UNIVERSITÉ DU BURUNDI
GRENIER DU SAVOIR DU BURUNDI
Dépôt institutionnel officiel
https://repository.ub.edu.bi

Quelques inégalités sur les sous-variétés de type demi-lumière de codimension deux

Irakoze, Natacha; Sous la direction de : Pr Karimumuryango Ménédore

2024
UB/IPA-ENS
https://repository.ub.edu.bi/handle/123456789/1730

Document téléchargé depuis le **Grenier du Savoir du Burundi** — https://repository.ub.edu.bi

UNIVERSITE DU BURUNDI - ECOLE NORMALE SUPERIEURE

Institut de Pédagogie Appliquée
Département de Mathématiques

Département des Sciences Naturelles
Section de Mathématiques

MASTER CONJOINT EN DIDACTIQUE DES SCIENCES

Quelques inégalités sur les sous-variétés de type demi-lumière de codimension deux

Par
IRAKOZE Natacha

Sous la direction de

Pr. KARIMUMURYANGO Ménédore

.

Mémoire présenté et défendu publiquement en vue de l'obtention du Diplôme de Master en **Didactique des Sciences, Option : Mathématiques**

Bujumbura, août 2024

Composition du Jury

Président	:	Pr NIBARUTA Gilbert
Secrétaire	:	Dr NGENDAKUMANA Ancille
Directeur de Mémoire	:	Pr KARIMUMURYANGO Ménédore

Dédicaces

A Dieu Tout puissant;
A mon regretté père NGIRIYABANDI Marcien;
A ma mère BANZANIYE Anastasie;
A mon époux Msc NIYOKINDI Aaron;
A mes enfants;
A mes sœurs;
A toutes mes connaissances;

Je dédie ce mémoire.

Remerciements

Au terme de ce travail de mémoire de master, qu'il me soit permis de remercier sincèrement le directeur de mon travail de mémoire Prof. KARIMUMURYANGO Ménédore. Elle a bien guidé mon travail de recherche et ses conseils m'ont été d'une grande utilité.

Mes vifs remerciements sont également adressés à tous les enseignants depuis l'école primaire jusqu'au master conjoint (ENS-IPA) et plus particulièrement à tous les enseignants de master conjoint, option mathématique. Qu'ils trouvent ici l'expression de ma profonde gratitude pour la formation qu'ils m'ont dispensée.

J'exprime enfin l'immense gratitude à ma famille et à mes fidèles compagnons avec qui j'ai partagé les soucis et les tâches durant notre séjour au cours de la formation du cycle de master.

A chacun et à tous, je dis merci.

Résumé

Le mémoire intitulé "Quelques inégalités sur les sous variétés de type demi-lumière de codimension deux" développe les inégalités optimales sur les sous variétés de type demi-lumière d'une variété Lorentzienne.

En effet, à partir des inégalités et des notions existants sur les sous variétés d'un espace réel prouvées par Bang Yen Chen Ricci, nous avons développe la théorie et les applications des inégalités optimales sur les sous variétés de type demi-lumière qui consiste à déterminer les relations impliquant les principaux invariants intrinsèque et extrinsèque sur les sous-variétés de type demi-lumière de codimension deux.

Les mots clés : courbure, sous-variétés de types demi-lumières, variétés Lorentziennes

Abstract

The dissertation entitled "Some inequalities on half-light type submanifolds of codimension two" develops the optimal inequalities on the submanifolds of type half-light of a Lorentzian variety.
Indeed, from existing inequalities and notions on the submanifolds of a space real proven by Bang Yen Chen Ricci, we developped the theory and apps optimal inequalities on the submanifolds of half-light type which consists of determine the relationships involving the main intrinsic and extrinsic invariants on the half-light type submanifolds of codimension two.

Key words : **curvature, half-lightlike submanifold, lorentzian manifold**.

Table des matières

composition du jury i

Dédicaces ii

Remerciements iii

Résumé iv

Abstract v

Table des matières vi

Avant-propos ix

Introduction générale 1

1 Quelques notions de base sur la géométrie différentielle 3

1.1 Difféomorphisme, Immersion, Submersion et plongement 3

1.2 Théorèmes 4

1.3 Variétés différentielles 4

1.3.1 Quelques notions sur un espace topologique 4

1.3.2 Quelques notions sur une variété topologique 5

1.3.3 Définition d'une variété différentielle 5

1.3.4 Définition et exemples d'un difféomorphisme 5

1.3.5 Définition de deux variétés différentiables 6

1.4 Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$ 6

1.4.1 Théorème du rang 7

1.4.2 Espace tangent à une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ 8
1.5 Espace tangent à une variété différentiable 9
1.5.1 Définition d'un espace tangent 9
1.5.2 Autre définition de l'espace tangent à une variété différentiable 9
1.5.3 Définition d'un espace cotangent 10
1.5.4 Définition d'un fibré tangent 10
1.5.5 Définition d'un fibré cotangent 11
1.5.6 Différentielle d'une application entre les variétés différentiables . . . 11

2 Géométrie des sous-variétés semi-riemannienne 12
2.1 Variétés semi-riemannienne 12
2.1.1 Métrique semi-riemannienne 13
2.1.2 Connexion linéaire 14
2.1.3 Tenseur de courbure 15
2.2 Sous-variétés semi-riemannienne 15
2.3 Equations de base des sous-variétés semi-riemannienne 16
2.3.1 Equation du premier ordre 18
2.3.2 Equation du second ordre 19
2.3.3 Sous-variétés minimales, sous variétés ombiliques 20
2.3.4 Cas particulier : sous variété totalement géodésique 20
2.4 Sous-variétés de types lumière 21
2.4.1 Sous-variété de type lumière à écran conforme 22
2.4.1.1 La distribution écran 22
2.4.2 Equations fondamentales sur les hypersurfaces de type lumière 23
2.4.2.1 Formule de Gauss et Weingatern par projection sur l'écran . 23
2.4.3 Hypersurface de type lumière à écran conforme 23

3 Sous-variétés de type demi-lumière et inégalités optimales 28
3.1 Sous-variétés de type lumière 28
3.2 Courbures sur les sous-variétés de types demi-lumières 32

3.3 Quelques inégalités optimales pour les sous variétés de type demi-lumière . . 35

Conclusion générale **45**

Bibliographie **46**

Avant-propos

Ce mémoire rentre dans le cadre de l'obtention du diplôme de Master en Didactique des Sciences, option Mathématiques et s'oriente dans le domaine de la géométrie et physique.
Il développe la théorie et les applications sur les inéquations optimales pour les sous-variétés de type demi-lumière de codimension deux, qui consiste à déterminer les relations impliquant les principaux invariants intrinsèques et extrinsèques.

L'idée de ce mémoire est venue du constant que la géométrie de sous-variétés d'une variété riemannienne est entièrement développée ; elle est la contre partie des sous-variétés de type lumière dont les sous-variétés de type demi-lumière est l'une de classe spéciale de cette dernière.
En effet, c'est à partir des notions existantes pour les sous-variétés que nous avons développé la théorie et les applications sur les inéquations optimales.

Introduction générale

Les inégalités optimales sur les sous-variétés de type demi-lumière de codimension deux ont une importance capitale dans les domaines de mathématique en particulier la géométrie et la physique.

Établir les relations impliquant les principaux invariants intrinsèques et extrinsèques pour les sous-variétés est l'un des problèmes fondamentaux dans la théorie des sous-variétés. Quelques principales inégalités pour les sous variétés d'un espace réel sont initialement prouvées par Bang-young chen (1996) [6], [7], [8], [9].

Des inégalités relatives ont été établies pour les différentes classe d'une sous-variété riemannienne dans une variété ambiante dotée de différentes classes de structures géométriques variées [2], [19].

M. Gulbahar, E. Kilic, and S. Keles [12] ont prouvé quelques inégalités générales d'une sous-variété de type r-lumière d'une variété semi-riemannienne.

En 1992, D.H Jin et Bejancu ont introduit une classe speciale appelée sous-variété de type demi-lumière M de codimension 2. Les sous variétés de type demi-lumière est le cas spécial d'une sous-variété de type r-lumière tel que $r > 0$.

Récemment B. Chen [6] a montré toutes les applications significatives pour ces types d'inégalités à une sous variété non-dégénérée. Il est naturel de trouver une sous-variété de type lumière dans une variété semi-Riemannienne, à cause de sa métrique indéfinie. La théorie générale des sous-variétés de type lumière a été développée dans [16] dont le travail a été présenté sous forme d'ouvrage. La principale différence entre les sous-variétés de type lumière et sous-variétés non dégénérées (de type demi-lumière) est le fibré vectoriel normal $TM^{\perp}$ qui intercepte le fibré tangent TM. Ainsi les auteurs [12] et [15] ont donné quelques relations impliquant la courbure sur l'hypersurface de type lumière d'une variété Lorentzienne.

Le principal but de notre travail est d'établir les relations impliquant les principaux invariants intrinsèques et extrinsèques pour les sous-variétés de type demi-lumière d'une variété Lorentzienne à partir de quelques inégalités optimales sur les sous variétés de type demi-lumière de codimension deux.

Le travail s'articule sur trois chapitres. Le premier chapitre introduit quelques notions de base sur géométrie différentielle qui permettent de comprendre la suite du travail. Il s'agit des notions de difféomorphisme, immersion, submersion et plongement ; variétés différentielles ; Espace tangent à une variété différentiable ; fibré tangent ; différentielle d'une application entre les variétés différentiables.

Le deuxième chapitre développe quelques notions de Géométrie de sous-variétés semi-riemannienne : variétés semi-riemannienne, sous-variétés semi-riemannienne, équations de base des sous-

variétés semi riemannienne, sous-variétés de type lumière.

Dans le troisième et dernier chapitre du travail développe les notions de sous-variétés de type lumière et inégalités optimales.

Une conclusion générale est donnée à la fin du travail et quelques développements des inégalités optimales.

Chapitre 1

Quelques notions de base sur la géométrie différentielle

1.1 Difféomorphisme, Immersion, Submersion et plongement

On se donne $n, p \in \mathbb{N}^*$, avec $p \leq n$, et $k \in \mathbb{N}^* \cap \{\infty\}$.

Définition 1 (Difféomorphisme) *Soient U et V des ouverts de $\mathbb{R}^n$.*
On dit que $f : U \to V$ est un difféomorphisme si f est une bijection et si f et sa réciproque sont de classe C^k.

- On dit que f est un C^k-difféomorphisme local en $x \in U$, s'il existe U_x et $V_{f(x)}$ voisinages respectifs de x dans U et de $f(x)$ dans V tels que $V_{f(x)} = f(U_x)$ et l'application induite :

$f : U_x \to V_{f(x)}$ est un C^k-difféomorphisme [3].

Définition 2 (Immersion) *Soit a un point d'un ouvert U de $\mathbb{R}^p$.*
On dit que $f : U \to \mathbb{R}^n$ est une immersion de classe C^k en a si f est de classe C^k, et df_a est injective ; si ceci est vérifié en tout $a \in U$, on dit que f est une immersion [3].

Définition 3 (Submersion) *Soit a un point d'un ouvert U de $\mathbb{R}^n$.*
On dit que $f : U \to \mathbb{R}^{n-p}$ est une submersion de classe C^k en a si f est de classe C^k et df_a est surjective ; si ceci est vérifié en tout point $a \in U$, on dit que f est une submersion [3].

Définition 4 (Plongement) *Soient N et M deux variétés de classe $C^k > 1$.*
On dit que $f : M \to N$ est un plongement de classe C^k si $f : M \to f(M)$ est un homéomorphisme et f est en tout point une immersion [3].

Exemple 1 *Des exemples immédiats de ces définitions sont respectivement l'identité $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$,*

l'injection

$$x : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n, (x_1, \ldots, x_p) \mapsto (x_1, \ldots, x_p, 0, \ldots, 0)$$

et la projection

$$\pi : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^{n-p}, (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \cdots, x_{n-p})$$

1.2 Théorèmes

Théorème 1 (Forme normale locale des immersions) .

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^p$ contenant 0 et $f : U \to \mathbb{R}^n$ une immersion de classe C^k en 0 telle que $f(0) = 0$. Alors il existe λ une C^k-difféomorphisme local en $0 \in \mathbb{R}^n$ tel qu'au voisinage de $0 : \lambda o f(x^1, \cdots, x^n) = (x^1, \cdots, x^p, 0, \cdots, 0)$ « changement de coordonnées au but » [21].

Théorème 2 (Forme normale locale des submersions) .

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant 0 et soit $f : U \to \mathbb{R}^{n-p}$ une submersion c^k en 0 telle que $f(0) = 0$. Alors il existe ϕ un c^k-difféomorphisme locale en $0 \in \mathbb{R}^n$ tel que :
$fo\phi(x^1, \cdots, x^n) = (x^1, \cdots, x^{n-p})$ « changement de coordonnées à la source » [21].

Théorème 3 (inversion locale) .

Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to V$ de classe $c^k, k \geq 1$. On suppose qu'il existe $x_0 \in U$ tel que $dt(Df)_{x_o} \neq 0$, il existe alors un ouvert $U' \in V$ contenant x_0 tel que f/v' est un c^k-difféomorphisme de $U' \to f(v')$ [21].

On applique le théorème d'immersion locale pour démontrer les théorèmes 1 et 2, On a :

$$\nabla g : (x^1, \cdots, x^p, y^{p+1}, \cdots, y^n) \mapsto (f_1(x), \cdots f_p(x), f_{p+1}(x) + y^{p+1}, \cdots f_n(x) + y^n) \tag{1.1}$$

dans le cas d'une immersion, après permutation éventuelle des (f_j)

$$\nabla h : (x^1, \cdots, x^n) \mapsto (f_1(x), \cdots, f_{n-p}(x), x^{n-p+1}, \cdots x^n) \tag{1.2}$$

dans le cas d'une submersion. Cette clarification permet d'envisager des définitions d'espaces géométriques de dimensions p et de régularité c^k dans $\mathbb{R}^n$.

1.3 Variétés différentielles

1.3.1 Quelques notions sur un espace topologique

Soient M un ensemble et O une famille de sous-ensembles de M appelés ouverts de M satisfaisant :

i) L'ensemble vide et $M \in O$;

ii) O est stable par l'intersection finie de ses éléments ;

iii) O est stable pour toute réunion quelconque de ses éléments.

Une famille $(\Omega_\alpha) - \{\alpha \in I\}$ de O avec I un ensemble d'indices quelconque telle que $U_\alpha \in I$, $\Omega_\alpha = M$ est un recouvrement de M .

• Un recouvrement de M est dit localement fini si tout p de M possède un voisinage rencontrant un nombre fini d'ouverts de ce recouvre ment.

• Le couple (M,O) est appelé espace topologique. Il est séparé si deux points distincts peuvent être séparés par 2 ouverts disjoints de M.

• L'espace topologique (M,O) est dit paracompact si de tout recouvrement ouvert de M on peut extraire un sous recouvrement localement fini. Il est dit connexe s'il n'est pas réunion de deux ouverts non vides disjoints.

1.3.2 Quelques notions sur une variété topologique

Une variété topologique est un ensemble M tel que :
— M est un espace topologique séparé paracompact.
— Tout point $p \in M$ possède un voisinage $u \in M$ homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^n$ où $n \in \mathbb{N}^*$ est la dimension de la variété topologique.
— Si φ est un tel homéomorphisme, un couple (u,φ) est appelé carte locale en $p \in M$.
— Une collection $\{(u_i,\varphi_i)\}_{i\in I}$ de cartes locales telle que $M = U_i u_i$ est appelé Atlas de M. Chaque ouvert u_i est appelé voisinage coordonnée et chaque φ_i est une fonction de coordonnées.
— Deux Atlas de M sont dits compatibles si leur réunion est un Atlas de M.
— Un Atlas maximal est un Atlas qui contient toute carte locale compatible avec lui.

1.3.3 Définition d'une variété différentielle

Un ensemble M est appelé variété différentielle de classe C^k si :

- M est une variété topologique

- Il existe un Atlas $\{(u_i,\varphi_i)\}_{i\in I}$ de M tel que pour tout $i,\ j \in I$ tels que si $u_i \cap u_j \neq \varnothing$, alors l'application $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(u_i \cap u_j) \subset \mathbb{R}^n \to \varphi_j(u_i \cap u_j) \subset \mathbb{R}^n$ est de classe C^k.
L'Atlas $\{(u_i,\varphi_i)\}_{i\in I}$ est aussi dite de classe C^k.

Les fonctions $\varphi_j o \varphi_i^{-1}$ sont appelées fonctions de transitions ou changement de cartes. Ce sont des difféomorphismes.

• Une variété différentiable est dite orientable si tous les changements de cartes sont à jacobien positif.

1.3.4 Définition et exemples d'un difféomorphisme

Un difféomorphisme est une application bijective bicontinue et bidifférentiable ; est un homéomorphisme, bidifférentiable.

Exemples :

1. $\mathbb{R}^n$ est un seul atlas fait d'une seule carte locale $(\mathbb{R}^n, Id)$, Id application identité. C'est un difféomorphisme.
2. Soit M une variété différentiable, chaque ouvert U de M est une variété différentiable.
3. Le produit cartésien de variétés différentiables. On considère le produit cartésien $M \times N$ si $(U_i,\phi_i) i \in I$ et $(V_j,\phi_j) j \in J$ sont des atlas différentiables de M et N respectivement.

On montre que $U_i \times V_j, \langle \phi_i, \phi_j \rangle_{(i,j)\in I\times J}$ est un atlas de $M \times N$ et $M \times N$ est une variété différentiable de $dim = m \times n$.

1.3.5 Définition de deux variétés différentiables

Soient M et N deux variétés différentiables de dimension m et n respectivement.

• Une application $f : M \to \mathbb{R}$ est différentiable en un point $p \in M$ s'il existe une carte locale (M, ϕ) de M en p telle que l'application $fo\phi^{-1}$ est différentiable en $x = \phi(p)$.

• Une application $f : M \to N$ est différentiable en un point $p \in M$ s'il existe une carte locale (u, ϕ) de M en p et une carte locale (V, χ) de N en $f(p)$ telles que
$\tilde{f} : \phi(u) \subset \mathbb{R}^n \to \chi(V)$ avec $\tilde{f}_x = \chi o f o \phi^{-1}$ soit différentiable en $x = \phi(p)$. Cette définition ne dépend pas de la carte locale choisie.

• f est différentiable sur M si elle l'est en tout point de M.

On note par $C^\infty(M)$ l'ensemble des fonctions f différentiables sur M.

1.4 Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$

Définition 5 *Sous-variété de $\mathbb{R}^n$: Soit M un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$. On dit que M est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension p et de classe c^k, s'il vérifie l'une des assertions équivalentes suivantes :*

i) (Définition locale par redressement)
Pour tout x de M, il existe des voisinages respectifs U de x dans $\mathbb{R}^n$ et V de O dans $\mathbb{R}^n$, ainsi qu'un C^k-difféomorphisme $f : U \to V$, envoyant x sur O , et telle que $f(U \cap M) - U \cap (\mathbb{R}^p \times \{O\})$

ii) (Définition locale par fonction implicite)
Pour tout x de M, il existe un voisinage ouvert U de x dans $\mathbb{R}$ ainsi que $f : U \to \mathbb{R}^{n-p}$ une C^k submersion en x, telle que $U \cap M - f^{-1}(\{O\})$

iii) (Définition locale par paramétrage)
Pour tout x de M, il existe des voisinages respectifs U de x dans $\mathbb{R}$ et V de dans $\mathbb{R}^p$, ainsi que $f : V \to \mathbb{R}^p$ une C^k immersion en O, envoyant O sur x, et induisant un homéomorphisme $V \to U \cap M$

iv) (Définition locale par graphe) Pour tout x de M, on a un voisinage U de x dans $\mathbb{R}^n$, avec identification linéaire $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$, ouvert V de $\mathbb{R}^p$ et une fonction $f : V \to \mathbb{R}^{n-p}$ de classe C^k telle que $U \cap M$ soit le graphe de f c'est-à-dire
$U \cap M - \{(y, f(y))/y \in V\}$ [17].

i) $\Rightarrow$ *ii)* Soient x, U et f comme dans le point i) : on note $f_1, \cdots, f_n$ les composantes de f. Alors $g : U \to \mathbb{R}^{n-p}, x \mapsto f_{p+1}(x), \cdots, f_n(x)$ est une submersion de classe C^k car $g - foM$, et $g^{-1}(\{0\}) = U \cap M$

ii) $\Rightarrow$ *i)* On va utiliser le théorème de forme des submersions.
Soient donc x, u et f comme dans le point *ii)*, et $F - f(u+x)$, le théorème nous donne $\phi : V \to$

$(U-x)$ un C^k-difféomorphisme local tel que $Fo\phi(z^1,\cdots,z^n)\to(z^{p+1},\cdots,z^n)$.
Ainsi $\phi^{-1}(.-x):U\to V$ est un C^k difféomorphisme envoyant x sur O,
et si $y\in U\cap M, 0-f(y)-F(y-x)-Fo\phi[\phi^{-1}(y-x)]=0$ donc $y\in M$.

i) $\Rightarrow$ *iii)* Soient x,U,V et f comme dans 1.
Supposons que $f(x)-0$ alors si $W-V\cap(\mathbb{R}^p\times\{0\}),W$ est un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et f^{-1} (w est une submersion C^k, et un homéomorphisme $W\to U\cap M$.

iii) $\Rightarrow$ *i)* on va utiliser le théorème de forme normale locale des immersions. si x,U,V et f sont comme dans 3, alors quitte à restreindre U et V, il existe un C^k-difféomorphisme.

$\psi:U\to W$, tel que $\psi(x)-0$ et $\psi of:V\to W\cap(\mathbb{R}^p\times\{0\})$ est un c^k-difféomorphisme. Dans cette situation, $\psi(U\cap M)-\psi of(V)-W\cap(\mathbb{R}^p\times\{0\}$.

iv) $\Rightarrow$ *iii)* On prend x,U,V et f comme dans *iv)*, et on suppose que $0\in V$ et $f(0)-0$. Alors $F:y\to(y,f(y))$ est un homéomorphisme de V sur $U\cap M$ qui est de plus une immersion en O, vérifiant $F(0)-0$.

ii) $\Rightarrow$ *iv)* : Soient x,U,f comme dans 2. On pose $f-(f_1,\cdots,f_{n-p})$ et on suppose que $x-0$. Quitte à permuter les coordonnées, on peut supposer que la matrice

$$\frac{\partial f_j(0)}{\partial x_{p+i}}\quad 1\le i,j\le n-p \text{ est inversible} \tag{1.3}$$

Comme f est une submersion, la matrice complète de ses dérivées partielles en 0 admet au moins un mineur d'ordre $n-p$ inversible.

Soit $F:y\mapsto(y_1,\cdots,y_p,f(y))$.
Alors dF_0 est inversible (par blocs), d'inverse,disons $z\mapsto(z_1,\cdots,z_p,g(z))$. Quitte dans ce cas à restreindre, $U\cap M=f^{-1}(\{0\})=F^{-1}(\mathbb{R}^p\times\{0\})$ n'est autre que le groupe de g au dessus de $(\mathbb{R}^p\times\{0\})\cap\Delta_g$.

1.4.1 Théorème du rang

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et V un ouvert de $\mathbb{R}^p$. On dit qu'une application $f:U\to V$ est une application linéaire $(Df)_{x_0}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^p$ telle que :

$$\lim_{h\to0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)-(Df)_{x_0}-(Df)_{x_0}(h)}{\|h\|}=0 \tag{1.4}$$

$$f(x_0+h)-f(x_0)=(Df)_{x_0}(h)+\sigma(\|h\|) \tag{1.5}$$

où $\sigma(\|h\|)\to0$ lorsque $(\|h\|)\to0$

On montre que si $(Df)_{x_0}$ existe, elle est unique et donnée par :

$$(Df)_{x_0}=\begin{pmatrix}\frac{\partial f^1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial x_n}\\ \vdots & \cdots & \vdots\\ \frac{\partial f^p}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f^p}{\partial x_n}\end{pmatrix} \tag{1.6}$$

où

$$\frac{\partial f^i}{\partial x^j}=\lim_{t\to0}\frac{(x_0^1,\cdots,x_0^n+t+\cdots x_0^n-f^i(x_0^1,\cdots,x_0^n))}{t} \tag{1.7}$$

est la dérivée partielle de la fonction réelle $f^i(x)$ par rapport à la jième variable en x_0.

$(Df)_{x_0}$ est dite la différentielle de f en x_o et la matrice qui représente $(Df)_{x_0}$ est dite la matrice Jacobienne de f en x_0 [21].

Exemple 2 *La fonction* $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x-z,-xcosy,x+ze^y) \end{array}$ *est différentielle en* 0 *et sa différentielle en* 0 *est :*

$$(Df)_{(0,0,0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ cosy & -xsiny & 0 \\ 1 & ze^y & e^y \end{pmatrix}_{(0,0,0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Remarque 1 $D(fog)_{x_0} = (Df)_g(x_0) \times (Dg)(x_0)$

1.4.2 Espace tangent à une sous-variété de $\mathbb{R}^n$

On se donne M une sous-variété C^1 de $\mathbb{R}^n$ de dimension p et un point $x \in M$.

Définition 6 *Un vecteur v de* $\mathbb{R}^n$ *est tangent à M en x s'il existe* $\delta > 0$ *et* $C :]-\delta,\delta[\to \mathbb{R}^n$ *une courbe* C^1 *à image dans M telle que :* $C(0) = x$ *et* $C'(0) = v$.

On note T_xM l'ensemble des vecteurs tangents à M en x, que l'on appelle sous-espace (vectoriel) tangent à M en x

Proposition 1 *1. Si U est un voisinage ouvert de x dans* $\mathbb{R}^n$, *V un voisinage ouvert de* 0 *dans* $\mathbb{R}^n$, *et* $f : U \to V$ *un* c^1*-difféomorphisme tel que* $f(x) = 0$ *et* $f(U \cap M) = (\mathbb{R}^p \times \{0\}) \cap V$, *alors :* $T_xM = (df_x)^{-1}(\mathbb{R}^p \times \{0\})$

2. Si V est un voisinage ouvert de x dans $\mathbb{R}^n$, *et* $f : U \to \mathbb{R}^{n-p}$ *une submersion* C^1 *en x telle que* $U \cap M = f^{-1}(f(x))$, *alors :* $T_xM = ker(df_x)$

3. Si U est un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^p$, *U un voisinage de x dans* $\mathbb{R}^n$, *et* $f : V \to U$ *un paramétrage local de M en x avec* $f(0) = x$, *alors :* $T_xM = I_m(df_0)$

(1) La donnée d'une courbe C tracée sur M avec $C(0) = x$ et $\dot{C}(0) = v$ équivaut à celle de foc tracée sur $f(U \cap M)$ avec $foc(0) = 0$ et $\widehat{(foc)}(0) = df_x(v).ov$ les vecteurs tangents à une courbe linéaire sont des vecteurs de cette courbe droite. En particulier, T_xM est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension p.

Notez Bien : Si l'on remplace $\mathbb{R}$ par $\mathbb{C}$ et C^1 , les différentielles sont $\mathbb{C}$-linéaire en tant que différentielles de fonctions holomorphes, et donc T_xM est un sous-espace complexe de $\mathbb{C}^n$.

(2) Sens C : si C est une courbe tracée sur M telle que $C(0) = 0$ et $\dot{C}(0) = v$, alors comme $f(C(t)) = f(x)$ pour tout t petit car f est une équation locale de M près de x, et donc $df_x(v) = 0$: $v \in ker(df_x)$. Pour l'inclusion réciproque, on conclut simplement comme suit : T_xM et $kerdf_x$ sont des sous-espace vectoriels de $\mathbb{R}^n$, $dim\ T_x^M = p$, et f est une submersion donc $dim\ ker(df_x) = n-(n-p) = p$. Ainsi $T_xM = ker(df_x)$

(3) Sens C : Soit $v \in \mathbb{R}^p$; soit γ une courbe C^1 dans v, avec $\gamma(0) = 0$ et $\dot{\gamma}(0)$. Alors $c := fo\sigma$ est une courbe c^1 tracée sur M, telle que $C(0) = f(\gamma(0)) = x$ et $\dot{C}(0) = df_0(v)$. L'inclusion réciproque se traite à nouveau par un argument de dimension $dim(Im\ df_0) = p$, car df_0 est injective (f est une immersion en 0).

Exemple 3 *(1) $S^n = f^{-1}$, où $f : \mathbb{R}^{n+1}\ \{0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \|x\|^2$; ainsi $T_z s^n = ker(v \to 2\langle x, v\rangle) = x^{\perp}$.*

(2) Soit $f : U \to \mathbb{R}^{n-p}$($U$ ouvert de $\mathbb{R}^p$) est c^1, $M = graph(f) \subset \mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$, et $x_0 \in u$; on pose $y_0 = f(x_0)$ et $u = (x_0, y_0)$. Alors l'équation de $u + T_u M$ est : $y - y_0 = df_{x_0}(x - x_o)$.

1.5 Espace tangent à une variété différentiable

1.5.1 Définition d'un espace tangent

Soient M une variété différentiable de dimension m et $c^\infty(M)$ l'ensemble des fonctions différentiables sur M.

• Un vecteur tangent en un point $p \in M$ est toute application $\mathbb{R}$-linéaire $x_p : c^\infty(M) \to \mathbb{R}$ satisfaisant la règle de Leibniz :

$$X_p(f.g) = X_p(f)g(p) + f(p)X_p(g),\ \forall f, g \in c^\infty(M)$$

• L'ensemble des vecteurs tangents au point $p \in M$ est appelé espace tangent à M au point p noté T_pM.

L'espace tangent T_pM est un espace vectoriel de même dimension que M.

• Une base de cet espace vectoriel est donnée par les vecteurs tangents $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)\Big|_p$ définis par

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)\Big|_p = \frac{\partial(fo\phi^{-1})}{\partial u^i}(\phi(p))$$

où $\phi(p) = \left(x^1, \cdots, x^n\right)$ est un système de coordonnées en p et $(u^1, \cdots, u^n)$ sont des fonctions de coordonnées sur $\mathbb{R}^m$ et $f \in c^\infty(M)$ sans cette base, un vecteur tangent en p s'écrit $X_p = \sum_{i=1}^m x^i(p)(\frac{\partial}{\partial x^i})\Big|_p$ avec $X^i(p) = X_p(x^i)$ les composantes du vecteur X_p dans la base [21].

1.5.2 Autre définition de l'espace tangent à une variété différentiable

$\forall p \in M^n$, désignons c l'ensemble des courbes $\gamma : [-1 : 1] \to M$ telles que $\gamma(0) = p$ $\forall$ toute carte locale (u, ϕ) en p. Il est possible de trouver un $\varepsilon > 0$ telle que $\gamma[-\varepsilon, \varepsilon] \subset u$.

$\forall t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$, une représentation en coordonnées de γ est donc $\phi o \gamma$:

$$\phi\ o\ \gamma : [-\varepsilon, \varepsilon] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$$

On définit une relation d'équivalence par : $(\gamma \sim \gamma') \Leftrightarrow \frac{d}{dt}(\phi\ o\ \gamma_1)(t)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}(\phi\ o\ \gamma')(t)\Big|_{t=0}$
c-à-d les 2 courbes ont même vecteur tangent du point $p = \gamma(0)$.

Deux courbes sont donc équivalentes si à travers les cartes locales elles ont « même vecteur tangent en 0 dans $\mathbb{R}^m$ ». L'espace tangent en p à M que l'on note valence dans $\mathbb{C}$ par cette relation.

Chaque classe d'équivalence $[\gamma]$ représente un vecteur tangent en p à M. D'après la définition de la relation d'équivalence un représentant de chaque classe $[\gamma]$ est noté :

$$\gamma_p = \frac{d\gamma}{dt}\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}[(\phi\ o\ \gamma)(t)] \in \mathbb{R}^m,\ t = 0 \tag{1.8}$$

Les coordonnées composantes d'un vecteur de $\mathbb{R}^m$ se notent $(x^1, x^2, \cdots, x^m)$. Chaque vecteur tangent γ_p sera exprimé comme une combinaison linéaire de $\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p$ et on a que la famille $(\frac{\partial}{\partial x^i})$ constitue une famille génératrice de l'espace tangent T_pM c-à-d $(\frac{\partial}{\partial x^i})_p$ constitue une base de T_pM. Soit X un vecteur tangent à M. Un vecteur tangent à M se note :

$$X_p = X^1\frac{\partial}{\partial X^1} + X^2\frac{\partial}{\partial X^2} + \cdots X^m\frac{\partial}{\partial X^m} = \sum_{i=1}^{m} X^i(p)\left(\frac{\partial}{\partial X^i}\right)\Big|_p \tag{1.9}$$

ici $X^i(p) = X_p(x^i)$=composante de X en base $\frac{\partial}{\partial X^i}$.

1.5.3 Définition d'un espace cotangent

Soit M une variété différentiable de dimension m et T_pM l'espace tangent à M au point p. T_pM étant un espace vectoriel, il existe un espace vectoriel dual à T_pM dont les éléments sont des applications de T_pM dans $\mathbb{R}$. Cet espace vectoriel est noté T_p^*M et on l'appelle espace cotangent à M au point p.

Un élément de T_p^*M est appelé covecteur en p ou vecteur dual en p ou vecteur cotangent en p. C'est une 1-forme sur M.

Une base de T_p^*M est donnée par les covecteurs $dx^k(p)$ qui vérifient

$$dx^k(p)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}(p)\right) = \delta^i_j \tag{1.10}$$

où δ^i_j est le symbole de Kronecker.

1.5.4 Définition d'un fibré tangent

On appelle fibré tangent de la variété M la réunion disjointe de tous les espaces tangents $T_pM(p \in M)$; c'est-à-dire $TM = U_{p\in M}T_pM$.

Un élément de TM est un couple (p,X_p) avec $x_p \; o \; T_pM$. Pour une carte locale (u,ϕ) en p sur M avec coordonnées locales $(x^1,\cdots,x^m)$, le couple (p,X_p) est représenté en coordonnées par $(X_1,\cdots,X^m,X^1(p),\cdots,X^m(p)) \in \mathbb{R}^{2m}$.

Ainsi, TM est une variété différentiable de dimension $2m$.

Un champ de vecteur est toute application $x : M \to TM$ qui, à tout point $p \in M$, associe un vecteur tangent $X_p \in T_pM$.

1.5.5 Définition d'un fibré cotangent

On appelle fibré cotangent de la variété M et on note T^*M la réunion des espaces cotangents $T_p^*M,\ p \in M$, c'est-à-dire $T^*M = \cup_{p\in M} T_p^*M$.

Un élément de T^*M est formé par le couple (p,α) où $\alpha \in T_p^*M$ est une 1 forme sur M. Comme TM, la variété T^*M est une variété différentiable de dimension $2m$

Une forme différentielle w sur M est une application qui, a tout point $p \in M$, associe un élément de T_p^*M.

1.5.6 Différentielle d'une application entre les variétés différentiables

Définition 7 *Une application différentiable d'une variété différentiable M dans une variété différentiable N*

• *La différentielle de f en un point $p \in M$ est une application*

$$\begin{aligned} f_{*p} :\ & T_pM \to T_{f(p)}N \\ & X_p \longmapsto f_{*p}(X_p) \end{aligned} \tag{1.11}$$

telle que $f_{*p}(X_p)(g) := X_g(gof),\ \forall g \in C^\infty(N), \forall g \in C^\infty(N)$.

A une carte (u,ϕ) de M à un point p avec coordonnées locales $(x^1,\cdots,x^m)$ correspond une carte (v,ψ) en $f(p)$ sur N telle que $f(u) \subset v$ avec coordonnées locales $(y^1,\cdots,y^n)$ on a :

$$f_{*p}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)\Bigg|_p = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x^i}(y^j o f)(p)(\frac{\partial}{\partial y^j})f(p) \tag{1.12}$$

Cette expression donne une matrice par rapport aux bases $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p$ et $\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)f(p)$ qui détermine l'application $f * p$

• le pull-back de f en un point $p \in M$ est une application

$$\begin{aligned} f^* : T^*_{f(p)}N &\to T_p^*M \\ w &\longmapsto f^*(w) \end{aligned} \tag{1.13}$$

qui est telle que, $\forall X_p \in T_pM$ on a :

$$(f * w)(X) = w(f_*X). \tag{1.14}$$

Chapitre 2

Géométrie des sous-variétés semi-riemannienne

2.1 Variétés semi-riemannienne

Définition 8 *[18]Soit V un espace vectoriel réel, de dimension finie n. Une forme bilinéaire sur V est une fonction linéaire $g : V \times V \mapsto \mathbb{R}$,*

- *Elle est symétrique si pour tous, $u, v \in V$ on a : $g(u,v) = g(v,u)$*
- *La forme bilinéaire g définie sur V est dite :*

i) définie positive (respectivement négative) si $v \neq 0$, on a :$g(v,v) > 0$ respectivement $g(v,v) < 0$.

ii) Semi-définie positive (respectivement négative) si $v \neq 0$, on a $g(v,v) \geq 0$ (respectivement $g(v,v) \leq 0$).

iii) Dégénéré s'il existe $v \in V|\{0\}$ tel que $g(v,w) = 0 \; \forall \; w \in V$.
iv) Non dégénéré si $w \in V$ on a $g(v,w) = 0$, $v = 0$.

On appelle indice de la forme bilinéaire g un entier naturel q qui est la dimension maximale des sous-espaces vectoriels de V sur lesquels g est définie négative.
On a donc $0 < q \leq dim\, V$. Si $q = 0$ alors g est définie positive.

Soit $B = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de V. Si q est symétrique, alors elle peut être exprimée comme une $n \times n$ matrice symétrique notée $G = (g_{ij})$ avec $g_{ij} = g(e_i, e_j)$.

G est appelée matrice associée à la forme bilinéaire symétrique q relativement à la base B.

Définition 9 *1) On appelle produit scalaire semi-euclidien sur E, toute forme bilinéaire symétrique non dégénérée.*

2) Un espace vectoriel E munit d'un produit scalaire semi-euclidien est appelé vectoriel semi-euclidien.

3) Rappelons qu'une forme bilinéaire symétrique peut être représentée par une matrice diagonale.

Si cette forme est non dégénérée alors les éléments de la diagonale sont tous non nuls. On peut supposer quitte à normaliser, que ces éléments sont constitués de 1 et -1. Le nombre ou bien l'indice de la forme bilinéaire est alors le nombre k de fois qu'apparaît -1.

On dit que cette forme est de signature $(n-k,k)$ avec n qui est la dimension. Le cas où $k=1$ correspond à l'espace de Minkowski, $k=0$ correspond à l'espace Euclidien.

Un vecteur v de l'espace vectoriel semi-euclidien V est dit :

(1) de type space si $g(v,v)>0$ ou $v=0$;

(2) de type temps si $g(v,v)<0$;

(3) de type lumière (ou isotrope) si $g(u,v)=0$ et $v\neq 0$.

L'ensemble des vecteurs isotropes dans V est appelé cone de lumière qu'on note souvent $\Lambda=\{v\in V|\{0\}/g(v,v)=0\}$.
La catégorie à laquelle un champ de vecteurs appartient s'appelle caractère causal.

Définition 10 *Soit (V,g) un espace semi-euclidien de type lumière. On appelle radical de V le sous-espace vectoriel de V noté Rad V défini par :*

$$Rad\ V=\{\xi\neq 0\in V/g(\xi,v)=0, v\in V\} \tag{2.1}$$

2.1.1 Métrique semi-riemannienne

Définition 11 *[20] Une métrique semi-riemannienne (ou un tenseur métrique) est une famille des applications suivantes*

$$g_x : T_xM\times T_xM\to\mathbb{R}\ (x\in M)$$

telle que :

i) $\forall x\in M$, g_xM est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée ;
ii) Si $\forall X,Y\in\Gamma(TM)$, la fonction $g(X,Y)_x=g(Y,X)_x$ est différentiable ;
iii) L'indice de g est constant et noté Ind M, c'est-à-dire qu'il existe $p\in\mathbb{N}$, $\forall x\in M$, $Ind(T_xM)=p$.

La métrique g est supposée de signature constant (p,q) où q est la dimension maximale des sous-espaces de T_xM sur lesquels g_x est définie négative.

Définition 12 *Une variété semi-riemannienne est une variété munie d'une métrique semi-riemannienne.*

Soit (M,g) une variété semi-riemannienne alors :

- Si $q=0$, g est une métrique riemannienne et le couple (M,g) est une variété riemannienne. En d'autres termes, une variété riemannienne est une variété sur laquelle la métrique g est définie positive. - Si $q=1$, g est une métrique lorentzienne et (M,g) est une variété lorentzienne.

Les composantes du tenseur g sont données par $g_{ij} = \langle \frac{\partial}{\partial X^i}, \frac{\partial}{\partial X^j} \rangle$ et pour tous vecteurs $X, Y \in T_xM$. On a

$$\begin{aligned} g_x(X,Y) &= \sum_{i,j} g_{ij} X^i Y^j \\ &= \sum_{i,j} g_{ij} dx_i \otimes dX_j \end{aligned}$$

Définition 13 *Soit (M,g) une variété semi-riemannienne, $\phi : M \to]0,+\infty[$ une application lisse, alors (M,ϕ,g) est une variété de même signature que (M,g). On dit que (M,ϕ,g) est comforme à (M,g) de facteur de conformalité ϕ*

2.1.2 Connexion linéaire

Soit (M,g) une variété pseudo-riemannienne d'indice constant $q \in \{1,\cdots,m\}$, $m = dim\, M$. Une connexion linéaire sur M est une application [5]

$$\begin{aligned} \nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) &\to \Gamma(TM) \\ (X,Y) &\longmapsto \nabla_X Y \end{aligned} \tag{2.2}$$

et qui vérifie les propriétés suivants :

i) $\nabla_{fX} Z + \nabla_{hY} Z = f\nabla_X Z + h\nabla_Y Z$

ii)$\nabla_X (fY + hZ) = f\nabla_X Y + h\nabla_X Z + (Xf)Y + (Xh)Z$

iii) $\forall\, X,Y,Z \in \Gamma(TM)$ et $\nabla_X f = df(X) = Xf$ avec $f,h \in C^\infty(\mu)$.

Etant donné une connexion linéaire ∇ sur M, on appelle torsion sur M de la connexion ∇, l'application

$$\begin{aligned} T : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) &\to \Gamma(TM) \\ (X,Y) &\mapsto \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]. \end{aligned} \tag{2.3}$$

La variété M est sans torsion si et seulement si $T = 0$ ce qui est équivalent à
$[X,Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$ où $\nabla_Y X$ est la dérivée covariante de Y par rapport à X particulièrement pour un (0,2)-tenseur T on a

$$\nabla_X T(Y,Z) = X(T(Y,Z)) - T(\nabla_X Y, Z) - T(Y, \nabla_X Z). \tag{2.4}$$

Pour toute variété semi-riemannienne (M,g) il existe une seule connexion sans torsion et compatible avec la métrique g. Cette connexion s'appelle connexion de Levi-Civita de (M,g).

Une connexion ∇ est compatible avec la métrique g si et seulement si $\nabla_g = 0$ c'est-à-dire que la dérivée covariante de g est nulle.
De la relation (2.4) ceci est équivalent à

$$X(g(Y,Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) \tag{2.5}$$

pour tous $X,Y,Z \in \Gamma(TM)$.
La relation (2.5) est la condition de compatibilité d'une connexion ∇ avec une métrique g.

2.1.3 Tenseur de courbure

Définition 14 *On appelle tenseur de courbure un (1,3)-tenseur sur M défini par [20]*

$$\begin{aligned} R : \Gamma(TM)\times\Gamma(TM)\times\Gamma(TM) &\mapsto \Gamma(TM) \\ (X,Y,Z) &\longmapsto R(X,Y)Z \end{aligned} \tag{2.6}$$

avec $R(X,Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z$ *pour tous* $X,Y,Z \in \Gamma(TM)$.

On associe au tenseur de courbure riemannienne les propriétés suivantes :

(1) $R(X,Y,Z,W) = -R(Y,X,Z,W)$

(2) $R(X,Y,Z,W) = -R(X,Y,W,Z)$

(3) $R(X,Y,Z,W)+R(Z,X,Y,W)+R(Y,Z,X,W) = 0$ première identité de Bianchi

(4) $(\nabla_X R)(Y,Z,W)+(\nabla_Y R)(Z,X,W)+(\nabla_Z R)(X,Y,W) = 0$ deuxième identité de Bianchi

D'où $(\nabla_X R)(Y,ZW)+(\nabla_Y R)(Z,X,W) = (\nabla_Z R)(X,Y,W) = 0$.
Les propriétés (3) et (4) sont appelées première et deuxième identité de Branchi. On appelle tenseur de Ricci un (0,2)-tenseur symétrique définie par :

$$\begin{aligned} Ric :&\Gamma(TM)\times\Gamma(TM) \to C^\infty(M) \\ &(X,Y) \mapsto trace(Z \to R(Z,X)y) \\ &Ric(X,Y) = \sum_{i=1}^{m} g(R(X,E_i)Y,E_i). \end{aligned} \tag{2.7}$$

Soit π le plan engendré par deux champs de vecteur X et Y sur M. On appelle courbure sectionnelle du plan π la fonction $K(\pi)$ donnée par :

$$K(\pi) = \frac{R(X,Y,Y,X)}{g(X,X)\ g(Y,Y) - g(X,Y)^2}. \tag{2.8}$$

2.2 Sous-variétés semi-riemannienne

Soit (N,h) une variété semi-riemannienne de dimension n et (M,g) une sous variété de N de dimension m. Par convention, ces variétés seront notées par N^n et M^m [18],

Soit $f : N^n \to M^m$ une immersion. Si $(f*\bar{g})_x$ est non dégénérée et de signature constante pour tout $x \in N^n$, alors N^n, $(f*\bar{g})$ est une variété semi-riemannienne.

La métrique semi-riemannienne $f*\bar{g}$ est appelée première forme fondamentale de la variété N^n et f une immersion isométrique.
i) Si f est une immersion isométrique, alors $N^n, (f*\bar{g})$ est une sous variété immergée de $(M^m,\bar{g})$.
ii) Si f est un plongement, alors $(N^n, f*\bar{g})$ est une sous-variété de $M^n,\bar{g})$.
iii) Si M^n est une partie de M^m, f est une inclusion $i : N^n \to M^m$ qui est une immersion isométrique.

On dit que $(N^n, f*\bar{g})$ est une sous-variété de $(M^m, \bar{g})$. Si $(M^m, \bar{g})$ est une variété riemannienne, alors $f*\bar{g}$ est aussi définie positive et la sous-variété $(N^n, f*\bar{g})$ est aussi une variété riemannienne.

Dans l'un ou l'autre de ces cas, la variété M^m est appelée variété ambiante. L'entier positif $l = m-n$ est appelé codimension de la variété N^n. Si $l = 1$ la sous- variété est une hypersurface.

Exemple 4 *Soit* $H^n = \left\{(x_0, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} / -x_0^2 + \cdots + x_n^2 = -1\right\}$

avec H^n a deux composantes connexes dont l'une est

$$H_+^n = \{(x_0, x_1, \cdots, x_n) in \mathbb{R}^{n+1}, x_0 > 0\}$$

Où H_+^n est appelé le modèle de demi-hyperboloïde supérieur.
En effet, notons $dS^2 H_n$ la restriction de la métrique lorentzienne q_1^n à H_+^n.

Soit $f : \mathbb{R}_+^{n+1} \to \mathbb{R} : (x_0, \cdots, x_n) \mapsto -x_0^2 + \cdots + x_n^2 . H_+^n = f^{-1}(-1)$
avec $R_+^{n+1} = \{(x_0, x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}, x_0 > 0)\}$.

La différentielle $df = (-2x_0, 2x_1, \cdots, 2x_n) \neq 0$ car nous avons $x_0 \neq 0$. On a alors $rg\, df = 1$ pour dire que df est de rang maximal.

df est surjective et f est une submersion. H^n est une sous variété de $\mathbb{R}^{n+1}$ de dimension $n+1-1 = n$. Comme H_+^n est une submersion, l'espace tangent en un point $u(u_0, \cdots, u_n)$ de H_+^n.

$df_u = 2(-u_0, u_1, \cdots, u_n)$

$Ker\, df_u = \{u' \in H_+^n | df_u(u') = 0\}$

$\Leftrightarrow -u_0 u_0' + u_1 u_1' + \cdots + u_n u_n' = 0.$

Donc $ker f df_u = \langle u \rangle \perp g_1^n$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^+$, on a :

$$\begin{aligned} g_1^n(\lambda_u, \lambda_u) &= \lambda_{g_1}^2 n(u,u) \\ &= -\lambda^2 < 0 \end{aligned}$$

veut dire que g_1^n est Lorentzienne, elle est définie positive sur $TH_+^n = \langle u \rangle \perp g_1^n$.

$H_+^n (dS_{H_+^n})^2$ est une sous-variété riemannienne de $\mathbb{R}_+^{n+1}$ qui est le modèle d'hyperboloïde supérieure de l'espace H^n de dimension n.

2.3 Equations de base des sous-variétés semi-riemannienne

Soit $f : (M^n, g) \to (\bar{M}^m, \bar{g})$ une immersion isométrique [5]

$$g_x(X,Y) = f^* \bar{g}_x(X,Y) = \bar{g}_{f1}(df_{(1)}^X, df_{(1)}Y) \tag{2.9}$$

M est une sous-variété immergée de $\bar{M}$ $\forall x \in M, \lambda\phi \subset M$ tel que f/u est dans $f(u)$. Localement f devient une inclusion et par conséquent, il y a lieu à identifier $x = f(x)$ ainsi, $\forall x\, rad,\ T_x M = T_{f(x)}\bar{M}$.

T_xM est un sous-espace vectoriel de $T_x\bar{M} = T_{f(x)}\bar{M}$

$$T_x\bar{M} = T_xM \oplus T_xM_\perp$$

avec $T_xM^\perp$ qui est le complémentaire orthogonal de $T_x\bar{M}$ et nous définissons le fibré $TM^L = U_xT_xM^\perp$ appelé fibré normal.

Ainsi le long de $f(M^m) \subset \bar{M}^m$ on a la décomposition

$$T\bar{M}/f(x)_{=x} = TM \oplus TM^\perp$$

$TM \cap TM^\perp = \{0\}$ c'est-à-dire que le fibré est trivial. Soit $T\bar{M}f(x) : \{x \in T\bar{M}/\pi(x) \in f(M)\}$ et π : La projection canonique de $T\bar{M} \to \bar{M}$ relativement à la décomposition (1) en deux projection on a :

$$\begin{cases} (\ )^T : T\bar{M}/f(x) \to TM^T : \text{ qui est la projection tangentielle} \\ (\ )^\perp : T\bar{M}/f(x) \to TM^\perp : \text{ qui est la projection normale} \end{cases} \tag{2.10}$$

La connexion linéaire sur M est définie par :

$$\begin{aligned} \nabla\Gamma(TM)\times\Gamma(TM) &\mapsto \Gamma(TM) \\ (X,Y) &\to \nabla_XY \ \forall X,Y \in \Gamma(TM) \end{aligned} \tag{2.11}$$

Soit $\bar{\nabla}$ la connexion de Lévi-Civita de $\bar{M}$

$$\bar{\nabla}_XY = \left(\bar{\nabla}_XY\right)^T + \left(\bar{\nabla}_XY\right)^\perp \tag{2.12}$$

avec $\left(\bar{\nabla}_XY\right)^T$ qui est la composante tangentielle et $\left(\bar{\nabla}_XY\right)^\perp$ qui est la composante normale.

Considérons une application

$$\begin{aligned} X : \Gamma(TM)\times\Gamma(TM) &\to \Gamma(TM)^\perp \\ (X,Y) &\mapsto \left(\bar{\nabla}_XY\right)^\perp \end{aligned} \tag{2.13}$$

L'expression (2.12) devient

$$\bar{\nabla}_XY = \nabla_XY + \alpha(X,Y) \tag{2.14}$$

et est appelée formule de Gauss avec α qui est la seconde forme fondamentale.

Pour tout $\xi \in \Gamma(TM^\perp)$, décomposons $-\bar{\nabla}_X\xi$ en composante tangentielle et normale on a :

$$-\bar{\nabla}_X\xi = (-\bar{\nabla}_X\xi)^T - (\bar{\nabla}_X\xi)^\perp$$

posons $A_\xi X = (-\bar{\nabla}_X\xi)^T$

$$\begin{aligned} A : \ \Gamma(TM)\times\Gamma(TM^\perp) &\to \Gamma(TM) \\ (X,\xi) &\mapsto A_\xi X \end{aligned} \tag{2.15}$$

$$\begin{aligned} A_\xi X &= A(X,\xi) \\ &= (-\bar{\nabla}_X\xi)^T \end{aligned}$$

A est appelé opérateur forme de M.

La seconde forme fondamentale et l'opérateur forme sont liés par la relation :

$$\begin{aligned}\langle \alpha(X,Y),\xi\rangle &= \langle A_\xi X, Y\rangle \\ \bar{g}(\alpha(X,y),Z) &= \bar{g}(A_\xi X, Y)\end{aligned}. \tag{2.16}$$

En effet, soit $y \in \Gamma(TM), \xi \in \Gamma(TM^L)$ on a :

$$\begin{aligned}&\langle Y,\xi\rangle = 0\\ &X\langle Y,\xi\rangle = 0\\ &X\langle Y,\xi\rangle = \langle \nabla^Y_X\xi\rangle + \langle Y, \bar{\nabla}_X\xi\rangle\\ &\Leftrightarrow 0 = \langle \nabla^Y_X + \alpha\langle X,Y\rangle,\xi\rangle + \langle Y, (\bar{\nabla}_X\xi)^T + (\nabla_X\xi)^+\rangle\\ &\Leftrightarrow 0 = \langle \alpha(X,Y),\xi\rangle + (Y, -A_\xi X\rangle\\ &\langle \alpha\langle X,Y\rangle,\xi\rangle = \langle Y, A_\xi X\rangle.\end{aligned}$$

2.3.1 Equation du premier ordre

Avec la relation (2.14), on sait que

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \alpha(X,Y) : \quad \text{Formule de Gauss} \tag{2.17}$$

$$\begin{aligned}A : \Gamma(TM)\times\Gamma(TM)^\perp &\to \Gamma(TM)\\ (X,\xi) &\mapsto A_\xi X, \quad A = o\text{pérateur forme}\end{aligned} \tag{2.18}$$

$$\begin{aligned}\alpha : \Gamma(TM)\times\Gamma(TM) &\to \Gamma(TM^\perp)\\ (X,Y) &\mapsto \alpha(X,Y) = (\bar{\nabla}^Y_X)^\perp\end{aligned} \tag{2.19}$$

où α est la seconde forme fondamentale

$$\begin{aligned}\langle \alpha(X,Y),\xi\rangle &= \langle A_\xi X, Y\rangle\\ \langle \alpha(Y,X),\xi\rangle &= \langle A_\xi Y, X\rangle\\ \langle A_\xi X, Y\rangle &= \langle X, A_\xi Y\rangle.\end{aligned}$$

donc A est un opérateur auto-adjoint.

$$\begin{aligned}&\bar{\nabla}_X\xi = (\bar{\nabla}_X\xi)^T + (\bar{\nabla}_X\xi)^\perp\\ &\bar{\nabla}_X\xi = -A_\xi X + \bar{\nabla}^\perp_X\xi \text{ appelé formule de Weingarten } \forall\xi \in \Gamma(TM)^\perp\end{aligned}$$

avec $\bar{\nabla}^\perp$, qui est la connexion de Levi-Civita sur $TM^\perp$.

2.3.2 Equation du second ordre

Soit $\bar{R}(X,Y)Z$ le tenseur de courbure de $\bar{M}$, on sait que

$$\bar{R}(X,Y)Z = \bar{\nabla}_X\bar{\nabla}_Y Z - \bar{\nabla}_Y\bar{\nabla}_X Z - \bar{\nabla}_{[X,Y]}Z \tag{2.20}$$

alors appelons

$$\begin{aligned}(i)\ \bar{\nabla}_X\bar{\nabla}_Y Z &= \bar{\nabla}_X(\bar{\nabla}_Y Z)\\ &= \bar{\nabla}_X(\nabla_Y Z + \alpha(Y,Z)) \text{ d'après l'expression (2.14)}\\ &= \bar{\nabla}_X\nabla_Y Z + \bar{\nabla}_X\alpha(Y,Z)\\ &= \nabla_X\nabla_Y Z + \alpha(X,\nabla_Y Z) - A^X_\alpha(Y,Z) + \nabla^\perp_X\alpha(Y,Z).\end{aligned}$$

De même on a :

$$\begin{aligned}(ii)\ \bar{\nabla}_Y\bar{\nabla}_X Z &= \bar{\nabla}_Y(\bar{\nabla}_X Z)\\ &= \bar{\nabla}_Y(\nabla_X Z + \alpha(X,Z))\\ &= \bar{\nabla}_Y\nabla_X Z + \bar{\nabla}_Y\alpha(X,Z)\\ &= \nabla_Y\nabla_X Z + \alpha(Y,\nabla_X Z) - A^Y\alpha(X,Z) + \nabla^\perp_Y\alpha(X,Z)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(iii)\ \bar{\nabla}_{[X,Y]}Z &= \bar{\nabla}_{[\nabla_X Y - \nabla_Y X]}Z = \bar{\nabla}_{\nabla_X Y}Z - \bar{\nabla}_{\nabla_Y X}Z\\ &= \bar{\nabla}_{\nabla_X Y}Z + \alpha(\nabla_X Y,Z) - \nabla_{\nabla_Y X}Z - \alpha(\nabla_Y X,Z)\\ &= \nabla_{[X,Y]}Z + \alpha(\nabla_X Y,Z) - \alpha(\nabla_Y X,Z)\end{aligned}$$

(i)-(ii)-(iii) donne

$$\begin{aligned}\bar{R}(X,Y)Z &= R(X,Y)Z + A_{\alpha(X,Z)Y} - A_{\alpha(X,Y)}X + \alpha(X,\nabla_Y Z) - \alpha(Y,\nabla_X Z) - \alpha(\nabla_X Y,Z)\\ &\quad + \alpha(\nabla_Y X,Z) + \nabla^\perp_X\alpha(Y,Z) - \nabla^\perp_Y\alpha(X,Z)\\ &= \left[R(X,Y)Z + A_{\alpha(X,Z)}Y - A_{\alpha(Y,Z)}X\right] + \left[\left(\nabla^\perp_X\alpha\right)(Y,Z) - (\nabla^\perp_Y\alpha)(X,Z)\right].\end{aligned} \tag{2.21}$$

où

$$\nabla^\perp_X\alpha(Y,Z) = (\nabla^\perp_X\alpha)(Y,Z) + \alpha(\nabla_X Y,Z) + \alpha(Y,\nabla_X Z). \tag{2.22}$$

En considérant la composante tangentielle, on a :

$$(\bar{R}(X,Y)Z)^T = R(X,Y)Z + A_{\alpha(X,Z)}Y - A_{\alpha(Y,Z)}X \tag{2.23}$$

et pour tout $w \in TM$ on a :

$$\langle R(X,Y)Z,W\rangle = \langle\bar{R}(X,Y)Z,W\rangle - \langle\alpha(Y,W),\ \alpha(X,Z)\rangle + \langle\alpha(X,W),\alpha(Y,Z)\rangle. \tag{2.24}$$

On appelle (2.24), l'équation de Gauss.

Soit (M,g) une variété semi-riemannienne, la courbure sectionnelle constante c, on a :

$$R(X,Y)Z = C\{g(Y,Z)X - g(X,Z)Y\} \tag{2.25}$$

$$\begin{aligned}\bar{g}(\bar{R}(X,Y)Z,W) &= \bar{g}(C\{(\bar{g}(Y,Z)X,W) + \bar{g}((X,Z)Y,W)\}\\ &= C\{\bar{g}(Y,Z)\bar{g}(X,W) + \bar{g}(X,Z)\bar{g}(Y,W)\}\\ &= C\{\langle Y,Z\rangle\langle X,W\rangle + \langle X,Z\rangle\langle Y,W\rangle\}\end{aligned} \tag{2.26}$$

Théorème 4 *Soit M une sous-variété d'une variété $\bar{M}$ à une courbure sectionnelle constante C. Les équations suivantes sont vérifiées pour les champs de vecteurs X,Y,Z,W tangents à M et tous les champs normaux ξ,W*

$$\langle R(X,Y)Z,W\rangle = C(\langle Y,Z\rangle\langle X,W\rangle - \langle X,Z\rangle\langle Y,W\rangle + \langle \alpha\langle Y,Z\rangle,\alpha(X,W)\rangle - \langle \alpha(X,Z),\alpha(Y,W)\rangle$$
équation de Gauss
(2.27)

$$\left(\nabla^{\perp}_X\alpha\right)(Y,Z) = \left(\nabla^{\perp}_Y\alpha\right)(X,Z) : \text{ équation de Codazzi} \tag{2.28}$$

$$\langle R^{\perp}(X,Y)\xi,h\rangle = \langle [A_\xi,A_\eta]X,Y\rangle : \text{ équation de Ricci} \tag{2.29}$$

2.3.3 Sous-variétés minimales, sous variétés ombiliques

Soit f une immersion isométrique entre deux variétés semi-riemanniennes M^n et $\bar{M}^{n+p}$. Le vecteur courbure moyenne de f au point $x \in M$ est un vecteur noté $H(x)$ donné par la relation

$$H(x) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha(X_j,X_j) \tag{2.30}$$

ou α est la seconde forme fondamentale de f et $(X_1,\cdots,X^n)$ une base orthonormée de T_xM.

• On appelle champ de vecteurs courbure moyenne de f l'application $x \to H(x)$. Notons que, pour tout base $(\xi_1,\cdots,\xi_p)$ de $T_xM^{\perp}$, on a le vecteur courbure moyenne qui s'écrit $H(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p}(trA_{\xi_i})\xi_i$.

• On appelle fonction courbure moyenne de M l'application qui $x \mapsto ||H(x)||$.

Définition 15 *Une sous-variété M est dite minimale en un point x_0 si le vecteur courbure moyenne en ce point est nul, c'est-à-dire $H(x_0) = 0$.*

La sous-variété M est dite minimale si elle l'est en tout point, c'est-à-dire si H est identiquement nul.

2.3.4 Cas particulier : sous variété totalement géodésique

Soit M une variété semi-riemannienne de la variété $\bar{M}$. Soit γ une courbe tracée sur M qui est une géodésique c'est-à-dire $\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = 0$ avec ∇ la connexion de Lévi-Civita de M.

On a donc

$$\begin{aligned}\bar\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma &= \nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma + \alpha(\dot\gamma,\dot\gamma)\\ &= \alpha(\dot\gamma,\dot\gamma).\end{aligned}$$

pour tous $X,Y \in T_XM$ on a l'égalité

$$2\alpha(X,Y) = \alpha(X+Y,X+Y) - \alpha(X,X) - \alpha(Y,Y) \tag{2.31}$$

et nous constatons que la seconde forme fondamentale α s'annule identiquement si et seulement si toute géodésique de $\bar{M}$. Dans ce cas nous disons que la sous-variété M est totalement géodésique dans $\bar{M}$ [14].

Définition 16 *Une immersion isométrique $f : M^n \to M^{n+p}$ est dite ombilique en un point x_0 de M si les opérateurs formes sont point par point proportionnels à l'application identique c'est-à-dire, $\forall \xi \in T_{x_0}M^{\perp}$, il existe $X = \lambda(\xi) \in \mathbb{R}$ tel que $A_\xi X = \lambda_{xi} X, \forall X \in T_{x_0}M$.*

M est totalement ombilique si elle l'est en tous ses points. Un champ de vecteurs normal ξ qui est tel que A_ξ est multiple de l'identité est appelé champ de vecteurs normal ombilique.

Notons que dans la cas de la totale ombilicité, nous avons les assertions suivantes qui sont équivalentes :

i) f est ombilique en x_0

ii) $A_\xi = \langle H(x_0), \xi \rangle Id \ \forall \xi \in T_{x_0}M^{\perp}$

iii) $\alpha(X,Y) = \langle X, Y \rangle \ H(x_0)$

Preuve 1 *(i) Soit (M^n, g) une variété semi-riemannienne. Un point $x_0 \in M$ est dit ombilique lorsque $A^x_\xi = \lambda x \ \ \forall \ x \in T_{x_0}M$*

(ii) De (i) on en déduit que $A_\xi =< H(x_0), \xi > Id \forall \ \xi \ \in \ T_{x_0}M^{\perp}$

(iii) Soit $\xi \in TM^{\perp}$, on choisit un voisinage U de x tel que $\forall x' \in M, \ < \xi_{x'}, \xi_{x'} >= 1$

$$\begin{aligned} \alpha : \ \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) &\to \Gamma(TM^{\perp}) \\ (X,Y) &\mapsto \alpha(X,Y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \forall (X,Y) \in \Gamma(TM), \alpha(X,Y) &= B(X,Y) \\ < \alpha(X,Y), \xi > &=< A_\xi X, Y > \\ < B(X,Y)\xi, \xi > &=< A_\xi X, Y > \\ B(X,Y) < \xi, \xi > &=< A_\xi X, Y > \end{aligned}$$

De (i) et (ii), on a :

$$\begin{aligned} \langle \alpha(X,Y)\xi, \xi \rangle &= \langle (< H(x_0), \xi > X, Y), \xi \rangle \\ &= H(x_0) < X, Y >< \xi, \xi > \\ &= H(x_0) < X, Y > \end{aligned}$$

2.4 Sous-variétés de types lumière

Il est naturel de trouver une sous-variété de type lumière dans une variété, semi-riemannienne à cause de sa métrique indéfinie. La principale différence entre les sous-variétés de types lumière, et les sous variétés non dégénérées est que dans le premier cas, le fibré vectoriel $TM^{\perp}$ intercepte le fibré tangent TM [4].

2.4.1 Sous-variété de type lumière à écran conforme

2.4.1.1 La distribution écran

Définition 17 *Soit (M,g) une variété semi-riemannienne de dimension n avec un $(0,2)$ tenseur symétrique g telle que $\forall x \in M, q_x$ est d'indice constant q.*

On appelle distribution de rang r sur M une application D définie sur M qui, à chaque point $x \in M$, associe un sous-espace vectoriel D_x de dimension r de T_xM. Si M' est connexe et si toute variété intégrale $\bar{M}'$ de D avec $M' \cap \bar{M}' \neq$ est telle que $\bar{M}' \subset M'$, on dit que M' est une variété intégrale ou feuille maximale de la distribution D.

Définition 18 *Une distribution D est dite intégrable si $\forall x \in M$, il existe une variété intégrale de D qui contient x.*

Définition 19 *Une distribution D est dite involutive si pour tout champ de vecteurs $X,Y \in D$, le crochet $[X,Y] \in D$. Elle est dite parallèle si $\forall X \in \Gamma(TM)$, $\forall Y \in D$ on a $\nabla_X Y \in D$.*

Soit X un champ de vecteurs sur une variété (M,g). X est un champ de Killing si on a $L_X g = 0$. Dans ce cas, le groupe à un paramètre de difféomorphismes de X est constitué d'isométrie de (M,g).

Définition 20 *Une distribution D définie sur une variété M est de Killing si tout champ de vecteur $X \in D$ est de Killing.*

Définition 21 *Une distribution écran est le complémentaire orthogonal de $TM^{\perp}$ dans TM. Désignons $\varphi(N)$ la distribution écran.*

Exemple 5 *Distribution écran canonique : soit $\mathbb{R}^{m+2}_q$ un espace semi-euclidien muni de la métrique $\bar{g}$ définie par :*

$$\bar{g}(X,Y) = -\sum_{i=0}^{q-1} x^i y^i + \sum_{a=q}^{m+1} x^a y^a \tag{2.32}$$

Considérons M de $\mathbb{R}^{m+2}_q$ définie localement par les équations :

$$\begin{aligned} x^A &= f^A(u^0,\cdots,u^n); \\ rang &\left[\frac{\partial f^A}{\partial u^\alpha}\right] = m+1 \end{aligned} \tag{2.33}$$

avec $A \in [0,m+1], \alpha \in \{0,\cdots,m\}$ et les f^A sont des fonctions différentiables (lisses sur un voisinage des coordonnées $u \subset M$. Ainsi notons par :

$$\Delta^A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f^0}{\partial u^0} & \cdots & \frac{\partial f^{A-1}}{\partial u^0}\frac{\partial f_{A+1}}{\partial u^0} & \cdots & \frac{\partial f^{m+1}}{\partial u^0} \\ \vdots & & & & \\ \frac{\partial f^0}{\partial u^m} & \cdots & \frac{\partial f^{A+1}}{\partial u^m} & \cdots & \frac{\partial f^{m+1}}{\partial u^m} \end{pmatrix} \tag{2.34}$$

Pour tout $A,B,C \in \{0,\cdots,m+1\}; \alpha,\beta,\gamma \in \{0,\cdots,m\}; a,b,c\cdots \in \{q,\cdots,m+1\}; i,j,k\cdots \in \{\in \{0,\cdots,q-1\}$, le champ de bases naturelles sur le voisinage des coordonnées $u \subset M$, engendrant le fibré tangent TM est donné par : $\frac{\partial}{\partial u^\alpha} = \frac{\partial f^A}{\partial u^\alpha}.\frac{\partial}{\partial u^A}, \forall \alpha \in \{0,\cdots,m\}$.

2.4.2 Equations fondamentales sur les hypersurfaces de type lumière

2.4.2.1 Formule de Gauss et Weingatern par projection sur l'écran

Soit P le morphisme de projection de $\Gamma(TM)$ sur la distribution écran $\phi(N)$, on a la décomposante suivante [1], [4]

$$X = PX + \eta(X)\xi \text{ avec } \eta(\cdot) = \bar{g}(N,\cdot). \tag{2.35}$$

Avec cette projection, nous avons une deuxième forme fondamentale de M et son opérateur forme correspondant.

On a alors :

$$\begin{aligned} &\forall X,Y \in \Gamma(TM), \forall U \in \Gamma(TM^{\perp}) \\ &\nabla_X PY = \overset{*}{\nabla}_X PY + h^*(X,PY)(i) \\ &\nabla_X U = -\overset{*}{A}_U X + \overset{*}{\nabla}{}^{\perp}_X U(ii) \end{aligned} \tag{2.36}$$

Localement les relations (2.36) sont données par : pour tout $h^*(X,PY) = c(X,PY)\xi$

$$\begin{aligned} \nabla_X PY &= \overset{*}{\nabla}_X PY + C(X,PY)\xi \\ \nabla_X \xi &= -\overset{*}{A}_\xi X + \theta(X)\xi \end{aligned} \tag{2.37}$$

où $h^*(X,PY)$ et $C(X,PY)$ sont les secondes forme fondamentale de la distribution écran $\phi(N)$ qui sont à valeurs dans $\Gamma(TM^{\perp})$ Pour tout $N \in tr(TM), \xi \in TM^{\perp}, w \in \phi(N), h(X,Z) \neq 0$

- $\bar{g}(N,\xi) = 1$
- $\bar{g}(N,N) = 0$
- $\bar{g}(N,W) = 0$
- $g(N,Y) \neq 0$
- $g(\xi,\xi) = 0$

Preuve
- $\bar{g}(N,\xi) = 1$, ssi et seulement si $N \in tr(TM)$, $\xi \in TM^{\perp}$
- $\bar{g}(N,N) = 0$, ssi $N \in tr(TM)$, $N \in tr(TM)$ alors $\bar{g}(N,N) = 0$
- $\bar{g}(N,W) = 0$, ssi $N \in tr(TM)$, $W \in \varphi(N)$
- $\bar{g}(N,Y) \neq 0$, ssi $N \in tr(TM)$, $Y \in \Gamma(TM)$
- $\bar{g}(\xi,\xi) = 0$, ssi $\xi \in TM^{\perp}$

2.4.3 Hypersurface de type lumière à écran conforme

Il est bien connu que la seconde forme fondamentale et l'opérateur forme d'une sous-variété non dégénérée sont reliées par un champ de tenseur métrique [1]. Pour les hypersurfaces de types lumière, il y a une interaction entre les secondes formes fondamentales de l'hypersurface de type lumière et de sa distribution écran et leurs opérateurs formes.

Définition 22 *L'hypersurface de type lumière $(M,g,\varphi(N))$ d'une variété riemannienne est à écran conforme si les opérateurs forme A_N et A^*_ξ de M et de $\varphi(N)$ sont reliés entre eux par :$A_N = \varphi A^*_\xi$ où φ est une fonction nulle sur un voisinage u dans M.*

Définition 23 *La distribution écran $S(M)$ est totalement ombilique si sur un voisinage coordonnée $u(M)$, il existe une fonction différentielle λ tel que*

$$C(X,PY) = \lambda(g(X,PY))\forall X,Y \in \Gamma(TM, u/A_N X = \lambda PX) \tag{2.38}$$

Proposition 2 *Soit (M,g) une hypersurface de $(\bar{M},\bar{g})$ de dimension $m+2$ alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) M est une hypersurface de type lumière.

(ii) g est de rang constant m sur M ;

(iii) $TM^\perp = U_{u\in M} T_u M^\perp$.

(i)⇒ (ii) puisque $Rad\ T_uM \neq \{0\}$, il existe un vecteur non nul $\xi_u \in Rad\ T_uM$, tel que $g(\xi_u, x_u) = 0$ quelque soit $X_u \in T_uM$. Ainsi $rang(g_u) < m+1$. Mais aussi, $rang(g_u) > m$ puisque $dim\ T_uM^\perp = 1$ par conséquent $rang(g_u) = m$, pour tout $u \in M$.

(ii)⇒ (iii) : Comme $rang(g_u) = m$, il existe un vecteur non nul $\xi_u \in T_uM$, tel que $g(\xi_u, X_u) = 0$, pour tout $X_u \in T_uM$. Il en résulte que $\xi_u \in T_uM^\perp$. Ainsi tout vecteur $Y_u \in T_uM^\perp$ peut s'écrire comme $Y_u = \alpha\xi_u, \alpha \in \mathbb{R}$, ceci prouve que $T_uM^\perp C T_uM$ et $TM^\perp = U_{u\in M} T_uM^\perp$ définit une distribution sur M.

(iii)⇒ (i) : $TM^\perp$ étant un fibré vectoriel de TM, on a $Rad\ TM = TM^\perp \neq 0$. Ainsi l'hypersurface est dénégérée.

Définition 24 *Une hypersurface de type lumière (M,g) d'une variété semi-riemannienne $(\bar{M},\bar{g})$, munie d'une distribution écran $S(TM)$ est dite normalisée par structure écran et on note $(M,g,S(TM))$.*

Désignons par $S(TM)^\perp$, le fibre vectoriel supplémentaire orthogonal à $S(TM)$ dans $T\bar{M}$. On a le long de M la décomposition suivante :

$$T\bar{M}/M = S(TM) \oplus orth\ S(TM)^\perp. \tag{2.39}$$

Théorème 5 *Soit $(M,g,S(TM))$ une hypersurface de type lumière normalisée d'une variété semi-riemannienne $(\bar{M},\bar{g})$. Alors il existe un fibré vectoriel unique $tr(TM)$ de rang 1 le long de M, tel que pour toute section non nul $\xi \in \Gamma(Rad\ TM)$ sur le voisinage de coordonnées $u \subset M$, il existe une section unique $N \in \Gamma(tr(TM))$ sur u vérifiant :*

$$\forall X \in \Gamma(S(TM)/u), \bar{g}(N,\xi) = 1 \ \ et \ \ \bar{g}(N,N) = \bar{g}(N,X) = 0 \tag{2.40}$$

Considérons le fibré vectoriel supplémentaire F de $TM^{\perp}$ dans $S(TM)^{\perp}$ et prenons une section $V \in (F/u)$, $V \neq 0$ alors $\bar{g}(\xi,V) \neq 0$ sur u, au cas contraire le fibré vectoriel $S(TM)^{\perp}$ serait dégénérée.

Définissons sur u, le champ de vecteurs N par :

$$N = \frac{1}{\bar{g}(\xi,V)}\left\{V - \frac{\bar{g}(V,V)\xi}{2\bar{g}(\xi,V)}\right\} \tag{2.41}$$

par un calcul direct, on peut montrer que les relations sont vérifiées si et seulement si N prend la forme définie par la relation (2.41).

Considérons un autre voisinage de coordonnées $u^* \subset M$ qui est tel que $\mu \cap u^* \neq 0$. Les fibrés vectoriels $TM^{\perp}$ et F étant de rang 1, on a que $\xi^* = \alpha\xi$ et $V^* = \beta V$, où α et β sont deux fonctions différentiables définies sur $u \cap u^*$. En remplaçant ξ^* et V^* dans (**), on trouve que N^* et N sont reliés sur $u \cap u^*$ par la relation $N^* = \frac{1}{\alpha}N$. Ceci montre que F est induit sur M un fibré vectoriel noté par $tr(TM)$ tel que localement, les relations (*) soient satisfaites.

Finalement, en considérant un autre fibré vectoriel E supplémentaire à $TM^{\perp}$ dans $S(TM)^{\perp}$, en utilisant la relation (**) pour tous les fibrés F de E, on obtient le même fibré $tr(TM)$.

Considérons $(M,g,S(TM)$ une hypersurface de type lumière de la variété semi-riemannienne $(\bar{M},\bar{g})$ et $\bar{\nabla}$ la connexion linéaire de Levi-Civita sur $\bar{M}$. En utilisant la décomposition $T\bar{M}/M = TM \oplus tr(TM)$ on a les formules de Gauss et Weingatern suivantes :

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_X Y &= \nabla_X Y + h(X,Y) \\ \bar{\nabla}_X V &= -A_V X + \nabla^t_X V \quad (i) \end{aligned} \tag{2.42}$$

pour tous $X,Y \in \Gamma(TM)$ et $V \in \Gamma(tr(TM))$, où $\nabla_X Y$ et $A_V X$ appartiennent à $\Gamma(TM)$, $h(X,Y)$ et $\nabla^t_X V$ appartient à $\Gamma(tr(TM))$.

Il est évident de voir que ∇ est une connexion sans torsion, h est une $F(N)$-forme bilinéaire symétrique sur $\Gamma(TM)$, évaluée dans $tr(TM)$,A_V est un $F(M)$-opérateur bilinéaire sur $\Gamma(TM)$ et ∇^t est une connexion linéaire sur $tr(TM)$. h et A_V sont respectivement appelés la seconde forme fondamentale et l'opérateur forme de l'hypersurface M. Considérant localement (ξ,N) une paire des sections de normalisation définies sur $u \subset M$ dans le théorème 2. On définit alors sur $u(M)$, une forme bilinéaire symétrique B et une 1-forme τ par $B(X,Y) = g(h(X,y),\xi)$ et $\tau(X) = \bar{g}(\bar{\nabla}^t_X N,\xi)$ pour tout $X,Y \in \Gamma(TM)$. Ainsi de (i) on obtient les formules locales de Gauss et weingarten suivantes :

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + B(X,Y) \tag{2.43}$$

et

$$\bar{\nabla}^N_X = -A^X_N + \phi(X)N \ \text{ pour tout } X,Y \in \Gamma(TM). \tag{2.44}$$

Notons par P le morphisme de projection de TM sur $S(TM)$ relativement à la décomposition orthogonale de $TM = S(TM) \otimes_{orth} TM^{\perp}$. On obtient les équations de Gauss et Weingarten pour la distribution écran $S(TM)$ suivantes :

$$\nabla_X PY = \overset{*}{\nabla}_X PY + h^*(X, PY)$$
$$\nabla_X U = -\overset{*}{A}_U X + \overset{*}{\nabla}{}^t_X U$$
$$\forall X, Y \in \Gamma(TM),\ U \in \Gamma(TM^{\perp})$$

On note que $\overset{*}{\nabla}_X PY$ et $\overset{*}{A}_U X \in \Gamma(S(TM))$.

Exemple 6 *Cône de lumière* $\Lambda_{q=1}^{m+2}$

Soit un espace semi-Euclidien $\mathbb{R}_q^{m+2}$, c'est-à-dire l'espace $\mathbb{R}^{m+2}$ muni de la métrique semi-euclidienne définie par :

$$\bar{g}(x,y) = -\sum_{i=0}^{q-1} x^i y^i + \sum_{a=q}^{m+1} x^a y^a \ \ (i). \tag{2.45}$$

En effet, le cone de lumière $\Lambda_{q=1}^{m+1}$ de $\mathbb{R}_q^{m+2}$ est donné par l'équation

$$\sum_{i=0}^{q-1} (x^i)^2 - \sum_{a=q}^{m+1} (x^a)^2 = 0;\ \text{pour tout } x \neq 0 \ \ (ii). \tag{2.46}$$

En considérant l'immersion locale définie par :

$$x^0 = u^0,\ x^m = u^m$$
$$x^{m+1} = \pm \left[\sum_{i=0}^{q-1} (x^i)^2 - \sum_{a=q}^{n} (x^a)^2 \right]^{1/2}$$

par calcul direct, on montre que Λ_{q-1}^{m+1} est une hypersurface de type lumière (ou dégénérée) de l'espace $\mathbb{R}_q^{m+2}$ et la distribution radicale *Rad* $\Lambda_{A=0}^{m+1}$ donné par :

$$\xi = \sum_{A=0}^{m+1} x^A \frac{\partial}{\partial X^A}. \tag{2.47}$$

L'unique section vérifiant les relations $\bar{g}(N,\xi) = 1$ et $\bar{g}(N,N) = \bar{g}(N,X) = 0$ et engendrant le fibré vectoriel transverse canonique nul $tr(T\,\Lambda_{q-1}^{m+1})$ est définie globalement sur Λ_{q-1}^{m+1} par :

$$N = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=0}^{q-1} (x^i)^2 \right)^{-1} \left(-\sum_{i=0}^{q-1} x^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{a=q}^{m+1} x^a \frac{\partial}{\partial x^a} \right) \tag{2.48}$$

ainsi la distribution écran canonique correspondante $S(T\Lambda_{q-1}^{m+1})$ est engendrée par des champs de vecteurs de type

$$X = \sum_{A=0}^{m+1} X^A \frac{\partial}{\partial XA}. \tag{2.49}$$

vérifiant les relations :

$$\sum_{i=0}^{q-1} x^i X^i = 0;\ \sum_{a=q}^{m+1} x^a X^a = 0. \tag{2.50}$$

En tout point de Λ_{q-1}^{m+1}. En considérant un voisinage des coordonnées $u < \Lambda_{q-1}^{m+1}$ tel que $x^m + 1 > 0$ et x^{q-1}, alors par un calcul direct en utilisant

$$N = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=0}^{q-1}(x^i)^2\right)^{-1}\left(-\sum_{i=0}^{q-1}x^i\frac{\partial}{\partial x^i}+\sum_{a=q}^{m+1}X^a\frac{\partial}{\partial X^a}\right), \tag{2.51}$$

la distribution écran canonique est engendrée localement par la famille des champs de vecteurs $(X_0, X_{q-2}, Y_q, \cdots, Y_m)$ défini par :

$$X_j = x^{q-1}\frac{\partial}{\partial X^j}\frac{\partial}{\partial X^q - 1} \tag{2.52}$$

$$Y_b = x^{m+1}\frac{\partial}{\partial x^b} - x^b\frac{\partial}{\partial x^{m+1}} \tag{2.53}$$

pour tout $j \in \{0, \cdots, q-1\}$ et $b \in \{q, \cdots, m\}$.

Chapitre 3

Sous-variétés de type demi-lumière et inégalités optimales

3.1 Sous-variétés de type lumière

Soit $(\tilde{\mu},\tilde{g})$ une variété Lorentzienne de dimension $(n+3)$ avec $\tilde{g}$ une métrique non-dégénérée d'indice constant égal à 1 et soit (μ,g) une sous-variétés de type lumière de $(\tilde{\mu},\tilde{g})$ de dimension $(n+1)$ où g est la métrique dégénéré induite de $\tilde{g}$. Il existe une distribution lisse $Rad\ T_pM$, appelé l'espace radical de l'espace tangent T_pM à $p \in M$, définit par :

$$Rad\ T_pM = \{\xi \in T_pM : g_p(\xi, X) = 0 \ \text{ pour tout } X \in T_pM\} \tag{3.1}$$

Le complémentaire d'un vecteur de l'espace tangent $S(T,M)$ de $Rad\ TM$ dans TM est appelé écran de l'espace tangent de M .

Définition 25 *D'une sous-variété de type demi-lumière [10] : Une sous-variété de type lumière (M,g) de codimension 2 de $(\tilde{M},\tilde{g})$ est appelée sous-variété de types demi-lumière si le rang de $rad(TM) = 1$.*

La principale différence entre sous-variétés de types lumière et les sous-variétés de types demi-lumière est que dans le premier cas, le fibré vectoriel $TM^{\perp}$ intercepte le fibré tangent TM .

Dans le cas des sous-variétés de types demi-lumière (M,g), il existe 2 distributions complémentaire non dégénérées $S(TM)$ et $S(TM^{\perp})$ de $Rad(TM)$ de l'espace tangent TM et de l'espace tangent normal $TM^{\perp}$, respectivement, d'où on a la décomposition suivante :

$$\begin{aligned} TM &= Rad(TM) \oplus_{orth} S(TM) \\ TM^{\perp} &= Rad(TM) \oplus_{orth} S(TM^{\perp}) \end{aligned} \tag{3.2}$$

où $\oplus$ est la somme directe orthogonale.

Dans le cas où la dimension de $Rad\ T_xM = T_xM \cap T_xM^{\perp}$ pour tout $x \in M$, la sous-variété M est appelé sous variété de types r-lumière (ou r-dégénéré) si la cartographie de $Rad\ TM$, pour tout $x : x \in M \to Rad\ T_xM$ est définie sur une distribution lisse M de rang $r > 0$. Les sous-variétés de type demi-lumières est le cas special d'une S-variété de type r-lumière tel que $r > 0$.

La sous-variété $(M,g,S(TM))$ est appelé sous-variété de types demi-lumière si le rang de l'espace radical est égal à un. Soit $(M,g,S(TM)$ une sous-variété de type demi-lumière de dimension $(n+1)$ de $(\tilde{M},\tilde{g})$. Il existe un sous-espace tangent non dégénéré D de dimension 1 noté par M et un sous-espace tangent dégénéré $tr(TM)$ de dimension 1 noté par N. Alors on a :

$$\begin{array}{l}\tilde{g}(\xi,U)=0;\tilde{g}(N,\xi)\neq 1,\\ \tilde{g}(N,U)=\tilde{g}(N,N)=0;\bar{g}(U,U)\neq 0.\end{array}. \tag{3.3}$$

Ici, δ est appelé écran transversal de l'espace tangent et $tr(TM)$ est appelé espace tangent transversal de type lumière [10], [12].

Pour l'équation (3.2) et (3.3), on a la décomposition suivante :

$$T\tilde{M}=S(TM)\oplus_{\text{orth}} D\oplus_{\text{orth}}(RadTM\oplus tr(TM); \tag{3.4}$$

où $\oplus$ est la somme directe mais non orthogonale.

Soit $\tilde{\nabla}$ la connexion de Lévi-civita de $\tilde{M}$. Les formules de Gauss et de Weingarten sont données par :

$$\tilde{\nabla}_X Y=\nabla_X Y+h(X,Y); \tag{3.5}$$
$$\tilde{\nabla}_X N=-A_N X+\nabla^t_X N; \tag{3.6}$$
$$\tilde{\nabla}^U_X=-A_U X+\nabla^t_X U. \tag{3.7}$$

Pour tout $X,Y\in\Gamma(TM)$, où $\nabla_X Y, A_N X, A_U X\in\Gamma(TM)$ et $h(X,Y),\nabla^t_X N,\nabla^t_X U\in\Gamma(tr(TM))$. Ici h et A_N sont appelés la seconde forme fondamentale et l'opérateur forme, respectivement. Pour les équations (3.4), (3.5),(3.6) et (3.7), on a :

$$h(X,Y)=B(X,Y)N+D(X,Y)U \tag{3.8}$$
$$\nabla^t_X N=\rho_1(X)N+\rho_2(X)U \tag{3.9}$$
$$\nabla^t_X U=\rho_1(X)N+\rho(X)U. \tag{3.10}$$

Alors on peut écrire encore les expressions (3.5),(3.6),(3.7) comme suit :

$$\tilde{\nabla}_X Y=\nabla_X Y+B(X,Y)N+D(X,Y)U \tag{3.11}$$
$$\tilde{\nabla}_X N=-A_N X+\rho_1(X)N+\rho_2(X)U \tag{3.12}$$
$$\tilde{\nabla}_X U=-A_U X+\rho_1(X)N+\rho_2(X)U. \tag{3.13}$$

Pour les expressions (3.3) et (3.11), on voit que B est symétrique, il est indépendant du choix de la distribution écran et disparu sur $Rad\ TM$.

Soit P le morphisme de projection de $\Gamma(TM)$ à $\Gamma(S(TM))$, on peut aussi écrire pour l'expression (3.2) que

$$\nabla_X PY=\overset{*}{\nabla}_X PY+\overset{*}{h}(X,Y) \tag{3.14}$$
$$\nabla_X\xi=-\overset{*}{A}_\xi(X)-\rho_1(X)\xi \tag{3.15}$$

où $\overset{*}{\nabla}_X PY,\overset{*}{A}_\xi(X)\in\Gamma(S(TM))$ et $\overset{*}{h}(X,Y)\in\Gamma(Rad\ TM)$. Ici $\overset{*}{A}_\xi$ est appelé opérateur forme locale et $\overset{*}{h}$ est appelé seconde forme fondamentale, donnée par :

$$\overset{*}{h}(X,Y)=C(X,PY)\xi. \tag{3.16}$$

En utilisant les expressions (3.3) ; (3.11) ; (3.12) ; (3.13) ;(3.14) et (3.15), on a les expressions suivantes :

$$B(X,Y) = g(\overset{*}{A}_{\xi}X,Y) \tag{3.17}$$

$$C(X,PY) = g(A^X_N,PY). \tag{3.18}$$

$$D(X,PY) = g(A_UX,PY) \tag{3.19}$$

$$D(X,Y) = g(A_U(X),PY) - \xi_1(X)\eta(Y) \tag{3.20}$$

$$B(X,Y) = 0 \quad \forall X,Y \in \Gamma(TM). \tag{3.21}$$

$$D(X,Y) = 0 \tag{3.22}$$

Preuve 2 (3.17)

$$\begin{aligned} g(\bar{\nabla}^{\xi}_X,Y) &= -g(\overset{*}{A}_{\xi}X,Y) - g(\rho_1(X)\xi,Y) \\ &= -g(\overset{*}{A}_{\xi}X,Y) - \rho_1(X)g(\xi,Y) \\ &= -g(\overset{*}{A}_{\xi}X,Y) \quad (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -g(\overset{*}{A}_{\xi}X,Y) &= -g(\xi,\bar{\nabla}^Y_X) \ \ d'après\ la\ formule\ de\ Gauss\ \bar{\nabla}^Y_X = \nabla^Y_X + B(X,Y)N + D(X,Y)U) \\ &= -g(\xi,\nabla^Y_X + B(X,Y)N + D(X,Y)U) \\ &= -g(\xi,\nabla^Y_X) - g(B(X,Y)N,\xi) - g(D(X,Y)U,\xi) \\ &= -g(\xi,\nabla^Y_X) - B(X,Y)g(N,\xi) - D(X,Y)g(U,\xi) \\ &= -B(X,Y) \end{aligned}$$

d'où $g(\overset{*}{A}_{\xi}X,Y) = B(X,Y)$

Preuve 3 (3.18)

$$\begin{aligned} \bar{g}(\bar{\nabla}^N_X,PY) &= -g\left(-A_NX + \rho_1(X)N + \rho_2(X)U,PY\right) \\ &= g(A^X_N,PY) - g(\rho_1(X)N,PY) - g(\rho_2(X)U,PY) \\ &= g(A^X_N,PY) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -g(N,\bar{\nabla}_XPY) &= -g(\overset{*}{A}_NX,PY) \\ &= g(N,\overset{*}{\nabla}_XPY) = g(\overset{*}{A}_NX,PY) \\ &= -g(N,\overset{*}{\nabla}_XPY - \overset{*}{h}(X,Y)) \\ &= g(N,\overset{*}{\nabla}_XPY + \overset{*}{h}(X,Y)) \ \ or\ \overset{*}{h}(X,Y) = C(X,PY) \\ &= g(N,\overset{*}{\nabla}_XPY + C(X,PY)\xi) \\ &= g(N,\overset{*}{\nabla}_XPY) + g(N,C(X,PY)\xi) \\ &= C(X,PY)\underbrace{g(N,\xi)}_{1} \\ &= C(X,PY) \end{aligned}$$

Preuve 4 (3.19)

$$\begin{aligned}\bar{g}(\bar{\nabla}_X U, PY) &= -g(-A_U X + \rho_1(X)N + \rho_2(X)U, PY)\\ &= g(A_U X, PY) - g(\rho_1(X)N, PY) + g(\rho_2(X)U, PY)\\ &= g(A_U X, PY) - \rho_1(X)g(N, PY) + \rho_2(X)g(U, PY)\\ &= g(A_U X, PY)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}g(A_U X, PY) &= -g(U, \bar{\nabla}_X PY)\\ &= -g(U, \nabla_X PY + B(X, PY)N + D(X, PY)U\\ &= -g(U, \nabla_X PY) - B(X, PY)g(U, N) + D(X, PY)g(U, U)\\ &= D(X, PY)\end{aligned}$$

Preuve 5 (3.20)

$$g(A_U X, PY) = D(X, PY) \quad or \;\; A_U X = -\tilde{\nabla}_X U + \rho_1(X)N + \rho_2(X)U$$

$$\begin{aligned}g(-\tilde{\nabla}_X U + \rho_1(X)N + \rho_2(X)U, PY) &= -g(\tilde{\nabla}_X U, PY) + g(\rho_1(X)N, PY) + g(\rho_2(X)U, PY)\\ &= -g(-A_X U + \nabla^t_X U, PY) + g(\rho_1(X)N, PY) + g(\rho_2(X)U, PY)\end{aligned}$$

$$g(X, .) = X^b(.)$$

$$g(X, Y) = X^b(Y) = g(X, Y) + h(X)\eta(Y) \quad g \text{ est bilinéaire et symétrique}$$

$$\begin{aligned}&g(A_U X, PY) - g(\nabla_U t, PY) + gG(X)N, PY) + g(\rho_2(X)U, PY)\\ &\Leftrightarrow g(A_U X, PY + g\rho_2(X)U, PY)\\ &\Leftrightarrow g(A_U X, PY) + \rho_1(X)g(U, PY)\end{aligned}$$

D'après la bilinéarité de g et la symétrie, on a :

$$g(A_U X, PY) + \rho_1(X)\eta(Y) \quad avec\ \eta(Y) = g(U, PY).$$

Une variété $(M, g, S(T\mu))$ est appelée sous-variété de type lumière totalement géodésique si :

Preuve 6 (3.21)

$$\begin{aligned}\bar{g}(\bar{\nabla}_X Y, N) &= \bar{g}(\nabla_X Y + B(X, Y)\xi, N) && (3.23)\\ &= \bar{g}(\underbrace{\nabla_X Y}_{\in TM}, \underbrace{N}_{\in TM^{\perp}}) + B(X, Y)\underbrace{g(N, \xi)}_{1} && (3.24)\\ &\quad \underbrace{\qquad\qquad}_{0}\\ &= B(X, Y) && (3.25)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{g}(\bar{\nabla}_X Y, N) &= X_g(Y, N) - \bar{g}(\bar{\nabla}_X Y, N) && (3.26)\\ \bar{g}(\bar{\nabla}_X Y, N) &= 0. && (3.27)\end{aligned}$$

En égalisant les expressions (3.25) *et* (3.27)*, on obtient* $B(X, Y) = 0$.

Preuve 7 (3.22)

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_X Y &= \nabla_X Y + h(X,Y)\\ &= \nabla_X Y + B(X,Y).\end{aligned}$$

Pour tout $h(X,Y) = B(X,Y)$ *où* $B(X,Y)$ *est la seconde forme fondamentale.*

$h(X,Y) = B(X,Y)N + D(X,Y)U$ *pour les sous-variétés de types demi-lumière.*

De la relation (3.21) $B(X,Y) = 0$. *(3.21) dans (1), on a :*

$$\begin{aligned}&D(X,Y)U = h(X,Y) + B(X,Y)N\\ &D(X,Y)U = 0 + 0 \ \ (\textit{puisque h(X,Y)=B(X,Y)=0}\\ &D(X,Y)U = 0\\ &D(X,Y) = 0.\end{aligned}$$

La variété $(M,g,S(TM))$ est appelé irrotationnelle [16]. Si h est nul sur $Rad\ TM$ et est appelé totalement géodésique s'il existe un champ de vecteur transversal lisse H : tel que

$$H(X,Y) = g(X,Y)H \tag{3.28}$$

pour $\forall X,Y \in \Gamma(TM)$, alors la sous variété $(M,g,S(TM))$ est appelée totalement ombilique [15].

De plus, $(M,g,S(TM))$ est appelé minimal si il est irrotationnel et la

$$\text{trace}_{S(TM)} h = 0 \tag{3.29}$$

où la $\text{trace}_{S(TM)}$ est la restriction de $S(TM)$ avec le respect de la métrique dégénérée g.

Soit $(M,g,S(TM))$ une sous variété de type demi-lumière de dimension $(n+1)$ et $\{e_1,\cdots,e_n\}$ la base orthogonale de $\Gamma(S(TM))$.

Considérons que

$$\mu_1 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} B(e_j,e_j) \quad \text{et } \mu_2 = \sum_{j=1}^{n} D(e_j,e_j). \tag{3.30}$$

Des expressions (3.29) et (3.30), il est clair que M est minimal si et seulement si $\mu_1 = \mu_2 = 0$. Soit φ une fonction non-nulle sur un voisinage U de M. Ensuite M est appelé écran localement conforme si A_N et A^*_ε proche par

$$A_N = \varphi A^*_\xi \tag{3.31}$$

$$C(X,PY) = \varphi B(X,Y) \tag{3.32}$$

pour tout $X,Y \in \Gamma(TM)$.

3.2 Courbures sur les sous-variétés de types demi-lumières

Soit $(M,g,S(TM))$ une sous-variété de type demi-lumière de dimension $(n+1)$ d'une variété lorentzienne $(\tilde{M},\tilde{g})$ de dimension $(n+3)$.

On note le tenseur de la courbure Riemannienne de $\tilde{M}$ et M par $\tilde{R}$ et R, respectivement. Alors on a [18], [20] :

$$\begin{aligned}\tilde{g}(\tilde{R}(X,Y)Z,PW) =& g(R(X,Y)Z,PW)+B(X,PZ)C(Y,PW)-B(Y,PZ)C(X,PW)+\\ & D(X,PZ)D(Y,PW)-D(Y,PW)D(X,PZ)\end{aligned} \tag{3.33}$$

$$\begin{aligned}\tilde{g}(\tilde{R}(X,Y)PZ,PW) = & (\nabla_X B)(Y,PZ)-(\nabla_Y B)(X,PZ)+\rho_1(X)B(Y,PZ)-\\ & \rho_1(Y)B(X,PZ)+\varepsilon_1(X)D(Y,PZ)-\varepsilon_1(X)D(X,PZ)\end{aligned} \tag{3.34}$$

$$\tilde{g}(\tilde{R}(X,Y)PZ,N) = \tilde{g}(R(X,Y)PZ,N)+\rho_2(Y)D(X,PZ)-\rho_2(X)D(Y,PZ) \tag{3.35}$$

$$\tilde{g}\tilde{R}(X,Y)\xi,N) = g(R(X,Y)\xi,N)+\rho_1(Y)\rho_2(X)-\rho_2(Y)\rho_1(X). \tag{3.36}$$

Noter la section plane non-dégénérée de dimension 2 par

$$\pi = span[X,Y].$$

Dans $T_pM,\ p \in M$, de plus la courbure sectionnelle à p est exprimée par :

$$K(\pi) = \frac{g(R(X,Y)Y,X)}{g(X,X)g(Y,Y)-g(X,Y)^2} \tag{3.37}$$

avec les équations (3.33) et (3.37), on obtient le lemme suivant.

Lemme 1 *Soit $(M,g,S(TM))$ une sous-variété de type demi-lumière d'une variété lorentzienne. Ensuite, on a [11]*

$$K(\pi) = \tilde{K}(\pi)+B(Y,Y)C(X,X)-B(X,Y)C(Y,X)+D(X,X)D(Y,Y)-D(X,Y)^2. \tag{3.38}$$

Théorème 6 *Soit $(M,g,S(TM))$ une sous variété de r-type lumière d'une variété semi-Riemannienne $(\tilde{M},\tilde{g})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

i) $S(TM)$ est intégrable

ii) h^* est symétrique sur $\Gamma(S(TM))$

iii) A_N est auto-adjoint sur $\Gamma(STM)$ avec le respect de g.

D'où le corollaire suivant :

Corollaire 1 *Soit $(M,g,S(TM))$ une sous-variété de type demi-lumière d'une variété semi Riemannienne $(\tilde{M},\tilde{g})$. La courbure sectionnelle plane est symétrique si et seulement si $S(TM)$ est intégrable.*

Remarque 2 *En prenant en considérations le corollaire 1, on voit que la courbure sectionnelle de toutes les sous-variétés de types demi-lumière inclue la signification importante de la géométrie comme dans le contexte Riemannienne quand la distribution écran est intégrable.*

Le tenseur écran de Ricci noté par $Ric\ S(TM)$, est défini par :

$$Ric_{S(TM)}(X,Y) = \text{trace}|_{S(TM)}\{Z \to R(X,Z)Y\} \tag{3.39}$$

pour tout $X,Y,Z \in \Gamma(STM)$. La courbure écran de Ricci à une unité de champs de vecteurs X dans $\Gamma(S)(TM)$ est donné par :

$$Ric_{S(TM)}(X) = \sum_{j=1}^{n} g(R(X,e_j)e_j,X) \tag{3.40}$$

où $\{e_1,\cdots,e_n\}$ est la base orthogonale de $\Gamma(S(TM))$. Le courbure scalaire écran à un point $p \in M$ est noté par $r_{s(TM)}(p)$ est définie par

$$r_{S(TM)}(p) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} g(R(e_i,e_j),e_i) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} K_{ij}. \tag{3.41}$$

Lemme 2 *Soit $(M,g,S(TM))$ une sous variété de type demi-lumière de $(\tilde{M},\tilde{g})$ de dimension $(n+1)$ avec la distribution écran $S(TM)$ intégrable. Supposons que $\{e_1,\cdots,e_n\}$ est une base orthogonale de $\Gamma(S(TM))$. Alors, on a :*

$$2r_{S(TM)}(p) = 2\tilde{r}_{STM)}(p) + \sum_{i,j=1}^{n}\left[B(e_i,e_i)C(e_j,e_j)\right] - B(e_j,e_j)c(e_j,e_j) + \sum_{i,j=1}^{n}\left[D(e_i,e_i)D(e_j,e_j) - D(e_j,e_j)^2\right], \tag{3.42}$$

où $\tilde{r}_{S(TM)}(p)$ est la courbure scalaire, d'une distribution écran de $\tilde{M}$ (voir dans l'équation 3.3 dans [13]) défini par

$$\tilde{r}_{S(TM)}(p) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \tilde{g}\tilde{R}(e_i,e_j)e_j,e_i). \tag{3.43}$$

Corollaire 2 *Si $(M,g,S(TM))$ est une sous-variété de type demi-lumière à l'écran conforme de dimension $(n+1)$ d'une variété lorentzienne $(\tilde{M},\tilde{g})$. Alors, on a :*

$$2r_{S(TM)}(p) = 2\tilde{r}S(TM)(p) + \varphi n^2\mu_1^2 + n^2\mu_2^2 - \sum_{i,j=1}\left[\varphi B(e_i,e_j)^2 + D(e_i,e_j)^2\right]. \tag{3.44}$$

Maintenant, on peut mentionner une autre courbure appelée courbure sectionnelle nulle, le tenseur de type Ricci et une courbure scalaire d'une sous-variété de type demi-lumière.

Soit ξ un vecteur nul de T_pM. Le plan π est appelé plan nul si il comporte ε et e_i telle que $\tilde{g}(\xi,e_i) = 0$ et $\tilde{g}(e_i,e_i) \neq 0$. La courbure sectionnelle nulle de π est définie par

$$k^{null}(\pi) = k^{null}(e_i) = \frac{g(Rp(e_i,\xi)\xi,e_i}{g_p(e_i,e_i)}. \tag{3.45}$$

Proposition 3 *[12] Soit $(M,g,S(TM))$ une sous-variété de type demi-lumière à l'écran conforme d'un espace lorentzien de $\tilde{M}(c)$ d'une courbure constante c. La courbure sectionnelle nulle de M est donnée par :*

$$K^{null}(e_i) = D(\xi,\xi)D(e_i,e_i) - D(e_i,\xi)D(\xi,e_i). \tag{3.46}$$

Pour la proposition 3, il est clair que la courbure section nulle disparaît sur un écran irrotationnel localement conforme d'une sous-variété de type demi-lumière d'un espace semi-riemannien.

Le tenseur de type Ricci, noté par $R^{(0,2)}$, défini par

$$R^{(0,2)}(X,Y) = \sum_{j=1}^{n} g(R(e_j,X)Y,e_j) + \tilde{g}(R(\xi,X)Y,N) \tag{3.47}$$

pour tout, $X,Y \in \Gamma(TM)$.

Pour les équations 3.25 et 3.26, on peut montrer que le tenseur de type Ricci n'a pas besoin d'être symétrique comme courbure sectionnelle plane. Ce tenseur est appelé tenseur de Ricci si il est symétrique. Prenons la trace dans l'équation (3.47), on peut obtenir un scalaire à $p \in M$ tel que :

$$\tau(p) = \sum_{i,j=1}^{n} K_{i,j} + \sum_{i=1}^{n} \left(K^{null}(e_i) + K_N(e_i) \right) \tag{3.48}$$

où $K_N(e_i) = \tilde{g}(R(\xi,e_i)e_i,N)$ pour tout $i \in \{1,\cdots n\}$.

Remarque 3 *Le scalaire $\tau(p)$ est appelé courbure scalaire à $p \in M$ si le tenseur $R^{(0,2)}$ est symétrique. Sinon, $\tau(p)$ ne peut pas être appelé courbure scalaire parce qu'il n'est pas possible de la calculer pour un tenseur de quantité $R^{(0,2)}$.*

3.3 Quelques inégalités optimales pour les sous variétés de type demi-lumière

Nous commençons cette section avec le lemme algébrique suivant :

Lemme 3 *Si $a_1,\cdots,a_n$ sont des nombres réels $(n>1)$ alors*

$$\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \tag{3.49}$$

avec égalité si et seulement si $a_1 = \cdots = a_n$.

Maintenant, on peut établir une inégalité impliquant les invariants intrinsèque et extrinsèque pour les sous variété de type demi-lumière à l'écran conforme d'une variété lorentzienne.

Théorème 7 *Soit $(M,g,S(TM))$ une sous variété de type demi-lumière à l'écran conforme de dimension $(n+1)$ d'une variété lorentzienne $\tilde{M}$ de dimension $(n+3)$ avec $\varphi \geq 0$, alors on a :*

$$2r_S(TM)_{(p)} \leq 2\tilde{r}_S(TM)_{(p)} + n(n-1)\left(\varphi\mu_1^2 + \mu_2^2\right). \tag{3.50}$$

La conservation de l'égalité (3.50) tient pour $p \in M$ si et seulement si $S(TM)$ est totalement ombilique dans M.

Soit $\{e_1 \cdots e_n\}$ une base orthogonale de $\Gamma(TM)$. D'après le corollaire 1, on a :

$$\begin{aligned} 2r_S(TM)_{(p)} =& 2\tilde{r}_S(TM)_{(p)} + \varphi n^2\mu_1^2 - \varphi \sum_{i\neq j=1}^{n} B(e_i,e_j)^2 - \varphi\sum_{i=1}^{n} B(e_i,e_i)^2 + n^2\mu_2^2 \\ &- \sum_{i\neq j=1}^{n} D(e_i,e_j)^2 - \sum_{i=1}^{n} D(e_i,e_i)^2. \end{aligned} \tag{3.51}$$

Preuve 8 *On note le tenseur de courbure Riemannienne de $\tilde{M}$ et M par $\tilde{R}$ et R respectivement. Donc*

$$\begin{aligned} \tilde{g}(\tilde{R}(X,Y)z,PW) =& g(R(X,Y)z,PW) + B(X,Pz)C(Y,PW) - B(Y,Pz)C(X,PW) + \\ & D(X,Pz)D(Y,PW) - D(Y,PW)D(X,Pz) \end{aligned} \tag{3.52}$$

La courbure scalaire écran à un point $p \in M$ est noté par $r_s(TM)_p$ et est défini par :

$$r_s(TM)_{(p)} = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} g(R(e_i,e_j)e_j,e_i) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} K_{ij} \tag{3.53}$$

en base orthogonale $\{e_1,\cdots,e_n\}$, on définit la courbure scalaire d'une distribution écran de $\tilde{M}$ par :

$$\tilde{r}_s(TM)_{(p)} = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \tilde{R}(e_i,e_j)e_j,e_i) \tag{3.54}$$

$$2\tilde{r}_s(TM)_{(p)} = \sum_{i,j=1}^{n} \tilde{g}(\tilde{R}(e_i,e_j)e_j,e_i)) \tag{3.55}$$

$$= 2\tilde{r}_s(TM)_{(p)} + \sum_{i,j=1}^{n} B(e_i,e_i)c(e_j,e_j) - B(e_j,e_i)e(e_i,e_j) \tag{3.56}$$

$$+ \sum_{i,j=1}^{n} D(e_i,e_i)D(e_j,e_j) - D(e_j,e_i)D(e_i,e_j)(1). \tag{3.57}$$

La relation (3.24) on a que : $u_1 = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{n} B(e_j,e_j)$ et $u2 = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{n} D(e_j,e_j)$.

La relation (3.54) devient :

$$2\tilde{r}_s(TM)_{(p)} = 2\tilde{r}_s(TM)_{(p)} + nu_1\varphi nu_1 - \sum_{i,j=1}^{n} B(e_i,e_j)\varphi B(e_j,e_i) + nu_2nu_2 - \sum_{i,j=1}^{n} D(e_i,e_j)D(e_j,e_i) \tag{3.58}$$

$$= 2\tilde{r}_s(TM)_{(p)} = 2\tilde{r}_s(TM)_{(p)} + n^2\varphi u_1^2 - \sum_{i,j=1}^{n} B(e_i,e_j)^2 + n^2u_2 - \sum_{i,j=1}^{n} D(e_i,e_j)^2. \tag{3.59}$$

$$2\tilde{r}_s(TM)_{(p)} = 2\tilde{r}_s(TM)_{(p)} + n^2\varphi U_1^2 + n^2 U_2 - \sum_{i,j=1}^{n} [B(e_i,e_j)^2 + D(e_i,e_j)^2] \tag{3.60}$$

On sait qu'un point x_0 de X est ombilique si et seulement si $B(X,Y) = g(X,Y)H$. En plus $B(e_i,e_j) = 0 \forall i \neq j \in \{1,\cdots,n\}$ et $D(e_i,e_j) = 0$ pour tout $i \neq j \in \{1,\cdots,n\}$.

D'après le lemme (3.1) on a : $\frac{1}{n}(\sum_{i=1}^n a_i)^2 \leq \sum_{i=1}^n a_i^2$

$$2\tilde{r}_s(TM)_{(p)} \leq 2\tilde{r}_s(TM)_{(p)} + n^2\varphi u_1^2 + n^2 u_2. \tag{3.61}$$

Multiplions l'expression (3.58) par $-\varphi\sum_{i=1}^n B(e_i,e_i)^2 - \sum_{i=1}^n D(e_i,e_i)^2$.
On a :

$$\begin{aligned}
2r_s(TM)_{(p)} &\leq 2\tilde{r}_s(TM)_{(p)} + \varphi n^2 U_1^2 - \varphi \sum_{i,j=1}^{n} \left[B(e_i,e_j)^2 + B(e_i,e_i)^2\right] + n^2 U_2^2 \\
&\quad - \sum_{i,j=1}^{n} [D(e_i,e_j)^2 + D(e_i,e_i)^2 + n^2 U_2^2 - \sum_{i,j=1}^{n} \left[D(e_i,e_j)^2 + D(e_i,e_i)^2\right] \\
&\leq 2\tilde{r}_s(TM)_{(p)} + \varphi n^2 U_1^2 - \varphi n U_1^2 - \varphi \sum_{i,j=1}^{n} B(e_i,e_j)^2 + n^2 U_2^2 - nU_2^2 - \sum_{i,j=1}^{n} D(e_i,e_j)^2 \\
&\leq 2\tilde{r}_s(TM)_{(p)} \\
&\leq 2\tilde{r}_s(TM)_{(p)} + \varphi n^2 U_1^2 - \varphi n U_1^2 + n^2 U_2^2 - nU_2^2 - \sum_{i,j=1}^{n} \left[\varphi B(e_i,e_j)^2 + D(e_i,e_j)^2\right] \\
&\leq 2\tilde{r}_s(TM)_{(p)} + n\varphi U_1^2(n-1) + nU_2^2(n-1) - \sum_{i,j=1}^{n} \varphi \underbrace{B(e_i,e_j)^2}_{0} + \underbrace{D(e_i,e_j)^2}_{0} \\
&\qquad (d'après\ le\ lemme\ 4.1) \\
2r_s(TM)_{(p)} &\leq 2\tilde{r}_s(TM)_{(p)} + n(n-1)(\varphi U_1^2 + U_2^2).
\end{aligned}$$

Si on utilise le lemme 1 dans (3.51), on obtient 7. La conservation de l'égalité 7 est vraie si et seulement si :

$$\begin{aligned}
B_{11} = \cdots = B_{nm}, B_{ij} = 0, \ \text{pour} \ i \neq j \in \{1,\cdots,n\} \\
D_{11} = \cdots = D_{nn}, D_{ij} = 0, \ \text{pour} \ i \neq j \in \{1,\cdots,n\}
\end{aligned}$$

laquelle implique que $S(TM)$ est totalement ombilique dans M. En considérant le théorème (7), on obtient les corollaires suivants :

Corollaire 3 *Soit $(M,g,S(TM))$ une sous-variété de type demi-lumière à l'écran conforme , irrotationnelle de dimension $(n+1)$ d'une variété lorentzienne $\tilde{M}$ de dimension $(n+3)$ avec $\varphi \geq 0$. Alors on a :*

$$2r_S(TM)_{(p)} \leq 2\tilde{r}_S(TM)_{(p)} + n(n-1)(\varphi\mu_1^2 + \mu_2^2). \tag{3.62}$$

La conservation de l'égalité (3.62) tient pour tout $p \in M$ si et seulement si M est totalement ombilique.

Corollaire 4 *Soit $(M,g,S(TM))$ une sous variété de type demi-lumière à l'écran conforme de dimension $(n+1)$ d'un espace lorentzienne $R_1^{n+3}(c)$ de dimension $(n+3)$ de courbure (c) constante (c) si $\varphi > 0$, alors on a :*

$$2r_S(TM)_{(p)} \leq n(n-1)(c+\varphi\mu_1^2+\mu_2^2). \tag{3.63}$$

La conservation de l'égalité (3.63) tient pour tout $p \in M$ si et seulement si M est totalement ombilique.

Corollaire 5 *Soit $(M,g,S(TM))$ une sous-variété de type demi-lumière à l'écran conforme de dimension $(n+1)$ d'un espace semi-euclidien E_1^{n+3} de dimension $n+3$. Si $\varphi > 0$, alors on a :*

$$2r_S(TM)_{(p)} \leq n(n-1)(\varphi\mu_1^2+\mu_2^2) \tag{3.64}$$

La conservation de l'équation (3.64) tient pour tout $p \in M$ si et seulement si M est totalement ombilique. Maintenant, on rappelle le théorème suivant de [10].

Théorème 8 *Soit $(M,g,S(TM))$ une sous-variété de type demi-lumière d'une variété semi-riemannienne $\tilde{M}$ si la distribution écran D est de la forme de Killing sur $\tilde{M}$, alors il existe une fonction lisse δ telle que :*

$$D(X,Y) = \delta g(X,Y) \tag{3.65}$$

pour tout $X,Y \in TM$.

Preuve 9 *De la relation (3.5) on a : $\tilde{\nabla}_x^y = \nabla_x^y + h(x,y)$ où $h(x,y)$ est la seconde forme fondamentale : $h(x,y) = B(x,y)N + D(x,y)U$.*

De (3.21) on a : $B(x,y) = D(x,y) = 0$
De plus de la relation 3.22, on a $h(x,y) = g(x,y)H$ en base orthogonale $\{e_1,\cdots,e_n\}$
$B(x,y) = B(e_i,e_j) = 0$ ssi $B_{11},\cdots,B_n$ et $B_{ij} = 0$, pour $i \neq j \in \{1,\cdots,n\}$ et $B_{ij} \neq 0$, pour $i = j \in \{1,\cdots,n\}$.

$D(x,y) = D(e_i,e_j = 0$ si et seulement si $D_{11},\cdots,D_{nn}$, $D_{ij=0}$, pour tout $i \neq j \in \{1,\cdots,n\}$ et $D_{ij} \neq 0$, pour tout $i = j \in \{1,\cdots,n\}$
Donc $D(x,y) = Dg(x,y)$.

D'après le théorème 7 et le théorème 8, on obtient le corollaire suivant :

Corollaire 6 *Soit $(M,g,S(TM))$ une sous variété de type demi-lumière à l'écran conforme de dimension $(n+1)$ d'une variété lorentzienne $\tilde{M}$ de dimension $(n+3)$. Si la conservation de l'égalité 3.50 tient pour tout $p \in M$, alors D est de la forme de Killing homothétique sur $\tilde{M}$ avec $\delta = 1$.*

Si on met (3.44) et (3.46) dans (3.48), on a le lemme suivant :

Lemme 4 *Soit $(M,g,S(TM))$ une sous variété de type demi-lumière à l'écran conforme de dimension $(n+1)$ d'un espace lorentzien $R_1^{N+3}(c)$ de dimension $(n+3)$. Supposons que $\{e_1,\cdots,e_n\}$ est une base orthogonale de $\Gamma(S(TM))$. Alors on a :*

$$\tau(p) =(c+\varphi\mu_1^2+\mu_2^2)n^2-\sum_{i=1}^{n}\Delta(e_i,\varepsilon)D(e_i,\xi)+\rho_2(e_i)]+n\mu_2(D(\xi,\xi)+\rho(\xi))-\sum_{i,j=1}^{n}[\varphi B(e_i,e_j)^2 \tag{3.66}$$

$$+D(e_i,e_j))^2]$$

En utilisant le lemme 4, on obtient le théorème suivant :

Théorème 9 *Soit $(M,g,S(Tm))$ une sous-variété de type demi-lumière à l'écran conforme de dimension $(n+1)$ d'un espace Lorentzien $R_1^{n+3}(c)$ de dimension $(n+3)$, alors on a :*

$$\tau(p)\leq(c+\varphi\mu_1^2+\mu_2^2)n^2+n\mu_2(D(\xi,\xi)+\rho_2(\xi)-\sum_{i=1}^{n}[D(e_i,\xi)\rho_2(e_i)] \tag{3.67}$$

Preuve 10 *La courbure sectionnelle nulle est définie par :*

$$K^{nUll}(\pi)=K^{nUll}e_i=\frac{g(R_p(e_i,\xi)\xi,e_i)}{g_p(e_i,e_i)}\ \ avec\ g_p(e_i,e_i)=1\forall i=j$$

$$K^{nUll}(e_i)=g(R_p(e_i,\xi)\xi,e_i)$$

La proposition (3.7) nous donne l'expression

$$K^{nUll}(e_i)=D(\xi,\xi)D(e_i,e_i)-D(e_i,\xi)D(\xi,e_i)$$

Soit $\tau(p)$. La courbure scalaire est donnée par :

$$\tau(p)=\sum K_{ij}+\sum_{i=1}^{n}\left[K^{nUll}(e_i)+K_N(e_i)\right]$$
$$avec\ \ K_N(e_i)=\tilde{g}(R(\xi,e_i)e_i,N).$$

D'après le théorème (3.2) on a que :

$$2r_s(TM)_{(p)}\leq 2\tilde{r}s(TM)(p)+n(n-1)(\varphi U_1^2+U_2^2)$$

avec $2\tilde{r}_s(TM)_{(p)}$ la courbure constante C pour tout $\varphi>0$, on a : $2\tilde{r}_s(TM)_{(p)}=n(n-1)C$. (3.2) devient :

$$\begin{aligned}2r_s(TM)&\leq n(n-1)C+n(n-1)(\varphi U_1^2+U_2^2)\\&\leq n(n-1)(c+\varphi U_1^2+U_2^2)\\&\leq (n^2-n)(c+\varphi U_1^2+U_2^2)\\&\leq n^2(c+\varphi U_1^2+U_2^2)-n(\varphi U_1^2+U_2^2)(*)_1\end{aligned}$$

avec

$$n(\varphi U_1^2+U_2^2)=\sum_{i=1}^{n}D(e_i,\xi)\left[D(e_i,\xi)+\rho_2(e_i)\right]+nU_2(D(\xi,\xi)+\rho_2(\xi)-\sum_{i,j=1}^{n}\left[\varphi B(e_j,e_j)^2+D(e_i,e_j)^2\right]\ (**)_2$$

$(**)_2$ *dans* $(*)_1$ *on a :*

$$\tau(p)\leq n^2(C+\varphi U_1^2+U_2^2)-\sum_{i=1}^{n}D(e_i,\xi)\left[D(e_i,\xi)+\rho(e_i)\right]+nU_2(D(\xi,\xi)+\rho(\xi))-\sum_{i,j=1}^{n}\left[\varphi B(e_i,e_j)^2+D(e_i,e_j)^2\right]$$

$$\tau(p)\leq n^2(C+\varphi U_1^2+U_2^2)-\sum_{i=1}^{n}(D(e_i,\xi)(D(e_i,\xi)-\sum_{i=1}^{n}D(e_i,\xi)\rho_2(e_i)+nU_2(D(\xi,\xi)+nU_2\rho_2(\xi)-\sum_{i,j=1}^{n}\left[\varphi B(e_i,e_j)^2+D(e_i,e_j)^2\right]$$

$$\tau(p)\leq n^2(C+\varphi U_1^2+U_2^2)-\sum_{i=1}^{n}D(e_i,\xi)\rho_2(e_i)+nU_2\left(D(\xi,\xi)+\rho_2(\xi)\right)$$

$$\tau(p)\leq n^2(C+\varphi U_1^2+U_2^2)+nU_2\left(D(\xi,\xi)+\rho_2(\xi)-\sum_{i=1}^{n}D(e_i,\xi)\rho_2(e_i).\right.$$

Si la conservation de l'égalité (3.67) tient pour tout $p\in M$, alors (STM) est totalement géodésique.

Corollaire 7 *Si $(M,g,S(TM)$ est une sous-variété de type lumière conforme à l'écran irrotationnel de dimension $(n+1)$ d'un espace semi-euclidien E_1^{n+3} de dimension $(n+3)$ alors on a :*

$$\tau(p)\leq\left(\varphi\mu_1^2+\mu_2^2\right)n^2+n\mu_2\rho_2(\xi).\tag{3.68}$$

La conservation de l'égalité (3.68) tient pour tout $p\in M$ si et seulement si M est totalement géodésique.

Si on considère le lemme (3) dans le lemme (4) et utiliser les arguments similaire comme dans la démonstration du théorème 4.2, on obtient le théorème suivant :

Théorème 10 *Soit $M,g,S(TM))$ une sous variété de type demi-lumière à l'écran conforme de dimension $(n+1)$ d'un espace Lorentzien $R_1^{n+3}(c)$. Alors on a :*

$$\tau(p)\leq n^2c+n(n-1)\left(\varphi\mu_1^2+\mu_2^2\right)+n\mu_2(D(\xi,\xi)+\rho_2(\xi))-\sum_{i=1}^{n}[D(e_i,\xi)\rho_2(e_i)].\tag{3.69}$$

Preuve 11 *D'après le lemme (3.4) on a que :*

$$\tau(p) = (C+\varphi U_1^2+U_2^2)n^2 - \sum_{i=1}^{n} D(e_i,\xi)\left[D(e_i,\xi)+\rho_2(e_i)\right] + nU_2\left(D(\xi,\xi)+\rho_2(\xi)+\rho_2(\xi)\right)$$
$$-\sum_{i,j}^{n}\left[\varphi B(e_i,e_j)^2+D(e_i,e_j)^2\right]$$

avec collaire (3.4) on a :

$$\begin{aligned}
2r_s(TM)_(p) &\leq n(n-1)(C+\varphi U_1^2+U_2^2)\\
&\leq n(n-1)C+n(n-1)(\varphi U_1^2+U_2^2)\\
&\leq n(n-1)(C+\varphi U_1^2+U_2^2)\\
&\leq (n^2-n)(C+\varphi U_1^2+U_2^2)\\
&\leq n^2(C+\varphi U_1^2+U_2^2)-n(C+\varphi U_1^2+U_2^2)\\
&\leq n^2C+n^2(\varphi U_1^2+U_2^2)-nC-n(U_1^2+U_2^2)\\
&\leq n^2C+n(n-1)(\varphi U_1^2+U_2^2)-nC.
\end{aligned}$$

Lemme (3.7) nous montre que :

$$\tau(p) \leq n^2C+n(n-1)(\varphi U_1^2+U_2^2) - \sum_{i,j=1}^{n} D(e_i,\xi)\left[D(e_i,\xi)+\rho_2(e_i)\right] + nU_2\left[D(\xi,\xi)+\rho_2(\xi)\right]$$
$$-\sum_{i,j=1}^{n}\left[\varphi B(e_i,e_j)^2+D(e_i,e_j)^2\right].$$

$$\tau(p) \leq n^2C+n(n-1)(\varphi U_1^2+U_2^2) - \sum_{i=1}^{n} D(e_i,\xi)D(e_i,e_j) - \sum_{i=1}^{n}\left[D(e_i,\xi)\rho_2(e_i)\right] +$$
$$nU_2D(\xi,\xi)+nU_2\rho_2(\xi) - \sum_{i,j}^{n}\left[\varphi B(e_i,e_j)^2+D(e_i,e_j)^2\right].$$

$$\tau(p) \leq n^2C+n(n-1)(\varphi U_1^2+U_2^2) - \sum_{i=1}^{n} D(e_i,\xi)\rho_2(e_i) + nU_2(D(\xi,\xi)+\rho_2(\xi)).$$

$$\tau(p) \leq n^2C+n(n-1)(\varphi U_1^2+U_2^2) + nU_2\left(D(\xi,\xi)+\rho(\xi)\right) - \sum_{i=1}^{n}\left[D(e_i,\xi)\rho_2(e_i)\right].$$

La conservation de l'égalité (3.69) tient pour $p \in M$, si et seulement si M est totalement ombilique.

Corollaire 8 *Soit $(M,g,S(TM))$ une sous-variété de type demi-lumière à l'écran conforme de dimension irrotationnel $(n+1)$ d'un espace Lorentzien R_1^{n+3}. Alors*

$$\tau(p) \leq n^2+n(n-1)(\varphi\mu_1^2+\mu_2^2)+n\mu_2\rho_2(\xi). \tag{3.70}$$

La conservation de l'égalité (3.70) tient pour tout $p \in M$ si et seulement si M est totalement ombilique.

Exemple 7 *Considérer dans R_1^7 avec signature $(-,+,+,+,+,+,+)$; la sous-variété de M est donnée par les équations :*

$$x_4 = (x_1^2 - x_2^2)^{\frac{1}{2}},\ x_3 = (1 - x_5^2)^{\frac{1}{2}},\ x_6 = (-x_7^2)^{\frac{1}{2}},\quad x_2, x_5, x_7 > 0 \tag{3.71}$$

alors on a :

$$\begin{aligned} Rad\ TM =& Span\{\xi = x_1\partial x_1 + x_2\partial x_2 + x_4\partial x_4\},\\ S(TM) =& Span\{Z_1 = x_4\partial x_1 + x_1\partial x_4; Z_2 = -x_5\partial x_3 + x_3\partial x_5; Z_3 = -x_6\partial x_7 + x_7\partial x_6;\\ & Z_4 = x_6\partial x_7 + x_7\partial x_6\} \end{aligned}$$

et $D = Span\{u = x_3\partial x_3 + x_5\partial x_5\}$

donc, M est une sous-variété de type demi-lumière de R_1^7 avec $S(TM) = Span\{U_1, U_2, U_3, U_4\}$. Ainsi, tout l'espace tangent $ltr(TM)$ transversal de type lumière est engendré par :
$N = \frac{1}{2}\{-x_1\partial x_1 + x_2\partial x_2 + x_4\partial x_4\}$. Alors, on a :

$$\tilde{\nabla}_{Z_1}\xi = Z_1;\ \tilde{\nabla}_{Z_2}\xi = \nabla_{Z_3}\xi = \tilde{\nabla}_{Z_4}\xi = 0, \tilde{\nabla}_{\xi}\xi = \xi$$

$$\tilde{\nabla}_{Z_1}N = \frac{1}{2x_1}Z_1; \tilde{\nabla}_{Z_2}N = \nabla_{Z_3}N = \tilde{\nabla}_{Z_4}N = 0, \tilde{\nabla}_{\xi}N = -N$$

et $(M, g, S(TM))$ est un écran conforme avec $\varphi = \frac{1}{2x_1}$. Pour (3.5), (3.6) et (3.7), on a :

$$B(Z_1, Z_1) = -x_2^2, D(Z_2, Z_2) = -1 \tag{3.72}$$

1 •) $\Delta(Z_2, Z_2) = -1$.
En effet, de (3.72) on a :

$$\begin{aligned} D(Z_2, Z_2) &= kg(Z_2, Z_2)\\ &= kg\left(-x_5\frac{\partial}{\partial x_3} + x_3\partial x_5,\ -x_5\frac{\partial}{\partial x_3} + x_3\frac{\partial}{\partial x_5}\right), \qquad \text{posons } k = 1\\ &= g\left(-x_5\frac{\partial}{\partial x_3}, -x_5\frac{\partial}{\partial x_3}\right) + g\left(x_3\frac{\partial}{\partial x_5}, x_3\frac{\partial}{\partial x_5}\right)\\ &= -x_5\left(g\left(\frac{\partial}{\partial x_3}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right)\right) + x_3 g\left(\frac{\partial}{\partial x_5}, \frac{\partial}{\partial x_5}\right)\\ &= -x_5 + x_3 \end{aligned}$$

or $x_5 > 0$, en posant que $x_5 = 1$, on a :

$$\begin{aligned} -1 + \left(1 - x_5^2\right)^{\frac{1}{2}}&\\ = -1 + ||1 - x_5^2||^2&\\ = -1 + 1 - x_5^2&\\ x_5 > 0&\\ -x_5^2 = 1&\\ x_5^2 = -1&\\ \text{alors } -1 + 1 - x_5^2 \text{ devient } -1 + 1 - 1 = -1&\\ \text{D'où } D(Z_2, Z_2) = -1.& \end{aligned}$$

2 •) $B(Z_1,Z_2) = -x_2^2$.

En effet, on sait que $B(x,y) = kg(x,y)$ pour tout $k = 1$. On a

$$\begin{aligned} B(Z_1,Z_1) =& g\left(x_4\frac{\partial}{\partial x_1} + x_1\frac{\partial}{\partial x_1}, x_4\frac{\partial}{\partial x_1} + x_1\frac{\partial}{\partial x_4}\right) \\ &= g\left(x_4\frac{\partial}{\partial x_1}, x_4\frac{\partial}{\partial x_1}\right) + g\left(x_1\frac{\partial}{\partial x_4}, x_1\frac{\partial}{\partial x_4}\right) \\ &= x_4 g\left(\underbrace{\partial x_1, \partial x_1}_{1}\right) + x_1 g\left(\underbrace{\partial x_4, \partial x_4}_{1}\right) \\ &= x_4 + x_1 \;\; or \;\; x_4 = \left(x_1^2 - x_2^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(x_1^2 - x_2^2\right)^{\frac{1}{2}} + x_1 \end{aligned}$$

$$2r_{S(TM)}(p) \leq n(n-1)\|H'(p)\|^2 - \varphi\mu_1^2$$

On a :

$$\begin{aligned} &\|x_1^2 - x_2^2\|^2 - x_1^2 \\ &= x_1^2 - x_2^2 - x_1^2 \\ &= -x_2^2. \end{aligned}$$

$$3\bullet)\ \nabla_{Z_2}\xi = \tilde{\nabla}_{Z_3}\varepsilon = \tilde{\nabla}_{Z_4}\varepsilon.$$

En effet, comme ε et Z_2 sont des champs de vecteur, on a :

$$\begin{aligned} \nabla_{-\partial x_5\partial x_3 + \partial x_3\partial x_5} x_1\partial x_1 + x_2\frac{\partial}{\partial x_2} + x_4\partial x_4 &= (-x_5\partial x_3 + x_3\partial x_5)(x_1\partial x_1 + x_2\partial x_2 + x_4\partial x_4) \\ &= -x_5\frac{\partial x_1}{\partial x_3}\partial x_1 - x_5\frac{\partial x_2}{\partial x_3}\frac{\partial}{\partial x_2} - x_5\frac{\partial x_4}{\partial x_3}\partial x_4 + x_3\frac{\partial x_1}{\partial x_5}\partial x_1 \\ &\quad + x_3\frac{\partial x_2}{\partial x_5}x_2\partial x_2 + x_3\frac{\partial x_4}{\partial x_5}\partial x_4 \\ &= 0 \end{aligned}$$

D'où $\tilde{\nabla}_{Z_2}\xi = \tilde{\nabla}_{Z_3}\xi = \tilde{\nabla}_{Z_4}\xi = 0$.

4 •) $\bar{\nabla}_{Z_3}N = 0$.

En effet :

$$\bar{\nabla}_{Z_3}N = \bar{\nabla}_{(-x_6\frac{\partial}{\partial x_7} + x_7\frac{\partial}{\partial x_6})}\frac{1}{2}(-x_1\partial x_1 + x_2\partial x_2 + x_4\partial x_4)$$

Comme N et Z_3 sont des champs de vecteurs, on a :

$$\begin{aligned} \left(-x_6\frac{\partial}{\partial x_7} + x_7\frac{\partial}{\partial x_6}\right)\frac{1}{2}(-x_1\partial x_1 + x_2\partial x_2 + x_4\partial x_4) &= \frac{1}{2}(-x_1\partial x_1 + x_2\partial x_2 + x_4\partial x x_4)(-x_6\partial x_7 + x_7\partial x_6) \\ &= \frac{1}{2}(-x_1\partial x_1(-x_6)\partial x_7 + x_2\partial x_2 x_7 x_6 + x_2\partial x_2 - x_6\partial x_7 \\ &\quad + x_2\partial x_2 - x_6\partial x_7 + x_4\partial x_4(-x_6)\partial x_7 + x_4\partial x_4 x_7\partial x_6 \\ &= 0 \end{aligned}$$

D'où

$$\nabla_{Z_2}N = \bar{\nabla}_{Z_3}N = \tilde{\nabla}_{Z_4}N = 0$$

. 5 •) $\tilde{\nabla}_{Z_1}\varepsilon = Z_1$.
En effet

$$\begin{aligned}\xi &= x_1\partial x_1 + x_2\partial x_2 + x_4\partial x_4\\ Z_1 &= x_4\partial x_1 + x_1 + \partial x_4\\ \tilde{\nabla}_{Z_1}\varepsilon &= \tilde{\nabla}_{x_4\partial x_1 + x_1\partial x_4}x_1\partial x_1 + x_2\partial x_2 + x_4\partial x_4\end{aligned}$$

Comme ξ et Z_1 sont des champs de vecteurs on a :

$$\begin{aligned}(x_4\partial x_1 + x_1\partial x_4)(x_1\partial x_1 + x_2\partial x_2 + x_4\partial x_4) &= x_4\partial x_1 x_1\partial x_1 + x_4\partial x_1 x_2\partial x_2 + x_4\partial x_1 x_4\partial x_4\\ &\quad + x_1\partial x_4 x_1\partial x_1 + x_1\partial x_4 x_2\partial x_2 + x_1\partial x_4 x_4\partial x_4\\ &= x_4\partial x_1 + x_1\partial x_4\\ &= Z_1.\end{aligned}$$

D'où $\tilde{\nabla}_{Z_1}\varepsilon = Z_1$.
6 •) $\tilde{\nabla}_{\varepsilon}N = -N$.
En effet

$$\tilde{\nabla}_{\varepsilon}N = \tilde{\nabla}_{x_1\partial x_1 + x_2\partial x_2 + x_4\partial x_4}\frac{1}{2}(x_1\partial x_1 + x_2\partial x_2 + x_4\partial x_4)$$

N et ξ sont tous des champs de vecteurs on a :

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_{x_1\partial x_1 + x_2\partial x_2 + x_4\partial x_4}\frac{1}{2}(x_1\partial x_1 + x_2\partial x_2 + x_4) &= (x_1\partial x_1 + x_2\partial x_2 + x_4\partial x_4)\frac{1}{2}(-x_1\partial x_1 + x_2\partial x_2 + x_4\partial x_4)\\ &= \frac{1}{2}(-x_1\partial x_1 x_1\partial x_1 + x_1\partial x_1 x_2\partial x_2 + x_1\partial x_1 x_4\partial x_4 - x_2\partial x_2 x_1\partial x_1\\ &\quad + x_2\partial x_2 x_2\partial x_2 + x_2\partial x_2 x_4\partial x_4 - x_4\partial x_4 x_1\partial x_1 + x_4\partial x_4 x_2\partial x_2 + x_4\partial x_4 x_4\partial x_4)\\ &= \frac{1}{2}(-x_1\partial x_1 + x_2\partial x_2 + x_4\partial x_4) = N\\ &= -\frac{1}{2}(x_1\partial x_1 - x_2\partial x_2 - x_4\partial x_4)\\ &= -N.\end{aligned}$$

7 •) $\tilde{\nabla}_{Z_1}N = \frac{1}{2x_1}Z_1$.

En effet, de (3.31), on a : $A_N = \varphi\overset{*}{A}_{\xi}$

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_{Z_1}N = \nabla_{Z_1}\varphi\xi &= \tilde{\nabla}_{x_4\partial x_1 + x_1\partial x_4}\varphi(x_1\partial x_1 + x_2\partial x_2 + x_4\partial x_4)\\ &= (x_4\partial x_1 + x_1\partial x_4)\varphi(x_1\partial x_1 + x_2\partial x_2 + x_4\partial x_4)\\ &\varphi(x_4\partial x_1 x_1\partial x_1 + x_4\partial x_1 x_2\partial x_2 + x_4\partial x_1 x_4\partial x_4 + x_1\partial x_4 x_1\partial x_1 + x_1\partial x_4 x_2\partial x_2 + x_1\partial x_4 x_4\partial x_4)\\ &= \varphi(\underbrace{x_4\partial x_1 + x_1\partial x_4}_{Z_1})\\ &= \varphi Z_1;\ \text{ or }\ \varphi\ \text{ est un écran conforme} = \frac{1}{2x}\\ &= \frac{1}{2x_1}Z_1.\end{aligned}$$

Conclusion générale

Dans notre travail de mémoire, nous avons developpé les inégalités optimales sur les sous-variétés de types demi-lumière de codimension deux d'une variété Lorentzienne.

Cependant la théorie des sous-variétés d'une variété riemannienne ou semi-riemannienne est l'un des sujets les plus importants de la géométrie différentielle. La géométrie des sous-variétés d'une variété riemannienne ou semi-riemannienne est entièrement développée, elle est la contrepartie des sous variétés de type lumière dont les sous-variétés de type demi-lumière est une classe spéciale de celles-ci.

En effet, à partir des notions existants pour les sous-variétés et les inégalités pour les sous-variétés d'un espace réel prouvées par Bang Young Chen Ricci ; nous avons développé la théorie et les applications des inégalités optimales dans les sous-variétés de types demi-lumières, qui consiste à déterminer les relations impliquant les principaux invariants intrinsèques et extrinsèques pour les sous-variétés de type demi-lumières.

Nous ne prétendons pas avoir épuiser les aspects de ce sujet, c'est un vaste et intéressant domaine à explorer encore. J'espère m'emboîter le pas en apportant des compléments à l'un ou l'autre élément de ce travail ou en traitant d'autres aspects qui n'ont pas été abordés ici.

Bibliographie

[1] M. A. Akivis and V. V. Goldberg. On some methods of construction of invariant normalizations of lightlike hypersurfaces. *Differential Geometry and its Applications*, 12(2) :121–143, 2000.

[2] K. Arslan, R. Ezentas, I. Mihai, C. Murathan, and C. Ozgür. Ricci curvature of submanifolds in locally conformal almost cosymplectic manifolds. *Math. J. Toyama Univ*, 26 :13–24, 2003.

[3] M. A. BAHAYOU. Introduction à la géométrie différentielle. *Université de Ouargla, BP*, 320, 2004.

[4] A. Bejancu and K. Duggal. Lightlike submanifolds of semi-riemannian manifolds. *Acta Applicandae Mathematica*, 38 :197–215, 1995.

[5] É. Cartan. Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée (première partie). In *Annales scientifiques de l'École normale supérieure*, volume 40, pages 325–412, 1923.

[6] B. Chen. Pseudo-riemannian geometry, δ-invariants and applicationsm world scientific publishing. *Hackensack, NJ*, 2011.

[7] B.-Y. Chen. Some pinching and classification theorems for minimal submanifolds. *Archiv der Mathematik*, 60 :568–578, 1993.

[8] B.-Y. Chen. A riemannian invariant and its applications to submanifold theory. *Results in Mathematics*, 27(1-2) :17–26, 1995.

[9] B.-Y. Chen. Relations between ricci curvature and shape operator for submanifolds with arbitrary codimensions. *Glasgow Mathematical Journal*, 41(1) :33–41, 1999.

[10] K. Duggal and D. Jin. Half lightlike submanifolds of codimension 2. *Math. J. Toyama Univ*, 22 :121–161, 1999.

[11] K. L. Duggal and A. Bejancu. Lightlike submanifolds of semi-riemannian manifolds. In *Lightlike Submanifolds of Semi-Riemannian Manifolds and Applications*, pages 139–189. Springer, 1996.

[12] M. Gülbahar, E. Kilic, and S. Kele. Chen-like inequalities on lightlike hypersurfaces of a lorentzian manifold. *Journal of Inequalities and Applications*, 2013 :1–18, 2013.

[13] S. Hong, K. Matsumoto, and M. M. Tripathi. Certain basic inequalities for submanifolds of locally conformal kaehler space forms. *SUT Journal of Mathematics*, 41(1) :75–94, 2005.

[14] M. Karimumuryango, H. Tetsing, D. Ndayirukiye, and G. Nibaruta. Rigging and existence of stable currents in null hypersurface of lorentzian manifold. *Differential Geometry–Dynamical Systems*, 2021.

[15] E. Kılıç and M. Gülbahar. On the sectional curvature of lightlike submanifolds. *Journal of Inequalities and Applications*, 2016 :1–16, 2016.

[16] D. N. Kupeli. Singular semi-riemannian geometry. *Link (Mathematics and its applications*, 366, 1996.

[17] M. P. Malliavin. *Géométrie différentielle intrinseque*. Hermann, Paris, 1972.

[18] B. O'neill. *Semi-Riemannian geometry with applications to relativity*. Academic press, 1983.

[19] C. Özgür and A. De. Chen inequalities for submanifolds of a riemannian manifold of nearly quasi-constant curvature. 2013.

[20] F. Paulin. Géométrie différentielle élémentaire. *Notes de cours de première année de mastère, Ecole Normale Supérieure*, 2007.

[21] F. Pham. *Géométrie et calcul différentiel sur les variétés : cours, études et exercices pour la maîtrise de mathématiques*. InterEditions, 1992.