UNIVERSITÉ DU BURUNDI
GRENIER DU SAVOIR DU BURUNDI
Dépôt institutionnel officiel
https://repository.ub.edu.bi

Géométrie de l'hyper surface de type lumière d'une variété Statistique

Ndoriyobija, Jean Bosco; Sous la direction de : Prof. Karimumuryango Ménédore

2024-06
UB, ENS
https://repository.ub.edu.bi/handle/123456789/2037

Document téléchargé depuis le **Grenier du Savoir du Burundi** — https://repository.ub.edu.bi

UNIVERSITE DU BURUNDI ET ECOLE NORMALE SUPERIEURE

MASTER CONJOINT EN DIDACTIQUE DES SCIENCES
OPTION : MATHEMATIQUES

GEOMETRIE DE L'HYPERSURFACE DE TYPE LUMIERE D'UNE VARIETE STATISTIQUE

Par :

NDORIYOBIJA Jean Bosco

Mémoire
présenté et défendu publiquement en vue de l'obtention du
Diplôme de Master en didactique des sciences mathématiques.

Sous la direction de :
Prof. KARIMUMURYANGO Ménédore

Bujumbura, Juin 2024

Composition du Jury

Prof. NDAYIRUKIYE Domitien (*Président du Jury*)
Prof. NIBARUTA Gilbert(*Secrétaire du Jury*)
Prof. NIBIRANTIZA Aboubacar (*Membre*)
Prof. KARIMUMURYANGO Ménédore (*Directeur de Mémoire*)

NDORIYOBIJA Jean Bosco ©U.B et ENS 2024

Dédicace

A mes parents ;
A mon épouse ;
A mes frères et sœurs ;
A mes camarades de mastère ;
A tous ceux qui me sont chers.

Remerciements

Toute ma gratitude et tous mes remerciements les plus sincères à Dieu le tout puissant pour m'avoir guidé et assisté durant tout mon parcours d'études.
Je réserve une reconnaissance particulière à ma mère qui m'a apporté la confiance dont j'avais besoin pour continuer mon parcours d'études et à mon épouse pour ses encouragements. Je remercie le jury d'avoir accepté évaluer mon travail. Recevez ici, toute ma gratitude et toute ma sincère reconnaissance pour votre disponibilité.
Je tiens à remercier chaleureusement mon encadreur Prof. KARIMUMURYANGO Ménédore et pour le temps qu'elle a consacré pour m'avoir apporté les outils méthodologiques indispensables à la conduite de ce mémoire et qui m'a offert la possibilité de réaliser ce travail dans de bonnes conditions, et aussi pour ses bénéfiques conseils et explications, j'ai eu l'honneur de travailler sous sa direction. Elle a été toujours attentive et comprehensible. Je tiens à la remercier pour son enseignement et son soutiens tout au long des années d'études.
Mon respect et mes plus vifs remerciements vont au Docteur Hans Fotsing pour ses riches et précieux conseils, de m'avoir honoré en acceptant de lire et m'orienter pour enrichir mon mémoire. Je ne peux pas oublier ses termes qui revenaient dans plusieurs thèmes.
Je ne pourrais jamais oublier le soutien et l'aide des personnes chères de ma famille. Je voudrais aussi adresser mes remerciements les plus sincères aux personnes qui m'ont apporté leur aide et qui ont contribué de près ou de loin à l'élaboration de ce mémoire.

Résumé

L'objectif de ce mémoire est de contribuer à l'étude de l'hypersurface de type lumière d'une variété statistique.

Cependant, après avoir passé à la revue de la littérature sur les notions de base de la géométrie différentielle, nous avons étudie l'hypersurface de type lumière d'une variété statistique.

Nous avons également établi les équations de Gauss-Codazzi pour le cas d'une hypersurface de type lumière d'une variété statistique.

Mots clés :Géométrie, hypersurface, type lumiere, variété statistique.

Abstract

The objective of this dissertation is to contribute to the study of the hypersurface of lightlike of a statistical variety. However, after reviewing the literature on the notions of basis of differential geometry, we studied the hypersurface of lightlike of a statistical variety. We also established the Gauss-Codazzi equations for the case of a lightlike hypersurface of a statistical manifold.

Key words : Geometry, hypersurface, lightlike, statistical manifold.

NDORIYOBIJA Jean Bosco ©U.B et ENS 2024

Table des matières

Composition du Jury i

Dédicace ii

Remerciements iii

Résumé iv

Abstract v

Table des Matières vi

Avant-propos viii

Introduction générale 1

1 Notion de géométrie différentielle 2
- 1.1 Difféomorphismes, immersions et submersions 2
- 1.2 Sous-variétés $\mathbb{R}^n$ 3
  - 1.2.1 Fibré tangent d'une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ 4
- 1.3 Variété Abstraite 5
  - 1.3.1 Espace topologique 5
  - 1.3.2 Variété topologique 6
  - 1.3.3 Variété différentiable 6
  - 1.3.4 Fibré tangent d'une variété abstraite 7

2 Variété Pseudo-Riemannienne 9
- 2.1 Espaces pseudo-euclidiens 9
  - 2.1.1 Formes bilinéaires et quadratiques 9
  - 2.1.2 Produits scalaires 9
  - 2.1.3 Othogonalité et isotropie 12
  - 2.1.4 Métrique semi-riemannienne 12

2.1.5 Connexion linéaire- Crochet de Lie 13
2.1.6 Torsion 14
2.1.7 Courbure de Riemann 15
2.1.8 Courbure sectionnelle 16
2.2 Sous-variétés semi-riemanniennes 17
2.2.1 Connexion de Levi-Civita d'une sous variété 20
2.2.2 Hypersurfaces semi-Riemaniennes 20
2.2.3 Sous-variétés minimales 23
2.2.4 Hypersurfaces de type lumière 24

3 Hypersurface de type lumière d'une variété statistique 31
3.1 Introduction 31
3.2 Définitions 31
3.3 Les tenseurs de courbure de types lumière d'une variété statistique 32
3.4 Equations de Gauss-codazzi d'une hypersurface de type lumière d'une variété statistique 36
3.5 Les tenseurs de Ricci d'une hypersurface de type lumière d'une variété statistique 57

Conclusion 61

Bibliographie 63

Avant-propos

L'objectif de cette recherche est d'étudier la géométrie des hypersurfaces de type lumière d'une variété statistique. Comme la géométrie des hypersurfaces de type lumière n'est pas exploité en Afrique en générale et en particulier au Burundi, nous avons rencontré des difficultés pour exploiter ce sujet si noble. Mais en s'inspirant sur les résultats existants, nous avions pu aboutir aux résultats.

NDORIYOBIJA Jean Bosco ©U.B et ENS 2024

Introduction générale

Dans ce mémoire, les outils de la géométrie différentielle sont utilisés pour examiner l'inférence statistique et la perte d'information.

La géométrie des sous-variétés des variétés statistiques est etudiée dans ce mémoire et les formules de Gauss-Weingarten, les équation de Gauss et Codazzi sont obtenues. Aussi, nous avons étudié des sous-variétés des variétés statistiques a courbure constante. La géométrie de type lumière d'une sous variété d'une variété semi-riemannienne a été présentée par K.L.Duggal et A.Bejancu dans " Lightlike submanifolds of semi-riemannian manifolds and applications en 1996. Mathematics and its applications." Aussi dans " Nul curves and hypersurfaces of semi-riemannian manifolds". Les hypersurfaces de type lumière dans divers espaces ont été étudiées par de nombreux auteurs.

Motivés par ces circonstances, le problème suivant a été formulé : L'hypersurface de type lumière d'une variété statistique est-elle une variété statistique ?

Dans notre travail de master, quelques relations entre objets géométriques induits par rapport à des connexions duales d'une hypersurface de type lumière sont données.

Le deuxième chapitre présente les définitions de base et les résultats concernant les variétés statistiques et l'hypersurface de type lumière.

Au chapitre 3, nous montrons que les connexions sur une hypersurface de type lumière d'une variété statistique ne sont pas des connexions duales et l'hypersurface de type lumière n'est pas une variété statistique , aussi que la seconde forme fondamentale n'est pas dégénérée et un exemple est donné. Enfin, nous obtenos les formules de tenseurs de courbure d'une hypersurface de type lumière d'une variété statistique.

Chapitre 1

Notion de géométrie différentielle

1.1 Difféomorphismes, immersions et submersions

Soit f une application de classe C^1 d'un espace affine dans un autre. on notera par $D_x f$ sa différentielle au point x.

Définition 1.1. *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, V un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et f une application de classe C^r définie de U à valeurs dans V, pour $r \geq 1$.*

1. *L'application f est un difféomorphisme de U sur V, si f est une bijection de classe C^r ainsi que sa réciproque.*
2. *L'application $f : U \to F$ de classe C^r est une immersion en $x \in U$ si sa différentielle en x est injective (i.e si sa matrice jacobienne est de rang n)*
3. *L'application f est une submersion en $x \in U$ si sa différentielle en x est surjective (i.e si sa matrice jacobienne est de rang p). f est une submersion au dessus de $y \in F$ si f est une submersion en tout point de $f^{-1}(y)$.*

Théorème 1.1 (Inversion locale)**.** *Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^n$ et f une application de classe C^r définie de U à valeur dans V. Soit m un point de U tel que $D_m f$ est inversible. Alors f est un difféomorphisme au voisinage de m.*

Le théorème d'inversion locale permet d'affiner notre compréhension des immersions et des submersions

Théorème 1.2 (des immersions et des submersions)**.** *Soit f une application C^r d'un ouvert U d'un espace affine ε de dimension p à valeurs dans un espace affine F de dimension n. Alors*

1. *On suppose que f est une immersion en m. Alors, il existe un voisinage U de m, une carte (V, φ) au voisinage de $f(m)$, tel que $f(u) \subset V$, tels que $\phi \circ f$ définie de U dans $\mathbb{R}^n$ est une application affine injective.*

2. *On suppose que f est une submersion en m. Alors, il existe une carte (U, φ) au voisinage x, tels que $f \circ \varphi^{-1}$ est une application affine surjective de $\varphi(U)$ dans F.*

Autrement dit, en choisissant de nouvelles coordonnées,une immersion est une application linéaire injective et une submersion devient une application linéaire surjective.

1.2 Sous-variétés $\mathbb{R}^n$

Définition 1.2. *Soit M un sous ensemble de $\mathbb{R}^n$. On dit que M est une sous variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension p et de classe C^k s'il vérifie l'une des assertions équivalentes suivantes :*

1. *(Définition par redressement) Pour tout x de M, il existe des voisinages respectifs U de x dans $\mathbb{R}^n$ et V de 0 dans $\mathbb{R}^p$, ainsi qu'un C^k-difféomorphisme $f : U \to V$, envoyant x sur 0, et telle que $f(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^p \times 0)$.*
2. *(Définition locale par fonction implicite) Pour tout x de M, il existe un voisinage U de x dans $\mathbb{R}^n$ ainsi que $f : U \to \mathbb{R}^{n-p}$ une C^k-submersion en x telle que $U \cap M = f^{-1}(0)$.*
   Par exemple du cercle unité, il est donné par l'équation $x^2 + y^2 - 1 = 0$
3. *(Définition locale par paramétrage) Pour tout x de M, il existe des voisinages U de x dans $\mathbb{R}^n$ et V de 0 dans $\mathbb{R}^p$, ainsi que $f : V \to \mathbb{R}^n$ une C^k-immersion en 0, envoyant 0 sur x, et induisant un homéomorphisme $V \to U \cap M$.*
   Par exemple, le cercle unité est l'ensemble des points $(\cos t, \sin t)$ pour tout $t \in [0, 2\pi]$.
4. *(Définition locale par graphe) Pour tout x de M, on a un voisinage U de x dans $\mathbb{R}^n$, une identification linéaire $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$, un ouvert V de $\mathbb{R}^p$ et une fonction $f : V \to \mathbb{R}^{n-p}$ de classe C^k telle que $U \cap M = \{(y, f(y)) | y \in V\}$.*
   Par exemple, la partie supérieure du cercle unité est l'ensemble des points $(x, f(x))$ où $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$.

Une partie de $\mathbb{R}^n$ est une sous variété de dimension p si elle ressemble au voisinage de chacun de ses points à un sous espace affine de dimension p. Le sous espace en question (qui est en fait le sous espace qui approche le mieux la sous variété au point considéré) sera appelé plan tangent à la sous-variété en ce point. Par exemple, une courbe est une sous-variété de dimension 1, une surface est une sous-variété de dimension 2, une sphère est une sous-variété

de dimension 2 dans $\mathbb{R}^3$. La terre est une sphère, mais à notre échelle où on n'en voit qu'une toute petite partie on a l'impression de marcher sur un plan (à tel point qu'on a longtemps pensé que la terre était effectivement plate). Et plus, généralement on parle d'hypersurface lorsque $p = n - 1$.

Ainsi une sous-variété de dimension 1 est une partie de $\mathbb{R}^n$ telle que si on zoome sur n'importe lequel de ses points, on finit par avoir l'impression qu'il s'agit d'un morceau de droite.

1.2.1 Fibré tangent d'une sous-variété de $\mathbb{R}^n$

On se donne M une sous variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension p, et un point x de M.

Définition 1.3. *(vecteur tangent) Un vecteur $V \in \mathbb{R}^n$ est tangent à M en x s'il existe $\delta > 0$ et $c :]-\delta, \delta[\to \mathbb{R}^n$ une courbe C^1 a image dans M telle que $c(0) = x$, et $c'(0) = V$.*

On note T_xM l'ensemble des vecteurs tangents à M en x, que l'on appelle ***espace tangent à*** *M* ***en*** *x.*

Proposition 1.1. *Soient M une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ et $x \in M$.*

1. *Si U est un voisinage ouvert de x dans $\mathbb{R}^n$, V un voisinage ouvert de 0 dans $\mathbb{R}^n$, et $f : U \to V$ un C^1-difféomorphime tel que $f(x) = 0$ et $f(U \cap M) = (\mathbb{R}^p \times 0) \cap V$, alors $T_xM = (df_x)^{-1}(\mathbb{R}^p \times 0)$.*
2. *Si U est un voisinage ouvert de x dans $\mathbb{R}^n$, et $f : U \to \mathbb{R}^{n-p}$, une submersion C^1 en x telle que $U \cap M = f^{-1}(f(x))$, alors $T_xM = ker(df_x)$.*
3. *Si U est un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^p$, U un voisinage de x dans $\mathbb{R}^n$, et $f : V \to U$ un paramétrage local de M en x avec $f(0) = x$, alors $T_xM = Im(df_0)$.*

Exemple 1.1.

— *Soit la sphère unité $\mathbf{S}^n = f^{-1}(1)$, où $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \|x\|^2$. Un calcul direct donne $df_x(v) = 2\langle x, v\rangle$ pour tout point $x \in \mathbf{S}^n$ et tout vecteur $v \in \mathbb{R}^{n+1}$. Ainsi $T_x\mathbf{S}^n = ker(v \to 2\langle x, v\rangle) = x^\perp$.*

— *Soit $U := \{(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^4 \ ; \ x_2 \neq 0 \text{ ou } x_3 \neq 0\}$ un ouvert de $\mathbb{R}^4$. Considérons le sous-ensemble M de $\mathbb{R}^4$ donné par*

$$M := \{(x_0, x_1, x_2, x_3) \in U \ ; \ x_0 = x_1 + \sqrt{2}\sqrt{x_2^2 + x_3^2}\}.$$

Montrons que M est une sous-variété et déterminons l'espace tangent en un point générique.
Il est simple de montrer que l'application $f : U \to \mathbb{R}, (x_0, x_1, x_2, x_3) \mapsto -x_0 + x_1 + \sqrt{2}\sqrt{x_2^2 + x_3^2}$ est une submersion de classe C^∞ en tout

point (x_0, x_1, x_2, x_3) tel que x_2 et x_3 ne sont pas à la fois nuls. D'où $M = f^{-1}(0)$ est une hypersurface de $\mathbb{R}^4$ en tant que ligne de niveau d'une submersion.
Soit $p = (x_0, x_1, x_2, x_3)$ un point générique de M. Alors,

$$d_p f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_0}, \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3}\right) = \left(-1, 1, \frac{\sqrt{2}x_2}{\sqrt{x_2^2 + x_2^3}}, \frac{\sqrt{2}x_3}{\sqrt{x_2^2 + x_2^3}}\right).$$

Par suite, $T_x M = \{X \in \mathbb{R}^4 \ ; \ d_p f(X) = 0\}$.
Ainsi, un vecteur $X = (X^0, X^1, X^2, X^3)$ est tangent à M en p si et seulement si

$$X^0 = X^1 + \frac{\sqrt{2}x_2}{\sqrt{x_2^2 + x_2^3}} X^2 + \frac{\sqrt{2}x_3}{\sqrt{x_2^2 + x_2^3}} X^3.$$

Définition 1.4. *(Fibré tangent) Soit M une sous-variété de $\mathbb{R}^p$, de dimension n, on appelle fibré tangent à la sous-variété M le sous ensemble de $M \times \mathbb{R}^p$ défini par : $TM := \{(a, u), a \in M, u \in T_a M\}$.*

1.3 Variété Abstraite

1.3.1 Espace topologique

Soit M un ensemble non vide et $\mathcal{O}$ une famille de sous-ensembles de M satisfaisant :

- L'ensemble vide et M appartient dans $\mathcal{O}$.
- Toute intersection finie d'ouvert est un ouvert, c'est -à- dire que si O_i sont des éléments de $\mathcal{O} \quad \forall i \in I$ alors

$$\bigcap_{i \in I} O_i \in \mathcal{O}.$$

- Toute réunion quelconque d'ouverts est un ouvert, c'est -à- dire si $(O_i)_{i \in I}$ est une famille d'elements de $\mathcal{O}$, indexée par un ensemble I quelconque alors

$$\bigcup_{i \in I} O_i \in \mathcal{O}.$$

Définition 1.5. *Le couple $(M, \mathcal{O})$ est alors appelé **espace topologique**. **Un ouvert** est une élément de $\mathcal{O}$, i.e que ce dernier est l'ensemble des ouvert.*

Une famille $(\Omega_\alpha)_{\alpha\in I}$ d'éléments de $\mathcal{O}$, avec I un ensemble d'indices quelconque, telle que $\bigcup_{\alpha\in I}\Omega_\alpha = M$ est appelé **recouvrement ouvert de** M. Soit $p \in M$. On dit qu'un sous-ensemble A de M est un voisinage de p lorsque A contient un ouvert contenant x.

Un recouvrement ouvert de M est dit localement fini si tout point p de M possède un voisinage rencontrant un nombre fini d'ouverts de ce recouvrement.

Un espace topologique est dit séparé lorsque deux points distincts peuvent être séparés par des ouverts disjoints. L'espace topologique $(M, \mathcal{O})$ est dit paracompact si de tout recouvrement ouvert de M on peut extraire un sous recouvrement localement fini. Il est dit connexe s'il n'est pas réunion de deux ouverts non vides disjoints.

1.3.2 Variété topologique

Définition 1.6 (Variété topologique)**.** ***Une variété topologique*** *est un ensemble non vide M tel que :*

- *M est un espace topologique séparé paracompact ;*
- *Tout point $p \in M$ possède un voisinage $\mathcal{U} \subset M$ homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^n$.*

Dans ce cas, n est appelé la dimension de la variété topologique M.

Définition 1.7 (Carte locale)**.** *Si $\varphi : \mathcal{U} \to \varphi(\mathcal{U}) \subset \mathbb{R}^n$ est un homéomorphisme alors, le couple $(\mathcal{U}, \varphi)$ est appelé* ***carte locale****.*

Définition 1.8 (Atlas)**.** *Une collection $(\mathcal{U}_i, \varphi_i)_{i\in I}$ de cartes locales telle que*

$$M = \bigcup_{i\in I} \mathcal{U}_i$$

est appelée Atlas de M.

Soit $(\mathcal{U}_i, \varphi_i)_{i\in I}$ un atlas d'une variété topologique M. Chaque ouvert $\mathcal{U}_i$ est appelé **voisinage coordonnée** et chaque φ_i est une **fonction de cordonnée**. Deux Atlas de M sont dits compatibles si leur réunion est un Atlas de M. Un Atlas maximal est un Atlas qui contient toute carte locale compatible avec lui.

1.3.3 Variété différentiable

Définition 1.9 (Variété abstraite)**.** *Un ensemble M est appelé* ***variété de classe*** *C^r lorsque :*

1. *M est une variété topologique ;*
2. *il existe un Atlas $(\mathcal{U}_i, \varphi_i)_{i\in I}$ de M tel que pour tous $i, j \in I$ tels que $\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j \neq \emptyset$, on a $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j) \to \varphi_j(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j) \subset \mathbb{R}^n$ est de classe C^r.*

Lorsque les fonctions $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ sont toutes de classe C^∞, on dit que M est une ***variété différentielle****.*

Dans la définition précédente, l'Atlas $(\mathrm{U_i}, \varphi_i)_{i\in I}$ est dite de classe C^r. Les fonctions $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ sont appelées fonctions de transition ou changement de cartes. Ce sont des difféomorphismes. Une variété différentiable est dite orientable si tous les changements de cartes sont à jacobien positif.

1.3.4 Fibré tangent d'une variété abstraite

L'espace tangent à une variété en un point

Dans cette partie, on fixe une variété différentiable M de dimension n et un point $x \in M$. On note $C_x(M)$ l'ensemble de tous les chemins lisses c définis sur un voisinage de $0 \in \mathbb{R}$,à valeur dans M et vérifiant $c(0) = x$. On munit $C_x(M)$ de la relation d'équivalence donnée par :

$$\begin{aligned} c_1 \sim c_2 &\iff \textit{pour toute carte } \phi \textit{ en } x, (\phi \circ c_1)'(0) = (\phi \circ c_2)'(0) \\ &\iff \textit{il existe une carte } \phi \textit{ en } x, (\phi \circ c_1)'(0) = (\phi \circ c_2)'(0). \end{aligned}$$

Notons que deux chemins de $C_0(\mathbb{R}^n)$ sont équivalents en ce sens si et seulement s'ils ont même derivée en 0.

Définition 1.10. *(Espace tangent et application tangente). L'espace tangent à M en x est l'ensemble quotient $T_xM = C_x(M)/\sim$ Si $f : M \to N$ est une application lisse entre variétés, alors l'application $C_x(M) \to C_{f(x)}(N)$, $c \to f \circ c$ induit par passage au quotient une application $T_xM \to T_xN$ appelée application tangente à f en x, ou différentielle de f en x. On la notera df_x.*

On notera $c'(0)$ la classe d'un chemin c pour la relation $\sim$. Cependant, afin d'éviter des confusions, nous la noterons $[c]$ le temps de cette partie.

Proposition 1.2. *. L'espace tangent T_xM admet une unique structure d'espace vectoriel telle que pour toute carte ϕ en x, l'application $d\phi_x : T_xM \to \mathbb{R}^n$ est linéaire, autrement dit :*
$\forall u, v \in T_xM, d\phi_x(u + v) = d\phi_x(u) + d\phi_x(v)$,
$\forall u \in T_xM, \in \mathbb{R}, d\phi_x(\lambda u) = \lambda d\phi_x(u)$.

Pour toute application lisse $f : M \to N$, la différentielle de f en x est une application linéaire $df_x : T_xM \to T_{f(x)}N$, lorsque les espaces tangents sont munis de cette structure.

Chapitre 2

Variété Pseudo-Riemannienne

2.1 Espaces pseudo-euclidiens

2.1.1 Formes bilinéaires et quadratiques

Soit V un espace vectoriel réel.

Définition 2.1 (Forme bilinéaire symétrique [17]). *Une application $g : V \times V \to \mathbb{R}$ est appelée* ***forme bilinéaire*** *lorsqu'elle est linéaire par rapport à chacune des deux variables. En plus, on dit qu'elle est symétrique si pour tous $u, v \in V$ on a $g(u, v) = g(v, u)$.*

Définition 2.2. *Soit g une forme bilinéaire symétrique sur V. On dit que g est :*

- ***définie positive*** *(respectivement* ***négative*** *) si $v \neq 0$ on a $g(v, v) > 0$ (respectivement $g(v, v) < 0$) ;*
- ***Semi-définie positive*** *(respectivement* ***négative****) si $v \neq 0$, on a $g(v, v) \geq 0$ (respectivement $g(v, v) \leq 0$) ;*
- ***dégénérée*** *s'il existe $v \in V \backslash \{0\}$ tel que $g(u, v) = 0 \ \forall u \in V$;*
- ***non-dégénée*** *si le seul vecteur v tel que $g(v, w) = 0$ pour tout w de V est le vecteur nul (autrement dit, seul le vecteur nul est orthogonal (selon g) à tous les vecteurs de l'espace).*

Soit g une forme bilinéaire symétrique sur V. On définit sur V une fonction Q_g appelée **forme quadratique** associée à g par $Q_g : V \to \mathbb{R}$ tel que $Q_g = g(x, x)$ pour tout $x \in V$.

Exemple 2.1. *l'application $((x_1, x_2); (y_1, y_2)) \mapsto x_1y_2 + y_1x_2$ est une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^2$. Sa forme quadratique associée est donné par $Q((x_1, x_2))=2x_1x_2$, Certains vecteurs ont une image nulle ou négative.*

2.1.2 Produits scalaires

Soit g une forme bilinéaire symétrique sur V dont on note Q_g sa forme quadratique. On dit que g est :

— **positive** (respectivement **négative)** si $Q_x \geq 0$ (respectivement $Q_x \leq 0$) pour tout x de V ;
— **définie positive** (respectivement **négative**) si $Q_x > 0$ (respectivement $Q_x < 0$) $\forall x \neq 0$;
— **non dégénéré** si pour tout $y \in V$,$g(x, y) = 0$, i.e $x = 0$.

Définition 2.3 (Produit scalaire semi-euclidien). *On appelle* ***produit scalaire semi-euclidien*** *, toute forme bilinéaire symétrique non dégénéré. Un espace V muni d'un produit scalaire semi-euclidien β est appelé* ***espace semi-euclidien*** *et est noté (V, β).*

Une forme bilinéaire symétrique peut-être représentée par une matrice diagonale.

Si cette forme est non dégénérée, alors les eĺéments de la diagonale sont tous nuls.

Définition 2.4 (Produit scalaire). *Soit V un espace vectoriel. Un produit scalaire sur V est une forme bilinéaire $<,>: V \times V \to \mathbb{R}$ symétrique, définie et positive.*

Soit g une forme bilinéaire symétrique sur V. On dit que g est définie si elle est définie positive ou négative, qu'elle est semi-définie si elle positive ou négative.

soit (V, β) un espace semi-euclidien.

Remarque 2.1. *Soit V un espace vectoriel de dimension n, β une forme bilinéaire sur V.*

β est non dégénéré sur V, si et seulement si elle de rang n, c'est à dire sa matrice est inversible. Si β est définie, elle est nécessairement non dégénérée.

Indice d'une forme bilinéaire

Définition 2.5 (Indice d'une forme bilineaire). *On appelle* ***indice de la forme bilináire*** *g un entier naturel q qui est la dimension maximale de sous-espaces vectoriels de V sur lesquels g est définie négative. On a donc $0 \leq q \leq dimV$. Si $q = 0$ alors g est définie positive.*

Matrice d'une forme bilinéaire

Soit $B = (e_1, e_2, e_3, ..., e_n)$ une base de V. Si g est symétrique, alors elle peut être exprimée comme une $n \times n$ matrice symétrique notée $G = (g_{ij})$ avec g_{ij}=g(e_i, e_j). G est appelée **matrice associée** à la forme bilinéaire symétrique g relativement à la base B.

Si la forme bilinéaire est non dégénerée ,g est appelée **métrique pseudo-riemannienne** .

Exemple 2.2. $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ *est la matrice (dans la base canonique) de la forme bilinéaire symétrique*
$\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) \to 3x_1y_1 - 2x_2y_2 + x_1y_2 + x_2y_1.$

Dans une base orthonormée $B^{'}$ d'un espace pseudo- euclidien (V, g), on a
$g(v, v) = -\sum_{i=1}^{q}(v_i)^2 + \sum_{a=q+1}^{q+p}(v_a)^2$

avec $p + q = n$. $\forall e_i, e_j \in B^{'}$ on a $g(e_i, e_j) = \delta_{ij}$. Ainsi la matrice $G = diag(-, ..., -, +, ..., +)$ avec q fois $(-)$ et p fois $(+)$.

La somme de ces eléments diagonaux de la forme canonique s'appelle la signature de g et le nombre de signe négatifs s'appelle l'index de V.

Le cas où $q = 1$ correspond à **l'espace de Minkowiski** .

Un vecteur v de l'espace vectoriel pseudo-euclidien V est dit

1. **de type espace** si $g(v, v) > 0$ ou $v = 0$
2. **de type temps** si $g(v, v) < 0$
3. **de type lumiè (ou isotrope)** si $g(v, v) = 0$ et $v \neq 0$.

L'ensemble des vecteurs isotropes dans V est appelé **cône de lumière** qu'on note souvent $\wedge = \{v \in V \backslash \{0\} / g(v, v) = 0\}$ **.**

Définition 2.6 (Radical)**.** . *Soit (V, g) un espace pseudo-euclidien de type lumière. On appelle* ***radical*** *de V le sous- espace de V noté $RadV$ défini par*

$RadV = \{\xi \in V / g(\xi, v) = 0 \ \forall v \in V\}$.

Proposition 2.1. . *Soit (V, g) un espace pseudo-euclidien et W un sous-espace vectoriel de V de dimension n tel que $0 < Rad(W) = r < n$. Tout sous-espace complémentaire de $Rad(W)$ dans W est non dégénéré.*

Démonstration. soit $S(W)$ un sous-espace complémentaire de $Rad(W)$ dans W. Supposons $S(W)$ dégénéré . Il existe alors $w \in S(W)$ tel que $\forall v \in S(W)$, $g(v, w) = 0$. Alors, comme $\forall u \in Rad(W)$, $g(u, w) = 0$ on a $w \in Rad(W)$. on a donc $w \in Rad(W) \cap S(W) \neq 0$

□

Conséquence 2.1. $dim(S(W)) = n - r$

Tout complémentaire orthogonal $S(W)$ de $Rad(W)$ dans W est appelé sous-espace écran. Comme $S(W)$ est non dégénéré relativement à g, c,est un espace pseudo-euclidien. Il admet donc une base orthonormale $(u_{r+1}, ..., u_n)$. Relativement à la décomposition $W = RadW \bigoplus_{orth} S(W)$, une base $B^{''}$ de W

est donné par $B^{''} = (f_1, ..., f_r, u_{r+1}, ..., u_n)$ *oú* $f_i \in RadW$ *et comme* $RadW$ *et* W *sont orthogonaux, la matrice* G *relative à la base* $B^{''}$ *est de la forme*

$$G = \begin{pmatrix} g(f_1,f_1) & ... & g(f_1,f_r) & g(f_1,u_{r+1})... & g(f_1,u_n) \\ g(f_2,f_1) & ... & g(f_2,f_r) & g(f_2,u_{r+1})... & g(f_2,u_n) \\ g(f_3,f_1) & ... & g(f_3,f_r) & g(f_3,u_{r+1})... & g(f_3,u_n) \\ . & . & . & . & . \\ g(f_r,f_1) & ... & g(f_r,f_r) & g(f_r,u_{r+1})... & g(f_r,u_n) \\ g(u_{r+1},f_1) & ... & g(u_{r+1},f_r) & g(u_{r+1},u_{r+1})... & g(u_{r+1},u_n) \\ \\ . & . & . & . & . \\ g(u_n,f_1) & ... & g(u_n,f_r) & g(u_n,u_{r+1})... & g(u_n,u_n) \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

2.1.3 Othogonalité et isotropie

Soit g une forme bilinéaire symétrique sur V et x,y des vecteurs de V. On dit que x et y sont **orhogonaux** et on note $x \perp y$ si $g(x, y) = 0$.

Un vecteur est dit **isotrope** s'il est orthogonal à lui même, c'est à dire $g(x, x) = 0$.

L'ensemble des vecteurs isotrope est appelé **cône isotrope** de g.

L'ensemble de tous les vecteurs orthogonaux à tous les vecteurs de V est appelé **le noyau** de g.[15]

Proposition 2.2. *Soit* (V, g) *un espace pseudo-euclidien de dimension finie et* W *un sous-espace de* V*. Alors on a*

1. $dimW + dimW^{\perp} = dimV$
2. $(W^{\perp})^{\perp} = W$
3. $RadW = RadW^{\perp} = W \cap W^{\perp}$.

2.1.4 Métrique semi-riemannienne

Définition 2.7. *On appelle* ***métrique semi- riemannienne (ou un tenseur métrique)*** *une famille des applications*

$g_x : T_xM \times T_xM \to \mathbb{R}$ *telle que*

— $\forall x \in M, g_x$ *est une forme bilinéaire, symétrique, non dégénéré.*

— *Si* $X, Y \in \Gamma(TM)$*, la fonction* $g(X,Y)_x$=$g(X,Y)$ *est différentiable*

— *L'indice de g est constante,et noté IndM,c'est à dire* $\exists p \in \mathbb{N}, \forall x \in M$ $Ind(T_xM) = p$.

La signature de g sur M est (p,q) où p **est la dimension maximale** des sous-espaces de T_xM sur lesquels g_x est **définie positive** , q **la dimension maximale** des sous-espaces de T_xM sur lesquels g_x est **définie négative** avec M^n une variété différentielle et p,$q \in \mathbb{N}$ tels que $p+q=n$. Si $M=\mathbb{R}^n$, M est appelée espace semi-euclidieun standard et est noté $\mathbb{R}^{p,q}$ ou $\mathbb{R}^p_q$. C'est-á dire un espace de type $\mathbb{R}^n$ muni de la métrique définie par :

$g^{p,q} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$(x,y) \mapsto -\sum_{i=1}^{q} x_i y_i + \sum_{a=q+1}^{n} x_a y_a$

avec $n=p+q$, $x=(x_1,...,x_n)$;et y=$(y_1,...,y_n)$.

— si $q=0$, g_x est une métrique riemannienne et l'espace euclidien est noté par $\mathbb{E}^n$ et sa métrique est définie par :

$g(x,y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

— si $q=1$,g_x est une métrique lorentzienne et est donné par $g(x,y) = -x_i y_i + \sum_{a=2}^{n} x_a y_a$.

Exemple 2.3. — *La bouteille de Klein*

— *La tore*

Définition 2.8. *Une variété différentielle M, munie d'une métrique semi-riemannienne g (respectivement riemannienne, lorentzienne) est appelée* ***variété semi-riemannienne*** *(respectivement* ***riemannienne*** *,* ***lorentzienne*** *) et notée (M,g).*

2.1.5 Connexion linéaire- Crochet de Lie

Définition 2.9. *Soit M une variété différentielle.* ***Une connexion linéaire*** *sur M est une application*

$\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to \Gamma(TM)$

$(X,Y) \mapsto \nabla_X Y$

telle que $\forall X,Y,Z \in \Gamma(TM), \forall f,h \in C^\infty(M)$

1. $\nabla_{fX+hY} Z = f\nabla_X Z + h\nabla_Y Z$
2. $\nabla_X(fY+hZ) = f\nabla_X Y + h\nabla_X Z + (Xf)Y + (Xh)Z$

On appelle dérivée de Lie sur M un opérateur différentiel note L_X défini par

$$L_X : \Gamma(TM) \to \Gamma(TM)$$
$$Y \mapsto L_X Y = [X,Y]$$

Définition 2.10. *Soit M une variété différentielle. Pour deux champs de vecteurs X, Y de classe $C^2(M)$ au moins, et pour toute fonction $f \in C^\infty(M)$,* ***le crochet de Lie*** *se définit comme :*
$[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f))$.

Propriété 2.1. *1.* $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$

2. $[X, Y] = -[Y, X]$

3. $[X, aY_1 + bY_2] = a[X, Y_1] + b[X, Y_2]$

4. $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$ *(Identité de Jacobi). Où a,b* $\in \mathbb{R}$

2.1.6 Torsion

Définition 2.11. *Soit ∇ une connexion linéaire sur une variété différentielle M.* ***le tenseur de torsion*** *T^∇ (associé à ∇) est le champ de tenseur de type (1,2) tel que $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$,*

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y].$$

La connexion est sans torsion si $T = 0$.

Définition 2.12. *La connexion de Levi-Civita d'une variété semi-riemannienne (M, g) est l'unique connexion sans torsion sur M compatible avec g,donnée par la formule de Koszul suivante :*

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y, Z) = {} & X(g(Y, Z)) + Y g(X, Z) - Z g(X, Y) \\ & + g([X, Y], Z) - g([X, Z], Y) - g([Y, Z], X). \end{aligned} \tag{2.2}$$

pour tout $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$.

Démonstration. Nous allons montrer que la connexion ∇ défini par la formule (2.2) est une connexion métrique et sans torsion. Premièrement nous devons montrer que ∇ est une connexion linéaire.En utilisant les propriétés de champs de vecteurs et crochets de lie nous pouvons montrer par un calcul direct que
$2g(\nabla_{fX} Y, Z) = 2fg(\nabla_X Y, Z), \forall Z \in \Gamma(TM)$, Donc $\nabla_{fX} Y = f\nabla_X Y \ \forall X, Y \in \Gamma(TM)$
C'est à dire ∇ est $C^\infty(M)$-linéaire dans le premier argument.

Ensuite, nous vérifions la deuxième propriété de connexions :

$$\begin{aligned}2g(\nabla_X(fY),Z) &= Xg(fY,Z)+fYg(X,Z)-Zg(X,fY)+g([X,fY],Z)\\ &\quad -g([fY,Z],X)\\ &\quad = X(f)g(Y,Z)+fXg(Y,Z)+fYg(X,Z)-Z(f)g(X,Y)\\ &\quad -fZg(X,Y)\\ &\quad + fg([X,Y],Z)+X(f)g(Y,Z)-fg([X,Z],Y)\\ &\quad -fg([Y,Z),X)+Z(f)g(Y,X)\\ &\quad = 2fg(\nabla_XY,Z)+2X(f)g(Y,Z)\\ &\quad = 2g(f\nabla_XY+X(f)Y,Z).\end{aligned}$$

Par conséquent, ∇ est une connexion linéaire. Le calcul suivant vérifie que ∇ est sans torsion. Utilisation de (2.2) donne

$$\begin{aligned}2g(T(X,Y),Z) &= 2g(\nabla_XY,Z)-2g(\nabla_YX,Z)-2g([X,Y],Z)\\ &\quad = Xg(Y,Z)+Yg(X,Z)-Zg(X,Y)+g([X,Y],Z)-g([X,Z],Y)\\ &\quad -g([Y,Z],X)\\ &\quad - Yg(X,Z)-Xg(Y,Z)+Zg(Y,X)-g([Y,X],Z)\\ &\quad +g([Y,Z],X)+g([X,Z],Y)\\ &\quad - 2g([X,Y],Z)=g(2[X,Y]-2[X,Y],Z)=0\end{aligned}$$

$\forall Z\in\Gamma(TM)$

Le fait que g(.,.) soit non dégénérée cela nous donne $T(X,Y)=0$ L'application de la formule (2.2) deux fois, nous donne

$$\begin{aligned}2g(\nabla_ZX,Y)+2g(X,\nabla_ZY) &= Zg(X,Y)+Xg(Z,Y)-Yg(Z,X)+g([Z,X],Y)\\ &\quad -g([Z,Y],X)-g([X,Y],Z)+Zg(Y,X)+Yg(Z,X)-Xg(Z,Y)\\ &\quad +g([Z,Y],X)-g([Z,X],Y)-g([Y,X],Z)\\ &\quad =2Zg(X,Y)\end{aligned}$$

Par conséquent $g(\nabla_ZX,Y)+g(X,\nabla_ZY)=Zg(X,Y)$. C'est à dire ∇ est une connexion métrique. □

2.1.7 Courbure de Riemann

Définition 2.13. *Soit (M,g) une variété semi-riemannienne de connexion de Levi-Civita ∇.* ***Le tenseur de courbure de Riemann*** *est tenseur de type (1,3) défini par*

$$R(X,Y)Z=\nabla_X\nabla_YZ-\nabla_Y\nabla_XZ-\nabla_{[X,Y]}Z,\qquad \forall X,Y,Z\in\Gamma(TM).$$

Le tenseur de courbure de Riemann de type (0,4) est défini par :

$$R(X,Y,Z,U) = g(R(X,Y)Z,U), \qquad \forall X,Y,Z,U \in \Gamma(TM).$$

Il satisfait aux symétries

1. $R(X,Y,Z,U) = -R(Y,X,Z,U)$
2. $R(X,Y,Z,U) = -R(X,Y,U,Z)$
3. $R(X,Y,Z,U) = +R(Z,U,X,Y)$

On a les identités suivantes dues à Bianchi.

— **Première identité de Bianchi** (identité algébrique de Bianchi)

$$R(X,Y,Z,U)+R(Y,X,Z,U)+R(Z,X,Y,U) = 0, \qquad \forall X,Y,Z,U \in \Gamma(TM).$$

— **Deuxième identité de Bianchi** (identité différentielle)

$$(\nabla_X R)(Y,Z,U)+(\nabla_Y R)(Z,X,U)+(\nabla_Z R)(X,Y,U) = 0, \qquad \forall X,Y,Z,U \in \Gamma(TM).$$

2.1.8 Courbure sectionnelle

Soient (M,g) une variété semi-riemannienne, $x \in M$, P un plan vectoriel contenu dans l'espace tangent T_xM, X_x, Y_x deux vecteurs linéairement indépendants de P.

Définition 2.14. ***La courbure sectionnelle*** *du plan P engendré par les vecteurs linéairement indépendants X_x et Y_x en x est le réel noté K donné par :*

$$K(x) = \frac{g(R(X_x,Y_x)Y_x,X_x)}{g(X_x,X_x)g(Y_x,Y_x) - g(X,Y)^2}.$$

On dit que M est dite à courbure sectionnelle constante si K est constante.

— Si $K = 0$, la variété est plane.
— Si $K = 1$, la variété est sphérique.
— Si $K = -1$, la varieté est hyperbolique.

Proposition 2.3. *Une variété semi-riemannienne M est a courbure sectionnelle constante si et seulement si, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que*

$$R(X,Y)Z = c[\langle Y,Z\rangle X - \langle X,Z\rangle Y], \qquad \forall X,Y,Z \in \Gamma(TM).$$

Exemple 2.4. *Soit la pseudo-sphère* $\mathbb{S}^n = \left\{ x \in \mathbb{R}^{n+1}, \sum_{a=1}^{n+1} x_a^2 = r^2 \right\}$. *On montre que*

$$\langle R(X,Y)Z,W\rangle = \frac{1}{r}(\langle X,W\rangle\langle Y,Z\rangle - \langle Y,W\rangle\langle X,Z\rangle) \forall X,YZ,W \in T\mathbb{S}^n.$$

Donc $\mathbb{S}^n$ est à courbure sectionnelle constante $c = 1/r$.

Le tenseur de Ricci de la variété semi-riemannienne (M, g) est le $(0, 2)$-tenseur symétrique sur M défini par :

$$Ric(X, Y) = trace(Z \to R(Z, X)Y).$$

Dans une base orthonormée $(X_1, ..., X_n)$ de TM,

$$Ric(X, Y) = \sum_{j=1}^{n} \langle R(X_j, X)Y, X_j \rangle.$$

2.2 Sous-variétés semi-riemanniennes

Définition 2.15. *Soient $(\bar{M}, \bar{g})$ une variété semi-riemannienne, M une variété et $i : M \to \bar{M}$, une immersion. Si $(i^*\bar{g})_x$ est non dégénérée et de signature constante pour tout $x \in M$, alors $(M,(i^*\bar{g})_x)$ est une variété semi-riemannienne. La métrique semi riemannienne$(i^*\bar{g})_x)$ est appelée la* ***première forme fondamentale*** *de la variété immergée M. Si M est une partie de $\bar{M}$ et i l'inclusion, alors $(i^*\bar{g})_x$ est la restriction de $\bar{g}$, on la note $\bar{g}_{|M}$. Dans ce cas, on dit que$(M,\bar{g}_{|M})$ est* ***une sous variété semi-riemannienne*** *de $(\bar{M}, \bar{g})$. Si aussi $(\bar{M}, \bar{g})$ est riemannienne, alors ($(M,\bar{g}_{|M})$ est riemannienne. Comme une immersion est localement un plongement qui est un difféomorphisme, dans la suite nous supposons que M est une sous variété de $\bar{M}$ et que i est l'inclusion. Soient V un espace vectoriel, et β une forme bilinéaire, symétrique sur V, de signature (p, q, r).*

- Si $r = 0$, β est non dégénéré. La métrique est dite semi-riemannienne.
- Si $r > 0$, β est dégénéré.
- si $q = 1$, la métrique est dite lorentzienne.
- Si $q = 0$, la métrique est dite riemannienne

Exemple 2.5. *L'espace de de Sitter $\mathbb{S}_1^n = \{(x_0, ..., x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \ ; \ -x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1\}$ est une sous variété semi riemannienne de l'espace de Minkowisky $\mathbb{R}_1^n$ muni de sa métrique*

$$g(X, Y) = -X_0Y_0 + \sum_{k=1}^{n} X_kY_k.$$

Soit (M, g) une sous-variété semi riemannienne de $(\bar{M}, \bar{g})$. On pose :

$$T_xM^\perp = \{v \in T_x\bar{M}, \bar{g}(v, w) = 0, \forall w \in T_x\bar{M}\}.$$

Où $T_xM^\perp$ designe l'ensemble des vecteurs qui sont orthogonaux à tous les vecteurs de M $T_xM = T_xM^\top \oplus T_xM^\perp$.

On montre que

$$T_x\bar{M} = T_xM \oplus T_xM^{\perp}, \qquad \forall x \in M.$$

D'ou, $\forall v \in T_x\bar{M}, \exists! v^{\perp} \in T_XM^{\perp}$ tel que v=$v^{\top} + v^{\perp}$. De plus, les deux application $\top : T_x\bar{M} \to T_xM, v \mapsto v^{\top}$,et$\perp$: $T_x\bar{M} \to T_xM^{\perp}, v \mapsto v^{\perp}$ sont $\mathbb{R}$-linéaires. Un champ de vecteur X de $\bar{M}$ est dit normal si $X_x \in T_xM^{\perp}(\forall x \in M)$ On note $\Gamma(TM)^{\perp}$ l'ensemble des champs de vecteur normal

$\nabla^{\bar{M}}$ une connexion de Levi-Civita de $\bar{M}$ respectivement à métrique $\bar{g}$.

$(\nabla^{\bar{M}}_X \bar{g})(Y,Z) = 0$

$\forall X, Y, Z \in T_X\bar{M}$ Compatible avec la métrique $\bar{g}$.

$T^{\nabla^{\bar{M}}}(X,Y) = 0$ Sans torsion

Formule de Gauss

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}^{\bar{M}}_X Y &= (\bar{\nabla}^{\bar{M}}_X Y)^{\top} + (\bar{\nabla}^{\bar{M}}_X Y)^{\perp} \\ &= \nabla_X Y + h(X,Y) \end{aligned} \tag{2.3}$$

h est **la seconde forme fondamentale**.

Propriété 2.2. *h est $C^{\infty}(M)$-bilinéaire et symétrique.*

Démonstration. En effet, soit $f \in C^{\infty}(M), \forall X, Y \in TM$

$$\begin{aligned} h(f(X+Y,Z)) &= (\bar{\nabla}_{f(X+Y)}Z)^{\perp} \\ &= (\bar{\nabla}_{fX}Z)^{\perp} + (\bar{\nabla}_{fY}Z)^{\perp} \\ &= f(\bar{\nabla}_X Z)^{\perp} + f(\bar{\nabla}_Y Z)^{\perp} \end{aligned} \tag{2.4}$$

A partir de (2.3),(2.4) devient
$h(f(X+Y,Z)) = fh(X,Z) + fh(Y,Z)$
D'où la bilinealité

Il faut partir de

$$\begin{aligned} & T^{\bar{\nabla}}(X,Y) = 0 \\ \iff & \bar{\nabla}_X Y - \bar{\nabla}_Y X - [X,Y] = 0 \\ \iff & \nabla_X Y + h(X,Y) - \nabla_Y X - h(Y,X) - [X,Y] = 0 \\ \iff & \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] + h(X,Y) - h(Y,X) = 0 \\ \iff & T^{\nabla}(X,Y) + h(X,Y) - h(Y,X) = 0 \\ \iff & h(X,Y) - h(Y,X) = 0 \\ \iff & h(X,Y) = h(Y,X) \end{aligned}$$

□

Formule de Weingarteirn

$\bar{\nabla}^{\bar{M}}_X\xi = (\bar{\nabla}^{\bar{M}}_X\xi)^\top + (\bar{\nabla}^{\bar{M}}_X\xi)^\perp \ \forall X \in T_xM \ et \ \xi \in T_xM^\top$

$A : T_xM \times T_xM^\top \to T_xM$

$Posons \ A_\xi X = -(\nabla^M_X\xi)^\top$

$\bar{\nabla}^{\bar{M}}_X\xi = -A_\xi X + (\bar{\nabla}^{\bar{M}}_X\xi)^\perp$ (**formule de Weingartern)**

A_ξ **est l'opérateur forme de** M **par rapport à** ξ**.**

Equation de Gauss, Coddazi et Ricci

$$\bar{R}(X,Y,Z) = \underbrace{\bar{\nabla}_X\bar{\nabla}_YZ}_{1} - \underbrace{\bar{\nabla}_Y\bar{\nabla}_XZ}_{2} - \underbrace{\bar{\nabla}_{[X,Y]}Z}_{3}$$

$$\begin{aligned}(1)\bar{\nabla}_X\bar{\nabla}_YZ &= \bar{\nabla}_X(\nabla_YZ + h(Y,Z)) \\ &= \nabla_X\nabla_YZ + h(X,\nabla_YZ) - A_{h(X,Z)}Y + \nabla^\perp_Xh(Y,Z)\end{aligned}$$

De façon similaire, on a :

$$\begin{aligned}(2)\bar{\nabla}_X\bar{\nabla}_YZ &= \nabla_X\nabla_YZ + h(X,\nabla_YZ) - A_{h(X,Z)}Y + \nabla^\perp_Xh(Y,Z) \\ &= \nabla_Y\nabla_XZ + h(Y,\nabla_XZ) - A_{h(Y,Z)}X + \nabla^\perp_Yh(X,Z)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(3)\bar{\nabla}_{[X,Y]}Z &= \nabla_{[X,Y]}Z + h([X,Y],Z) \\ &= \nabla_{[X,Y]}Z + h(\nabla_XY,Z) - h(\nabla_YX,Z)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{R}(X,Y,Z) &= R(X,Y)Z + A_{h(X,Z)}Y - A_{h(Y,Z)}X + h(X,\nabla_YZ) - h(Y,\nabla_XZ) \\ &\quad - h(\nabla_XY,Z) + h(\nabla_YX,Z) + \nabla^\perp_Xh(Y,Z) - \nabla^\perp_Yh(X,Z) \\ &= [R(X,Y)Z + A_{h(X,Z)}Y - A_{h(Y,Z)}X] + [(\nabla^\perp_Xh)(Y,Z) - (\nabla^\perp_Yh)(X,Z)]\end{aligned}$$

où on a $\nabla^\perp h(Y,Z) = (\nabla^\perp_Xh)(Y,Z) + h(\nabla_XY,Z) + h(Y,\nabla_XZ)$

$(\bar{R}(X,Y)Z)^\top = R(X,Y)Z + A_{h(X,Z)}Y - A_{h(Y,Z)}X$

et pour tout $W \in TM$ **on a**

$< R(X,Y)Z,W >=< \bar{R}(X,Y)Z,W > - < h(Y,W),h(X,Z) > + < h(X,W),h(Y,Z) >$ **(équation de Gauss)**

$(\bar{R}(X,Y)Z)^\perp = (\nabla^\perp_Xh)(Y,Z) - (\nabla^\perp_Yh)(X,Z)$ **(equation de Codazzi)**

Si $\bar{M}$ **est à courbure sectionnelle constante, l'équation de Codazzi devient**

$(\nabla^\perp_Xh)(Y,Z) = (\nabla^\perp_Yh)(X,Z)$

Notons par $R^\perp$ **le tenseur de courbure du fibré normal** $TM^\perp$**,**$\forall X,Y \in TM$**,** $\forall \xi \in TM^\perp$**, en appliquant Gauss et Weingartern on a :**

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_X\bar{\nabla}_Y\xi &= \bar{\nabla}_X(-A_\xi Y + \nabla^\perp_Y\xi)\\ &= -\nabla_X(A_\xi Y) - h(X, A_\xi Y) + \nabla^\perp_X(\nabla^\perp_Y\xi) - A_{\nabla^\perp_Y\xi}X \qquad (2.5)\end{aligned}$$

De façon analogue on a

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_Y\bar{\nabla}_X\xi &= \bar{\nabla}_Y(-A_\xi X + \nabla^\perp_X\xi)\\ &= -\nabla_Y(A_\xi X) - h(Y, A_\xi X) + \nabla^\perp_Y(\nabla^\perp_X\xi) - A_{\nabla^\perp_X\xi}Y \qquad (2.6)\end{aligned}$$

$$\bar{\nabla}_{[X,Y]}\xi = -A_\xi[X, Y] + \nabla^\perp_{[X,Y]} \qquad (2.7)$$

(2.5), (2.6) et (2.7) donnent

$$\begin{aligned}\bar{R}(X, Y)\xi = &-\nabla_X(A_\xi Y) + \nabla_Y(A_\xi X) - A_{\nabla^\perp_Y\xi}X + A_{\nabla^\perp_X\xi}Y + A_\xi[X, Y]\\ &+ R^\perp(X, Y)\xi + h(Y, A_\xi X) - h(X, A_\xi Y)\end{aligned}$$

où $R^\perp(X, Y)\xi = \nabla^\perp_X\nabla^\perp_Y\xi - \nabla^\perp_Y\nabla^\perp_X\xi - \nabla^\perp_{[X,Y]}\xi$
$\bar{R}(X, Y)\xi)^\perp = R^\perp(X, Y)\xi + h(A_\xi X, Y) - h(X, A_\xi Y)$ **(équation de Ricci)**

2.2.1 Connexion de Levi-Civita d'une sous variété

Proposition 2.4. *Soit (M, g) une sous-variété semi riemannienne de $(\bar{M}, \bar{g})$, et soit $\bar{\nabla}^{\bar{M}}$ la connexion de Levi-Civita de . Alors*

$$\nabla^M_X Y = (\bar{\nabla}^{\bar{M}}_X Y)^\top$$

est la connexion de Levi-Civita de (M, g).

2.2.2 Hypersurfaces semi-Riemaniennes

Hypersurface non-dégénéré

Sur une hypersurface non-dégénéré M d'une variété semi-riemanienne $(\bar{M}, \bar{g})$, nous pouvons considérer toutes les notions de la géometrie Riemannienne (notions intrinseques et extrinseques) des sous-variétés semi-riemanniennes.

Par utilisation du vecteur unitaire normal,on a la décomposition suivante :

$$T\bar{M} = T\bar{M} \oplus_{orth} TM^\perp, TM \cap TM^\perp = \{0\}. \qquad (2.8)$$

Exemple 2.6. *Sur la sphère unité S^n dans $\mathbb{E}^{n+1}$, $TS^n \cap (TS^n)^\perp = 0$.*

Soient $\bar{\nabla}$ et ∇ les connexions de levi-civita sur $\bar{M}$ et M respectivement sur un voisinage $\mathcal{U}$ de $x \in M$. Soit le $\xi \in TM^{\perp}$ tel que $\bar{g}(\xi_p, \xi_p) = 1,\ \forall X, Y \in \Gamma(TM),\ \forall p \in \mathcal{U}$, on a :

Formule de Gauss

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X, Y). \tag{2.9}$$

Formule de Weigatern

$$\bar{\nabla}_X \xi = -A_\xi X + \bar{\nabla}^{\perp}_X \xi. \tag{2.10}$$

Pour le cas des hypersurfaces

$$\bar{\nabla}_X \xi = 0.$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} 0 &= X\bar{g}(\xi, \xi) \\ &= \bar{g}(\bar{\nabla}_X \xi, \xi) - \bar{g}(\xi, \bar{\nabla}_X \xi) \\ &= 2(\bar{g}(\bar{\nabla}_X \xi, \xi). \end{aligned}$$

D'où $\bar{\nabla}_X \xi = 0$. □

La formule de Weigartern devient

$$\bar{\nabla}_X \xi = -A_\xi X$$

et la formule de Gauss est

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + B(X, Y)\xi$$

où

$$\begin{aligned} B(X, Y) &= g(h(X, Y), \xi) \\ &= g(A_\xi Y, X). \end{aligned}$$

Définition 2.16. *Soit $(\bar{M}, \bar{g})$ une variété semi-riemannienne de dimension n.* ***Une hypersurface semi-riemannienne*** *de $(\bar{M}, \bar{g})$ est une sous variété semi-Riemannienne (M, g) de dimension $m = n - 1$.*

Soit M une variété différentielle de dimension $n+1$ et g un tenseur symétrique de type $(0,2)$ sur M tel que g_x est d'indice constante sur chaque espace tangent. Le radical ou l'espace nul de T_xM est un sous espace

$$RadT_xM = T_xM^{\perp} \bigcap T_xM = \{0\}$$

$$RadT_xM = \{V \in T_xM, g_x(V,W) = 0, \forall W \in T_xM\}$$

Equation de Gauss, Coddazi et Ricci

Soient $\bar{R}$ le tenseur de courbure de la variété semi-riemannienne $\bar{M}$, R le tenseur de courbure de M, $\bar{\nabla}$ et ∇ les connexions de Levi-Civita de $\bar{M}$ et la connexion induite sur M respectivement. On a $\forall X, Y, Z \in TM$,

$$\bar{R}(X,Y)Z = R(X,Y)Z + A_{h(X,Z)}Y - A_{h(Y,Z)}X + (\nabla^{\perp}_X h)(Y,Z) - (\nabla^{\perp}_Y h)(X,Z). \tag{2.11}$$

La composante tangentielle de (2.11) donne l'équation de Gauss

$$(\bar{R}(X,Y)Z)^{\top} = R(X,Y)Z + A_{h(X,Z)}Y - A_{h(Y,Z)}X \tag{2.12}$$

et la composante normale donne l'équation de Codazzi

$$(\bar{R}^{\perp}(X,Y)Z)^{\perp} = (\nabla^{\perp}_X h)(Y,Z) - (\nabla^{\perp}_Y h)(X,Z) \tag{2.13}$$

où

$$(\nabla^{\perp}_X h)(Y,Z) = \nabla^{\perp}_X h(Y,Z) - h(\nabla_X Y, Z) - h(Y, \nabla_X Z).$$

En utilisant la formule (2.10) avec $\xi \in \Gamma(TM^{\perp})$,

$$\begin{aligned}\bar{R}(X,Y)\xi = \nabla_Y(A_\xi X) - \nabla_X(A_\xi Y) + A_{\nabla^{\perp}_X \xi}Y - A_{\nabla^{\perp}_Y \xi}X + A_\xi[X,Y] + R^{\perp}(X,Y)\xi \\ + h(Y, A_\xi X) - h(X, A_\xi Y).\end{aligned} \tag{2.14}$$

La composante tangentielle de l'équation (2.14) conduit à la nouvelle équation de codazzi qui peut se réecrire de manière suivante

$$(\bar{R}(X,Y)\xi)^{\top} = (\nabla_Y A)(X,\xi) - (\nabla_X A)(Y,\xi) \tag{2.15}$$

Avec

$$(\nabla_X A)(Y,\xi) = \nabla_X(A_\xi Y) - A_\xi \nabla_X Y - A_{\nabla^{\perp}_X \xi}Y.$$

La composante normale de (2.14) donne l'équation de Ricci

$$\bar{R}(X,Y)^{\perp}\xi = R^{\perp}(X,Y)\xi + h(Y, A_\xi X) - h(X, A_\xi Y). \tag{2.16}$$

2.2.3 Sous-variétés minimales

Courbure moyenne de sous-variétés

Soient M une sous-variete de dimension n d'une variété semi-riemannienne $\bar{M}$ de dimension (n+p), f une immersion de M dans $\bar{M}$ et $X_i, i = 1, ..., n$ une base orthonormée de $T_xM(x \in M)$.

Définition 2.17. *On appelle vecteur courbure moyenne de M en $x \in M$, le vecteur H_x défini par*

$$H(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h(X_i, X_i).$$

Définition 2.18. *Une sous-variete M est dite minimale, si le champ de vecteur H est identiquement nul.*

Sous-variété totalement géodésique

Soit $\gamma : I \to M$ une courbe tracée sur M. Si γ est une géodesique de M, on a :

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} &= \nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} + h(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) \\ &= h(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}).\end{aligned}$$

Nous voyons que si toute géodésique de M est aussi géodésique de $\bar{M}$, la seconde forme fondamentale est identiquement nulle.

Dans ce cas, nous dirons que la sous-variété M est totalement géodésique de $\bar{M}$. Une sous variété semi-riemannienne M d'une variété semi-riemannienne $\bar{M}$ est dite géodésique ,si toute géodésique tracée sur M est une géodésique de $\bar{M}$.

Sous-variete ombilique

Définition 2.19. *Une immersion isométrique $f : M^n \to \bar{M}^{n+p}$ est dite ombilique en $x_0 \in M$ si les opérateurs formes sont point par point proportionnels à l'application identique.C'est à dire*

$\forall \xi \in T_xM^{\perp}$,il existe $\lambda = \lambda(\xi) \in \mathbb{R}$ tel que $A_\xi = \lambda_\xi X \ \forall X \in T_{x_0}M$ où λ est une fonction $C^\infty(T_xM)^{\perp}$.

Définition 2.20. *M est totalement ombilique si elle ombilique en tous ses points.*

Un champ de vecteur normal ombilique est un champ de vecteur normal ξ tel que A_ξ est multiple de l'identité.

2.2.4 Hypersurfaces de type lumière

Soit M une hypersurface d'une variété semi-riemannienne $(\bar{M}, \bar{g})$ de dimension $m+2$ avec $m > 0$ d'indice $q \in \{1, 2, .., m+1\}$. Comme pour tout $u \in M$, l'espace vectoriel T_uM est un hyperplan de l'espace semi-euclidien $(T_u\bar{M}, \bar{g})$, nous considérons les sous-espaces orthogonal et radical de T_uM définis par :

$$T_uM = \{\forall V \in T_uM; g(v, W) = 0, \forall W \in T_uM\}$$

et

$$RadT_uM = \{\xi \in T_uM; g(\xi, V) = 0, \forall V \in TuM\}.$$

On dit que M est une hypersurface de type lumière si $RadT_uM \neq 0$, $\forall u \in M$.

Soit (M^{n+1}, g) une sous variété semi-riemannienne de $(\bar{M}^{n+2}, \bar{g})$

Dans le cas d'hypersurface non dégénéré , on a la décomposition suivante

$$T\bar{M} = TM \oplus_{orth} TM^{\perp} \tag{2.17}$$

et

$$RadTM = TM \oplus_{orth} TM^{\perp} = \{0\}.$$

Dans le cas dégénéré la décomposition (2.17) **n'est plus possible car $TM^{\perp} \subset TM$ c'est à dire $TM \cap TM^{\perp} \neq \{o\}$**

Pour contourner cette difficulté,Duggal a construit une distribution écran qui est complémentaire orthogonal de $TM^{\perp}$ dans TM. Notons $S(TM)$ cette distribution.

$$TM = S(TM) \oplus_{orth} TM^{\perp} \tag{2.18}$$

$S(TM)$ est de rang n.

Proposition 2.5. *Toute distribution écran est non dégénérée.*

Démonstration. Soient $S(TM)$ le sous-espace complémentaire de $TM^{\perp}$ et $X \in TM$. On a la décomposition suivante :

$$TM = TM^{\perp} \oplus_{orth} S(TM). \tag{2.19}$$

Supposons qu'il existe $X \neq 0 \in S(TM)$ tel que ,$g(X, Y) =) \forall Y \in S(TM)$(i).

Par (2.19), cela montre que

$$g(X, \xi) = 0 \quad \forall \quad \xi \in TM^{\perp}$$

Finalement ,$\forall Z \in TM, g(X, Z) = 0$,donc $X \in TM^{\perp}$(ii).

De (i) et (ii), $X \in S(TM) \cap TM^{\perp} = 0$.

Mais $TM^{\perp}$ et $S(TM)$ sont des sous-espaces complémentaire, donc $S(TM)$ est non dégénérée. □

Toute distribution écran sur M étant non dégénérée, on a la décomposition suivante ;

$$T\bar{M} = S(TM) \oplus_{orth} S(TM)^{\perp} \tag{2.20}$$

$$S(TM) \cap S(TM)^{\perp} = \{0\} \tag{2.21}$$

$T\bar{M}$ **est de dim** $n+2$
$S(TM)$ **est dim** n
$S(TM)^{\perp}$ **est de dim 2**
$S(TM)^{\perp} = TM^{\perp} + tr(TM)$

$$T\bar{M} = S(TM) \oplus_{orth} TM^{\perp} \oplus tr(TM) \tag{2.22}$$

Or $S(TM) \oplus_{orth} TM^{\perp} = TM$

$$T\bar{M} = TM \oplus tr(TM). \tag{2.23}$$

Théorème 2.1. *Soit $(M, g, S(TM))$ une hypersurface de type lumiere d'une variete pseudo riemannienne $(\bar{M}^{n+2}, \bar{g})$, $S(TM)$ une distribution ecran fixee sur M. Alors il existe un unique fibré vectoriel $tr(TM)$ de rang 1 sur M , tel que pour toute section $\xi \in TM^{\perp}$, $\xi \neq 0$ sur un voisinage coordonnees $\mathcal{U} \subset M$,il existe une unique section N de $tr(TM)$ sur $\mathcal{U}$ satisfaisant :*

$$\bar{g}(N, \xi) = 1,\ \bar{g}(N, N) = \bar{g}(N, W) = 0,\ \forall W \in \Gamma(S(TM))_{|\mathcal{U}}. \tag{2.24}$$

Démonstration. Notons que $S(TM)^{\perp}$ est un fibré vectoriel non degenere de rang 2 et $TM^{\perp}$ est un sous fibré vectoriel de $S(TM)^{\perp}$. Considerons un fibré H complementaire de $TM^{\perp}$ dans $S(TM)^{\perp}$ et prenons $V \in \Gamma(H_{|\mathcal{U}}), V \neq 0$.Alors $\bar{g}(\xi, V) \neq 0$ sur $\mathcal{U}$. En un point de $\mathcal{U}$ $S(TM)^{\perp}$ peut etre degeneré.On definit sur $\mathcal{U}$, un champ de vecteur

$$N = \frac{1}{\bar{g}(\xi, V)} \left\{ V - \frac{\bar{g}(V, V)}{2\bar{g}(\xi, V)} \xi \right\} \tag{2.25}$$

où $V \in \Gamma(H_{|\mathcal{U}})$ tel que $\bar{g}(\xi, V) \neq 0$ Vérifions que N (pris dans $\mathcal{U}$) qui est donné par la relation (2.25) satisfait la relation (2.24)

On a :

$$\bar{g}(N, \xi) = \frac{1}{\bar{g}(\xi, V)} \left\{ V - \frac{\bar{g}(V, V)}{2\bar{g}(\xi, V)} \xi \ , \xi \right\} = 1$$

$$\bar{g}(N, N) = \left(\frac{1}{\bar{g}(\xi, V)} \left\{ V - \frac{\bar{g}(V, V)}{2\bar{g}(\xi, V)} \xi \right\}, \frac{1}{\bar{g}(\xi, V)} \left\{ V - \frac{\bar{g}(V, V)}{2\bar{g}(\xi, V)} \xi \right\} \right) = 0$$

$$\bar{g}(N, W) = 0\ \forall W \in S(TM).$$

□

Formule de Gauss
Soit $\bar{\nabla}$ la connexion de Levi-Civita sur $\bar{M}$. En utilisant (2.23) **on a :**

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X,Y) \tag{2.26}$$

$h : TM \times TM \to tr(TM)$**,** h **est symétrique.**
Formule de Weingarten
$\forall X \in TM, V \in tr(TM)$**, en appliquant** (2.23)**, on a :**

$$\bar{\nabla}_X V = (\bar{\nabla}_X V)^{\top} + (\bar{\nabla}_X V)^{tr}$$

$$\bar{\nabla}_X V = -A_V X + \bar{\nabla}^t_X V. \tag{2.27}$$

Remarque 2.2. *La connexion ∇ induite sur M est sans torsion, mais elle n'est pas métrique.*

Démonstration. En utilisant la relation (2.26) $\forall X, Y, Z \in \Gamma(TM)$, on a :

$$\begin{aligned}
&(\bar{\nabla}_X \bar{g})(Y,Z) = 0 \\
&\iff X.\bar{g}(X,Y) - \bar{g}(\bar{\nabla}_X Y, Z) - \bar{g}(Y, \bar{\nabla}_X Z) = 0 \\
&\iff (\nabla_X g)(Y,Z) - \bar{g}(h(X,Y),Z) - \bar{g}(Y, h(X,Z)) = 0 \\
&\iff (\nabla_X g)(Y,Z) = \bar{g}(h(X,Y),Z) + \bar{g}(Y, h(X,Z)).
\end{aligned}$$

□

Soit p le morphisme de projection $\Gamma(TM)$ sur $S(TM)$, respectivement à la d écomposition (2.19)**, on a**

$$X = PX + \eta(X)\xi. \tag{2.28}$$

Avec cette projection, nous avons une deuxième forme fondamentale de M et son opérateur forme correspondant.
on alors $\forall X, Y \in \Gamma(TM), \forall U \in \Gamma(TM^{\perp})$

$$\nabla_X PY = \nabla^*_X PY + h^*(X, PY) \tag{2.29}$$

$$\nabla_X U = -A^*_U + \nabla^{*\perp}_X. \tag{2.30}$$

où A^*_U est l'opérateur forme de la distribution écran dans la direction de U.
Définissons $C(X,PY) = \bar{g}(h^*(X,PY),N)$
$\epsilon(X) = \bar{g}(\nabla^{*\perp}_X \xi, N)$ $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$.
Locallement,nous obtenons

$\nabla_X PY = \nabla^*_X PY + C^*(X, PY)\xi$
$\nabla_X \xi = -A^*_\xi X - \tau(X)\xi \ \forall X, Y \in \Gamma(TM)$.

Ici, $C(X, PY)$ **est appelée la forme fondamentale locale de la distribution écran.**

Les deux formes fondamentales de M **et** $S(TM)$ **sont reliées à leur opérateurs formes par**

$$B(X,Y) = g(A^*_\xi X, Y) = \bar{g}(h(X,Y),\xi) \ tel \ que \ g(A^*_\xi X, N) = 0 \tag{2.31}$$

$$C(X, PY) = g(A_N X, PY) = \bar{g}(h^*(X, PY), N) \ tel \ que \ \bar{g}(A_N Y, N) = 0 \tag{2.32}$$

$\tau(X) = \bar{g}(\bar{\nabla}^t_X N, \xi)$.

$$\bar{g}(A_V Y, PW) = \bar{g}(V, h^*(Y, PW)) \ \forall V \in tr(TM), \forall PW \in S(TM) \tag{2.33}$$

Pour les hypersurfaces de type lumière, nous avons 2 formules de Gauss et 2 formules de Weigatern qui sont

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + B(X,Y)N \tag{2.34}$$

$$\bar{\nabla}_X N = -A_N X + \tau(X)N \tag{2.35}$$

$$\nabla_X pY = \nabla^*_X pY + C(X, pY)\xi \tag{2.36}$$

$$\nabla_X \xi = -A^*_\xi X - \tau(X)\xi. \tag{2.37}$$

Soient (M, g) **une hypersurface de type lumière d'une variété pseudo-riemannienne** $(\bar{M}, \bar{g})$ **de dimension (n+2),** $\bar{R}$ **et** R **les tenseurs de courbure de Riemann de** $\bar{\nabla}$ **et** ∇.

Alors globalement en utilisant la formule (2.26) $\forall X, Y, Z \in \Gamma(TM)$**, nous avons**

$$\bar{R}(X,Y)Z = R(X,Y)Z + A_{h(X,Z)}Y - A_{h(Y,Z)}X + (\nabla^\perp_X h)(Y,Z) - (\nabla^\perp_Y h)(X,Z). \tag{2.38}$$

A partir de la relation (2.38) **et par application des relations** (2.27)**,**(2.31)**,**(2.32)**,**(2.33) $\forall X, Y, Z \in \Gamma(TM), \forall U \in \Gamma(TM)^\perp, pW \in \Gamma(S(TM)), V \in \Gamma(trM)$.

Les équations de Gauss-Codazzi sont données par :

$$\begin{aligned}\bar{g}(\bar{R}(X,Y)Z, pW) &= \bar{g}(R(X,Y)Z, pW) + \bar{g}(A_{h(X,Z)}Y, PW) \\ &\quad \bar{g}(A_{h(Y,Z)}X, pW) + \bar{g}((\nabla^\perp_X h)(Y,Z), pW) \\ &\quad -\bar{g}((\nabla^\perp_Y h)(X,Z), pW) \\ &\quad = \bar{g}(R(X,Y)Z, pW) + \bar{g}(h(X,Z), h^*(Y, pW)) \\ &\quad -\bar{g}(h(Y,Z), h^*(X, pW)).\end{aligned} \tag{2.39}$$

$$\begin{aligned}\bar{g}(\bar{R}(X,Y)Z,U) &= \bar{g}(R(X,Y)Z,U) + \bar{g}(A_{h(X,Z)}Y,U) - \bar{g}(A_{h(Y,Z)}X,U)\\ &+\bar{g}((\nabla^{\perp}_X h)(Y,Z),U) - \bar{g}((\nabla^{\perp}_Y h)(X,Z),U)\\ &= \bar{g}((\nabla^{\perp}_X h)(Y,Z),U) - \bar{g}((\nabla^{\perp}_Y h)(X,Z),U) \qquad (2.40)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{g}(\bar{R}(X,Y)Z,V) &= \bar{g}(R(X,Y)Z,V) + \bar{g}(A_{h(X,Z)}Y,V) - \bar{g}(A_{h(Y,Z)}X,V)\\ &+\bar{g}((\nabla^{\perp}_X h)(Y,Z),V) - \bar{g}((\nabla^{\perp}_Y h)(X,Z),V)\\ &= \bar{g}(R(X,Y)Z,V)\ \forall\ V \in tr(TM) \qquad (2.41)\end{aligned}$$

Avec $(\nabla_X h) = \nabla^t_X h(Y,Z) - h(\nabla_X Y, Z) - h(Y, \nabla_X Z)$**.**

Exemple 2.7. $\wedge_0^{n+1} \subset \mathbb{R}_1^{n+2}$
Considerons $\mathbb{R}_1^{n+2}$ *avec les coordonnees* $(x_0, ..., x_{n+1})$ *et* $\bar{g}(x,y) =< x, y >= -x_0y_0 + \sum_{a=1}^{n+1} x_a y_a$ *, le cône de lumière* $\wedge_0^{n+1} = \{x = (x_0, ..., x_{n+1}), -x_0^2 + \sum_{a=1}^{n+1} x_a^2\}$
et une immersion $f : \wedge_0^{n+1} \to \mathbb{R}_1^{n+2}$
$(x^1, ..., x^n) \mapsto [x^1, ..., x^n, (x^1)^2 + ... + (x^n)^2],\ \epsilon = \pm 1$

On vérifie que $\wedge_0^{n+1}$ *est de type lumière et de distribution caractéristique(radicale) engendrée par*

$$\xi_0 = x_0\partial_0 + \sum_{a=1}^{n+1} x_a\partial_a. \qquad (2.42)$$

Considerons le champs de vecteur isotrope transverse

$$N = -x_0\partial_0 + \sum_{a=1}^{n+1} x_a\partial_a \qquad (2.43)$$

comme un champ test.

Notons P *le morphisme de projection du fibré tangent* TM *dans le fibré* $S(TM)$ *correspondant et* D *la connexion de Levi-Civita de* $\mathbb{R}_1^{n+2}$

Alors

$$\xi = \frac{1}{2x_0^2}(x_0\partial_0 + \sum_{a=1}^{n+1} x_a\partial_a) \qquad (2.44)$$

et

$$\begin{aligned} D_X\xi &= D_X(\frac{1}{2x_0^2}\xi_0) \\ &= X.(\frac{1}{2x_0^2}\xi_0 + \frac{1}{2x_0}D_x\xi_0) \\ &= X.(\frac{1}{2x_0^2})2x_0^2\xi + \frac{1}{2x_0^2X} \\ &= 2x_0^2X.(\frac{1}{2x_0^2}\xi + \frac{1}{2x_0^2}(PX + \eta(X)\xi) \\ &= [2x_0^2X.(\frac{1}{2x_0^2} + \frac{1}{2x_0^2}\eta(X)]\xi + \frac{1}{2x_0^2}PX, \end{aligned}$$

pour tout $X \in \Gamma(\wedge_0^{n+1})$.
Par comparaison avec la formule de Weingarten

$$D_X\xi = -A_\xi^*X - \tau^N(X)\xi$$

nous avons

$$A_\xi^*X = \frac{1}{2x_0^2}PX \tag{2.45}$$

$$\tau^N(X) = -[2x_0^2X.(\frac{1}{2x_0^2}) + \frac{1}{2x_0^2}\eta(X)] \tag{2.46}$$

$$\begin{aligned} X.(\frac{1}{2x_0^2}) &= (X_0\partial_0 + \sum_{a=1}^{n+1} X_a\partial_a).(\frac{1}{2x_0^2}) \\ &= X_0\partial_0(\frac{1}{2x_0^2}) \\ &= d(\frac{1}{2x_0^2})(X) \\ &= -\frac{dx_0}{x_0^3}(X). \end{aligned}$$

Prenons

$$X = X_0\partial_0 + \sum_{b=1}^{n+1} X_b\partial_b$$

le 1-forme η *est donné par :*

$$\begin{aligned}\eta(X) &=< N, X > \\ &=< -x_0\partial_0 + \sum_{a=1}^{n+1} x_a\partial_a, X_0\partial_0 + \sum_{b=1}^{n+1} X_b\partial_b > \\ &= (x_0X_0 + \sum_{a=1}^{n+1} x_aX_a) \\ &= \frac{1}{2}d(x_0^2 + \sum_{a=1}^{n+1} x_a^2)(X) \\ &= \frac{1}{2}d(2x_0^2)(X) \\ &= 2x_0dx_0(X)\end{aligned}$$

$$\eta = 2x_0dx_0 \tag{2.47}$$

l'égalité (2.46) *donne*

$$\tau^N(X) = -[2x_0^2(-\frac{dx_0}{x_0^3}) + \frac{1}{2x_0^2}2x_0dx_0](X)$$

$$\tau^N = \frac{dx_0}{x_0}. \tag{2.48}$$

La fonction courbure moyenne H *sur* $\wedge_0^{n+1} \subset \mathbb{R}_1^{n+2}$ *est donnée par :*

$$\begin{aligned}H &= \frac{1}{n+1}traceA_\xi^* \\ &= -\frac{n}{2(n+1)}\frac{1}{x_0^2}.\end{aligned}$$

La distribution $S(TM)$ *de rang* n *est donnée par :*

$$X = \sum_{a=1}^{n+1} X_a\partial_a.$$

Avec $(X_1, ..., X_{n+1})$ *satisfaisant* $\sum_{a=1}^{n+1} x_aX_a = 0$

Chapitre 3

Hypersurface de type lumière d'une variété statistique

3.1 Introduction

Les variétés statistiques sont des abstractions géometriques utilisées pour modéliser l'information. Leurs domaines d'études appartiennent à la géometrie de l'information, une branche relativement récente de mathématiques, qui utilise des outils de géometrie différentielle pour étudier l'inférence statistique, la perte de l'information et l'estimation.

3.2 Définitions

Définition 3.1 (Connexion duale)**.** *Soit $(\tilde{M}, \tilde{g})$ une variété semi-riemannienne. Deux connexions affines $\tilde{D}$ et $\tilde{D}^*$ sont dites* ***duales*** *respectivement à la métrique $\tilde{g}$ si*

$$Z.\tilde{g}(X,Y) = \tilde{g}(\tilde{D}_Z X, Y) + \tilde{g}(X, \tilde{D}^*_Z Y)[19] \qquad \forall X, Y, Z \in \Gamma(TM). \quad (3.1)$$

Définition 3.2. *[9][Structure statistique] Soit $\tilde{M}$ une variété differentielle. Soit $\tilde{D}$ une connexion affine avec $T^{\tilde{D}}$ le tenseur de torsion et $\tilde{g}$ une métrique semi-riemannienne sur $\tilde{M}$. Alors, le couple $(\tilde{D}, \tilde{g})$ est appelé* ***structure statistique*** *sur $\tilde{M}$ si*

$$(\tilde{D}_X \tilde{g})(Y,Z) - (\tilde{D}_Y \tilde{g})(X,Z) = \tilde{g}(T^{\tilde{D}}(X,Y), Z) \qquad \forall X, Y, Z \in \Gamma(T\tilde{M}) \quad (3.2)$$

$$et \quad T^{\tilde{D}} = 0.$$

La connexion de Levi-Civita d'une variété statistique est donnée par :

$$\tilde{D^0} = \frac{\tilde{D} + \tilde{D}^*}{2} \quad (3.3)$$

avec $\tilde{D}_X Y = \tilde{D}^0_X Y + g(X,V)g(Y,V)V$ **et** $\tilde{D}^*_X Y = \tilde{D}^0_X Y - g(X,V)g(Y,V)V$ $\forall V \in \tilde{M}$

[11]

Une variété statistique sera représentée par $(\tilde{M}, \tilde{g}, \tilde{D}, \tilde{D}^*)$**.**

Soit $(\tilde{M}, \tilde{g}, \tilde{D}, \tilde{D}^*)$ **une variété statistique, alors les propriétés suivantes sont vérifiées :**

1. $\tilde{D}^*$ **est sans torsion c'est à dire** $T^{\tilde{D}^*}(X,Y) = 0$
2. $\tilde{D}^*_{\tilde{g}}$ **est symétrique. C'est à dire** $(\tilde{D}^*_{\tilde{g}})(X,Y,Z) = (\tilde{D}^*_{\tilde{g}})(Y,X,Z)$.

Démonstration. Pour (1), on a $T^{\tilde{D}^*}(X,Y) = \tilde{D}^*_X Y - \tilde{D}^*_Y X - [X,Y]$, alors pour tout $Z \in \Gamma(TM)$, on a :

$$\begin{aligned}
\tilde{g}(T^{\tilde{D}^*}(X,Y),Z) &= \tilde{g}(\tilde{D}^*_X Y, Z) - \tilde{g}(\tilde{D}^*_Y X, Z) - \tilde{g}([X,Y],Z) \\
&= X.\tilde{g}(Y,Z) - \tilde{g}(\tilde{D}_X Z, Y) - Y.\tilde{g}(X,Z) + \tilde{g}(\tilde{D}_Y Z, X) - \tilde{g}([X,Y],Z) \\
&= X.\tilde{g}(Y,Z) - Y\tilde{g}(X,Z) - \tilde{g}(\tilde{D}_X Z, Y) + \tilde{g}(\tilde{D}_Y Z, X) - \tilde{g}(\tilde{D}_X Y, Z) \\
&+\tilde{g}(\tilde{D}_Y X, Z) \\
&= X.\tilde{g}(Y,Z) - \tilde{g}(\tilde{D}_X Y, Z) - \tilde{g}(Y, \tilde{D}_X Z) - Y.\tilde{g}(X,Z) + \tilde{g}(\tilde{D}_Y Z, X) \\
&+\tilde{g}(\tilde{D}_Y X, Z) \\
&= (\tilde{D}_{\tilde{g}})(X,Y,Z) - (\tilde{D}_{\tilde{g}})(Y,X,Z) \\
&= O.
\end{aligned}$$

D'où $T^{\tilde{D}^*}(X,Y) = 0,\ \forall X, Y \in \Gamma(TM)$.

Pour 2),

$$\begin{aligned}
(\tilde{D}_X \tilde{g})(Y,Z) - (\tilde{D}_Y \tilde{g})(X,Z) &= \tilde{g}(T^{\tilde{D}}(X,Y),Z) \\
(\tilde{D}^*_{\tilde{g}})(X,Y,Z) - (\tilde{D}^*_{\tilde{g}})(Y,X,Z) &= g(T^{D^*}(X,Y),Z) \\
(\tilde{D}^*_{\tilde{g}})(X,Y,Z) - (\tilde{D}^*_{\tilde{g}})(Y,X,Z) &= 0 \\
car\ \ T^{D^*}(X,Y) &= 0 \\
(\tilde{D}^*_{\tilde{g}})(X,Y,Z) &= (\tilde{D}^*_{\tilde{g}})(Y,X,Z)
\end{aligned}$$

□

3.3 Les tenseurs de courbure de types lumière d'une variété statistique

Soient $\tilde{R}$ **et** $\tilde{R}^*$ **les tenseurs de courbure respectivement à** $\tilde{D}$ **et** $\tilde{D}^*$**. En utilisant les formules de Gauss-Weingartern pour** M **et**

$S(TM)$ les tenseurs de courbure $\tilde{R}$ et $\tilde{R}^*$ des connexions $\tilde{D}$ et $\tilde{D}^*$ sont donnés par :

$$\tilde{R}(X,Y)Z = \tilde{D}_X\tilde{D}_YZ - \tilde{D}_Y\tilde{D}_XZ - \tilde{D}_{[X,Y]}Z$$

$$\begin{aligned}\tilde{D}_X\tilde{D}_YZ &= \tilde{D}_X(D_YZ + B(Y,Z)N)\\ &= \tilde{D}_XD_YZ + \tilde{D}_XB(Y,Z)N\\ &= \tilde{D}_XD_YZ + B(Y,Z)\tilde{D}_XN\\ &= D_XD_YZ + B(X,D_YZ)N - B(Y,Z)A^*_NY + B(Y,Z)\tau^*(X)N\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{D}_Y\tilde{D}_XZ &= \tilde{D}_Y(D_XZ + B(X,Z)N)\\ &= \tilde{D}_YD_XZ + \tilde{D}_YB(X,Z)N\\ &= \tilde{D}_YD_XZ + B(X,Z)\tilde{D}_YN\\ &= D_YD_XZ + B(Y,D_XZ)N - B(X,Z)A^*_NX + B(X,Z)\tau^*(Y)N\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{D}_{[X,Y]}Z &= D_{[X,Y]}Z + B([X,Y],Z)N\\ &= D_{[X,Y]}Z + B(D_XY - D_YX,Z)N\\ &= D_{[X,Y]}Z + B(D_XY,Z)N - B(D_YX,Z)N\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{D}_X\tilde{D}_YZ - \tilde{D}_Y\tilde{D}_XZ - \tilde{D}_{[X,Y]}Z &= D_XD_YZ + B(X,D_YZ)N - B(Y,Z)A^*_NY\\ &\quad + B(Y,Z)\tau^*(X)N - D_YD_XZ + B(Y,D_XZ)N - B(X,Z)A^*_NX\\ &\quad + B(X,Z)\tau^*(Y)N - D_{[X,Y]}Z + B(D_XY,Z)N - B(D_YX,Z)N\\ &= R(X,Y)Z - B(Y,Z)A^*_NX + B(X,Z)A^*_NY + (B(Y,Z)\tau^*(X)\\ &\quad - B(X,Z)\tau^*(Y))N + ((D_xB)(Y,Z) - (D_YB)(X,Z))N\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{R}(X,Y)Z = R(X,Y)Z - B(Y,Z)A^*_NX + B(X,Z)A^*_NY + [B(Y,Z)\tau^*(X) - B(X,Z)\tau^*(Y)]N\\ + ((D_XB)(Y,Z) - (D_YB)(X,Z))N \qquad (3.4)\end{aligned}$$

$$\tilde{R}^*(X,Y)Z = \tilde{D^*}_X\tilde{D^*}_YZ - \tilde{D^*}_Y\tilde{D^*}_XZ - \tilde{D^*}_{[X,Y]}Z$$

$$\begin{aligned}\tilde{D^*}_X\tilde{D^*}_YZ &= \tilde{D^*}_X(D^*_YZ + B^*(Y,Z)N)\\ &= \tilde{D^*}_XD^*_YZ + \tilde{D^*}_XB^*(Y,Z)N\\ &= \tilde{D^*}_XD^*_YZ + B^*(Y,Z)\tilde{D^*}_XN\\ &= D^*_XD^*_YZ + B^*(X,D^*_YZ)N - B^*(Y,Z)A_NY + B^*(Y,Z)\tau(X)N\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{D^*}_Y\tilde{D^*}_X Z &= \tilde{D^*}_Y(D^*_X Z + B^*(X,Z)N)\\ &= \tilde{D^*}_Y D^*_X Z + \tilde{D^*}_Y B^*(X,Z)N\\ &= \tilde{D^*}_Y D^*_X Z + B^*(X,Z)\tilde{D^*}_Y N\\ &= D^*_Y D^*_X Z + B^*(Y,D^*_X Z)N - B^*(X,Z)A_N X + B^*(X,Z)\tau(Y)N\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{D^*}_{[X,Y]}Z &= D^*_{[X,Y]}Z + B^*([X,Y],Z)N\\ &= D^*_{[X,Y]}Z + B^*(D^*_X Y - D^*_Y X, Z)N\\ &= D^*_{[X,Y]}Z + B^*(D^*_X Y, Z)N - B^*(D_Y X, Z)N\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{D^*}_X\tilde{D^*}_Y Z - \tilde{D^*}_Y\tilde{D^*}_X Z - \tilde{D^*}_{[X,Y]}Z &= D^*_X D^*_Y Z + B^*(X,D^*_Y Z)N - B^*(Y,Z)A_N Y\\ &\quad + B^*(Y,Z)\tau(X)N - D^*_Y D^*_X Z + B^*(Y,D^*_X Z)N\\ &\quad - B^*(X,Z)A^*_N X + B^*(X,Z)\tau(Y)N - D^*_{[X,Y]}Z\\ &\quad + B^*(D^*_X Y,Z)N - B^*(D^*_Y X,Z)N\\ &= R^*(X,Y)Z - B^*(Y,Z)A_N X + B^*(X,Z)A_N Y\\ &\quad + (B^*(Y,Z)\tau(X) - B^*(X,Z)\tau(Y))N + ((D^*_X B^*)(Y,Z)\\ &\quad - (D^*_Y B^*)(X,Z))N\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{R}^*(X,Y)Z &= R^*(X,Y)Z - B^*(Y,Z)A_N X + B^*(X,Z)A_N Y\\ &\quad + (B^*(Y,Z)\tau(X) - B^*(X,Z)\tau(Y))N\\ &\quad + ((D^*_X B^*)(Y,Z) - (D^*_Y B^*)(X,Z))N \qquad (3.5)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}g(\tilde{R}(X,Y)Z,PW) &= g(R(X,Y)Z,PW) - B(Y,Z)g(A^*_N X,PW) + B(X,Z)g(A^*_N X,PW)\\ &\quad + B(Y,Z)\tau^*(X)g(N,PW) - B(X,Z)\tau^*(Y)g(N,PW)\\ &\quad + g((D_X B)(Y,Z)N,PW) - g((D_Y B)(X,Z)N,PW)\end{aligned}$$

$g(R(X,Y)Z,PW) \neq 0$

On sait que

$$C^*(X,PY) = g(A^*_N X,PY)$$

$$\begin{aligned}B(Y,Z)g(A^*_N X,PW) &= B(Y,Z)C^*(X,PW) \neq 0\\ B(X,Z)g(A^*_N Y,PW) &= B(X,Z)C^*(Y,PW) \neq 0\\ B(Y,Z)\tau^*(X)g(N,PW) &= 0\\ B(X,Z)\tau^*(Y)g(N,PW) &= 0\\ g((D_X B)(Y,Z)N,PW) &= (D_X B)(Y,Z)g(N,PW) = 0\\ g((D_Y)B)(X,Z)N,PW) &= (D_Y B(X,Z)g(N,PW) = 0\end{aligned}$$

$$g(\tilde{R}(X,Y)Z,PW) = g(R(X,Y)Z,PW) - B(Y,Z)C^*(X,PW) + B(X,Z)C^*(Y,PW)$$

$$\begin{aligned} g(\tilde{R^*}(X,Y)Z,PW) &= g(R^*(X,Y)Z,PW) - B^*(Y,Z)g(A_NX,PW) + B^*(X,Z)g(A_N,PW) \\ &+ B^*(Y,Z)\tau(X)g(N,PW) - B^*(X,Z)\tau(Y)g(N,PW) \\ &+ g((D_XB^*)(Y,Z)N,PW) - g((D_Y^*B^*)(X,Z)N,PW) \end{aligned}$$

$$g(R^*(X,Y)Z,PW) \neq 0$$

On sait que

$$C(X,PY) = g(A_N,PY)$$

$$\begin{aligned} B^*(Y,Z)g(A_NX,PW) &= B^*(Y,Z)C(X,PW) \neq 0 \\ B^*(X,Z)g(A_NY,PW) &= B^*(X,Z)C(Y,PW) \neq 0 \\ B^*(Y,Z)\tau(X)g(N,PW) &= 0 \\ B^*(X,Z)\tau(Y)g(N,PW) &= 0 \\ g((D_X^*B^*)(Y,Z)N,PW) &= (D_X^*B^*)(Y,Z)g(N,PW) = 0 \\ g((D_Y^*)B^*)(X,Z)N,PW) &= (D_Y^*B^*(X,Z)g(N,PW) = 0 \end{aligned}$$

$$g(\tilde{R^*}(X,Y)Z,PW) = g(R^*(X,Y)Z,PW) - B^*(Y,Z)C(X,PW) + B^*(X,Z)C(Y,PW)$$

A partir des formules de Gauss et Weingarten pour M et $S(TM)$, les tenseurs des courbures de type $(0,4)$ $\tilde{R}$ et $\tilde{R}^*$ sont donnés par :

$$g(\tilde{R^*}(X,Y)Z,PW) = g(R^*(X,Y)Z,PW) - B^*(Y,Z)C(X,PW) + B^*(X,Z)C(Y,PW)$$

$$\begin{aligned} g(\tilde{R}(X,Y)Z,\xi) &= g(R(X,Y)Z,\xi) - B(Y,Z)(A_N^*X,\xi) + B(X,Z)g(A_N^*Y,\xi) \\ &+ B(Y,Z)\tau^*(X)g(N,\xi) - B(X,Z)\tau^*(Y)g(N,\xi) + (D_XB)(Y,Z)g(N,\xi) \\ &- (D_YB(X,Z)g(N,\xi) \\ &= B(Y,Z)\tau^*(X) - B(X,Z)\tau^*(Y) + (D_XB)(Y,Z) - (D_YB)(X,Z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(\tilde{R^*}(X,Y)Z,\xi) &= g(R^*(X,Y)Z,\xi) - B^*(Y,Z)(A_NX,\xi) + B^*(X,Z)g(A_NY,\xi) \\ &+ B^*(Y,Z)\tau(X)g(N,\xi) - B^*(X,Z)\tau(Y)g(N,\xi) + (D_X^*B^*)(Y,Z)g(N,\xi) \\ &- (D_Y^*B^*(X,Z)g(N,\xi) \\ &= B^*(Y,Z)\tau(X) - B^*(X,Z)\tau(Y) + (D_X^*B^*)(Y,Z) - (D_Y^*B^*)(X,Z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(\tilde{R}(X,Y)Z,N) &= g(R(X,Y)Z,N) - B(Y,Z)g(A_N^*X,N) + B(Y,Z)\tau^*(X)g(N,N) \\ &\quad - B(X,Z)\tau^*(Y)g(N,N) + (D_XB)(Y,Z)g(N,N) - (D_YB)(X,Z)g(N,N) \\ &= g(R(X,Y)Z,N) - B(Y,Z)g(A_N^*X,N) + B(X,Z)g(A_N^*Y,N) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(\tilde{R}^*(X,Y)Z,N) &= g(R^*(X,Y)Z,N) - B^*(Y,Z)g(A_NX,N) + B^*(Y,Z)\tau(X)g(N,N) \\ &\quad - B^*(X,Z)\tau(Y)g(N,N) + (D_X^*B^*)(Y,Z)g(N,N) - (D_Y^*B^*)(X,Z)g(N,N) \\ &= g(R^*(X,Y)Z,N) - B^*(Y,Z)g(A_NX,N) + B^*(X,Z)g(A_NY,N) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(\tilde{R}(X,Y)\xi,N) &= g(R(X,Y)\xi,N) - B(Y,\xi)g(A_N^*X,N) + B(Y,\xi)\tau^*(X)g(N,N) \\ &\quad - B(X,\xi)\tau^*(Y)g(N,N) + (D_XB)(Y,\xi)g(N,N) - (D_YB)(X,\xi)g(n,N) \\ &= g(R(X,Y)\xi,N) - B(Y,\xi)g(A_N^*X,N) + B(X,\xi)g(A_N^*Y,N) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(\tilde{R}^*(X,Y)\xi,N) &= g(R^*(X,Y)\xi,N) - B^*(Y,\xi)g(A_NX,N) + B^*(Y,\xi)\tau(X)g(N,N) \\ &\quad - B^*(X,\xi)\tau(Y)g(N,N) + (D_X^*B^*)(Y,\xi)g(N,N) - (D_Y^*B^*)(X,\xi)g(n,N) \\ &= g(R^*(X,Y)\xi,N) - B^*(Y,\xi)g(A_N,N) + B^*(X,\xi)g(A_NY,N) \end{aligned}$$

3.4 Equations de Gauss-codazzi d'une hypersurface de type lumière d'une variété statistique

Les formules de Gauss et Weingarten sont données par [9] : $\forall X,Y,Z \in \Gamma(TM), N \in \Gamma(trTM)$**. Où** $D_XY,\ D_X^*Y,\ A_NX,\ A_N^*X \in \Gamma(TM)$

$$\tilde{D}_XY = D_XY + h(X,Y) = D_XY + B(X,Y)N \tag{3.6}$$
$$\tilde{D}_XN = -A_N^*X + \tau^*(X)N \tag{3.7}$$
$$\tilde{D}_X^*Y = D_X^*Y + B^*(X,Y)N \tag{3.8}$$
$$\tilde{D}_X^*N = -A_NX + \tau(X)N \tag{3.9}$$

$$B(X,Y) = \tilde{g}(\tilde{D}_XY,\xi) \qquad \tau^* = \tilde{g}(\tilde{D}_XN,\xi) \qquad B^* = \tilde{g}(\tilde{D}_X^*Y,\xi) \qquad \tau = \tilde{g}(\tilde{D}_X^*N,\xi)$$

Où $D, \tilde{D}^*, \tilde{B}, \tilde{B}^*, \tilde{A}_N, \tilde{A}_N^*$ **sont appelés connexions induites sur** M**, les secondes formes fondamentales et les opérateurs formes par rapport à** $\tilde{D}$ **et** $\tilde{D}^*$**, respectivement**

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\tilde{g}(\tilde{D}_X N, \xi) &= \tilde{g}(-A^*_N X + \tau^*(X)N, \xi) \\
&= \tilde{g}(\tau^*(X)N, \xi) \\
&= \tau^*(X) \\
\tilde{g}(\tilde{D}_X Y, \xi) &= \tilde{g}(D_X Y + B(X,Y)N, \xi) \\
&= \tilde{g}(D_X Y, \xi) + \tilde{g}(B(X,Y)N, \xi) \\
&= B(X,Y) \\
\tilde{g}(\tilde{D}^*_X Y, \xi) &= \tilde{g}(D^*_X Y + B^*(X,Y)N, \xi) \\
&= \tilde{g}(B^*(X,Y)N, \xi) \\
&= B^*(X,Y) \\
\tilde{g}(\tilde{D}^*_X N, \xi) &= \tilde{g}(-A_N X + \tau(X)N, \xi) \\
&= \tilde{g}(-A_N X, \xi) + \tilde{g}(\tau(X)N, \xi) \\
&= \tau(X)
\end{aligned}$$

□

Par l'utilisation de (3.6)**, on a :** $\forall X, Y, Z \in \Gamma(TM), U \in \Gamma(TM^{\perp}), pw \in \Gamma(S(TM))$ **et** $\tilde{R}(X,Y)Z = \underbrace{\tilde{D}_X\tilde{D}_Y Z}_{1} - \underbrace{\tilde{D}_Y\tilde{D}_X Z}_{2} - \underbrace{\tilde{D}_{[X,Y]}Z}_{3}$

$$\begin{aligned}
(1) : \tilde{D}_X\tilde{D}_Y Z &= \tilde{D}(D_Y Z + h(Y,Z) \\
&= \tilde{D}D_Y Z + \tilde{D}_X h(Y,Z) \\
&= D_X D_Y Z + h(X, D_Y Z) - A_{h(Y,Z)}X + D^t_X h(Y,Z)
\end{aligned}$$

De facon analogue, on a

(2) :$\tilde{D}_Y\tilde{D}_X Z = D_Y D_X Z + h(Y, D_X Z) - A_{h(X,Z)}X + D^t_Y h(X,Z)$

$$\begin{aligned}
\tilde{D}_{[X,Y]}Z &= D_{[X,Y]}Z + h([X,Y],Z) \\
&= D_{[X,Y]}Z + h(D_X Y - D_Y X, Z) \\
&= D_{[X,Y]}Z + h(D_X Y, Z) - h(D_Y X, Z)
\end{aligned}$$

(1)-(2)-(3) donne $\tilde{R}(X,Y)Z = R(X,Y)Z + A_{h(X,Z)}Y - A_{(Y,Z)} + (D^t_X h)(Y,Z) - (D^t_Y h)(X,Z)$

et les équations de Gauss et Codazzi sont données par :

$$\begin{aligned}
\tilde{g}(\tilde{R}(X,Y)Z, PW) &= \tilde{g}(R(X,Y)Z + A_{h(X,Z)}Y - A_{h(Y,Z)}X + (D^t_X h)(Y,Z) \\
&\quad -(D^t_Y h)(X,Z), PW) \\
&= \tilde{g}(R(X,Y)Z, PW) + \tilde{g}(A_{h(X,Z)}Y, PW)) - \tilde{g}(A_{h(Y,Z)}X, PW) \\
&\quad - \tilde{g}((D^t_X h)(Y,Z), PW) - \tilde{g}((D^t_Y h)(X,Z), PW)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{g}(\tilde{R}(X,Y)Z,U) &= \tilde{g}(R(X,Y)Z + A_{h(X,Z)}Y - A_{h(Y,Z)}X + (D^t_X h)(Y,Z)\\ &\quad -(D^t_Y h)(X,Z),U)\\ &\quad = \tilde{g}(R(X,Y)Z,U) + \tilde{g}(A_{h(X,Z)}Y,U)) - \tilde{g}(A_{h(Y,Z)}X,U)\\ &\quad -\tilde{g}((D^t_X h)(Y,Z),U)\\ &\quad - \tilde{g}((D^t_Y h)(X,Z),U)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{g}(\tilde{R}(X,Y)Z,V) &= \tilde{g}(R(X,Y)Z + A_{h(X,Z)}Y - A_{h(Y,Z)}X + (D^t_X h)(Y,Z)\\ &\quad -(D^t_Y h)(X,Z),V)\\ &\quad = \tilde{g}(R(X,Y)Z,V) + \tilde{g}(A_{h(X,Z)}Y,V)) - \tilde{g}(A_{h(Y,Z)}X,V)\\ &\quad -\tilde{g}((D^t_X h)(Y,Z),V)\\ &\quad - \tilde{g}((D^t_Y h)(X,Z),V)\end{aligned}$$

Théorème 3.1. *Soit (M,g) une hypersurface de type lumière d'une variété statistique $(\tilde{M},\tilde{g},\tilde{D},\tilde{D}^*)$.Alors les connexions $\tilde{D}$ et $\tilde{D}^*$ ne sont pas des connexios duales.*

Démonstration. En utilisant la formule (3.1), on a :

$$\begin{aligned}X.\tilde{g}(Y,Z) &= \tilde{g}(D_X Y + B(X,Y)N,Z) + \tilde{g}(Y,D^*_X Z + B^*(X,Z))\\ &= \tilde{g}(D_X Y,Z) + B(X,Y)\tilde{g}(N,Z) + \tilde{g}(Y,D^*XZ) + B^*(X,Z)\tilde{g}(Y,N)\\ &= \tilde{g}(D_X Y,Z) + B(X,Y)\eta(Z) + \tilde{g}(Y,D^*_X Z) + B^*(X,Z)\eta(Y).\end{aligned} \tag{3.10}$$

Ce qui montre que $\tilde{D}$ et $\tilde{D}^*$ ne sont pas duales pour le cas des hypersurfaces de type lumière. □

Théorème 3.2. *Soit (M,g) une hypersurface de type lumière totalement géodésique d'une variété statistique. Alors les connexions $\tilde{D}$ et $\tilde{D}^*$ sont des connexions duales.*

Démonstration. A partir de (3.10), si l'hypersurface est totalement géodésique, c'est à dire la seconde forme fondamentale est dégénérée, alors, on a :

$$X.\tilde{g}(Y,Z) = \tilde{g}(\tilde{D}_X Y,Z) + \tilde{g}(Y,\tilde{D}^*_X Z) \tag{3.11}$$

□

Soit P un morphisme de projection de $\Gamma(TM)$ sur $\Gamma(S(TM))$. Alors, on a :

$$D_X PY = \nabla_X PY + C(X, PY)\xi \tag{3.12}$$
$$D_X \xi = -\tilde{A}_\xi X + \tilde{\nabla}^t_X \xi = 0$$

$\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ **et** $\xi \in \Gamma(RadTM)$
où $\nabla_X PY$ **et** $\tilde{A}_\xi X \in \Gamma(S(TM))$**,**
∇ **et** $\tilde{\nabla}^t$ **sont des connexions linéaires sur** $\Gamma(S(TM))$ **et** $\Gamma(RadTM)$ **respectivement.**

Avec, C **et** $\tilde{A}$ **sont appelés forme fondamentale de l'écran local et opérateur forme d'écran de** $S(TM)$ **respectivement**

De façon similaire

$$D^*_X PY = \nabla^*_X PY + C^*(X, PY)\xi \tag{3.13}$$

Soit,

$$C(X, PY) = g(\tilde{h}(X, PY), N) \tag{3.14}$$
$$\epsilon(X) = g(\tilde{\nabla}^t_X \xi, N) \tag{3.15}$$

Alors

$$\epsilon(X) = -\tau(X) \tag{3.16}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\nabla_X PY &= \nabla^*_X PY + C(X, Y)\xi \\
\nabla_X \xi &= -A^*_\xi X + \theta(X)\xi \\
\tilde{g}(\nabla_X \xi, N) &= \tilde{g}(-A^*_\xi X, N) + \tilde{g}(\theta(X)\xi, N) \\
\tilde{g}(\nabla_X \xi, N) &= -\tilde{g}(A^*_\xi X, N) + \theta(X)\tilde{g}(\xi, N) \\
\tilde{g}(\nabla_X \xi, N) &= \theta(X)
\end{aligned}$$

$$\tilde{g}(\nabla_X \xi + B(X, \xi)N, N) = \theta(X)$$

or

$$\bar{\nabla}_X \xi = \nabla_X \xi + B(X, \xi)N \tag{3.17}$$

$$\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X\xi, N) = \theta(X) \tag{3.18}$$
$$\tilde{\nabla}_X\tilde{g}(\xi, N) = X\tilde{g}(\xi, N) - \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X\xi, N) - \tilde{g}(\xi, \tilde{\nabla}_X N) \tag{3.19}$$
$$0 = -\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X\xi, N) - \tilde{g}(\xi, \tilde{\nabla}_X N)$$
$$\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X\xi, N) = -\tilde{g}(\xi, \tilde{\nabla}_X N)$$
$$\tilde{\nabla}_X N = -A_N X + \tau(X)$$
$$\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X\xi, N) = \tilde{g}(\xi, A_N X) - \bar{g}(\xi, \tau(X)N)$$
$$= -\tau(X)g(\xi, N)$$
$$\tag{3.20}$$

De (3.19) et (3.20)

$$\theta(X) = -\tau(X)$$
$$\nabla_X\xi = -A^*_\xi X + \theta(X)\xi$$
$$D_X\xi = A^*_\xi X + \epsilon(X)\xi$$
$$\tilde{g}(D_X\xi, N) = -g(A^*_\xi X, N) + g(\epsilon(X)\xi, N)$$
$$\tilde{g}(D_X\xi, N) = 0 + \epsilon(X)g(\xi, N)$$
$$\tilde{g}(D_X\xi, N) = \epsilon(X)$$

$$\tilde{g}(D_X\xi + B(X, \xi)N, N) = \epsilon(X)$$

or on sait d'après les formules de Gauss

$$\tilde{D}_X Y = D_X Y + B(X, Y)N$$
$$\tilde{g}(\tilde{D}_X\xi, N) = \epsilon(X) \tag{3.21}$$

$\tilde{D}$ est une Connexion de Levi-Civita

$$(\tilde{D}_X\tilde{g})(\xi, N) = X\tilde{g}(\xi, N) - \tilde{g}(\tilde{D}_X\xi, N) - \tilde{g}(\xi, \tilde{D}_X N)$$
$$0 = -\tilde{g}(\tilde{D}_X\xi, N) - \tilde{g}(\xi, \tilde{D}_X N)$$
$$\tilde{g}(\tilde{D}_X\xi, N) = -\tilde{g}(\xi, \tilde{D}_X N)$$

or

$$\tilde{D}_X N = -A^*_N X + \tau^*(X)N$$

$$\begin{aligned}
\tilde{g}(\tilde{D}_X\xi, N) &= -\tilde{g}(\xi, -A^*_N X) - \tilde{g}(\xi, \tau^*(X)N) \\
&= \tilde{g}(\xi, A^*_N X) - \tilde{g}(\xi, \tau^*(X)N) \\
D^*_X PY &= \nabla^*_X PY + C^*(X, PY)\xi \\
D^*_X \xi &= -A^*_\xi X + \epsilon(X)\xi \\
\tilde{g}(D^*_X\xi, N) &= \epsilon(X)\tilde{g}(\xi, N) \\
\tilde{g}(D^*_X\xi + B(X,\xi), N) &= \epsilon(X) \\
\tilde{g}(\tilde{D}^*_X\xi, N) &= \epsilon(X)
\end{aligned}$$

$\tilde{D}^*$ est une connexion de Levi-civita.

$$\begin{aligned}
\tilde{D}^*_X\tilde{g}(\xi, N) &= X\tilde{g}(\xi, N) - \tilde{g}(\tilde{D}^*_X\xi, N) - \tilde{g}(\xi, \tilde{D}^*_X N) \\
\tilde{g}(\tilde{D}^*_X\xi, N) &= -\tilde{g}(\xi, \tilde{D}^*_X N) \\
\tilde{g}(\tilde{D}^*_X\xi, N) &= -\tilde{g}(\xi, -A^*_N X) - \tilde{g}(\xi, \tau^*(X)N) \\
\tilde{g}(\tilde{D}^*_X\xi, N) &= -\tilde{g}(\xi, \tau^*(X)N) \\
\tilde{g}(\tilde{D}^*_X\xi, N) &= -\tau^*(X)\tilde{g}(\xi, N) \\
\tilde{g}(\tilde{D}^*_X\xi, N) &= -\tau^*(X) \\
\epsilon(X) &= -\tau^*(X) \\
D^*_X\xi &= -A^*_\xi X - \tau^*(X)\xi
\end{aligned}$$

□

En conséquence , nous avons

$$D_X PY = \nabla_X PY + C(X, PY)\xi, \tag{3.22}$$

$$D_X\xi = -\bar{A}_\xi X - \tau(X)\xi = 0 \ \forall X, Y \in \Gamma(TM). \tag{3.23}$$

Avec ,(C, PY) est appelé la seconde forme fondamentale locale écran de $S(TM)$.

De la même façon, les relations d'objets duaux induits sur $S(TM)$ sont données par

$$D^*_X PY = \nabla^*_X PY + C^*(X, PY)\xi, \tag{3.24}$$

$$D^*_X\xi = -\tilde{A}^*_\xi X - \tau^*(X)\xi = 0 \ \forall X, Y \in \Gamma(TM) \tag{3.25}$$

En utilisant (3.22) **,** (3.24) **et les formules de Gauss-Weingarten les relations entre les objets géométriques induits sont données par**

$$B(X,\xi) + B^*(X,\xi) = 0, \ \ g(A_N X + A^*_N X, N) = 0 \tag{3.26}$$

$$C(X, PY) = g(A_N X, PY), \ \ C^*(X, PY) = g(A^*_N X, PY) \tag{3.27}$$

Proposition 3.1. *Soit $(M, g, S(TM))$ une hypersurface de type lumière d'une variété statistique $(\tilde{M}, \tilde{g}, \tilde{D}, \tilde{D}^*)$. Alors $\tilde{D}$ et $\tilde{D}^*$ sont duaux.*

Démonstration. Soit $X, Y, Z \in S(TM)$ et P le morphisme de projection de TM dans $S(TM)$. Par l'égalité (3.9), on a :

$$X\tilde{g}(Y, Z) = \tilde{g}(D_X Y, Z) + \tilde{g}(Y, D^*_X Z)$$

□

Proposition 3.2. *Soit (M, g) une hypersurface de type lumiére d'une variété statistique $(\tilde{M}, \tilde{g}, \tilde{D}, \tilde{D}^*)$. Les secondes formes fondamentales B et B^* sont non dégénérées.*

Démonstration. Du fait que D et D^* sont duaux, on obtient

$$B(X, Y) = g(\tilde{A}^*_\xi X, Y) + B^*(X, Y) \tag{3.28}$$

$$B^*(X, Y) = g(\bar{A}_\xi X, Y) + B(X, Y) \tag{3.29}$$

En utilisant (3.28) et (3.29), nous obtenons
$\tilde{A}^*_\xi \xi + \tilde{A}_\xi \xi = 0$

$$B(X, Y) = g(\tilde{A}^*_\xi X, Y) + B^*(X, \xi) \tag{3.30}$$

$$B^*(X, Y) = g(\tilde{A}_\xi X, Y) + B(X, \xi) \tag{3.31}$$

(3.30) + (3.31) donne

$$B(X, Y) + B^*(X, Y) = g(\bar{A}^*_\xi X, Y) + B^*(X, \xi) + g(\bar{A}_\xi X, Y) + B(X, \xi)$$
$$B(X, Y) + B^*(X, Y) = g(\bar{A}^*_\xi X, Y) + g(\bar{A}_\xi X, Y) + B^*(X, \xi) + B(X, \xi)$$

or on sait que

$$B(X, \xi) + B^*(X, \xi) = 0$$

Donc on a

$$B(X, Y) + B^*(X, Y) = g(\bar{A}^*_\xi X, Y) + g(\bar{A}_\xi X, Y)$$

En remplacant X par ξ,on a :

$$\begin{aligned} B(\xi, Y) + B^*(\xi, Y) &= g(\bar{A}^*_\xi \xi, Y) + g(\bar{A}_\xi \xi, Y) \\ B(Y, \xi) + B^*(Y, \xi) &= g(\bar{A}^*_\xi \xi + \bar{A}_\xi \xi, Y) \end{aligned}$$

Avec

$$B(Y,\xi)+B^*(Y,\xi)=0$$

on a :

$$g(\tilde{A}^*_\xi\xi+\tilde{A}_\xi\xi,Y)=0$$

Donc

$$\tilde{A}^*_\xi\xi+\tilde{A}_\xi\xi=0$$

□

Proposition 3.3. *Soit (M,g) un hypersurface de type lumière d'une variété statistique $(\tilde{M},\tilde{g},\tilde{D},\tilde{D}^*)$. Alors la distribution écran $(S(TM),g,\nabla,\nabla^*)$ a une structure statistique.*

Démonstration.

$$X.g(X,Y)=g(\tilde{D}_XY,Z)+g(Y,\tilde{D}^*_XZ)$$

En utilisant (3.10)

$$X.g(Y,Z)=g(D_XY,Z)+g(Y,D^*_XZ)+B(X,Y)\eta(Z)+B^*(X,Z)\eta(Y)$$

En utilisant aussi

$$D^*_XPY=\nabla^*_XPY+C^*(X,PY)\xi$$

Ona :

$$\begin{aligned}X.g(Y,Z)&=g(\nabla_XY+C(X,Y)\xi,Z)+g(Y,\nabla^*_XY+C^*(X,Y)\xi)\\&=g(\nabla_XY,Z)+C(X,Y)g(\xi,Z)+g(Y,\nabla^*_XY)+C^*(X,Y)g(Y,\xi)\\&\qquad g(\xi,Z)=0\qquad g(Y,\xi)=0\\X.g(Y,Z)&=g(\nabla_XY,Z)+g(Y,\nabla^*_XY)\end{aligned}\tag{3.32}$$

Donc ∇ et ∇^* sont duales

$$T^\nabla(X,Y)=\nabla_XY-\nabla_YX-[X,Y]$$

En utilisant

$$\begin{aligned}D_XY&=\nabla_XY+C(X,Y)\xi\\\nabla_XY&=D_XY-C(X,Y)\xi\end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned} T^{\nabla}(X,Y) &= D_XY - C(X,Y)\xi - D_YX + C(X,Y)\xi - [X,Y] \\ &= D_XY - D_YX - [X,Y] + C(X,Y)\xi - C(X,Y)\xi \\ &= D_XY - D_YX - [X,Y] \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} T^{\nabla}(X,Y) &= 0 \\ T^{\nabla^*}(X,Y) &= \nabla^*_XY - \nabla^*_YX - [X,Y] \end{aligned}$$

En utilisant

$$\begin{aligned} D^*_XY &= \nabla^*_XY + C^*(X,Y)\xi \\ \nabla^*_XY &= D^*_XY - C^*(X,Y)\xi \\ \nabla^*_YX &= D^*_YX - C^*(Y,X)\xi \\ &= D^*_YX - C^*(X,Y)\xi \\ T^{\nabla^*}(X,Y) &= D^*_XY - C^*(X,Y)\xi - D^*_YX + C^*(X,Y)\xi - [X,Y] \\ &= D^*_XY - D^*_YX - [X,Y] + C^*(X,Y)\xi - C^*(X,Y)\xi \\ &= D^*_XY - D^*_YX - [X,Y] \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc

$$T^{\nabla^*}(X,Y) = 0$$

D'où $(S(TM), g, \nabla, \nabla^*)$ a une structure statistique

□

Proposition 3.4. *Soit (M,g) une hypersurface de type lumière d'une variété statistique $(\tilde{M}, \tilde{g}, \tilde{D}, \tilde{D}^*)$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes*

1. *La distribution écran $S(TM)$ est intégrable*
2. *$C(X,Y) = C(Y,X) \forall X, Y \in \Gamma(S(TM))$.*
3. *$C^*(X,Y) = C^*(Y,X) \forall X, Y \in \Gamma(S(TM))$.*

Démonstration. $\forall X, Y \in \Gamma(S(TM))$, en utilisant les formules de Gauss-Weingarten et la relation, nous obtenons

$$g([X,Y],N) = C(X,Y) - C(Y,X) \tag{3.33}$$
$$g([X,Y],N) = C^*(X,Y) - C^*(Y,X) \tag{3.34}$$

□

Notion de totalement géodesique sur l'hypersurface de type lumière d'une variété statistique

([8],[16]) Soit (M, g) **une hypersurface de type lumière d'une variété statistique**
$(\tilde{M}, \tilde{g}, \tilde{D}, \tilde{D}^*)$

1. M **est appelé totalement géodésique respectivement à** $\tilde{D}$ **si** $B = 0$**.**
2. M **est appelé totalement géodésique respectivement à** $\tilde{D}^*$ **si** $B^* = 0$**.**
3. M **est appelé totalement tangentielle ombilique respectivement à** $\tilde{D}$ **si** $B(X, Y) = kg(X, Y)\forall X, Y \in \Gamma(TM)$**, où** k **est une fonction différentiable.**
4. M **est appelé totalement tangentielle ombilique respectivement à** $\tilde{D}^*$ **si** $B^*(X, Y) = k^*g(X, Y)\forall X, Y \in \Gamma(TM)$**, où** k^* **est une fonction différentiable.**
5. M **est appelé totalement tangentiel normal ombilique respectivement à** $\tilde{D}$ **si** $A^*_N X = kX, \forall X, Y \in \Gamma(TM)$**, où** k **est une fonction différentiable.**
6. M **est appelé totalement tangentielle ombilique respectivement à** $\tilde{D}^*$ **si** $B^*(X, Y) = k^*g(X, Y)\forall X, Y \in \Gamma(TM)$**, où** k^* **est une fonction différentiable.**
7. M **est appelé totalement tangentiel normal ombilique respectivement à** $\tilde{D}^*$ **si** $A_N X = k^*X, \forall X, Y \in \Gamma(TM)$**, où** k^* **est une fonction différentiable.**
8. **Une hypersurface de type lumière d'une variété statistique est à ecran localement conforme si** $A_N = \Phi\bar{A}^*_\xi, A^*_N = \Phi^*\bar{A}^*_\xi$**. Où** Φ **et** Φ^* **sont des fonctions non nulles sur** M**. Avec** Φ **coefficient de cormalité.**

Théorème 3.3. *Soit* (M, g) *une hypersurface de type lumière d'une variété statistique* $(\tilde{M}, \tilde{g}, \tilde{D}, \tilde{D}^*)$*. Alors* M *est totalement tangentielle ombilique si et seulement si* $\tilde{A}^*_\xi X + \bar{A}_\xi X = \rho X \ , \forall X \in \Gamma(TM)$*, avec* ρ *une fonction différentielle.*

Démonstration. En utilisant (3.30) et (3.31), on a :

$$kg(X, Y) = g(\bar{A}^*_\xi X, Y) + B^*(X, \xi) \tag{3.35}$$

$$k^*g(X, Y) = g(\bar{A}_\xi X, Y) + B(X, \xi) \tag{3.36}$$

En additionnant (3.35) et (3.36) membre à membre on a :

$$(k+k^*)g(X,Y) = g(\tilde{A}^*_\xi X, Y) + g(\tilde{A}_\xi X, Y) + B^*(X,\xi) + B(X,\xi)$$
$$(k+k^*)g(X,Y) = g(\tilde{A}^*_\xi X, Y) + g(\tilde{A}_\xi X, Y)$$
$$(k+k^*)g(X,Y) = g(\tilde{A}^*_\xi X + \tilde{A}_\xi X, Y)$$

□

Proposition 3.5. *Soit (M,g) une hypersurface de type lumière d'une variété statistique $(\tilde{M},\tilde{g},\tilde{D},\tilde{D}^*)$. Si M est totalement normalement ombilique avec respectivement $\tilde{D},\tilde{D}^*$. Alors*
$C(X,PY) + C^*(X,PY) = 0, \forall X \in \Gamma(TM)$

Démonstration. $C(X,PY) = g(A_N X, PY)$
$C^*(X,PY) = g(A^*_N X, PY)$
$C(X,PY) + C^*(X,PY) = g(A_N X, PY) + g(A^*_N X, PY)$
Par définition,$A_N X = kX$(cas totalement normal ombilique)
$C(X,PY) + C^*(X,PY) = kg(X,PY) + k^* g(X,PY)$
$C(X,PY) + C^*(X,PY) = (k+k^*)g(X,PY)$
$k + k^* = 0$
$C(X,PY) + C^*(X,PY) = 0$ □

Proposition 3.6. *Soit (M,g) une hypersurface de type lumière d'une variété statistique $(\tilde{M},\tilde{g},\tilde{D},\tilde{D}^*)$. Alors,*
M est a écran localement conforme si et seulement si
$C(X,PY) + C^*(X,PY) = \Phi(B(x,y) + B^*(X,Y)), \forall X,Y \in \Gamma(S(TM))$, où Phi fonction lisse non nulle sur M

$$\begin{aligned} C(X,PY) + C^*(X,PY) &= g(A_N X, PY) + g(A^*_N X, PY) \\ &= \Phi g(\bar{A}^*_\xi, PY) + \Phi^* g(\bar{A}_\xi X, PY) \\ &= \Phi k g(X,Y) + \Phi^* k^* g(X,Y) \\ &= \Phi k B(X,Y) + \Phi^* k^* B(X,Y) \\ &= \Phi(B(X,Y) + B^*(X,Y)) \end{aligned}$$

Exemple 3.1. *([6]) Soit $(\mathbb{R}^4_2,\tilde{g})$ une espace semi-euclidien a 4-dimensions avec signature $(-,-,+,+)$ de base canonique $(\partial_0,\partial_1,\partial_2,\partial_3)$. Considérons un hypersurface M de $\mathbb{R}^4_2$ donné par*

$$x_0 = x_1 + \sqrt{2}\sqrt{x_2^2 + x_3^2}$$

Pour simplifier, on pose $f = \sqrt{x_2^2 + x_3^2}$

M *est une hypersurface de type lumière dont la distribution radicale* $RadTM$ *est engendré par*

$$\xi = f(\partial_0 - \partial_1) + \sqrt{2}\sqrt{(x_2\partial_2 + x_3\partial_3)}$$

Alors le fibré vectoriel transversal est donné par :

$$ltr(TM) = Span\left\{N = \frac{1}{4f^2}f(-\partial_0 + \partial_1) + \sqrt{2}(x_2\partial_2 + x_3\partial_3)\right\}$$

Il s'ensuit que la distribution écran correspondante est engendrée par

$$\{W_1 = \partial_0\partial_1, W_2 = -x_3\partial_2 + x_2\partial_3\}$$

Alors, nous obtenons

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_X^{W_1} &= \tilde{\nabla}_{W_1}^X = 0 \\ \tilde{\nabla}_{W_2}^{W_2} &= -x_2\partial_2 - x_3\partial_3 \\ \tilde{\nabla}_\xi^\xi &= \sqrt{2}\xi \\ \tilde{\nabla}_{W_2}^\xi &= \tilde{\nabla}_\xi^{W_2} = \sqrt{2}W_2 \\ \forall X \in \Gamma(TM) & \end{aligned}$$

Nous définissons une connexion affine comme suis [7]

$$\begin{aligned} \tilde{D}_X^{W_1} &= \tilde{D}_{W_1}^X = 0 \\ \tilde{D}_{W_2}^{W_2} &= -2x_2\partial_2 \\ \tilde{D}_\xi^\xi &= \sqrt{2}\xi - \sqrt{2}N \\ \tilde{D}_{W_2}^\xi &= \tilde{D}_\xi^{W_2} = \sqrt{2}W_2 - \sqrt{2}W_1 \end{aligned} \tag{3.37}$$

Alors

$$\begin{aligned} \tilde{D^*}_X^{W_1} &= \tilde{D^*}_{W_1}^X = 0 \\ \tilde{D^*}_{W_2}^{W_2} &= -2x_3\partial_3 \\ \tilde{D^*}_\xi^\xi &= \sqrt{2}\xi + \sqrt{2}N \end{aligned}$$

$$\tilde{D^*}^{\xi}_{W_2} = \tilde{D^*}^{W_2}_{\xi} = \sqrt{2}W_2 + \sqrt{2}W_1 \tag{3.38}$$

Alors $(\mathbb{R}^4_2, \tilde{g}, \tilde{D}, \tilde{D^*})$ est une variété statistique. Ainsi, en utilisant les formules de Gauss, on obtient

$$\begin{aligned} B(X, W_1) &= B(W_1, X) = 0 \\ B(W_2, W_2) &= -2\sqrt{2}x_2^2 \\ B(\xi, \xi) &= -\sqrt{2} \\ B(X, W_2) &= B(W_2, X) = 0 \end{aligned} \tag{3.39}$$

et

$$\begin{aligned} B^*(X, W_1) &= B^*(W_1, X) = 0 \\ B^*(W_2, W_2) &= -2\sqrt{2}x_3^2 \\ B^*(\xi, \xi) &= \sqrt{2} \\ B^*(X, W_2) &= B^*(W_2, X) = 0 \end{aligned} \tag{3.40}$$

Les équations (3.37)**,**(3.38)**,**(3.39) **et** (3.40) **impliquent que les connexions induites D et D^* sont des connexions symétriques et les deuxiemes formes fondamentales B et B^* sont symétriques. De plus,les équations $B(\xi, \xi) = -\sqrt{2}$ et $B^*(\xi, \xi) = \sqrt{2}$.**

En utilisant (3.37)**,**(3.38)**,**(3.39) **et** (3.40)**, nous obtenons**

$$\begin{aligned} D_X^{W_1} &= D_{W_1}^X = 0 \\ D_\xi^\xi &= \sqrt{2}\xi \\ D_{W_2}^{W_2} &= \frac{\sqrt{2}x_2^2}{2f}(-\partial_0 + \partial_1) + \frac{1}{4f^2}\left\{(4x_2^3 - 2x_2)\partial_2 + 4x_3x_2^2\partial_3)\right\} \\ D_{W_2}^{\xi} &= D_\xi^2 = \sqrt{2}W_2 - \sqrt{2}W_1 \end{aligned} \tag{3.41}$$

et

$$\begin{aligned} {D^*}_X^{W_1} &= D^*X_{W_1} = 0 \\ {D^*}_\xi^\xi &= \sqrt{2}\xi \\ {D^*}_{W_2}^{W_2} &= \frac{\sqrt{2}x_2^2}{2f}(-\partial_0 + \partial_1) + \frac{1}{4f^2}\left\{4x_3^2x_2\partial_2 + (4x_3^3 - 2x_3)\partial_3\right\} \end{aligned}$$

$$D^{*\xi}_{W_2} = D^2_\xi = \sqrt{2}W_2 + \sqrt{2}W_1 \tag{3.42}$$

Dans l'équation (3.6) **si l'on choisit** $X = W_2$,$Y = W_2$ **et** $Z = \xi$,(3.41) **et** (3.42) **indiquent que les connexions induites** D **et** D^* **ne sont des des connexions duales.**

D'après (3.12) **et** (3.13)**, on a :**

$$\begin{aligned} C(X, W_1) &= C(W_1, X) = 0 \\ C(W_2, W_2) &= -\frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{x_2}{f})^2 \\ C(\xi, W_2) &= 0 \end{aligned} \tag{3.43}$$

et

$$\begin{aligned} C^*(X, W_1) &= C^*(W_1, X) = 0 \\ C^*(W_2, W_2) &= -\frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{x_3}{f})^2 \\ C^*(\xi, W_2) &= 0 \end{aligned} \tag{3.44}$$

De (3.43) **et** (3.44) **,on dit que C et** C^* **sont symétriques. Ainsi, on a proposition** (3.4) **En utilisant** (3.41) **et** (3.42) **dans** (3.12) **et** (3.13) **on a :**

$$\begin{aligned} \nabla_X W_1 &= \nabla_{W_1} X = 0 \\ \nabla_{W_2} W_2 &= \frac{1}{f^2}\left\{(2x_2^3 - \frac{x^2}{2})\partial_2 + 2x_3x_2^2\partial_3\right\} \\ \nabla_\xi W_2 &= \sqrt{2}W_2 - \sqrt{2}W_1 \end{aligned} \tag{3.45}$$

$$\begin{aligned} \nabla^*_X W_1 &= \nabla^*_{W_1} X = 0 \\ \nabla^*_{W_2} W_2 &= \frac{1}{f^2}\left\{2x_3^2x_2\partial_2 + (2x_3^3 - \frac{x^3}{2})\partial_2\right\} \\ \nabla^*_\xi W_2 &= \sqrt{2}W_2 + \sqrt{2}W_1 \end{aligned} \tag{3.46}$$

D'après (3.45) **et** (3.46)**, les tenseurs de torsions s'annulent par rapport à** ∇ **et** ∇^***. De plus cette équation fournit** (3.6)**. Ainsi,**∇ **et**

∇^* sont des connexions duales, Cette situation vérifie la proposition (3.3)

$$\begin{aligned} B(X,W_1) &= \tilde{g}(\tilde{D}_X W_1, \xi) \\ &= \tilde{g}(0,\xi) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B(W_1,X) &= \tilde{g}(\tilde{D}^X_{W_1}, \xi) \\ &= \tilde{g}(0,\xi) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B(W_2,W_2) &= \tilde{g}(\tilde{D}^{W_2}_{W_2}, \xi) \\ &= \tilde{g}(-2x_2\partial_2, f(\partial_0-\partial_1)+\sqrt{2}(x_2\partial_2+x_3\partial_3) \\ &= -2x_2 f\tilde{g}(\partial_2,\partial_0)+2x_2 f\tilde{g}(\partial_2,\partial_1)-2\sqrt{2}x_2^2\tilde{g}(\partial_2,\partial_2)-2\sqrt{2}x_2x_3\tilde{g}(\partial_2,\partial_3) \\ &= -2\sqrt{2}x_2^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B(\xi,\xi) &= \tilde{g}(\tilde{D}^{\xi}_{\xi}, \xi) \\ &= \tilde{g}(\sqrt{2}\xi-\sqrt{2}N, \xi) \\ &= \sqrt{2}\tilde{g}(\xi,\xi)-\sqrt{2}\tilde{g}(N,\xi) \\ &= -\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B(X,W_2) &= \tilde{g}(A_\xi X, W_2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
B^*(X,W_1) &= \tilde{g}(\tilde{D^*}_X^{W_1},\xi)\\
&= \tilde{g}(0,\xi)\\
&= 0\\
B^*(W_1,X) &= \tilde{g}(\tilde{D^*}_{W_1}^{X},\xi)\\
&= \tilde{g}(0,\xi)\\
&= 0\\
B^*(W_2,W_2) &= \tilde{g}(\tilde{D^*}_{W_2}^{W_2},\xi)\\
&= \tilde{g}(-2x_3\partial_3, f(\partial_0-\partial_1)+\sqrt{2}(x_2\partial_2+x_3\partial_3)\\
&= -2x_3f\tilde{g}(\partial_3,\partial_0)+2x_3f\tilde{g}(\partial_3,\partial_1)-2\sqrt{2}x_3x_2\tilde{g}(\partial_3,\partial_2)-2\sqrt{2}x_3^2\tilde{g}(\partial_3,\partial_3)\\
&= -2\sqrt{2}x_3^2\\
B^*(\xi,\xi) &= \tilde{g}(\tilde{D^*}_{\xi}^{\xi},\xi)\\
&= \tilde{g}(\sqrt{2}\xi+\sqrt{2}N,\xi)\\
&= \sqrt{2}\tilde{g}(\xi,\xi)+\sqrt{2}\tilde{g}(N,\xi)\\
&= \sqrt{2}\\
B^*(X,W_2) &= \tilde{g}(A^*_{\xi}X,W_2)\\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_X^{W_1} &= \tilde{D}_X^{W_1}-B(X,W_1)N=0\\
D_{\xi}^{\xi} &= \tilde{D}_{\xi}^{\xi}-B(\xi,\xi)N\\
&= \sqrt{2}\xi-\sqrt{2}N+\sqrt{2}N\\
&= \sqrt{2}\xi\\
D_{W_2}^{W_2} &= \tilde{D}_{W_2}^{W_2}-B(W_2,W_2)N\\
&= -2x_2\partial_2+2\sqrt{2}x_2^2\frac{1}{4f^2}\left\{f(-\partial_0+\partial_1)+\sqrt{2}(x_2\partial_2+x_3\partial_3)\right\}\\
&= \frac{\sqrt{2}x_2^2}{2f}(-\partial_0+\partial_1)+\frac{1}{4f^2}\left\{4x_2^2x_3\partial_3+(4x_2^3-2x_24f^2)\partial_2\right\}\\
&= \frac{\sqrt{2}x_2^2}{2f}(-\partial_0+\partial 1)+\frac{1}{4f^2}\left\{(4x_2^3-8x_2f^2)\partial_2+4x_3x_2^2\partial_3\right\}\\
D_{W_2}^{\xi} &= \tilde{D}_{W_2}^{\xi}-B(W_2,\xi)N\\
\tilde{D}_{W_2}^{\xi} &= \sqrt{2}W_2-\sqrt{2}W_1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D^{*W_1}_{X} &= \tilde{D}^{*W_1}_{X} - B^*(X, W_1)N = 0 \\
D^{*\xi}_{\xi} &= \tilde{D}^{*\xi}_{\xi} - B^*(\xi, \xi)N \\
&= \sqrt{2}\xi - \sqrt{2}N + \sqrt{2}N \\
&= \sqrt{2}\xi \\
D^{*W_2}_{W_2} &= \tilde{D}^{*W_2}_{W_2} - B^*(W_2, W_2)N \\
&= -2x_3\partial_3 + 2\sqrt{2}x_3^2\frac{1}{4f^2}\left\{f(-\partial_0 + \partial_1) + \sqrt{2}(x_2\partial_2 + x_3\partial_3)\right\} \\
&= \frac{\sqrt{2}x_3^2}{2f}(-\partial_0 + \partial_1) + \frac{1}{4f^2}\left\{4x_3^2x_3\partial_3 + (4x_2^3 - 2x_2 4f^2)\partial_2\right\} \\
&= \frac{\sqrt{2}x_3^2}{2f}(-\partial_0 + \partial_1) + \frac{1}{4f^2}\left\{4x_3^3x_2\partial_2 + (4x_3^3 - 2x_3)\partial_3\right\} \\
D^{*\xi}_{W_2} &= \tilde{D}^{*\xi}_{W_2} - B^*(W_2, \xi)N \\
\tilde{D}^{*\xi}_{W_2} &= \sqrt{2}W_2 + \sqrt{2}W_1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C(X,W_1) &= g(D_X^{W_1},N)\ car\ C(x,Y)=g(D_Y^X,N)\\
&= g(0,N)\\
&= 0\\
C(W_2,W_2) &= g(D_{W_2}^{W_2},N)\\
&= g(\sqrt{2}\frac{x_2^2}{2f}(-\partial_0+\partial_1+\frac{1}{4f^2}\left\{(4x_2^3-2x_2)\partial_2+4x_3x_2^2\partial_3)\right\},\frac{1}{4f^2}f(-\partial_0+\partial_1)+\\
&\sqrt{2}(x_2\partial_2+x_3\partial_3))\\
&= g(-\frac{\sqrt{2}}{2f}x_2^2\partial_0+\frac{\sqrt{2}}{2f}x_2^2\partial_1+\frac{1}{4f^2}(4x_2^3-2x_2)\partial_2+\frac{1}{4f^2}4x_3x_2^2,-\frac{\partial_0}{4f}+\frac{\partial_1}{4f}+\\
&\frac{\sqrt{2}x_2\partial_2}{4f^2}+\frac{\sqrt{2}}{4f^2}x_3\partial_3)\\
&= \frac{\sqrt{2}}{8f^2}x_2^2+\frac{\sqrt{2}}{8f^2}x_2^2+\frac{4\sqrt{2}x_2^4-2\sqrt{2}x_2^2}{16f^2}+\frac{4\sqrt{2}x_3^2x_2^2}{16f^2} =\\
&= g(\sqrt{2}W_2-\sqrt{2}W_1,N)\\
&= g(\sqrt{2}(-x_3\partial_2+x_2\partial_3)-\sqrt{2}(\partial_0+\partial_1),\frac{1}{4f^2}\left\{f(-\partial_0+\partial_1)+\sqrt{2}(x_2\partial_2+x_3\partial_3)\right\})\\
&= g(-\sqrt{2}x_3\partial_2+\sqrt{2}x_2\partial_3-\sqrt{2}\partial_0-\sqrt{2}\partial_1,\frac{1}{4f^2}\left\{-f\partial_0+f\partial_1+\sqrt{2}x_2\partial_2+\sqrt{2}x_3\partial_3\right\})\\
&= \frac{1}{4f^2}-\sqrt{2}\sqrt{2}x_3x_2g(\partial_2,\partial_2)+\frac{1}{4f^2}\sqrt{2}\sqrt{2}x_3x_2g(\partial_3,\partial_3)\\
&+\frac{1}{4f^2}\sqrt{2}g(\partial_0,\partial_0)-\frac{1}{4f^2}\sqrt{2}g(\partial_1,\partial_1)\\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C^*(X,W_1) &= g(D^{*W_1}_X, N) carC(x,Y) = g(D^X_Y, N)\\
&= g(0,N)\\
&= 0\\
C^*(W_2,W_2) &= g(D^{*W_2}_{W_2}, N)\\
&= g(\sqrt{2}\frac{x_3^2}{2f}(-\partial_0+\partial_1) + \frac{1}{4f^2}\left\{4x_3^2x_2\partial_2 + (4x_3^3-2x_3)\partial_3)\right\}, \frac{1}{4f^2}(-\partial_0+\partial_1)\\
&\quad + \sqrt{2}(x_2\partial_2 + x_3\partial_3))\\
&= g(-\frac{\sqrt{2}}{2f}x_3^2\partial_0 + \frac{\sqrt{2}}{2f}x_3^2\partial_1 + \frac{1}{4f^2}(4x_3^2\partial_2 + \frac{1}{4f^2}4x_3^3\partial 3 - \frac{2}{4f^2}x_3\partial_3, -\frac{\partial_0}{4f} + \frac{\partial_1}{4f}\\
&\quad + \frac{\sqrt{2}x_2\partial_2}{4f^2} + \frac{\sqrt{2}}{4f^2}x_3\partial_3)\\
&= \frac{\sqrt{2}}{8f^2}x_3^2 + \frac{\sqrt{2}}{8f^2}x_3^2 + \frac{4\sqrt{2}x_3^3x_2 - 2\sqrt{2}x_2^2x_3}{16f^2} + \frac{4\sqrt{2}x_3^2x_2^2}{16f^2}\\
&= \frac{\sqrt{2}x_3^2}{4f^2} + \frac{\sqrt{2}x_3^3x_2}{4f^4} - \frac{\sqrt{2}x_2^2x_3}{8f^2} + \frac{\sqrt{2}x_3^2x_2^2}{4f^4}\\
C^*(\xi,W_2) &= g(D^{*W_2}_{\xi}, N)\\
&= g(\sqrt{2}W_2 + \sqrt{2}W_1, N)\\
&= g(\sqrt{2}(-x_3\partial_2 + x_2\partial_3) + \sqrt{2}(\partial_0+\partial_1), \frac{1}{4f^2}\left\{f(-\partial_0+\partial_1) + \sqrt{2}(x_2\partial_2 + x_3\partial_3)\right\})\\
&= g(-\sqrt{2}x_3\partial_2 + \sqrt{2}x_2\partial_3 + \sqrt{2}\partial_0 + \sqrt{2}\partial_1, \frac{1}{4f^2}\left\{-f\partial_0 + f\partial_1 + \sqrt{2}x_2\partial_2 + \sqrt{2}x_3\partial_3\right\})\\
&= -\sqrt{2}x_3\sqrt{2}x_2 + \sqrt{2}x_2\sqrt{2}x_3 - \sqrt{2}f + \sqrt{2}f\\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_X^{W_1} &= \nabla_X^{W_1} + C(X, W_1)\xi \\
\nabla_X^{W_1} &= D_X^{W_1} - C(X, W_1)\xi \\
&= 0 \\
D_{W_1}^{X} &= \nabla_{W_1}^{X} + C(W_1, X)\xi \\
\nabla_{W_1}^{X} &= D_{W_1}^{X} - C(W_1, X)\xi \\
&= 0 \\
D_{W_2}^{W_2} &= \nabla_{W_2}^{W_2} + C(W_2, W_2)\xi \\
\nabla_{W_2}^{W_2} &= D_{W_2}^{W_2} - C(W_2, W_2)\xi \\
&= \frac{\sqrt{2}x_2^2}{2f}(-\partial_0 + \partial_1) + \frac{1}{4f^2}\left\{(4x_2^3 - 2x_2)\partial_2 + 4X_3x_2^2\partial_3\right\} \\
&\quad + \frac{\sqrt{2}x_2^2}{2f^2}\left\{f(\partial_0 - \partial_1) + \sqrt{2}(x_2\partial_2 + x_3\partial_3)\right\} \\
&= -\frac{\sqrt{2}x_2^2}{2f}(\partial_0 - \partial_1) + \frac{\sqrt{2}x_2^2}{2f}(\partial_0 - \partial_1) + \frac{1}{4f^2}\left\{(4x_2^3 - 2x_2)\partial_2 + 4x_3x_2^2\partial_3\right\} \\
&\quad + \frac{\sqrt{2}x_2^2}{2f^2}\sqrt{2}(x_2\partial_2 + x_3\partial_3) \\
&= \frac{1}{f^2}\left\{(2x_2^3 - \frac{x_2}{2})\partial_2 + 2x_3x_2^2\partial_3\right\} \\
D_{\xi}^{W_2} &= \nabla_{\xi}^{W_2} + C(\xi, W_2)\xi \\
\nabla_{\xi}^{W_2} &= D_{\xi}^{W_2} - C(\xi, W_2)\xi \\
&= \sqrt{2}W_2 - \sqrt{2}W_1 - 0\xi \\
&= \sqrt{2}W_2 - \sqrt{2}W_1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D^{*W_1}_X &= \nabla^{*W_1}_X + C^*(X, W_1)\xi \\
\nabla^{*W_1}_X &= D^{*W_1}_X - C^*(X, W_1)\xi \\
&= 0 - 0 \\
&= 0 \\
D^{*X}_{W_1} &= \nabla^{*X}_{W_1} + C^*(X, W_1)\xi \\
\nabla^{*X}_{W_1} &= D^{*X}_{W_1} - C^*(X, W_1)\xi \\
&= 0 - 0 \\
&= 0 \\
D^{*W_2}_{W_2} &= \nabla^{*W_2}_{W_2} + C^*(W_2, W_2)\xi \\
\nabla^{*W_2}_{W_2} &= D^{*W_2}_{W_2} - C^*(W_2, W_2)\xi \\
&= \frac{\sqrt{2}x_3^2}{2f}(-\partial_0 + \partial_1) + \frac{1}{4f^2}\left\{4x_3^2x_2\partial_2 + (4x_3^3 - 2x_3)\partial_3)\right\} \\
&+\frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{x_3}{f})^2(f(\partial_0 - \partial_1) \\
&\quad + \sqrt{2}(x_2\partial_2 + x_3\partial_3)) \\
&= -\frac{\sqrt{2}}{2f}x_3^2(\partial_0 - \partial_1) \\
&+\frac{\sqrt{2}}{2f}x_3^2(\partial_0 - \partial_1) + \frac{x_3^2}{f^2}(x_2\partial_2 + x_3\partial_3) \\
&+\frac{1}{4f^2}\left\{4x_3^2x_2\partial_2 + (4x_3^3 - 2x_3)\partial_3\right\} \\
&= \frac{1}{f^2}\left\{2x_3^2x_2\partial_2 + (2x_3^3 - \frac{x_3}{2})\partial_3\right\} \\
D^{*W_2}_{\xi} &= \nabla^{*W_2}_{\xi} + C^*(\xi, W_2)\xi \\
\nabla^{*W_2}_{\xi} &= D^{*W_2}_{\xi} - C^*(\xi, W_2)\xi \\
&= \sqrt{2}W_2 + \sqrt{2}W_1 - 0\xi \\
&= \sqrt{2}W_2 + \sqrt{2}W_1
\end{aligned}
$$

3.5 Les tenseurs de Ricci d'une hypersurface de type lumière d'une variété statistique

[12] En géometrie différentielle, le tenseur de Ricci est un tenseur qui mesure la Courbure d'une variété Riemannienne. Il est obtenu en contractant deux indices du tenseur de Riemann.

Définition 3.3. *La courbure de Ricci d'une variété semi-riemannienne* (M, g)*, de dimension* n *est un tenseur de type* $(0, 2)$ *défini par :*

$$\begin{aligned} Ric(X, Y) &= trace(Z \mapsto R(Z, X)Y) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i g(R(e_i, X)Y, e_i) \end{aligned} \tag{3.47}$$

pour tout $X, Y \in \Gamma(TM)$*, où* $\{e_i\}$ *est une base orthonormee sur* M $(\epsilon_i = g(e_i, e_i))$ *.*

Propriété 3.1. *La courbure de Ricci est symétrique*

Démonstration.

$$\begin{aligned} Ric(X, Y) &= \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i g(R(e_i, X)Y, e_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i g(R(Y, e_i)e_i, X) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i g(R(e_i, Y)X, e_i) \\ &= Ric(Y, X). \end{aligned}$$

□

Définition 3.4. *Le tenseur de Ricci d'une variété semi-Riemannienne* (M, g)*, de dimension* n *, est un tenseur de type* $(1, 1)$ *sur* M*, défini par :*

$$Ric(X) = \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i R(X, e_i)e_i, \forall X \in \Gamma(TM). \tag{3.48}$$

Remarque 3.1. *Pour tout* $X, Y \in \Gamma(TM)$*, on a* $Ric(X, Y) = g(Ric(X), Y)$*.*

Définition 3.5. *On appelle scalaire d'une variété semi-Riemannienne (M, g), de dimension n, la fonction S défini sur M par :*

$$S = traceRic = \sum_{i,j=1}^{m} \epsilon_i \epsilon_j g(R(e_i, e_j)e_j, e_i). \tag{3.49}$$

Corollaire 3.1. *Soit (M, g) une variété semi-riemannienne, de dimension n, de courbure constante k, alors*

1. *Ric(X)= (n-1)kX,*
2. *Ric(X,Y)=(n-1)kg(X,Y)*
3. *S= n(n-1)k*

Définition 3.6. *Soit M une hypersurface de type lumière d'une variété statistique $\tilde{M}$ de dimension $n+2$. Pour une base othonormale $\{E_1, ..., E_n\}$ de $\Gamma(S(TM))$, le tenseur de Ricci est défini par :*

$$\tilde{R}_{ic}(X, Y) = \sum_{j=1}^{n} \tilde{R}(e_j, X, Y, e_j), \forall X, Y \in T_p\tilde{M} \tag{3.50}$$

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{ic}(X, X) &= \sum_{j=1}^{n} \tilde{R}(e_j, X, X, e_j) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \tilde{R}((e_j, X)X, e_j) \end{aligned} \tag{3.51}$$

$$
\begin{aligned}
g(R(X,E_i)Y,E_i) &= g(\tilde{R}(X,E_i)Y,E_i)+B(E_i,Y)C^*(X,E_i)-B(X,Y)C^*(E_i,E_i)\\
\sum_i^m g(R(X,E_i)Y,E_i) &= \sum_i^m g(\tilde{R}(X,E_i)Y,E_i)+\sum_i^m B(E_i,Y)C^*(X,E_i)\\
&\quad -\sum_i^m B(X,Y)C^*(E_i,E_i)\\
\sum_i^m g(R(X,E_i)Y,E_i)+\tilde{g}(R(X,\xi)Y,N) &= \sum_i^m g(\tilde{R}(X,E_i)Y,E_i)\\
&\quad +\sum_i^m B(E_i,Y)C^*(X,E_i)\\
&\quad -\sum_i^m B(X,Y)C^*(E_i,E_i)+\tilde{g}(R(X,\xi)Y,N)\\
Ric(X,Y) &= \tilde{Ric}(X,Y)+\sum_i^m B(E_i,Y)C^*(X,E_i)-\sum_i^m B(X,Y)C^*(E_i,E_i)\\
&\quad +\tilde{g}(R(X,\xi)Y,N)\\
\sum_i^m C^*(E_i,E_i) &= \sum_i^m g(A_N^*E_i,E_i)=trA_N^*\\
\sum_i^m B(E_i,Y) &= \sum_i^m g(\bar{A}_\xi^*Y,E_i)\\
\sum_i^m C^*(X,E_i) &= \sum_i^m g(A_N^*X,E_i)
\end{aligned}
\tag{3.52}
$$

Pour une base orthonormée (e_i) **avec**

$$A_N^*e_i=\mu_1e_1+...+\mu_ne_n$$

et

$$A_Ne_i=\lambda e_1+...+\lambda_ne_n$$

On a

$$\sum_i^m g(A_N^*e_1,e_j)g(A_Ne_1,e_j)=\lambda_1\mu_1+...+\lambda_n\mu_n=g(A_N^*e_1,A_Ne_1)$$

Alors

$$\sum_i^m B(E_i,Y)C^*(X,E_i) = g(\bar{A}^*_\xi Y, A^*_N X)$$

D'où

$$Ric(X,Y) = \tilde{R}ic(X,Y) - B(X,Y)trA^*_N + g(A^*_N X, \bar{A}^*_\xi Y) + g(R(X,\xi)Y,N)$$

$$g(R^*(X,E_i)Y,E_i) = g(\tilde{R}^*(X,E_i)Y,E_i)+B^*(E_i,Y)C(X,E_i)-B^*(X,Y)C(E_i,E_i)$$

$$\sum_i^m g(R^*(X,E_i)Y,E_i) = \sum_i^m g(\tilde{R}^*(X,E_i)Y,E_i) + \sum_i^m B^*(E_i,Y)C(X,E_i) - \sum_i^m B^*(X,Y)C(E_i,E_i)$$

$$\sum_i^m g(R^*(X,E_i)Y,E_i)+\tilde{g}(R^*(X,\xi)Y,N) = \sum_i^m g(\tilde{R}^*(X,E_i)Y,E_i)+\sum_i^m B^*(E_i,Y)C(X,E_i) - \sum_i^m B^*(X,Y)C(E_i,E_i) + \tilde{g}(R^*(X,\xi)Y,N)$$

$$R^*ic(X,Y) = \tilde{R}^*ic(X,Y)+\sum_i^m B^*(E_i,Y)C(X,E_i)-\sum_i^m B^*(X,Y)C(E_i,E_i)+\tilde{g}(R^*(X,\xi)Y,N)$$

$$\sum_i^m C(E_i,E_i) = \sum_i^m g(A_N E_i,E_i) = trA_N$$

$$\sum_i^m B^*(E_i,Y) = \sum_i^m g(\bar{A}_\xi Y,E_i)$$

$$\sum_i^m C(X,E_i) = \sum_i^m g(A_N X,E_i)$$

$$\sum_i^m B^*(E_i,Y)C(X,E_i) = g(\bar{A}_\xi Y, A_N X)$$

$$R^*ic(X,Y) = \tilde{R}^*ic(X,Y)-B^*(X,Y)trA_N+g(A_N X,\bar{A}_\xi Y)+g(R^*(X,\xi)Y,N) \tag{3.53}$$

Conclusion

Dans ce mémoire, certaines équations fondamentales impliquant les équations de Gauss-Codazzi sont obtenues.

A partir des résultats ci dessus, nous avons établi les tenseurs de courbure et les tenseurs de Ricci.

A l'avenir, ous prévoyons étendre l'hypersurface de type lumière à d'autres types de variété.

Bibliographie

[1] **Amari Shun-ichi and Hiroshi Nagaoka, *Methods of information geometry*, American Mathematical Soc, (2000),191**

[2] **Aydin Muhittin Evren and Mihai Ion, *Wintgen inequality for statistical surfaces*, Math. Inequal. Appl, (2019), 22, 123-132.**

[3] **Bahadir Oguzhan and Tripathi Mukut Mani, *Geometry of lightlike hypersurfaces of a statistical manifold*, arXiv preprint arXiv :1901.09251, (2019)**

[4] **Balgeshir MB Kazemi and Salahvarzi S, *Lightlike submanifolds of semi-Riemannian statistical manifolds*, Balkan Journal of Geometry and Its Applications, (2020), 25, 52-65.**

[5] **Calin Ovidiu and Udrişte Constantin, *Geometric modeling in probability and statistics*, Springer (2014)**

[6] **Duggal Krishan L and Jin Dae Ho, *Null curves and hypersurfaces of semi-Riemannian manifolds*, World Scientific, (2007).**

[7] **Duggal Krishan L and Sahin Bayram, *Differential geometry of lightlike submanifolds*, Springer Science & Business Media, (2021).**

[8] **Furuhata Hitoshi and Hasegawa Izumi, *Submanifold theory in holomorphic statistical manifolds*, Geometry of Cauchy-Riemann Submanifolds, (2016), 179-215.**

[9] **Furuhata Hitoshi, *Hypersurfaces in statistical manifolds*, Differential Geometry and its Applications, (2009), 27, 420-429.**

[10] **Furuhata Hitoshi, *Statistical hypersurfaces in the space of Hessian curvature zero*, Elsevier, (2011), 586-590.**

[11] **Gnandi Kpante Emmanuel, *Sur la classification des structures statistiques*,Université Paul Sabatier-Toulouse III, (2022)**

[12] **Gülbahar Mehmet and Kilic *Chen-like inequalities on lightlike hypersurfaces of a Lorentzian manifold*, Springer, (2013), 1-18.**

[13] **Halima Melle Bekheira, *Mémoire de fin d'études*, (2021).**

[14] **Hans Fotsing Tetsing,*Normalized null hypersurfaces in non-flat Lorentzian space forms satisfying* $L_r x = \backslash \mathcal{U} x + b$, Turkish Journal of Mathematics, (2021), 45, 1809-1834.**

[15] **Kloeckner Benoit, *Produits scalaires pseudo-euclidiens*, Citeseer, (2005).**

[16] **Kurose Takashi, *Conformal-projective geometry of statistical manifolds*, The Editorial Committee of the Interdisciplinary Information Sciences, (2002), 89-100**

[17] **Mischler Maurice, *La formule de Minkowski-Siegel pour les formes bilinéaires symétriques non dégénérées et définies positives*, Publications mathématiques de Besançon. Algèbre et théorie des nombres, (1994), 1-76.**

[18] **Olea Benjamín, *Lorentzian Geometry and Related Topics : GeLoMa 2016, Málaga, Spain, September 20–23 8*, Springer, (2017), 237-251.**

[19] **Yıldırım Mustafa, *Semi-symmetric non-metric connections on statistical manifolds*, Elsevier, (2022).**

[20] **Yüksel Perktaş Selcen and Erdoğan Feyza Esra and Acet Bilal Eftal, *Lightlike submanifolds of metallic semi-Riemannian manifolds*, Filomat (2020), 34, 1781-1794.**