, 1, 2, \dots$ avec $e, f, g, \varepsilon, \gamma \in \mathbb{R}$. Cette équation aux différences peut aussi être écrite sous la forme

$$\left(e(x-1)^2 + 2f(x-1) + g\right)(\Delta(\nabla y_n))(x) + \left(2\varepsilon(x-1) + \gamma\right)(\nabla y_n)(x) = n(e(n-1) + 2\varepsilon)y_n(x),$$

ou sous la forme

$$C(x)y_n(x+1) - \left(C(x) + D(x)\right)y_n(x) + D(x)y_n(x-1) = \left(e(n-1) + 2\varepsilon\right)y_n(x), \quad (1.50)$$

pour $n = 0, 1, 2, \dots$ où $C(x) = e(x-1)^2 + 2f(x-1) + g$ et $D(x) = C(x) - 2\varepsilon(x-1) - \gamma$. On cherche les solutions polynomiales moniques de la forme

$$y_n(x) = \sum_{k=0}^n a_{n,k} \binom{x+c}{k}, \quad a_{n,n} = n!, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.51)$$

où les coefficients satisfont la relation de récurrence à deux termes :

$$(n-k)\left(e(n+k-1) + 2\varepsilon\right)a_{n,k} - \left(e(k-1-c)^2 + 2f(k-1-c) + g\right)a_{n,k+1} = 0 \quad (1.52)$$

pour $k = n-1, n-2, n-3, \dots, 0$, implique que c satisfait

$$e(c+1)^2 - 2f(c+1) + g = -2\varepsilon(c+1) + \gamma \quad (1.53)$$

Si on n'obtient pas c à partir de cette équation, alors on peut recourir à la représentation :

$$y_n(x) = \sum_{k=0}^n b_{n,k} \binom{x+c+k-2}{k}, \quad b_{n,n} = n!, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.54)$$

où les coefficients satisfont la relation de récurrence à deux termes

$$(n-k)\left(e(n+k-1) + 2\varepsilon\right)b_{n,k} + \left(ek^2 + 2(ec - f + \varepsilon)k + 2\varepsilon c - \gamma\right)b_{n,k+1} = 0 \quad (1.55)$$

pour $k = n-1, n-2, n-3, \dots, 0$, implique que c satisfait $ec^2 - 2fc + g = 0$.

On obtient les solutions polynomiales moniques $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ satisfaisant la relation de récurrence à trois termes :

$$y_{n+1}(x) = (x - c_n)y_n(x) - d_n y_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (1.56)$$

avec $y_0(x) = 1$ et $y_1(x) = x - c_0$ comme valeurs initiales où

$$c_n = \frac{n(e(n-1) + 2\varepsilon)(2(e-f) + \varepsilon) + (e-\varepsilon)(\gamma - 2\varepsilon)}{2(e(n-1) + \varepsilon)(en + \varepsilon)}, \dots n = 0, 1, 2, \dots$$

et

$$d_n = -\frac{n(e(n-2) + 2\varepsilon)}{4(d(2n-3) + 2\varepsilon)(e(n-1) + \varepsilon)^2(e(2n-1) + 2\varepsilon)} \\ \times \left[e(n-1)^2(e(n-1) + 2\varepsilon)^2 + 2(n-1)(e(n-1) + 2\varepsilon)(2eg + 2f(\varepsilon - f) - e\gamma) \right. \\ \left. + 4\varepsilon(g\varepsilon - f\gamma) + e\gamma^2 \right], \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Pour écrire l'équation (1.49) sous la forme auto-adjointe, nous avons besoin de transformer la relation (1.7) comme suit :

$$\Delta(f_1(x)f_2(x)) = f_1(x+1)\Delta f_2(x) + f_2(x)\Delta f_1(x). \quad (1.57)$$

En utilisant (1.57), l'équation (1.49) multipliée par $\omega(x+1)$ peut s'écrire sous la forme auto-adjointe :

$$\Delta(\omega(x)\varphi(x-1)\Delta y_n(x)) = \lambda_n\omega(x+1)y_n(x+1),$$

ce qui traduit que $\omega(x)$ satisfait l'équation de Pearson

$$\Delta(\omega(x)\varphi(x-1)) = \omega(x+1)\Psi(x),$$

où $\varphi(x) = ex^2 + 2fx + g$ et $\Psi(x) = 2\varepsilon x + \gamma$.

Cette équation peut s'écrire comme

$$\omega(x+1)(\varphi(x) - \Psi(x)) = \omega(x)\varphi(x-1),$$

ce qui conduit, en utilisant (1.50), à l'équation aux différences de Pearson :

$$\frac{\omega(x)}{\omega(x+1)} = \frac{\varphi(x)}{\Psi(x)} = \frac{D(x+1)}{C(x)}, \quad (1.58)$$

où $C(x)$ et $D(x)$ sont donnés par (1.50).

La relation d'orthogonalité est

$$\sum_{v=0}^N \omega(A+v)y_m(A+v)y_n(A+v) = 0, \quad m \neq n, \quad m, n \in \{0, 1, 2, \dots, N\} \quad (1.59)$$

avec les conditions frontière

$$\omega(A-1)\varphi(A-2) = 0 \quad \text{et} \quad \omega(A+N)\varphi(A+N-1) = 0 \quad (1.60)$$

pour $N \in \{1, 2, 3, \dots\}$ ou $N \rightarrow \infty$.

Pour $N \rightarrow \infty$, on doit avoir que les moments

$$\sum_{x=0}^{\infty} \omega(x)x^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

sont tous finis comme on est en mesure de calculer les normes pour tous les polynômes.

Chapitre 2

Polynômes de Kravchuk

2.1 Distribution binomiale

Définition 2.1. 1. Une *variable aléatoire (va, variable stochastique)* [22, 20, 19] sur un espace de probabilité (Ω, \mathcal{A}, P) est une fonction $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ qui est mesurable, c'est-à-dire $(X \in A)$ est un événement pour toute partie mesurable $A \subset \mathbb{R}$.

On peut montrer que la condition est équivalente à $(X \leq x)$ est un événement pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ici par définition $(X \in A) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\} = X^{-1}(A) \subset \Omega$
 $(X \leq x) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} = X^{-1}(]-\infty, x])$.

2. La *loi de probabilité (fonction de probabilité)* d'une va X est sa mesure de probabilité induite sur \mathbb{R} par X , notamment la fonction

$$P(X \in A), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

3. La *fonction de distribution (fdi, fonction de répartition, fonction de probabilités cumulatives)* d'une variable X est la fonction $F = F_X$:

$$F(x) = P(X \leq x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

4. X est une va **discrète** si X ne prend qu'un nombre dénombrable de valeurs, dans le sens : il existe un ensemble discret (un ensemble dénombrable fini ou infini) $S \subset \mathbb{R}$ tel que

$$P(X \in S) = 1.$$

La *densité discrète (fonction de densité, fde, fonction de masse de probabilité, fonction des fréquences)* de X est la fonction barres $p_X = p$:

$$p(k) = P(X = k), \quad k \in S.$$

On montre les propriétés suivantes [22, 20, 19] :

Propriété 2.1. 1. La loi de probabilité d'une va X est totalement déterminée par sa densité, au cas où il en existe :

$$P(X \in A) = \begin{cases} \sum_{k \in A} P(X = k) = \sum_{k \in A} p(k); & \text{si } X \text{ est discrète} \\ \int_A p(x) dx & \text{si } X \text{ est continue.} \end{cases}$$

2. En particulier, la densité détermine aussi la fonction de distribution :

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} \sum_{k \in A} p(k); & \text{si } X \text{ est discrète} \\ \int_{-\infty}^x p(x)dx; & \text{si } X \text{ est continue.} \end{cases}$$

3. La densité peut s'obtenir de la fonction de distribution :

(a) X discrète : $p(k) = F(k) - F(k - 1) = P(X = k)$

(b) X est continue : $p(x) = DF(x)$, si la dfi F est différentiable.

4. Pour une va continue à densité $p(x)$ on a :

(a) X discrète : $P(X = x) = 0$

(b) X est continue : $P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = \int_a^b p(x)dx = F(b) - F(a)$.

5. Une fonction barres $p(k)$, $k \in S$, sur un ensemble discret S en \mathbb{R} est une densité discrète ssi

(a) $p(k) \geq 0$

(b) $\sum_{k \in S} p(k) = 1$.

6. Une fonction intégrable $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une densité continue ssi

(a) $p(x) \geq 0$

(b) $\int_{\mathbb{R}} p = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1$.

Définition 2.2. *La loi binomiale* $b(n, p)$.

Une va X a la distribution binomiale de paramètres n et p ($n > 0$ entier, $0 < p < 1$), notée $X \sim b(n, p)$, ssi cette va a une quelconque des propriétés équivalentes suivantes [22] :

1. X est le nombre de succès après n répétitions indépendantes d'une expérience S/E sous une probabilité de succès égale à p
2. X est le nombre de succès dans un échantillon au hasard de taille n d'une population à proportion de succès p , sous échantillonnage avec remise.
3. X prend les valeurs $k = 0, 1, \dots, n$ avec la densité

$$p(k) = P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}; \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Propriété 2.2. Les **moyenne, variance et fonction génératrice de moment** d'une distribution binomiale $b(n, p)$ sont respectivement données par : np , $np(1-p)$, et $(q + pe^t)^n$ avec $(q = 1 - p)$.

2.2 Séries hypergéométriques

Définition 2.3. Notations. Soit $n, k \in \mathbb{N}$.

- la factorielle : $n! = n(n - 1) \dots 2 \cdot 1$, $0! = 1$

- la factorielle montante : $(n)_k = \underbrace{n(n+1)\dots(n+k-1)}_{k \text{ facteurs}}$, $(n)_0 = 1$
- le coefficient binomial : $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}$, $\binom{n}{0} = 1$

Définition 2.4. Une série $\sum_{k \geq 0} t_k$ est hypergéométrique si le rapport de deux termes consécutifs est fonction rationnelle de la variable de sommation k [8] :

$$\frac{t_{k+1}}{t_k} = \frac{p(k)}{q(k)}; \text{ avec } p \text{ et } q \text{ des polynômes}$$

La forme standard d'une série hypergéométrique généralisée est :

$${}_rF_s \left(\begin{matrix} a_1, a_2, \dots, a_r \\ b_1, b_2, \dots, b_s \end{matrix} ; z \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1)_k (a_2)_k \dots (a_r)_k z^k}{(b_1)_k (b_2)_k \dots (b_s)_k k!}$$

où $(a)_k := \begin{cases} a(a+1)(a+2)\dots(a+k-1); & k = 1, 2, \dots \\ 1; & k = 0 \\ ((a-1)(a-2)\dots(a-k))^{-1}; & k = -1, -2, \dots \\ a \notin \{1, 2, \dots, -k\} \end{cases}$

Définition 2.5. Une des plus simples et plus importantes fonctions spéciales est la fonction Gamma dont la connaissance des propriétés est requise pour l'étude des séries hypergéométriques. La fonction Γ est définie selon Euler par :

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt; \quad \operatorname{Re}(z) > 0$$

Elle a les propriétés suivantes :

$$\Gamma(1) = 1 \tag{2.1}$$

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \tag{2.2}$$

$$\Gamma(k+1) = k!; \quad \forall k \in \mathbb{N}^* \tag{2.3}$$

Démonstration. D'abord, $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = \left[-e^{-t} \right]_0^{+\infty} = 1$. D'où (2.1)

Ensuite, $\Gamma(z+1) = \int_0^{+\infty} t^z e^{-t} dt$.

Par parties, on a : $\Gamma(z+1) = \left[-e^{-t} t^z \right]_0^{+\infty} + z \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt = z\Gamma(z)$. D'où (2.2)

Enfin, la relation (2.3) est vraie pour $k=1$ et par induction, considérons $\Gamma(k) = (k-1)!$ comme hypothèse de récurrence pour avoir :

$$\begin{aligned} \Gamma(k+1) &= k\Gamma(k); \text{ d'après (2.2)} \\ &= k(k-1)!; \text{ d'après l'hypothèse)} \\ &= k!; \text{ ; D'où (2.3).} \end{aligned}$$

□

On montre aussi que

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}. \quad (2.4)$$

Exemple 2.1. La représentation intégrale classique des séries de Gauss est donnée par l'expression

$${}_2F_1 \left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} ; z \right) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)\Gamma(a)} \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}(1-zt)^{-b} dt; \quad \text{où}$$

$\operatorname{Re}(a) > 0$, $\operatorname{Re}(c-a) > 0$ et $|z| < 1$.

Cette fonction possède les propriétés suivantes [3] :

1.

$$\frac{d}{dz} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} \alpha, \beta \\ \gamma \end{matrix} ; z \right) = \frac{\alpha\beta}{\gamma} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} \alpha+1, \beta+1 \\ \gamma+1 \end{matrix} ; z \right).$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} \alpha, \beta \\ \gamma \end{matrix} ; z \right) &= \frac{\alpha\beta}{\gamma} + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)z}{\gamma(\gamma+1)} \\ &\quad + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)z^2}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)2!} + \dots \\ &= \frac{\alpha\beta}{\gamma} \left[1 + \frac{(\alpha+1)(\beta+1)z}{(\gamma+1)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)(\beta+1)(\beta+2)z^2}{(\gamma+1)(\gamma+2)2!} + \dots \right] \\ &= \frac{\alpha\beta}{\gamma} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha+1)_k(\beta+1)_k z^k}{(\gamma+1)_k k!} \\ &= \frac{\alpha\beta}{\gamma} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} \alpha+1, \beta+1 \\ \gamma+1 \end{matrix} ; z \right) \end{aligned}$$

□

2.

$${}_2F_1 \left(\begin{matrix} \alpha, \beta+1 \\ \gamma \end{matrix} ; z \right) - {}_2F_1 \left(\begin{matrix} \alpha, \beta \\ \gamma \end{matrix} ; z \right) = \frac{\alpha}{\gamma} z {}_2F_1 \left(\begin{matrix} \alpha+1, \beta+1 \\ \gamma+1 \end{matrix} ; z \right).$$

Démonstration. La différence ${}_2F_1 \left(\begin{matrix} \alpha, \beta+1 \\ \gamma \end{matrix} ; z \right) - {}_2F_1 \left(\begin{matrix} \alpha, \beta \\ \gamma \end{matrix} ; z \right)$ a pour développement

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{\alpha(\beta+1)}{\gamma} - \frac{\alpha\beta}{\gamma} \right] \frac{z}{1!} + \left[\frac{\alpha(\alpha+1)(\beta+1)(\beta+2)}{\gamma(\gamma+1)} - \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)} \right] \frac{z^2}{2!} + \dots \\
= & \frac{\alpha z}{\gamma} + \frac{2\alpha(\alpha+1)(\beta+1)z^2}{\gamma(\gamma+1)2!} + \frac{3\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(\beta+1)(\beta+2)z^3}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)3!} + \dots \\
= & \frac{\alpha z}{\gamma} \left[1 + \frac{(\alpha+1)(\beta+1)z}{(\gamma+1)1!} + \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)(\beta+1)(\beta+2)z^2}{(\gamma+1)(\gamma+2)2!} + \dots \right] \\
= & \frac{\alpha}{\gamma} z {}_2F_1 \left(\begin{matrix} \alpha+1, \beta+1 \\ \gamma+1 \end{matrix} ; z \right)
\end{aligned}$$

□

3.

$$\begin{aligned}
\left(1 - \frac{n+b}{n+c} z \right) {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -n, b \\ c \end{matrix} ; z \right) &= {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -n-1, b \\ c \end{matrix} ; z \right) \\
&\quad - \frac{(c-b)n}{(n+c)c} z {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -n+1, b \\ c+1 \end{matrix} ; z \right).
\end{aligned} \tag{2.5}$$

4. Soit $F_n = {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -n, b \\ c \end{matrix} ; z \right)$ et on note ${}_2F_1 \left(\begin{matrix} -n-1, b+1 \\ c \end{matrix} ; z \right)$ par $F_{n+1}(b+1)$, ${}_2F_1 \left(\begin{matrix} -n+1, b+1 \\ c-3 \end{matrix} ; z \right)$ par $F_{n-1}(b+1, c-3)$ et ainsi de suite.
Alors

$$(n+c-1)F_n = nF_{n-1} + (c-1)F_n(c-1) \tag{2.6}$$

$$(bz+nz-n-c)F_n(c+1) = -cF_{n+1} + n(z-1)F_{n-1}(c+1) \tag{2.7}$$

$$(z-1)\left(z - \frac{c}{b+n}\right)F_n = \frac{c-z(c+n)}{b+n}F_{n+1} + \frac{n(c-b)(c-b+1)}{(b+n)c(c+1)}z^2F_{n-1}(c+2) \tag{2.8}$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{-n(n+1)}{1+b+c} + (c+3n)z - (b+n)z^2 \right) F_n &= (c+n)\left(z - \frac{n}{1+b-c}\right)F_{n+1} \\
&\quad + \frac{n(c-1)}{1+b-c}(z-1)^2F_{n-1}(c-1)
\end{aligned} \tag{2.9}$$

$$\begin{aligned}
(z-1)\left((n+1)(b(z-1)+nz)z + c(z-1)(z(b+n)-c-1) \right) F_n & \tag{2.10} \\
= -\left(c^2(z-1)^2 + nz(z(n+1)-b) + c(1-(n+2)z+(2n+1)z^2) \right) F_{n+1} \\
&\quad + \frac{n(c-b)_3}{(c)_3}(c+n+1)z^3F_{n-1}(c+3)
\end{aligned}$$

$$(1-z)D_1F_1 = D_2F_{n+1} \frac{n(c-b)_4(n+c+1)(n+c+2)}{(c)_4} z^4F_{n-1}(c+4) \tag{2.11}$$

où

$$\begin{aligned}
D_1 &= c^3(z-1)^2 - c^2(z-1)^2(bz + nz - 3) \\
&\quad - c \left((n+4 + (2n+3)b)z - (2+3n+n^2 + (4n+6)b)z^2 + (b+n)(2n+3)z^3 - 2 \right) \\
&\quad - c(n+1)z \left(n(n+2)z^2 + b(2-2(n+2)z + (n+2)z^2) \right) \\
D_2 &= -c^3(z-1)^3 - c^2 \left((n+9)z - 3(n+3)z^2 + 3(n+1)z^3 - 3 \right) \\
&\quad + c \left(2 - (6+n+2bn)z + (6+4(b+1)n+n^2)z^2 - (2+6n-3n^2)z^3 \right) \\
&\quad - nz \left(b^2z + (+3n+n^2)z^2 + b(2-5z-2nz) \right).
\end{aligned}$$

2.3 Polynômes de Kravchuk

Les polynômes de Kravchuk, appelés aussi de Krawtchouk (nom ukrainien écrit comme "Кравчук") sont des polynômes orthogonaux discrets associés à la distribution binomiale. Ils ont été introduits par Mikhail Kravchuk en 1929. [2]

Nous allons découvrir les expressions explicites pour les fonctions de poids $\varrho(x)$ par rapport auxquelles ces polynômes orthogonaux classiques de variable discrète sont orthogonaux. Pour cette raison, nous retranscrivons l'équation aux différences (1.19) sous la forme :

$$\frac{\varrho(x+1)}{\varrho(x)} = \frac{\sigma(x) + \tau(x)}{\sigma(x+1)}. \quad (2.12)$$

En effet, l'équation (1.19) dite de Pearson est :

$$\begin{aligned}
&\Delta \left(\sigma(x)\varrho(x) \right) = \tau(x)\varrho(x) \\
\Leftrightarrow &\sigma(x)\Delta\varrho(x) + \varrho(x+1)\Delta\sigma(x) = \tau(x)\varrho(x) \\
\Leftrightarrow &\sigma(x) \left[\varrho(x+1) - \varrho(x) \right] + \varrho(x+1) \left[\sigma(x+1) - \sigma(x) \right] = \tau(x)\varrho(x) \\
\Leftrightarrow &\varrho(x+1)\sigma(x+1) = \left[\sigma(x) + \tau(x) \right] \varrho(x) \\
\Leftrightarrow &\frac{\varrho(x+1)}{\varrho(x)} = \frac{\sigma(x) + \tau(x)}{\sigma(x+1)}.
\end{aligned}$$

Il est ainsi facile de vérifier que la solution d'une équation aux différences

$$\frac{\varrho(x+1)}{\varrho(x)} = f(x)$$

pour laquelle le deuxième membre est exprimable comme un produit ou un quotient de deux fonctions, possède la propriété simple suivante :

Si $\varrho_1(x)$ et $\varrho_2(x)$ sont solutions des équations

$$\frac{\varrho_1(x+1)}{\varrho_1(x)} = f_1(x)$$

$$\frac{\varrho_2(x+1)}{\varrho_2(x)} = f_2(x)$$

alors la solution de l'équation

$$\frac{\varrho(x+1)}{\varrho(x)} = f(x)$$

avec $f(x) = f_1(x)f_2(x)$ est $\varrho(x) = \varrho_1(x)\varrho_2(x)$, et avec $f(x) = f_1(x)/f_2(x)$ est $\varrho(x) = \varrho_1(x)/\varrho_2(x)$.

Puisque le deuxième membre de (2.12) est une fonction rationnelle, sa solution peut être exprimée en termes des équations aux différences

$$\frac{\varrho(x+1)}{\varrho(x)} = \gamma + x \tag{2.13}$$

$$\frac{\varrho(x+1)}{\varrho(x)} = \gamma - x \tag{2.14}$$

$$\frac{\varrho(x+1)}{\varrho(x)} = \gamma \tag{2.15}$$

où γ est une constante.

Comme $\gamma + x = \frac{\Gamma(\gamma + x + 1)}{\Gamma(\gamma + x)}$, une solution particulière de (2.13) a la forme $\varrho(x) = \Gamma(\gamma + x)$.

De manière similaire, en utilisant la fonction

$$\gamma - x = \frac{\Gamma(\gamma - x + 1)}{\Gamma(\gamma - x)} = \frac{1}{\Gamma[(\gamma + 1) - (x + 1)]} : \frac{1}{\Gamma(\gamma + 1 - x)},$$

on obtient une solution particulière de (2.14) : $\varrho(x) = \frac{1}{\Gamma(\gamma + 1 - x)}$.

Enfin, il est facile de vérifier que la solution particulière de (2.15) est $\varrho(x) = \gamma^x$; car $\gamma = \frac{\gamma^{x+1}}{\gamma^x}$.

Cherchons maintenant les solutions de (2.12) correspondant au degré 1 de $\sigma(x)$.

Soit $\sigma(x) = x$.

On considère le cas suivant

$$\sigma(x) + \tau(x) = \mu(\gamma - x),$$

où μ et γ sont constants. Alors la solution de (2.12) est :

$$\varrho(x) = C \frac{\mu^x}{\Gamma(x+1)\Gamma(\gamma-x+1)}.$$

En effet,

$$\begin{aligned}
\frac{\varrho(x+1)}{\varrho(x)} &= \frac{\sigma(x) + \tau(x)}{\sigma(x+1)} \\
&= \frac{\mu(\gamma - x)}{x+1} \\
&= \frac{\mu^{x+1}(\gamma - x)\Gamma(\gamma - x)\Gamma(x+1)}{\mu^x(x+1)\Gamma(x+1)\Gamma(\gamma - x)} \\
&= \frac{\mu^{x+1}\Gamma(\gamma - x + 1)\Gamma(x+1)}{\mu^x\Gamma(x+2)\Gamma(\gamma - x)} \\
&= \frac{\mu^{x+1}}{\Gamma(x+2)\Gamma(\gamma - x)} \\
&= \frac{\mu^x}{\Gamma(x+1)\Gamma(\gamma - x + 1)}.
\end{aligned}$$

Par identification, à une constante C près, on a :

$$\varrho(x) = C \frac{\mu^x}{\Gamma(x+1)\Gamma(\gamma - x + 1)}.$$

Si on prend

$$a = 0, \quad b = N + 1, \quad C = q^N N!, \quad \gamma = N, \quad \mu = p/q \quad (p > 0, \quad q > 0, \quad p + q = 1),$$

les nombres $\varrho(x_i)$ deviennent la familière distribution binomiale de la théorie des probabilités telle que présentée à la section 2

$$\varrho(x_i) = \mathfrak{C}_N^i p^i q^{N-i}, \quad \mathfrak{C}_N^i = \frac{N!}{i!(N-i)!}. \quad (2.16)$$

Avec $B_n = (-1)^n q^n / n!$, les relations (1.29) et (1.29) donnent les polynômes appelés **polynômes de Kravchuk** que $\mathbf{K}_n(\mathbf{x}; \mathbf{p}, \mathbf{N})$.

C'est-à-dire

$$K_n(x; p, N) = \frac{(-1)^n q^n}{n! \binom{N}{x} p^x q^{N-x}} \nabla^n \left(\varrho(x+n) \prod_{k=1}^n \sigma(x+k) \right).$$

Les premiers polynômes de Kravchuk, représentés par la figure 2.1 ci-dessous, sont donc :

$$\begin{aligned}
K_0(x; p, N) &= 1, \\
K_1(x; p, N) &= \frac{(-1)q}{\binom{N}{x} p^x q^{N-x}} \nabla \left((x+1) \varrho(x+1) \right) = x - Np, \\
K_2(x; p, N) &= \frac{(-1)^2 q^2}{2! \binom{N}{x} p^x q^{N-x}} \nabla^2 \left((x+1)(x+2) \varrho(x+2) \right) \\
&= \frac{x^2}{2} + \left(p(N-1) + \frac{1}{2} \right) x + \frac{1}{2} p^2 N(N-1), \\
K_3(x; p, N) &= \frac{(-1)^3 q^3}{3! \binom{N}{x} p^x q^{N-x}} \nabla^3 \left((x+1)(x+2)(x+3) \varrho(x+3) \right) \\
&= \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2} \left(pN + 2p - 1 \right) x^2 + \left(\frac{p^2 N^2}{2} - 3 \frac{p^2}{2} + \frac{pN}{2} + p^2 - p + \frac{1}{3} \right) x \\
&\quad - \frac{p^3}{6} \left(N^3 - 3N^2 + 2N \right).
\end{aligned}$$

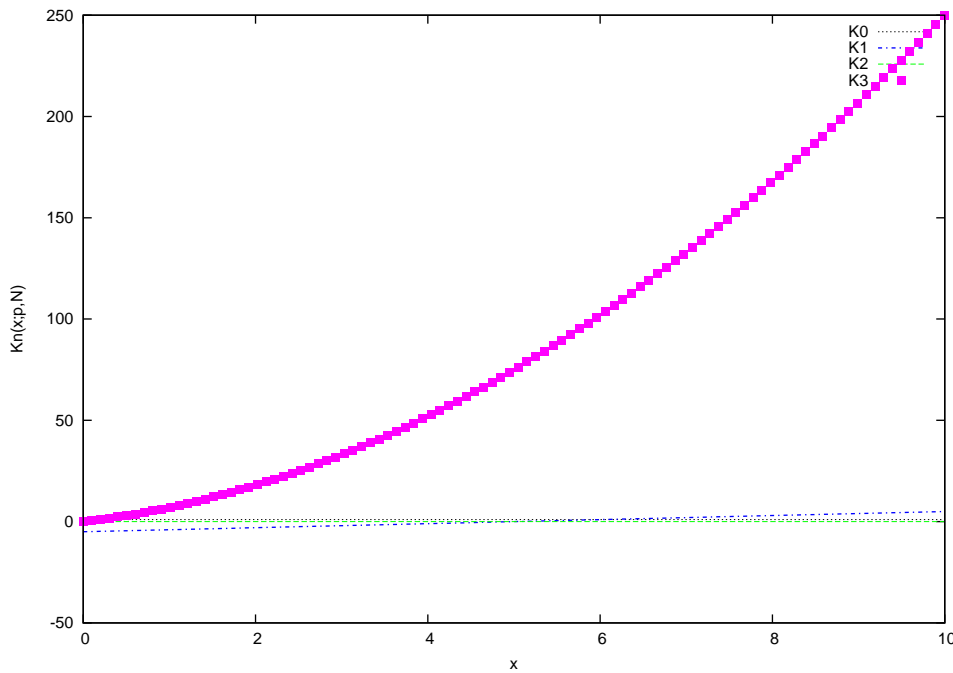


FIGURE 2.1 – Les quatre premiers polynômes de Kravchuk (pour $p=1/2$ et $N=10$)

À partir de (1.31), on obtient la formule des différences suivantes pour les polynômes de Kravchuk :

$$\Delta K_n(x; p, N) = K_{n-1}(x; p, N-1). \quad (2.17)$$

En effet, avec la donnée $\sigma(x) + \tau(x) = p/q(N - x)$, i.e $\tau' = -1 - p/q$, i.e $\lambda_n = n + np/q$. En utilisant (1.31) et (1.29), on a :

$$\Delta K_n(x; p, N) = -\lambda_n \frac{B_n}{\bar{B}_{n-1}} \bar{K}_{n-1}(x); \quad \text{où}$$

$$\begin{aligned} \bar{K}_{n-1}(x) &= \frac{B_n}{\varrho_1(x)} \nabla^{n-1} \varrho_{n-1}(x) \\ &= \frac{(-1)^{n-1} q^{n-1}}{(n-1)!(x+1)\varrho(x+1)} \nabla^{n-1} \varrho_{n-1}(x) \\ &= \frac{(-1)^{n-1} q^{n-1}}{(n-1)! N p \binom{x}{N-1} p^x q^{N-1-x}} \nabla^{n-1} \varrho_{n-1}(x) \\ \text{et } \bar{B}_{n-1} &= \frac{(-1)^{n-1} q^{n-1}}{(n-1)! N p}. \end{aligned}$$

D'où

$$\Delta K_n(x; p, N) = K_{n-1}(x; p, N-1).$$

2.3.1 Symétrie

Une mesure discrète

$$d\lambda_N = \sum_{k=1}^N \omega_k \delta(t - t_k) dt$$

est symétrique si $t_k = -t_{N+1-k}$, $\omega_k = \omega_{N+1-k}$ pour $k = 1, 2, \dots, N$. ([9]).

Considérons les propriétés de symétrie des polynômes orthogonaux de variable discrète qui proviennent de la symétrie de $\varrho(x)$.

On a :

$$K_n(x; p, N) = (-1)^n K_n(N - x; q, N); \quad p + q = 1, \quad (2.18)$$

$$K_n(x; p, N) = \frac{p^n}{n!} K_n(x; -N - p/q, N). \quad (2.19)$$

En utilisant la formule de Rodrigues, il est facile de trouver les valeurs des polynômes de Kravchuk aux extrémités de l'intervalle d'orthogonalité.

En effet, on a

$$K_n^{(0)}(0; p, N) = (-1)^k \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n.$$

En utilisant leurs propriétés de symétrie, on peut facilement trouver les expressions pour $K_n(x; p, N)$:

$$K_n(x; p, N) = \frac{N!}{n!(N-n)!} q^n.$$

Finalement, on observe que pour tous les polynômes $p_n(x)$ qui satisfont une relation d'orthogonalité de la forme

$$\sum_{i=0}^{N-1} p_n(x_i)p_m(x_i)q_i = d_n^2 \delta_{mn},$$

il existe une autre relation d'orthogonalité.

En effet, si on considère la matrice d'éléments

$$c_{mi} = \frac{p_n(x_i)\sqrt{q_i}}{d_n},$$

la propriété d'orthogonalité pour les polynômes $p_n(x_i)$ est équivalente à la propriété d'unitarité de la matrice C :

$$\sum_{i=0}^{N-1} c_{ni}c_{mi} = \delta_{mn}$$

D'où C satisfait aussi

$$\sum_{i=0}^{N-1} c_{nk}c_{nl} = \delta_{kl}$$

ce qui est équivalent à la relation d'orthogonalité duale pour les polynômes $p_n(x)$:

$$\sum_{n=0}^{N-1} p_n(x_k)p_n(x_l)\tilde{q}_n = \frac{1}{q_k}\delta_{kl},$$

où $\tilde{q}_n = \frac{1}{d_n^2}$.

On note que la relation d'orthogonalité duale pour les polynômes de Kravchuk ne conduit pas à un nouveau système de polynômes orthogonaux. C'est-à-dire que les polynômes de Kravchuk sont auto-duaux.

2.4 Définition générale

Définition 2.6. *De manière générale, pour toute puissance p et un entier positif N , on définit le polynôme de Kravchuk par [1] :*

$$K_n(x; p, N) = K_n(x) = \sum_{j=0}^n (-1)^j (p-1)^{n-j} \binom{x}{j} \binom{N-x}{n-j}, \quad n = 0, 1, \dots, N.$$

Propriété 2.3. *Les expressions alternatives suivantes sont à retenir pour ce type des polynômes de Kravchuk :*

- $K_n(x; p, N) = \sum_{j=0}^n (-p)^j (p-1)^{n-j} \binom{N-j}{n-j} \binom{x}{j}$.
- $K_n(x; p, N) = \sum_{j=0}^n (-1)^j p^{n-j} \binom{N-n+j}{j} \binom{N-x}{n-j}$.

- Pour tous entiers $i, k \geq 0$, on a (relation de symétrie) :

$$(p-1)^i \binom{N}{i} K_k(i; p, N) = (p-1)^k \binom{N}{k} K_i(k; p, N). \quad (2.20)$$

- Pour tous entiers positifs r, s , on a $\sum_{i=0}^n \binom{N}{i} (p-1)^i K_r(i; p, N) K_s(i; p, N) = p^N (p-1)^r \binom{N}{r} \delta_{r,s}$. (orthogonalité)
- La série génératrice des polynômes de Kravchuk est donnée ci-dessous, où z est une variable formelle :

$$(1 + (p-1)z)^{N-x} (1-z)^x = \sum_{n=0}^{\infty} K_n(x; p, N) z^n. \quad (2.21)$$

2.5 Cas particulier

Lorsque $p = 2$, les premiers polynômes de Kravchuk, dont la représentation graphique est donnée à la figure 2.2, sont :

$$K_0(x; 2, N) = 1,$$

$$K_1(x; 2, N) = -2x + N,$$

$$K_2(x; 2, N) = 2x^2 - 2Nx + \binom{N}{2} \quad K_3(x; 2, N) = -\frac{4}{3}x^3 + 2Nx^2 - (N^2 - N + \frac{2}{3})x + \binom{N}{3}.$$

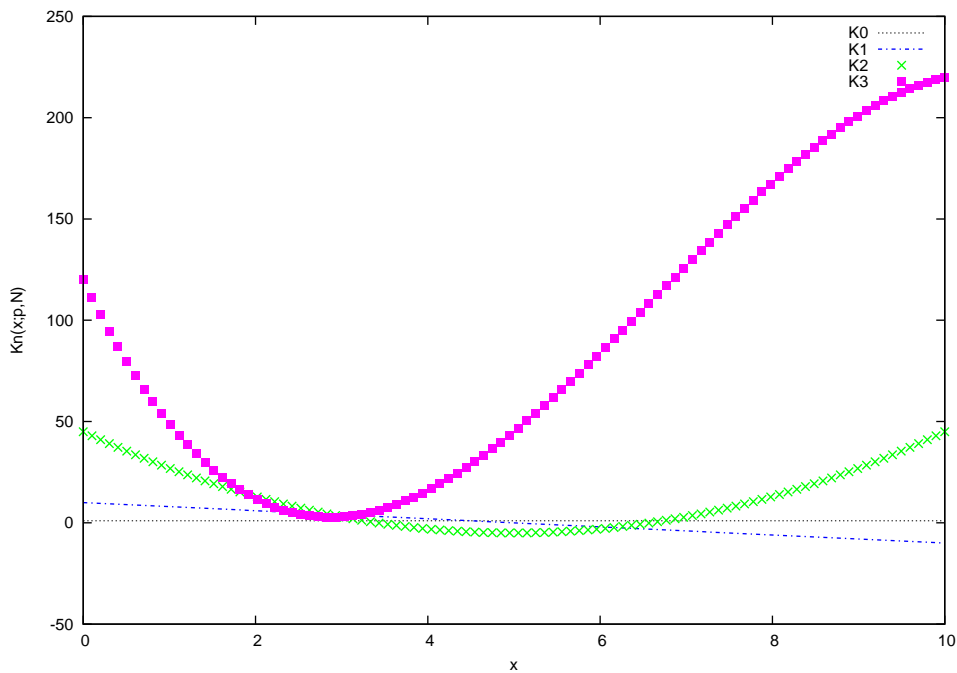


FIGURE 2.2 – Les quatre premiers polynômes de Kravchuk (pour $p=2$ et $N=10$)

Ici, nous suivons [1] pour présenter certaines propriétés importantes connues des polynômes de Kravchuk. Les polynômes généraux de Kravchuk sont orthogonaux par rapport à la mesure de probabilité binomiale définie sur le support $\{0, 1, 2, \dots, n\} = \mathbb{Z}_n$, défini pour $0 \leq p \leq 1$, par

$$\mu(x) = p^x(1-p)^{N-x} \binom{N}{x}. \quad (2.22)$$

Pour $p = \frac{1}{2}$, nous trouvons les polynômes binaires de Kravchuk, $K_n(x; \frac{1}{2}, N)$, qui peuvent être notés $K_n(x; N)$ et obtenus via les formules explicites suivantes [1] :

$$K_n(x; N) = \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{N-x}{n-j} \binom{x}{j}, \quad (2.23)$$

$$K_n(x; N) = \sum_{j=0}^n (-2)^j \binom{N-j}{n-j} \binom{x}{j} \quad (2.24)$$

et

$$K_n(x; N) = \sum_{j=0}^n (-j)^j 2^{n-j} \binom{N-n+j}{j} \binom{N-x}{n-j}. \quad (2.25)$$

Ces polynômes binaires de Kravchuk peuvent également être obtenus via la fonction génératrice

$$F_x(t, N) = (1-t)^x(1+t)^{N-x} = \sum_{n=0}^{\infty} K_n(x; N) t^n \quad (2.26)$$

et les polynômes généraux de Kravchuk sont également définis par

$$K_n(x; p, N) = \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} p^{n-j} (1-p)^j \binom{N-x}{n-j} \binom{x}{j} \quad (2.27)$$

Les relations de récurrence suivantes sont connues pour ces polynômes de Kravchuk :

$$(n+1)K_{n+1}(x; N) = (N-2x)K_n(x; N) - (N-n+1)K_{n-1}(x; N) \quad (2.28)$$

$$(N-x)K_n(x+1; N) = (N-2n)K_n(x; N) - xK_n(x-1; N) \quad (2.29)$$

$$(N-n+1)K_n(x; N+1) = (3N-2n-2x+1)K_n(x; N) - 2(N-x)K_n(x; N-1) \quad (2.30)$$

$$K_n(x; N) = K_n(x-1; N) - K_{n-1}(x; N) - K_{n-1}(x-1; N) \quad (2.31)$$

$$K_n(x; N) = K_n(x-1; N-2) - K_{n-1}(x-1; N-2) \quad (2.32)$$

$$K_n(x; N) = K_n(x; N-1) + K_{n-1}(x; N-1) \quad (2.33)$$

$$K_n(x; N) = K_n(x-1; N-1) - K_{n-1}(x-1; N-1) \quad (2.34)$$

tandis que les conditions initiales standard sont les suivantes :

$$K_0(x; N) = 1 \quad (2.35)$$

$$K_1(x; N) = -2x + N. \quad (2.36)$$

À partir desquelles, on obtient (par exemple de (2.28)) les polynômes suivants dont la représentation graphique (figure 2.5) visualise bien la symétrie.

$$K_2(x; N) = \frac{(N - 2x)^2 - N}{2} \quad (2.37)$$

$$K_3(x; N) = \frac{(-2x + N) \left((N - 2x)^2 - 3N + 2 \right)}{6} \quad (2.38)$$

et ainsi de suite de sorte qu'évalués à 0 et 1, ces polynômes deviennent :

$$K_n(0; N) = \binom{N}{n} \quad (2.39)$$

$$K_n(1; N) = \frac{N - 2n}{N} \binom{N}{n}. \quad (2.40)$$

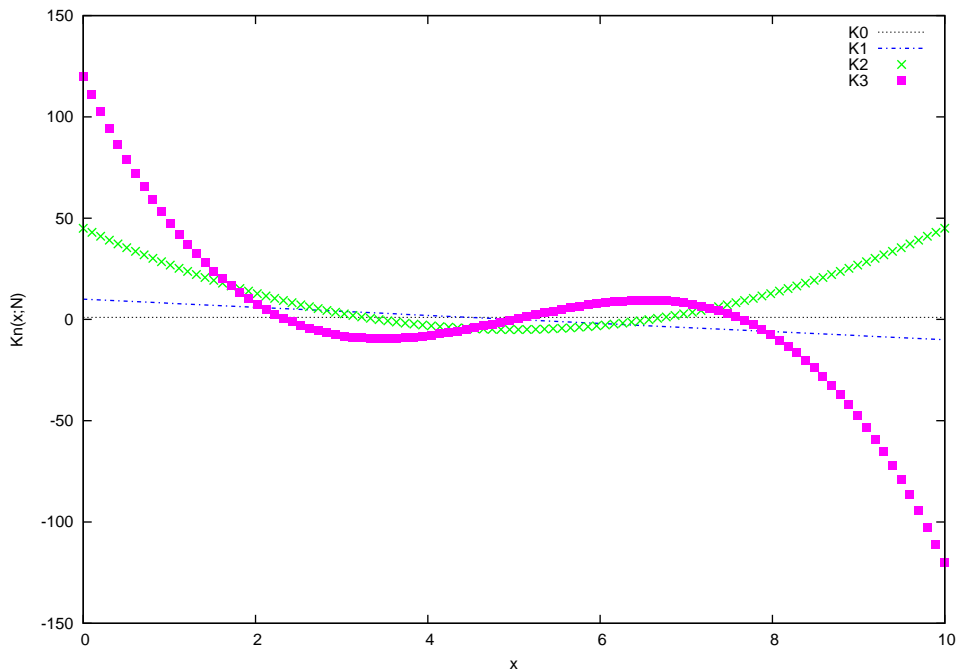


FIGURE 2.3 – Les quatre premiers polynômes de Kravchuk : cas symétrique pour $N = 10$

Ces propriétés très importantes de symétrie des polynômes de Kravchuk se dégagent dans les relations et les formules suivantes :

$$K_n(x; N) \binom{N}{x} = K_x(n; N) \binom{N}{n}, \text{ pour tout entier positif } x \quad (2.41)$$

$$K_n(x; N) = (-1)^n K_n(N - x; N). \quad (2.42)$$

Ceux qui sont symétriques (ou antisymétriques) par rapport à $n/2$ donnent :

$$K_n(x; N) = (-1)^n K_{N-n}(x; N), \quad (\text{pour tout entier } x, 0 \leq x \leq N) \quad (2.43)$$

Ces propriétés symétriques permettent de ne traiter que des zéros entiers pour $k \leq \frac{n}{2}$ (en fait, $k < \frac{n}{2}$).

2.6 Polynômes moniques de Kravchuk

2.6.1 De la théorie générale

Les polynômes orthogonaux $\{p_n(x) : n = 0, 1, 2, \dots\}$ correspondant à une mesure positive μ sur l'axe réel sont tels que p_n est de degré n et satisfait aux conditions $\int p_n(x)x^j d\mu(x) = 0; j = 0, 1, \dots, n-1$.

Ceci donne le polynôme à un facteur multiplicatif.

Dans le cas de polynômes orthogonaux discrets, nous avons une mesure discrète (avec des moments finis). [2]

$$\mu = \sum_{k=0}^N \varrho_k \delta_{x_k} \quad \varrho_k > 0, \quad x_k \in \mathbb{R} \text{ et } N \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\},$$

qui est une combinaison linéaire des mesures de Dirac sur les $N+1$ points x_0, \dots, x_N . Les condition d'orthogonalité d'un polynôme orthogonal discret p_n sur l'ensemble $\{x_k = k : k = 0, 1, \dots, N\}$ (réseau linéaire) sont plus commodément écrits comme

$$\sum_{k=0}^N p_n(k) (-k)_j \varrho_k = 0; \quad j = 0, 1, \dots, n-1;$$

avec $(a)_j = a(a+1)\dots(a+j-1)$ si $j > 0$ et $(a)_0 = 1$ (le symbole de Pochhammer).

Il s'agit ici des polynômes orthogonaux discrets classiques (sur un réseau linéaire [4], [6], [7]).

Les polynômes orthogonaux discrets (moniques), ce qui est souvent différent de la normalisation dans la littérature, de Kravchuk $K_n(x; p; N)$ (avec $0 < p < 1$ et $N \in \mathbb{N}$) répondent aux conditions

$$\sum_{k=0}^N K_n(k; p; N) (-k)_j \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k} = 0; \quad j = 0, 1, \dots, n-1.$$

Ici, les poids ϱ_k forment, comme dans les cas précédents, une distribution binomiale. Si on définit la fonction de poids

$$\varrho(x) = \frac{\Gamma(N+1)}{\Gamma(x+1)\Gamma(N-x+1)} p^x (1-p)^{N-x},$$

cette fonction satisfait une équation aux différences du premier ordre (1.19, c'est-à-dire $\Delta(\sigma(x)\varrho(x)) = \tau(x)\varrho(x)$ avec, tel que connu, σ un polynôme de degré inférieur ou égal à 2 et τ un polynôme de degré 1.

Ici l'opérateur $\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$ étant celui défini par 1.3. Les résultats sont tels que $\sigma(x) = x(1-p)$ et $\tau(x) = Np - x$.

Quand on prend la différence en avant des polynômes orthogonaux discrets classiques, on peut montrer que ces polynômes sont encore des polynômes orthogonaux de la même famille, mais non moniques et avec un ensemble différent de paramètres. En tant que tel, l'opérateur Δ agit comme un opérateur d'abaissement sur ces familles de polynômes. L'expression explicite est

$$\Delta K_n(x; p; N) = nK_{n-1}(x; p; N-1).$$

On peut facilement prouver ces identités en appliquant la somme par parties

$$\sum_{k=M}^N u(k)\Delta v(k) = u(N+1)v(N) - u(M)v(M) - \sum_{k=M}^N v(k+1)\Delta u(k)$$

sur les relations d'orthogonalité. Pour ces polynômes orthogonaux discrets classiques, nous avons également des opérateurs de levée qui peut également être trouvé en utilisant la sommation par parties. Les résultats sont

$$\nabla \left(\binom{N}{x} p^x (1-p)^{N-x} K_n(x; p, N) \right) = - \frac{\binom{N+1}{x} p^x (1-p)^{N+1-x}}{p(1-p)(N+1)} K_{n+1}(x; p, N+1).$$

En utilisant plusieurs fois cet opérateur de relance, nous obtenons une formule de Rodrigues pour les polynômes. Si nous élaborons cette formule, nous obtenons une expression explicite pour le polynômes orthogonaux classiques discrets que nous pouvons relier à une fonction hypergéométrique.

Cette expression est :

$$K_n(x; p, N) = p^n (-N)_n {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -n, -x \\ -N \end{matrix} ; 1/p \right). \quad (2.44)$$

Chaque système de polynômes orthogonaux moniques p_n vérifie une relation de récurrence de la forme

$$xp_n(x) = p_{n+1}(x) + b_n p_n(x) + a_n p_{n-1}(x); \quad n \geq 0; \quad (2.45)$$

avec $a_n > 0$ ou quand l'orthogonalité est sur \mathbb{R}^+ ,

$$xp_n(x) = p_{n+1}(x) + (A_n + C_n)p_n(x) + A_{n-1}C_n p_{n-1}(x); \quad n \geq 0;$$

avec $A_n, C_n > 0$ et conditions initiales $p_0 = 1$ et $p_{-1} = 0$.

À partir de l'expression explicite des polynômes, on peut calculer ces coefficients de récurrence en comparant les coefficients de la relation de récurrence, et pour les polynômes orthogonaux discrets sur un réseau linéaire, il est plus pratique d'utiliser la base $\{(-x)_j : j = 0, 1, 2, \dots\}$. Pour les polynômes orthogonaux discrets moniques classiques, nous avons le résultats suivants tels que

$$a_n = n(1-p)p(N-n+1) \text{ et } b_n = p(N-n) + n(1-p).$$

Enfin, nous pouvons prouver (en combinant l'opérateur de descente et d'élévation) que les polynômes orthogonaux discrets classiques satisfont à une équation aux différences du second ordre de la forme

$$\sigma(x)\Delta\nabla y(x) + \tau(x)\Delta y(x) + \lambda_n y(x) = 0$$

avec σ et τ les mêmes que dans l'équation de Pearson et λ_n une constante dépendant de n .

Pour les polynômes de Kravchuk $\lambda_n = n$.

2.6.2 Propriétés des solutions polynomiales définies positives

Considérons, dans l'équation (1.49), $e = 0$, $2f = 1$, $2\varepsilon > 1$, et $-N \leq \frac{2g\varepsilon - \gamma}{2\varepsilon - 1} < -N + 1$. Aussi la relation de récurrence à deux termes (1.52) peut être utilisée avec (1.53)

$$c + 1 = \frac{g - \gamma}{1 - 2\varepsilon}.$$

Aussi on considère $g = \gamma - 2\varepsilon + 1$ afin d'avoir $A = 0$ aux conditions frontière (1.50). Cela implique que $c = 0$ et $-N \leq \gamma - 2\varepsilon < -N + 1$. L'équation aux différences de Pearson (1.58) donne

$$\frac{\varrho(x)}{\varrho(x+1)} = \frac{(1-2\varepsilon)(x+1)}{x + \gamma - 2\varepsilon}.$$

Pour $\gamma - 2\varepsilon = -N$, on obtient une fonction de poids définie positive de la forme

$$\varrho(x) = \frac{1}{(2\varepsilon - 1)^x \Gamma(x+1) \Gamma(N+1-x)}, \quad x = 0, 1, 2, \dots, N,$$

pour les polynômes de Kravchuk; Cette fonction de poids est liée avec la distribution binomiale.

L'équation aux différences (1.49) donne

$$(x - N + 1)(\Delta^2 y_n)(x) + \left(2\varepsilon(x + 1) - N\right)\Delta y_n(x) = 2n\varepsilon y_n(x + 1),$$

pour $n = 0, 1, 2, \dots, N$ ou

$$(x - N)y_n(x + 1) - \left(2(1 - \varepsilon)x - N\right)y_n(x) + (1 - 2\varepsilon)xy_n(x - 1) = 2n\varepsilon y_n(x)$$

pour $n = 0, 1, 2, \dots, N$, et la relation de récurrence à trois termes (1.56) peut s'écrire :

$$y_{n+1}(x) = \left(x - \frac{2n(\varepsilon - 1) + N}{2\varepsilon}\right)y_n(x) - \frac{n(1 - 2\varepsilon)(n - 1 - N)}{4\varepsilon^2}y_{n-1}(x)$$

pour $n = 1, 2, \dots, N - 1$, avec $y_0(x) = 1$ et $y_1(x) = x - N/2\varepsilon$.

Pour les coefficients de la représentation (1.51), on obtient de (1.52)

$$2\varepsilon(n - k)a_{n,k} = (k - N)a_{n,k+1}, \quad k = n - 1, n - 2, n - 3, \dots, 0$$

Comme $a_{n,n} = n!$, ceci conduit à

$$a_{n,k} = \frac{(k-N)_{n-k} n!}{(2\varepsilon)^{n-k} (n-k)!} = \frac{(-N)_n (-n)_n}{(2\varepsilon)^n (-N)_k} (-2\varepsilon)^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n$$

D'où

$$y_n(x) = \sum_{k=0}^n a_{n,k} \binom{x}{k} = \frac{(-N)_n}{(2\varepsilon)^n} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -n, -x \\ -N \end{matrix}; 2\varepsilon \right), \quad k = 0, 1, 2, \dots, N.$$

La formule de Rodrigues est donnée par

$$y_n(x) = \frac{(2\varepsilon - 1)^x \Gamma(x+1) \Gamma(N+1-x)}{(-2\varepsilon)^n} \times \Delta^n \left(\frac{1}{(2\varepsilon - 1)^{x-n} \Gamma(x-n+1) \Gamma(N+1-x)} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots, N$$

par suite,

$$d_0 := \sum_{x=0}^N \frac{1}{(2\varepsilon - 1)^x x! (N-x)!} = \frac{(2\varepsilon)^N}{(2\varepsilon - 1)^N N!} > 0.$$

En utilisant (1.59), la relation d'orthogonalité peut s'écrire :

$$\sum_{x=0}^N \frac{1}{(2\varepsilon - 1)^x x! (N-x)!} y_m(x) y_n(x) = \frac{(2\varepsilon)^{N-2n} n!}{(2\varepsilon - 1)^{N-n} (N-n)!} \delta_{mn},$$

pour $2\varepsilon > 1$, $\gamma - 2\varepsilon = -N$ et $m, n = 0, 1, 2, \dots, N$.

De ce qui précède, il est commode de considérer pour les polynômes de Kravchuk ce qui suit [11] :

1. Représentation hypergéométrique

$$K_n(x; p, N) = {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -n, -x \\ -N \end{matrix}; \frac{1}{p} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots, N. \quad (2.46)$$

2. Relation d'orthogonalité

$$\sum_{x=0}^N \binom{N}{x} p^x (1-p)^{N-x} K_m(x; p, N) K_n(x; p, N) = \frac{(-1)^n n!}{(-N)_n} \left(\frac{1-p}{p} \right)^n \delta_{mn}, \quad (2.47)$$

avec $0 < p < 1$.

3. Relation de récurrence

$$-x K_n(x; p, N) = p(N-n) K_{n+1}(x; p, N) - \left[p(N-n) + n(1-p) \right] K_n(x; p, N), \\ + n(1-p) P_{n-1}(x; p, N). \quad (2.48)$$

4. Relation de récurrence normalisée

$$x P_n(x) = P_{n+1}(x) + \left[p(N-n) + n(1-p) \right] P_n(x) \\ + n(1-p)(N+1-n) P_{n-1}(x), \quad (2.49)$$

où $K_n(x; p, N) = \frac{1}{(-N)_n p^n} P_n(x)$.

5. Équation aux différences

$$\begin{aligned}
-ny(x) &= p(N-x)y(x+1) - \left[p(N-x) + x(1-p) \right] y(x) \\
&\quad + x(1-p)y(x-1),
\end{aligned} \tag{2.50}$$

où $y(x) = K_n(x; p, N)$.

6. Opérateur de différence avant

$$K_n(x+1; p, N) - K_n(x; p, N) = -\frac{n}{Np} K_{n-1}(x; p, N-1) \tag{2.51}$$

ou de manière équivalente

$$\Delta K_n(x; p, N) = -\frac{n}{Np} K_{n-1}(x; p, N-1) \tag{2.52}$$

7. Opérateur de différence arrière

$$\begin{aligned}
(N+1-x)K_n(x; p, N) - x\left(\frac{1-p}{p}\right)K_n(x-1; p, N) \\
= (N+1)K_{n+1}(x; p, N+1)
\end{aligned} \tag{2.53}$$

ou de manière équivalente

$$\nabla \left[\binom{N}{x} \left(\frac{p}{1-p}\right)^x K_n(x; p, N) \right] = \binom{N+1}{x} \left(\frac{p}{1-p}\right)^x K_{n+1}(x; p, N+1). \tag{2.54}$$

8. Formule de type Rodrigues

$$\binom{N}{x} \left(\frac{p}{1-p}\right)^x K_n(x; p, N) = \nabla^n \left[\binom{N-n}{x} \left(\frac{p}{1-p}\right)^x \right]. \tag{2.55}$$

9. Fonctions génératrices

Pour $x = 0, 1, 2, \dots, N$ on a

$$\left(1 - \frac{1-p}{p}t\right)^x (1+t)^{N-x} = \sum_{n=0}^N \binom{N}{n} K_n(x; p, N) t^n \tag{2.56}$$

$$\left[e^t {}_1F_1 \left(\begin{matrix} -x & ; & -\frac{t}{p} \\ -N. & & \end{matrix} \right) \right]_N = \sum_{n=0}^N \frac{K_n(x; p, N)}{n!} t^n \tag{2.57}$$

$$\left[(1-t)^{-\gamma} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} \gamma, -x & ; & \frac{t}{p(t-1)} \\ -N. & & \end{matrix} \right) \right]_N = \sum_{n=0}^N \frac{(\gamma)_n}{n!} K_n(x; p, N) t^n \tag{2.58}$$

γ arbitraire.

Remarque 2.1. Les polynômes de Kravchuk sont auto-duaux. Cela signifie que

$$K_n(x; p, N) = K_x(n; p, N), \quad n, x \in \{0, 1, 2, \dots, N\}.$$

En utilisant cette relation dans (2.47), on a

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^N \binom{N}{n} p^n (1-p)^{N-n} K_n(x; p, N) K_n(y; p, N) \\
&= \frac{(-1)^x x!}{(-N)_x} \left(\frac{1-p}{p} \right)^x \delta_{xy} \\
&= \frac{(-1)^x x!}{(-N)(-N+1)(-N+2) \dots (-N+x-1)} \left(\frac{1-p}{p} \right)^x \delta_{xy} \\
&= \frac{(-1)^x x!}{(-1)^x N(N-1) \dots (N-x+1) \frac{(N-x)(N-x-1) \dots 1}{(N-x)(N-x-1) \dots 1}} \left(\frac{1-p}{p} \right)^x \delta_{xy} \\
&= \frac{x!}{N!} \left(\frac{1-p}{p} \right)^x \delta_{xy} \\
&= \frac{\left(\frac{1-p}{p} \right)^x}{\binom{N}{x}} \delta_{xy},
\end{aligned}$$

où $0 < p < 1$ et $x, y \in \{0, 1, 2, \dots, N\}$.

2.7 Les zéros des polynômes de Kravchuk

Reprenons la relation (2.44) définissant les polynômes moniques de Kravchuk : par

$$K_n(x; p, N) = p^n (-N)_n {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -n, -x \\ -N \end{matrix}; 1/p \right)$$

et ces polynômes sont orthogonaux par rapport à la distribution binomiale finie $\binom{N}{x} p^x (1-p)^{N-x}$ c'est positif aux points de masse $x = 0, 1, \dots, N$ de la distribution discrète pour $0 < p < 1$. Cela implique que, pour $0 < p < 1$ et $n \leq N$, $n, N \in \mathbb{N}$, les zéros de $K_n(x; p, N)$, notés $x_{n,1}^N < x_{n,2}^N < \dots < x_{n,n}^N$, sont réels, distincts, dans l'intervalle $]0, N[$ et séparés par les points de masse de la mesure d'orthogonalité ([10]). Dans le cas particulier où $n = N$, les zéros de $K_N(x; p, N)$ s'entrelacent avec les points masse comme suit

$$0 < x_{n,1}^N < 1 < x_{n,2}^N < 2 < \dots < x_{n,n}^N < N.$$

Entrelacement de Stieltjes terminé entre les zéros des polynômes de Kravchuk $K_n(x; p, N)$ qui se trouvent dans $(0, N)$ et les $n-2$ zéros de $K_{n-2}(x; p, N-k)$, $k \in \{-1, 0, 1, 2\}$, qui se trouvent dans $(0, N-k)$ présentent un intérêt particulier car le décalage du paramètre N implique une modification de l'intervalle de orthogonalité. Il est à noter que les résultats généraux, tels que le théorème 2.1, ne sont alors pas immédiatement applicables. Des restrictions supplémentaires sur le paramètre p seront nécessaires dans certains cas pour obtenir l'entrelacement de Stieltjes complété. Nous identifions les points d'entrelacement supplémentaires et obtenons de nouvelles limites intérieures et extérieures pour les zéros extrêmes de ces polynômes $K_n(x; p, N)$.

Lemme 2.1. Entrelacement complété de Stieltjes de différents polynômes orthogonaux

Soit $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ une suite de polynômes orthogonaux sur l'intervalle (fini ou infini) $]a, b[$ par rapport à $\varrho(x) > 0$. Soit $k \in \mathbb{N}_0$ fixe, et supposons $\{g_{n,k}(x)\}_{n=0}^{\infty}$ est une suite de polynômes orthogonaux par rapport à $c_k(x)\varrho(x) > 0$ sur $]a, b[$, où $c_k(x)$ est un polynôme de degré k , qui satisfait

$$A_n c_k(x) g_{n-2,k}(x) = a_{k-2}(x) p_n(x) - (x - B_n) P_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.59)$$

avec $g_{-1,k} = 0$, A_n, B_n, a_{-1}, a_{-2} des constantes et a_{k-2} un polynôme de degré $k - 2$ sur $]a, b[$ lorsque $k = 2, 3, \dots$. Alors

1. $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$;
2. les $n - 1$ réels, zéros simples de $(x - B_n)g_{n-2,k}$ s'entrelacent avec les zéros de p_n et B_n est une limite supérieure pour le plus petit, ainsi qu'une limite inférieure pour le plus grand zéro de p_n si $g_{n-2,k}$ et p_n sont co-premiers ;
3. si $g_{n-2,k}$ et p_n ne sont pas co-premiers,
 - (a) ils ont 1 zéro commun égal à B_n et ce zéro commun ne peut pas être le plus grand ou le plus petit zéro de p_n ;
 - (b) les $n - 2$ zéros de $g_{n-2,k}(x)$ s'entrelacent avec les $n - 1$ zéros non communs de p_n ;
 - (c) B_n est une limite supérieure pour le plus petit ainsi qu'une limite inférieure pour le plus grand zéro de p_n .

Théorème 2.1. Soit $K_n(x; p, N)$, $0 < p < 1$, $n = 2, 3, \dots, N$, $N \in \mathbb{N}$, les polynômes de Kravchuk et soit $C_n(k) = Np + (n - 1)(1 + kp - 2p)$ et $p_n(k) = \frac{N - k - n + 1}{N + (k - 2)(n - 1)}$ $k = 0, 1, 2$. Alors

1. les zéros de $K_{n-2}(x; p, N)$, ainsi que le point $C_n(0)$, s'entrelacent avec les zéros de $K_n(x; p, N)$ si $K_{n-2}(x; p, N)$ et $K_n(x; p, N)$ sont co-premiers ;
2. les zéros de $K_{n-2}(x; p, N - 1)$, ainsi que le point $C_n(1)$, s'entrelacent avec les zéros de $K_n(x; p, N)$, si $K_{n-2}(x; p, N - 1)$ et $K_n(x; p, N)$ sont co-premiers. En outre,
 - (a) si $0 < p_n(1) < p < 1$,
alors $x_{n-2,n-2}^{N-1} < x_{n,n-1}^N < C_n(1) < x_{n,n}^N < N$.
 - (b) si $p = p_n(1) = \frac{N - n}{N - n + 1}$, alors $x_{n-2,n-2}^{N-1} < x_{n,n-1}^N < C_n(1) = N - 1 < x_{n,n}^N < N$.
3. si $K_{n-2}(x; p, N - 2)$ et $K_n(x; p, N)$ sont co-premiers, les zéros de $K_{n-2}(x; p, N - 2)$, ainsi que le point $C_n(2)$, s'entrelacent avec les zéros de $K_n(x; p, N)$ pour $p < 1 - \frac{n}{N}$ si et seulement si les zéros de $K_n(x; p, N)$ sont compris dans $]0, N - 1[$. En outre,
 - (a) si $0 < p_n(2) < p < 1 - \frac{n}{N}$,
alors $x_{n-2,n-2}^{N-2} < x_{n,n-1}^N < N - 2 < C_n(2) < x_{n,n}^N < N - 1$.

- (b) si $p = p_n(2) = 1 - \frac{n+1}{N}$,
alors $x_{n-2, n-2}^{N-2} < x_{n, n-1}^N < C_n(2) = N - 2 < x_{n, n}^N < N - 1$.
4. si $K_n(x; p, N)$ et $K_{n-2}(x; p, N - k)$, $k = 0, 1, 2$ ont un point commun égal à zéro,
(a) $0 < p < 1$ lorsque $k = 0$ et $0 < p < p_n(k) < 1$ pour $k = 1, 2$.
(b) le point $C_n(k)$ est le zéro commun de $K_{n-2}(x; p, N - k)$ et de $K_n(x; p, N)$;
(c) les $n - 2$ zéros de $K_{n-2}(x; p, N - k)$ s'entrelacent avec les $n - 1$ zéros (non communs) de $K_n(x; p, N)$.

Démonstration. [10]

1. Nous supposons que $K_{n-2}(x; p, N)$ et $K_n(x; p, N)$ n'ont pas de zéros en commun. En substituant n par $n - 1$ dans la relation de récurrence de trois termes satisfaite par les polynômes de Kravchuk et en appliquant le lemme 2.1 (2), on obtient le résultat indiqué.
2. Soit $K_{n-2}(x; p, N - 1)$ et $K_n(x; p, N)$ co-premiers. À partir de (2.44) et la relation de contiguïté (2.7) on obtient la relation de récurrence mixte

$$(n-1)(x-N)K_{n-2}(x; p, N-1) = pK_n(x; p, N) - \left(x - Np + (n-1)(p-1)\right)K_{n-1}(x; p, N). \quad (2.60)$$

Le polynôme $x - N$ dans (2.60) ne change pas de signe de connexion sur $]0, N[$ et du lemme 2.1 (1), on déduit que les zéros de $K_{n-2}(x; p, N - 1)$, ainsi que le point $C_n(1) = Np + (n - 1)(1 - p)$, s'entrelacent avec les zéros de $K_n(x; p, N)$ sur $]0, N[$. En outre,

- (a) si $p > p_n(1) = 1 - \frac{1}{N - n + 1}$, on a $N - 1 < C_n(1) < x_{n, n}^N$ et puisqu'il y a au plus un zéro de $K_n(x; p, N)$, $n = 1, 2, \dots, N$ entre deux points masse consécutifs quelconques $0, 1, 2, \dots, N$, nous avons $x_{n, n-1}^N < N - 1$.
- (b) si $p = 1 - \frac{1}{N - n + 1}$ $C_n(1) = N - 1$ et donc $x_{n, n-1}^N < N - 1 < x_{n, n}^N < N$.
3. Soit $K_{n-2}(x; p, N - 2)$ et $K_n(x; p, N)$ co-premiers et considérons la Relation de récurrence de trois termes

$$(x - N)_2 K_{n-2}(x; p, N - 2) = \frac{p(n - 1 + Np - N)}{n - 1} K_n(x; p, N) \quad (2.61) \\ + (x - n + 1 - Np) \frac{(N - n + 1)(1 - p)}{n - 1} K_{n-1}(x; p, N)$$

obtenu avec (2.44) et (2.8).

Premièrement, nous supposons que les zéros de $K_n(x; p, N)$ sont dans $]0, N - 1[$. La fonction $(x - N)(x - N + 1)$ dans (2.61) est définie et ne change pas de signe sur l'intervalle $]0, N - 1[$.

Du lemme 2.1 (2), il est clair et il s'ensuit que pour l'intervalle $]0, N - 1[$ les zéros de $K_{n-2}(x; p, N - 2)$, ainsi que le point $C_n(2)$, entrelacent les zéros de $K_n(x; p, N)$ sur $]0, N - 1[$. Comme $C_n(2) = Np + n - 1 < N - 1$, on en déduit que $p < 1 - \frac{n}{N}$. Ensuite, supposons que les zéros de $K_{n-2}(x; p, N - 2)$, ainsi que le point $C_n(2)$,

s'entrelacent avec les zéros de $K_n(x; p, N)$ et $p < 1 - \frac{n}{N}$, c'est-à-dire, $C_n(2) = Np + n - 1 < N - 1$.

Supposons $x_{n,n}^N > N - 1$. En évaluant (2.61) en $x_{n,n-1}^N$ et $x_{n,n}^N$, on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{K_n(x_{n,n-1}^N; p, N)K_n(x_{n,n}^N; p, N)d^2}{(x_{n,n-1}^N - N)(x_{n,n}^N - N)(x_{n,n-1}^N - N + 1)(x_{n,n}^N - N + 1)} \\ &= \frac{K_{n-2}(x_{n,n-1}^N; p, N - 2)K_{n-2}(x_{n,n}^N; p, N - 2)}{(x_{n,n-1}^N - C_n(2))(x_{n,n}^N - C_n(2))}, \end{aligned} \quad (2.62)$$

où $d = \frac{(N - n + 1)(1 - p)}{n - 1}$.

Les zéros de $K_n(x; p, N)$ sont dans $]0, N[$ et il n'existe qu'un seul zéro de $K_n(x; p, N)$ entre deux points de masse quelconques, donc $x_{n,n-1}^N < N - 1$. En conséquence, le dénominateur situé à gauche de (2.62) est négatif. Le numérateur est également négatif, puisque les zéros de $K_n(x; p, N)$ et de $K_{n-1}(x; p, N)$ s'entrelacent, ce qui implique que le côté gauche de (2.62) est positif. Par hypothèse, un zéro de $K_{n-2}(x; p, N - 2)$ ou le point $C_n(2)$ doit être situé dans l'intervalle $]x_{n,n-1}^N, x_{n,n}^N[$. Si $C_n(2) \in]x_{n,n-1}^N, x_{n,n}^N[$, le dénominateur du côté droit est négatif. Pour que le membre de droite de (2.62) soit positif, il faut

$K_{n-2}(x_{n,n-1}^N; p, N - 2)K_{n-2}(x_{n,n}^N; p, N - 2) < 0$, ce qui signifie qu'il existe également un zéro de

$K_{n-2}(x; p, N - 2)$ dans $]x_{n,n-1}^N, x_{n,n}^N[$ et nous avons une contradiction.

Alternativement, si $K_{n-2}(x; p, N - 2)$ a un zéro dans l'intervalle $]x_{n,n-1}^N, x_{n,n}^N[$, le numérateur sur le côté droit est négatif et pour que le côté droit de (2.62) soit positif, nous avons besoin du dénominateur négatif, c.-à-d. $C_n(2) \in]x_{n,n-1}^N, x_{n,n}^N[$ et encore, cela contredit notre supposition. Nous concluons que $x_{n,n}^N < N - 1$.

En outre,

- (a) si $0 < 1 - \frac{n+1}{N} < p < 1 - N$, alors $N - 2 < C_n(2) < N - 1$ et, en raison de l'entrelacement complété de Stieltjes, $N - 2 < C_n(2) < x_{n,n}^N < N - 1$. Puisqu'il y en a au plus un zéro de $K_n(x; p, N)$ entre deux points masse consécutifs, nous avons $x_{n,n-1}^N < N - 2$.
 - (b) si $p = 1 - \frac{n+1}{N}$, alors $C_n(2) = N - 2$ et $x_{n,n-1}^N < N - 2 < x_{n,n}^N < N - 1$.
4. Si, pour chaque $k \in \{0, 1, 2\}$, $K_{n-2}(x; p, N - k)$ et $K_n(x; p, N)$ ont des zéros en commun, alors il découle de la relation de récurrence à trois termes (pour $k = 0$) et de la relation de récurrence mixte (2.60) et (2.61) (pour $k = 1, 2$ respectivement), ainsi que le lemme 2.1 (3), qu'ils ne peuvent avoir qu'un seul zéro commun, ce qui est égal au point $C_n(k)$. Le commun zéro doit être dans $]0, N - k[$ et par conséquent $p < p_n(k)$.

□

On considère l'entrelacement de Stieltjes terminé des zéros de $K_n(x; p, N)$ et de $K_{n-2}(x, p, N + 1)$ dans le théorème suivant.

Théorème 2.2. [10] Soit $K_n(x; p, N)$, $0 < p < 1$, $n = 2, 3, \dots, N$, $N \in \mathbb{N}$, les polynômes de Kravchuk de degré n et soit

$$q = \frac{3(n-1) - N + \sqrt{9 - 22n + 17n^2 - 4n^3 + 6N - 10nN + 4n^2N + N^2}}{2n(n-1)}$$

$$X_1 = \frac{1}{2} \left(S_n - \sqrt{S_n^2 + 4 \left((N+1)((n-1)(3p-1) - Np) - n(n-1)p^2 \right)} \right) \quad \text{et}$$

$$X_2 = \frac{1}{2} \left(S_n + \sqrt{S_n^2 + 4 \left((N+1)((n-1)(3p-1) - Np) - n(n-1)p^2 \right)} \right) \quad \text{où}$$

$$S_n = N + n - 3(n-1)p + Np;$$

Alors

1. $X_2 \in [N, N+1[$ si $p \leq q$
2. $\forall n = 2, 3, \dots, N$ et $p \leq q$, les zéros de $K_{n-2}(x, p, N+1)$ sont dans $]0, N[$ et, ainsi que le point X_1 , s'entrelacent avec les zéros de $K_n(x, p, N)$ si $K_{n-2}(x, p, N+1)$ et $K_n(x, p, N)$ sont co-premiers.
3. pour $n = 2, 3, \dots, N$ et p fixé, $p \leq q$, si $K_{n-2}(x, p, N+1)$ et $K_n(x, p, N)$ sont co-premiers,
 - (a) ils ont un zéro commun pour $x = X_1$;
 - (b) les $n-2$ zéros de $K_{n-2}(x, p, N+1)$ s'entrelacent avec les $n-1$ zéros non communs de $K_n(x, p, N)$ sont co-premiers.

Le cas $k = 0$ dans les théorèmes 2.2 (1) et 2.1 (1) étend le résultat classique de Stieltjes qu'entre deux zéros quelconques d'un polynôme $p_{n-2}(x)$, il y a au moins un zéro de $p_n(x)$, en fournissant une formule pour un point d'entrelacement supplémentaire.

Démonstration. Nous utilisons la relation de contiguïté (2.8) et la représentation hyper-géométrique des polynômes de Kravchuk (2.44) pour obtenir la relation de récurrence mixte à trois termes

$$(n-1)(N-n+2)_2(1-p)^2 K_{n-2}(x; p, N+1) = p \left(x + (n-1)p - N - 1 \right) K_n(x; p, N) - P_2(x) K_{n-1}(x; p, N) \quad (2.63)$$

où

$$P_2(x) = x^2 - \left(n + N - 3(n-1)p + Np \right) x + n(n-1)p^2 - (N+1) \left((n-1)(3p-1) - Np \right) = (x - X_1)(x - X_2).$$

Il est facile de montrer que $X_1 \in]0, N[$ et $X_2 \in]0, N+1[$ pour $0 < p < 1$. Pour appliquer le lemme 2.1 à (2.63), nous devons déterminer les valeurs de paramètre pour lesquelles $(x - X_2)$ ne change pas de signe sur $]0, N[$, c'est-à-dire que nous devons trouver les conditions sur p pour que $N \leq X_2 < N+1$.

1. Un calcul simple montre que $X_2 \geq N$ est équivalent à

$$(n^2 - n)p^2 + (N - 3n + 3)p + n - 1 - N \leq 0.$$

En résolvant cette inégalité quadratique et en prenant en considération l'hypothèse que $p > 0$, nous trouvons

$$0 < p \leq 3 \left(\frac{n - 1 - N + 9 - 22n + 17n^2 - 4n^3 + 6N - 10nN + 4n^2N + N^2}{2n(n - 1)} \right) = q.$$

2. Soit $K_{n-2}(x; p, N + 1)$ et $K_n(x; p, N)$ co-premiers, n et p fixés et $p \leq q$. Nous appliquons lemme 2.1 à (2.63) et concluons que pour $p \leq q$, les $n - 2$ zéros de $K_{n-2}(x; p, N + 1)$, ainsi que le point X_1 , s'entrelacent avec les zéros de $K_n(x; p, N)$. Une conséquence directe de cet entrelacement est que les zéros de $K_{n-2}(x; p, N + 1)$ sont dans $]0, N[$ pour les valeurs spécifiques de p , puisque $x_{n,n-2}^{N+1} < x_{n,n}^N < N$.
3. Soit n et $p \leq q$ fixés. Quand on suppose que $K_{n-2}(x; p, N + 1)$ et $K_n(x; p, N)$ ont un zéro commun, ce zéro doit être dans $]0, N[$ et le résultat déclaré découle du lemme 2.1.

□

2.7.1 Limites pour les zéros extrêmes de polynômes de Kravchuk

Les points $C_n(k) = Np + (n - 1)(1 - (k - 2)p)$, $k = 0, 1, 2$, obtenus au théorème 2.1 seront les limites supérieures (*resp. inférieures*) de plus petits (*plus grands*) zéros des polynômes de Kravchuk $K_n(x, p, N)$.

Pour $p \in]0, 1[$ et $n = 2, 3, \dots, N$ on a que

$$0 < x_{n,1}^N < C_n(0) < C_n(1) < x_{n,n}^N < N. \quad (2.64)$$

Pour $p \in]0, 1 - \frac{n}{N}[\subset]0, 1[$, on obtient une nouvelle limite de $x_{n,n}^N$ meilleure que celle donnée par la relation (2.64), étant donné qu'il découle du théorème 2.1, 3,4 et la définition de $C_n(k)$, $k = 0, 1, 2$, que

$$0 < x_{n,1}^N < C_n(0) < C_n(1) < C_n(2) < x_{n,n}^N < N - 1.$$

Les limites inférieures de zéros élevés, $C_n(1)$ et $C_n(2)$, sont de manière surprenante bonnes, particulièrement lorsque $p \mapsto 1$, qui consiste au fait que

$$K_n(x; 1, N) = (-N)_n {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -n, -x \\ -N \end{matrix}; 1 \right) = (x - N)(x - N + 1) \dots (x - N + n - 1).$$

p	N	$x_{5,1}$	$C_n(0)$	$C_n(1)$	$C_n(2)$	$x_{5,5}$	limite sup $N - 1$
$p = 0.1$	$N = 7$	0.0007	3.9	4.3	4.7	4.991	6
$p = 0.45$	$N = 10$	0.769	4.9	6.7	8.5	8.738	9
$p = 0.9$	$N = 7$	2.009	3.1	6.7	-	6.999	-
$p = 0.99$	$N = 8$	3.816	4	7.96	-	7.999	-
$p = 0.99$	$N = 14$	9.573	9.94	13.9	-	13.999	-

TABLE 2.1 – Comparaison des limites des zéros extrêmes de $K_2(x; p, N)$ pour quelques valeurs de p et N

Les zéros contenus dans ce tableau 2.1 ont été calculés dans [10]. Les graphiques correspondants (Figure 2.4) ont été obtenus, dans ce travail, à l'aide du logiciel R version 3.2.3 (2015-12-10).

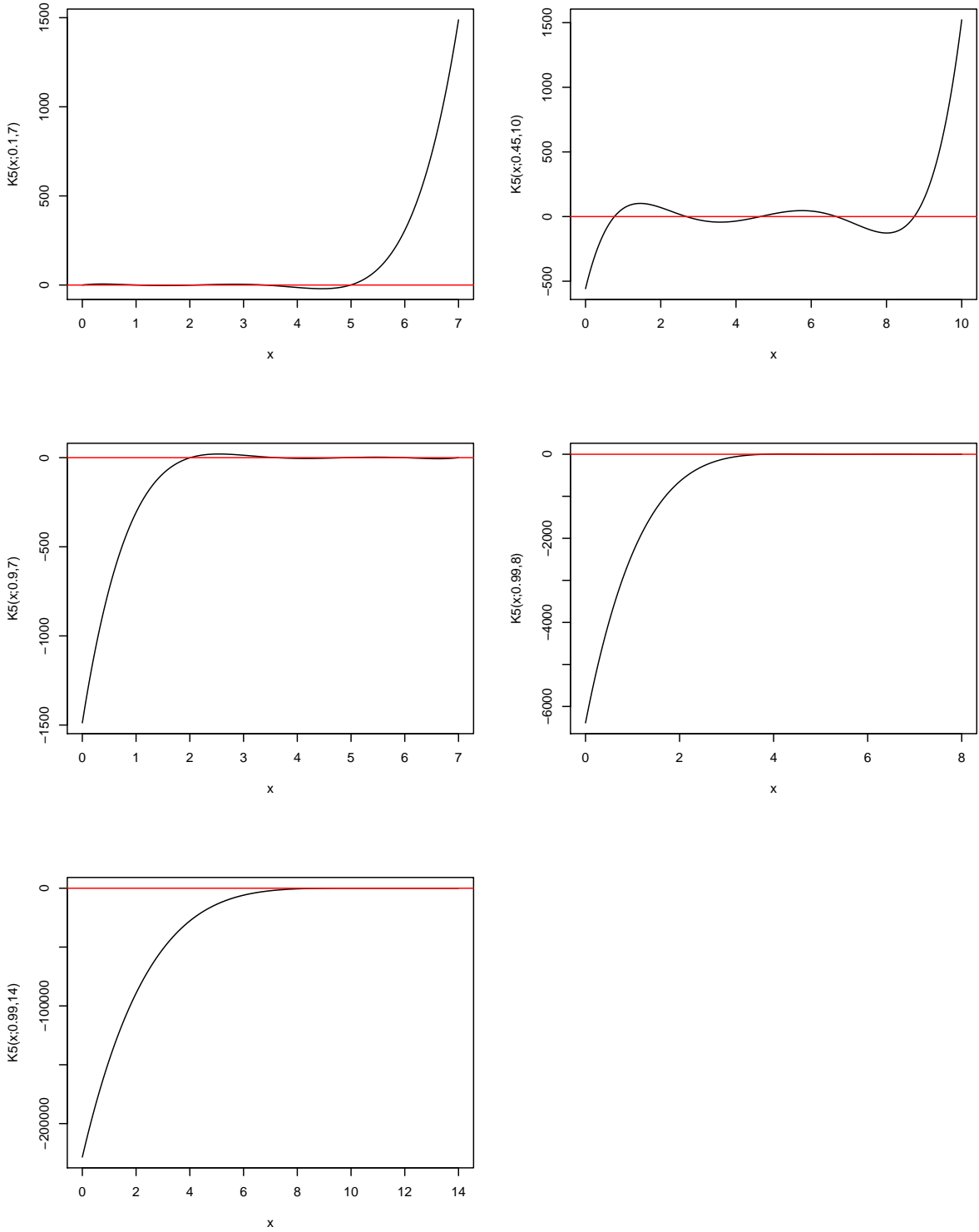


FIGURE 2.4 – Représentation graphique des données du tableau 2.1

Chapitre 3

Problème de Linéarisation des Polynômes de Kravchuk

Dans ce chapitre, il est question d'obtenir les coefficients de linéarisation en utilisant directement la fonction génératrice (2.26). Entre-temps, il est important de rappeler le développement trouvé dans [6].

3.1 Polynômes de Kravchuk : Cas général

La fonction génératrice est donnée par (où $K_n(j; p, N)$ est noté $k_n(j, N)$) :

$$G(v) = (1 + \lambda qv)^{N-j} (1 - \lambda pv)^j = \sum_{0 \leq n \leq N} v^n k_n(j, N), \quad (3.1)$$

avec j allant de 0 à N . La caractéristique principale est la relation

$$G(v) = \prod \left(1 + v(X_i - \mu) \right), \quad (3.2)$$

où X_i sont des variables de Bernoulli indépendantes prenant les valeurs λ et 0 avec probabilités respectivement p et q .

Plusieurs coefficients des polynômes de Kravchuk peuvent être calculés directement : Si $k_n(x; N) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$, alors

$$a_n = \frac{-2^n}{n!} \quad (3.3)$$

$$a_{n-1} = \frac{-2^{n-1} N}{(n-1)!} \quad (3.4)$$

$$a_{n-2} = \frac{-2^{n-2} (3N^2 - 3N + 2n - 4)}{(n-2)!} \quad (3.5)$$

$$\text{et} \quad (3.6)$$

$$a_0 = \binom{N}{n}. \quad (3.7)$$

3.1.1 Coefficients de linéarisation

Nous voulons l'expression du produit $k_\ell k_m$ en termes de k_n . Tout d'abord, un lemme simple.

Lemme 3.1. *Supposons que X prend les valeurs λ et 0 . Alors on a*

$$(X - \lambda p)^2 = \lambda(q - p)(X - \lambda p) + \lambda^2 pq. \quad (3.8)$$

Démonstration. Pour obtenir (3.8), développons $x(x - \lambda)$ en série Taylor autour de λp et assimilons le résultat à zéro. On a :

$$\begin{aligned} x(x - \lambda) &= \lambda p(\lambda p - \lambda) + 2(\lambda p - \lambda)(X - \lambda p) + (X - \lambda p)^2 = 0 \\ (X - \lambda p)^2 &= \lambda(q - p)(X - \lambda p) + \lambda^2 pq ; \quad \text{avec } p + q = 1. \end{aligned}$$

□

Dans notre contexte, nous pouvons écrire ceci comme

$$(X - \mu)^2 = \lambda(q - p)(X - \mu) + \sigma^2. \quad (3.9)$$

On a le produit

$$\begin{aligned} G(v)G(w) &= \prod \left(1 + v(X_i - \mu)\right) \prod \left(1 + w(X_i - \mu)\right) \\ &= \prod \left(1 + v(X_i - \mu)\right) \left(1 + w(X_i - \mu)\right) \\ &= \prod \left(1 + (v + w)(X_i - \mu) + vw(X_i - \mu)^2\right). \end{aligned}$$

En utilisant (3.9), on a

$$G(v)G(w) = \prod \left(1 + \left(v + w + \lambda(q - p)vw\right)(X_i - \mu) + vw\sigma^2\right).$$

En mettant en évidence $1 + vw\sigma^2$ dans chaque facteur, on obtient :

$$G(v)G(w) = (1 + vw\sigma^2)^N \prod \left(1 + \frac{v + w + \lambda(q - p)vw}{1 + vw\sigma^2}(X_i - \mu)\right).$$

C'es-à-dire

$$\sum_{\ell, m} v^\ell w^m k_\ell(j, N) k_m(j, N) = (1 + \sigma^2 vw)^N \prod \left(1 + \frac{v + w + \lambda(q - p)vw}{1 + \sigma^2 vw}(X_i - \mu)\right)$$

En utilisant (3.2) et (3.1), on a

$$\begin{aligned} \sum_{\ell, m} v^\ell w^m k_\ell(j, N) k_m(j, N) &= (1 + \sigma^2 vw)^N \sum_n \left(\frac{v + w + \lambda(q - p)vw}{1 + \sigma^2 vw}\right)^n k_n(j, N) \\ &= \sum_n (1 + \sigma^2 vw)^{N-n} \left(v + w + \lambda(q - p)vw\right)^n k_n(j, N) \quad (3.10) \end{aligned}$$

Par suite, le coefficient de k_n est

$$\sum_{\alpha+\beta+\gamma=n,\delta} \binom{n}{\alpha, \beta, \gamma} \binom{N-n}{\delta} v^\alpha w^\beta (\lambda(q-p))^\gamma (\sigma^2 vw)^\delta,$$

avec $\ell = n - \beta + \delta$ et $m = n - \alpha + \delta$.

3.1.1.1 Formule de linéarisation

Théorème 3.1. *Le Coefficient de k_n dans l'expression du produit $k_\ell k_m$ est*

$$\sum_{\delta} \frac{n!}{(n-m+\delta)!(n-\ell+\delta)!(\ell+m-n-2\delta)!} \binom{N-n}{\delta} (\lambda(q-p))^{\ell+m-n-2\delta} \sigma^{2\delta}. \quad (3.11)$$

Cette expression est également intéressante dans l'étude des sommes bilinéaires de Polynômes de Kravchuk.

3.1.1.2 Formule de récurrence

La formule de récurrence à trois termes caractéristique des polynômes orthogonaux suit en se spécifiant $\ell = 1$ dans la formule de linéarisation (3.11). Tout d'abord, on calcule le terme constant et coefficient de v de la fonction génératrice G :

$k_0 = 1$ et $k_1 = \lambda(Nq - j)$. À partir de la formule de linéarisation, nous prenons trois termes, avec $n = m$ et $n = m \pm 1$. On obtient

Proposition 3.1.

$$\lambda(Nq - j)k_m = (m + 1)k_{m+1} + \lambda(q - p)mk_m + \lambda^2 pq(N + 1 - m)k_{m-1} \quad (3.12)$$

Les termes k_m et k_{m+1} apparaissent avec $\delta = 0$, avec le terme k_{m-1} la seule contribution pour $\delta = 1$.

3.1.2 Transformations de Kravchuk

Nous identifions des fonctions sur $\{0, 1, \dots, N\}$ avec \mathbb{M}^{N+1} et les transformées de Kravchuk via l'action de la matrice $\Phi^{(N)}$ sur cet espace. Pour N donné, Φ désigne $\Phi^{(N)}$. Pour notre transformation standard, nous pensons à des vecteurs de ligne avec multiplication par Φ sur la droite. Ainsi, la transformée F d'une fonction f est donnée par

$$F(j) = \sum_n f(n)k_n(j, N) \text{ ou } F^\dagger = f^\dagger \Phi,$$

où, par exemple f est le vecteur colonne avec les entrées les valeurs correspondantes de f . La formule d'inversion est commodément exprimée en termes de matrices.

Proposition 3.2. Soit P la matrice diagonale

$$P = \text{diag}\left((\lambda p)^N, \dots, (\lambda p)^{N-j}, \dots, 1\right)$$

Soit P' la matrice diagonale

$$P' = \text{diag}\left(1, \dots, (\lambda p)^j, \dots, (\lambda p)^N\right),$$

Alors

$$\Phi P \Phi = \lambda^N P';$$

Démonstration. L'équation matricielle est la même que l'identité correspondante via la fonction génératrice. À savoir,

$$\sum_{i,j,n} v^i k_i(n, N) (\lambda p)^{N-n} k_n(j, N) w^j \binom{N}{j} = \lambda^N (1 + \lambda p v w)^N.$$

Tout d'abord, sommer sur i , en utilisant la fonction génératrice $G(v)$, j étant remplacé par n . Alors sommer sur n , en utilisant à nouveau la fonction génératrice. Enfin, en sommant sur j en utilisant le théorème binomial, on trouve le résultat souhaité, via $p + q = 1$. \square

Corollaire 1.

$$\Phi^{-1} = \lambda^{-N} P \Phi P'^{-1}$$

Ce qui est la base d'un algorithme d'inversion efficace, étant une simple modification de la transformation d'origine.

3.1.3 Convolution

Correspondant au produit de deux transformées F et G est la convolution des fonctions originales f et g . On a, suivant la preuve de la formule de linéarisation,

$$\begin{aligned} F(j)G(j) &= \sum_{\ell, m} f(\ell)g(m)k_\ell(j)k_m(j) \\ &= \sum_n k_n(j) \sum_{\alpha, \beta, \delta} \frac{n!}{\alpha! \beta! (n - \alpha - \beta)!} \binom{N - n}{\delta} \\ &\quad \times \left(\lambda(q - p)\right)^{n - \alpha - \beta} (\lambda^2 p q)^\delta f(n - \beta + \delta)g(n - \alpha + \delta). \end{aligned}$$

Ainsi, nous pouvons définir la convolution de deux fonctions f et g sur $\{0, 1, \dots, N\}$ par :

$$\begin{aligned} (f \star g)(n) &= \sum_{\alpha, \beta, \delta} \binom{n}{\alpha, \beta, n - \alpha - \beta} \binom{N - n}{\delta} \\ &\quad \times \left(\lambda(q - p)\right)^{n - \alpha - \beta} (\lambda^2 p q)^\delta f(n - \beta + \delta)g(n - \alpha + \delta) \end{aligned} \quad (3.13)$$

et on la relation

$$F(j)G(j) = (f \star g)(n)k_n(j).$$

Maintenant, en utilisant la formule d'inversion, le corollaire 1, nous avons la relation

$$(f \star g)(n) = \lambda^{-N} \sum_j F(j)G(j)(\lambda p)^{N-n-j}k_j(n)$$

pour la convolution des fonctions.

3.2 Cas particulier des polynômes symétriques

Pour les polynômes symétriques de Kravchuk, il est commode de considérer $\lambda = 2$ pour avoir la fonction génératrice :

$$G(v) = (1 + 2qv)^{N-j}(1 - 2pv)^j = (1 + v)^{N-j}(1 - v)^j = \sum_n v^n k_n(j, N).$$

Alors que j va de 0 à N , la somme $x = N - 2j$ va de $-N$ à N avec le pas de 2. Maintenant, $q - p = 0$ et $\sigma^2 = 1$.

En termes de $x = k_1 = N - 2j$, on écrit $k_n(j, N) = K_n(x, N)/n!$. Nous avons la récurrence

$$xK_n = K_{n+1} + n(N + 1 - n)K_{n-1} \quad (3.14)$$

aux conditions initiales $K_0 = 1$, $K_1 = x$.

Par exemple, nous pouvons générer les prochains polynômes dont la représentation graphique est donnée par la figure 3.1 sur laquelle il s'aperçoit nettement que la symétrie dont il est question considère les valeurs négatives de x .

$$\begin{aligned} K_2 &= x^2 - N, \\ K_3 &= x^3 + (2 - 3N)x, \\ K_4 &= x^4 + (8 - 6N)x^2 + 3N^2 - 6N \end{aligned}$$

Les identités et récurrences spéciales sont valables avec $\lambda = 2$, $p = q = 1/2$ et simplifiées en conséquence. L'intérêt particulier est la simplification de la structure de convolution.

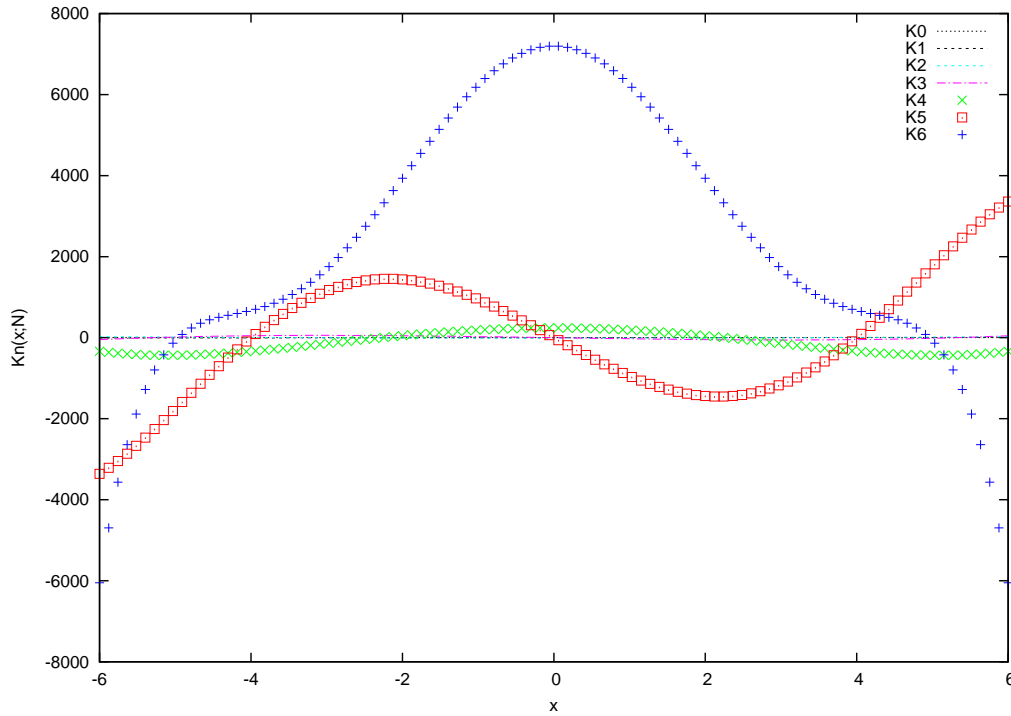


FIGURE 3.1 – Représentation graphique de premiers polynômes de Kravchuk : Cas symétrique 2.1

3.2.1 Coefficients de linéarisation

Nous voulons l'expression du produit $k_l k_m$ en termes de k_n . Dans le théorème 3.1, puisque $q = p$, nous avons la condition $l + m - n = 2\delta$ et la somme sur delta disparaît. Cela conduit à un ensemble particulier de conditions, à savoir que les nombres l, m et n satisfont aux conditions qu'ils devraient former les côtés d'un triangle. Alors, définissons la *fonction triangle* par

$$\Delta(l, m, n) = \frac{\left(\frac{l+m+n}{2}\right)!}{\left(\frac{-l+m+n}{2}\right)! \left(\frac{l-m+n}{2}\right)! \left(\frac{l+m-n}{2}\right)!} \quad (3.15)$$

où tous les termes avec une factorielle doivent être non négatifs. Notez que cela est un coefficient multinomial.

Proposition 3.3. *Dans le cas symétrique, l'expression du produit $k_l k_m$ est*

$$k_l(j) k_m(j) = \sum \binom{n}{l-m+n} \binom{N-n}{l+m-n} k_n(j) \quad (3.16)$$

Alternativement, nous avons

$$k_l(j)k_m(j) = \sum \left(\frac{N}{l+m+n} \right) \frac{\Delta(l, m, n)}{\binom{N}{n}} k_n(j) \quad (3.17)$$

Remarque 3.1. Si $l + m \geq N$, les deux côtés diffèrent par un polynôme disparaissant sur le spectre $\{-N, 2 - N, \dots, N - 2, N\}$.

En effet, la forme «triangulaire» découle de la forme binomiale en réarrangeant les factorielles.

3.2.2 Calcul des coefficients de linéarisation en utilisant la fonction génératrice

La formule (2.26) donne

$$F(t) = (1+t)^{N-x}(1-t)^x = \sum_{\ell} t^{\ell} k_{\ell}(x, N)$$

et

$$F(s) = (1+s)^{N-x}(1-s)^x = \sum_m t^m k_m(x, N)$$

Par suite,

$$\begin{aligned} F(t)F(s) &= (1+t)^{N-x}(1-t)^x(1+s)^{N-x}(1-s)^x \\ &= \left(1 - (t+s+ts) + 2ts\right)^x (1+t+s+ts)^{N-x} \\ &= \sum_{k=0}^x \binom{x}{k} (2ts)^k \left(1 - (t+s+ts)\right)^{-k} \left(1 - (t+s+ts)\right)^x (1+t+s+ts)^{N-x} \\ &= \sum_{k=0}^x \binom{x}{k} \left[\frac{2ts}{1 - (t+s+ts)} \right]^k \sum_n k_n(x, N) (t+s+ts)^n \\ &= \left[1 + \frac{2ts}{1 - (t+s+ts)} \right]^x \sum_n k_n(x, N) (t+s+ts)^n \\ &= \left[1 + \frac{2ts}{1 - (t+s+ts)} \right]^x \sum_n k_n(x, N) \sum_{\alpha+\beta+\gamma=n} \binom{n}{\alpha, \beta, \gamma} t^{\alpha+\gamma} s^{\beta+\gamma}. \end{aligned}$$

De manière que, le coefficient de k_n est

$$\left[1 + \frac{2ts}{1 - (t+s+ts)} \right]^x \sum_{\alpha+\beta+\gamma=n} \binom{n}{\alpha, \beta, \gamma},$$

avec $\alpha + \beta + \gamma = n$, $\alpha + \gamma = \ell$ et $\beta + \gamma = m$.

3.2.3 Transformations de Kravchuk - Inversion

Dans le cas symétrique, les matrices P et P' de la proposition 3.2 et du corollaire 1 deviennent matrices d'identité. Ainsi, nous avons

$$\Phi^2 = 2^N I \quad (3.18)$$

$$\Phi^{-1} = 2^{-N} \Phi \quad (3.19)$$

. et L'inversion est donc essentiellement une application immédiate de transformation originale .

3.2.4 Convolution

Correspondant au produit de deux transformées F et G est la convolution des fonctions d'origine f et g . En équation (3.13), la condition $q - p = 0$ implique $n = \alpha + \beta$. On écrit a pour α , remplacer $\beta = n - a$ et écrire b pour δ . Cela donne pour la convolution

$$(f \star g)(n) = \sum_{a,b} \binom{n}{a} \binom{N-n}{b} f(a+b)g(n-a+b). \quad (3.20)$$

Nous avons la relation

$$F(j)G(j) = \sum_n (f \star g)(n)k_n(j)$$

et l'inversion se simplifie

$$(f \star g)(n) = 2^{-N} \sum_j F(j)G(j)k_j(n)$$

pour la convolution des fonctions originales.

Conclusion

De nombreux travaux sur les polynômes orthogonaux de variable discrète définissent les polynômes de Kravchuk comme un cas particulier de ceux de Meixner de première espèce.

Les considérations de ce mémoire partent de l'équation aux différences de type hypergéométrique de laquelle se dégage la fonction de poids des polynômes de Kravchuk via l'équation de Pearson.

Des propriétés importantes s'en suivent telles que la formule de Rodrigues, la relation d'orthogonalité, la relation de récurrence à trois termes, la forme hypergéométrique, la fonction caractéristique et la fonction génératrice.

L'utilisation de cette fonction génératrice a servi d'outil pour faire ressortir les coefficients de linéarisation et pour cela, il y a lieu d'affirmer que l'objectif est atteint.

Pour vérifier l'exactitude de certains résultats, les logiciels matlab et R sont utilisés ainsi que mapple pour certains calculs qui paraissent fastidieux à la main. A cela s'ajoute, pour certains cas, la visualisation graphique par Gnuplot.

Compte tenu de la diversité de formes de polynômes de Kravchuk bien qu'ils aient tous pour fonction de poids la fonction de distribution binomiale, beaucoup d'autres choses restent à explorer. C'est entre autres, l'identification des formes dont les coefficients de connexion ne sont pas encore élucidés afin d'en dégager les éventuelles relations de récurrence, étendre l'étude au cas multiple, réaliser certaines manipulations numériques soit pour générer les polynômes ou leurs coefficients de linéarisation soit pour visualiser le comportement asymptotique.

Bibliographie

- [1] ALENEZI, A. M. *Integral zeroes of Krawtchouk polynomials* . Master of Philosophy in Mathematics : Brunel University UK, 2012
- [2] ARVESÚ, J. COUSSEMENT, J. VAN ASSCHE, W. Some discrete multiple orthogonal polynomials , *Journal of computational and applied mathematics*, 2003, 153, 19-45.
- [3] ASHANGUL, C. *Des Mathématiques pour les Sciences 2, Corrigés des Exercices et Problèmes* . De Boeck Supérieur s.a, 2013.
- [4] CHAGGARA, H. WOLFRAM, K. On Linearization and Connection Coefficients for Generalized Hermite Polynomials, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2011.
- [5] CHIHARA, T. S. *An introduction to Orthogonal Polynomials*. New York : Dover publication inc, 1978.
- [6] FEINSIVLVER, P. SCHOTT, R. Krawtchouk transforms and convolutions. *Bulletin of Mathematical Sciences*, 2019, Vol. 9, No. 2, 1950009.
- [7] FUNDP. *Discrete Semi Classical Orthogonal Polynomials-Generalized Meixner*. Journal of Approximation Theory, 1986.
- [8] GAUTHIER, B. *Calcul symbolique sur les séries hypergéométriques* . Thèse de doctorat de l'Université de Marne-la-Vallée, 1999.
- [9] GAUTSCHI, W. *Orthogonal Polynomials Computation and Approximation* . Oxford University Press, 2004.
- [10] JOOSTE, A. JORDAAN, K. Bounds for zeros of Meixner and Kravchuk polynomials . *LMS Journal of Computation and Mathematic*, 2014
- [11] KOEKOEK, R. *Hypergeometric Orthogonal Polynomials and Their q-Analogues*. Springer Verlag-Berlin Heidelberg, 2010 .
- [12] MOURAD, E.H.I. *Classical and Quantum Orthogonal Polynomials in one Variable* . Cambridge University Press, 2009.
- [13] NDAYIRAGIJE, F. *Fonctions Spéciales : Mastère I Maths Fondamentales et Appliquées*. Université du Burundi, 2017-2018.
- [14] NIKIFOROV, A. F. SUSLOV, S. K. *Special Functions of Mathematical Physics* . LCCPD, Birkhäuser Verlag Basel, Germany, 1988.
- [15] NIKIFOROV, A. F. SUSLOV, S. K. UVAROV, V. B. *Classical Orthogonal Polynomials of a Discrete Variable* . Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York-London-Paris-Tokyo-Hong Kong-Barcelona-Budapest, 1984.

- [16] RONVEAUX, A. *Polynômes Orthogonaux 1979-1991* . FUNDP-Namur, 1991.
- [17] STRODIOT J,-J. *An Introduction to Optimization* . Department of mathematics FUNDP-Namur, 2007-2008.
- [18] SZEGÖ, *Orthogonal polynomials* . American mathematical society, 2000.
- [19] SAPORTA, G. *Probabilités, Analyse des données et StatiSaportastique*. 3e Ed.révisée. Paris : Editions Technip, 2011.
- [20] SAPORTA, G. *Probabilités, Analyse des données et Statistique*. 2e Ed. Paris : Editions Technip, 2006.

- [21] TSEHAYE, K. A. Linearization and Connection Problems for the Symetric Meixner-Pollaczek Polynomials . *IJ PAM*, 2004.
- [22] VERMEIRE, L. *Cours de Probabilités et Statistique inférentielle*. Mastère I Maths fondamentales et appliquées, Université du Burundi, 2017-2018.
- [23] VAN ASSCHE, W. *Physique théorique et mathématique*. Mastère I Maths fondamentales et appliquées, Université du Burundi, 2017-2018.
- [24] VAN ASSCHE, W. *Othogonal Polynomials and Painlevé Equations*. Australian Mathematical Society Lecture Series 27, Cambridge University Press, 2018.
- [25] VAN ASSCHE, W. *Polynômes orthogonaux : Problèmes contemporains*. séminaire animé à l'Université du Burundi, juillet 2018.

Annexe

Illustration des zéros de polynômes de Kravchuk avec R

```

par(mfrow=c(3,2))

#Premier graphique
n=5
N=7
A <- -1
f <- -1
C <- -1
y <- -1
M=1
K=0
p=0.1
x <- seq(0,N, by=0.001)

for (k in (1:n))

  f <- f*k
  g <- 1/(f*p^k)
  A <- A*(-n+k-1)
  C <- C*(-N+k-1)
  y <- y*(-x+k-1)
  K <- K+A*y*g/C
  M <- M*(-N+k-1)

K <- p^n*M*(1+K)
plot(x,K,ylab="K5(x;0.1,7)",type="l")
abline(h=0,col="red")

#deuxieme graphique

n=5
N=10
A <- -1
f <- -1
C <- -1
y <- -1
M=1
K=0
p=0.45

x <- seq(0,N, by=0.001)

for (k in (1:n))

  f <- f*k
  g <- 1/(f*p^k)
  A <- A*(-n+k-1)
  C <- C*(-N+k-1)
  y <- y*(-x+k-1)
  K <- K+A*y*g/C
  M <- M*(-N+k-1)

K <- p^n*M*(1+K)
plot(x,K,ylab="K5(x;0.45,10)",type="l")
abline(h=0,col="red")

#troisieme graphique
n=5
N=7
A <- -1
f <- -1
C <- -1
y <- -1
M=1
K=0
p=0.9
x <- seq(0,N, by=0.001)

for (k in (1:n))

  f <- f*k
  g <- 1/(f*p^k)
  A <- A*(-n+k-1)
  C <- C*(-N+k-1)
  y <- y*(-x+k-1)
  K <- K+A*y*g/C
  M <- M*(-N+k-1)

K <- p^n*M*(1+K)
plot(x,K,ylab="K5(x;0.9,7)",type="l")
abline(h=0,col="red")

#quatrieme graphique
n=5
N=8

```

```

A <-1
f <-1
C <-1
y <-1
M=1
K=0
p=0.99
x <- seq(0,N, by=0.001)

for (k in (1:n))

  f <- f*k
  g <- 1/(f*p^k)
  A <- A*(-n+k-1)
  C <- C*(-N+k-1)
  y <- y*(-x+k-1)
  K <- K+A*y*g/C
  M<- M*(-N+k-1)

K <- p^n*M*(1+K)
plot(x,K,ylab="K5(x;0.99,14)",type="l")
abline(h=0,col="red")

#cinquieme graphique
n=5
N=14
A <-1
f <-1
C <-1
y <-1
M=1
K=0
p=0.99
x <- seq(0,N, by=0.001)

for (k in (1:n))

  f <- f*k
  g <- 1/(f*p^k)
  A <- A*(-n+k-1)
  C <- C*(-N+k-1)
  y <- y*(-x+k-1)
  K <- K+A*y*g/C
  M<- M*(-N+k-1)

```