UNIVERSITÉ DU BURUNDI
GRENIER DU SAVOIR DU BURUNDI
Dépôt institutionnel officiel
https://repository.ub.edu.bi

Modélisation mathématique de la dynamique duDiopsis, Ravageur du Riz (Oryza sativa)

NSABIMANA, Innocent; Sous la direction de : Dr Janvier Pesser NTAHOMVUKIYE

2023-02
UB
https://repository.ub.edu.bi/handle/123456789/487

Document téléchargé depuis le **Grenier du Savoir du Burundi** — https://repository.ub.edu.bi

UNIVERSITE DU BURUNDI

FACULTE DES SCIENCES

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

CENTRE DE RECHERCHE EN MATHEMATIQUES ET PHYSIQUE

Modélisation mathématique de la dynamique du *Diopsis*, Ravageur du Riz (*Oryza sativa*)

Par :

NSABIMANA Innocent

Mémoire

présenté et défendu publiquement en vue de l'obtention du Diplôme de Master en mathématiques fondamentales et appliquées.

Sous la direction de :

Dr Janvier Presser NTAHOMVUKIYE

Bujumbura, Février 2023

Composition du jury

Président : Prof Servat NYANDWI

Secrétaire : Dr Denis NKURUNZIZA

Directeur : Dr Janvier Pesser NTAHOMVUKIYE

Membre : Dr Rénovat NKUNZIMANA

DEDICACE

A mon père ;

A ma mère ;

A mes frères ;

A toutes les personnes qui me sont chères.

Remerciements

Le présent mémoire représente une étape d'un parcours qui s'est avéré assez laborieux. Par le soutien de plusieurs personnes, nous décrochons aujourd'hui l'idéal attendu. J'adresse ainsi mes remerciements à toutes les personnes morales et physiques sans lesquelles ce travail n'aurait probablement pas été initié et/ou achevé.

Nous remercions particulièrement Docteur Janvier Pesser NTAHOMVUKIYE, promoteur et directeur de ce mémoire. Il a eu la générosité de me guider dans toutes les étapes du début jusqu'à la fin de ce travail. Ses conseils et suggestions m'ont permis de comprendre le sujet et d'arriver aux résultats de ce mémoire. Je serai toujours reconnaissant et j'espère que je vais rester en contact avec lui pour me servir de lumière dans mes recherches futures.

Toutes mes reconnaissances à mes chers parents Tharcisse HAVYARIMANA et Ménédore SINZINKAYO pour les sacrifices consentis à ma scolarité dès mon jeune âge afin de m'offrir une éducation de qualité. Votre abnégation a été la clé pour atteindre ce niveau et je ne vous remercierai jamais assez pour votre amour, vos encouragements et vos conseils. Veuillez trouver à travers ce travail les fruits de vos diverses privations. Je ne peux ignorer le précieux apport de mes frères pour leur affection, leur collaboration, leur soutien et leur encouragement.

Je n'oublierai pas mes collègues et camarades pour leur support, leur esprit d'équipe et surtout pour la fraternité que nous avons vécu ensemble à la faculté des sciences dans le département de mathématique plus précisement.

A tous ceux qui ont, à quel niveau que ce soit,contribué à la réalisation de ce travail, je dis merci du plus profond de mon coeur. Que Dieu vous bénisse abondamment.

Résumé

Le riz (*Oryza sativa*) est une céréale la plus importante dans le monde. Il constitue une denrée alimentaire de base pour plus de la moitié de la population mondiale. Il est devenu un produit très stratégique et prioritaire pour la sécurité alimentaire en Afrique. Toutefois, sa production est affectée par plusieurs maladies et ravageurs. Elle est affecté par des ravageurs notamment les *diopsis thoracica* qui causent d'énormes dégâts au stade de tallage du développement de la culture du riz.

En se basant sur les données biologiques, nous présenterons un modèle mathématique dans le but de décrire la dynamique d'évolution d'une population de *diopsis* dans un champ de riz. L'analyse mathématique complète du modèle est faite. Nous montrons l'existence et l'unicité des solutions, la positivité des solutions et la bornitude des trajectoires. Nous calculons les points d'équilibre et étudions la stabilité. Nous obtenons les conditions sur la persistance ou non de la population de *diopsis*. Nous présentons également les résultats des simulations numériques pour illustrer et valider les résultats analytique obtenus.

Mots clés : Ravageur du riz, *Diopsis thoracica*, Dynamique de population, Modèle mathématique, Stabilité.

Abstract

Rice (*Oryza sativa*) is the most important cereal in the world. It is a staple food for more than a half of the world's population. It becomes a very strategic and priority product for food security in Africa. However, its production is affected by several diseases and pests. It is affected by pests, in particular *diopsis thoracica*, which cause enormous damage at the tillering stage of the development of rice cultivation.

Based on biological hypotheses, we will present a mathematical model in order to describe the population of a diopsis in a rice field. The complete mathematical analysis of the model has been done. We show the existence and the uniqueness of the solutions, the positivity of the solutions and the bornitidity of the trajectories. We calculate the equilibrium points and study the stability. We obtain the conditions on the persistence or not of the diopsis population. We also presented the results of numerical simulations to illustrate and validate the analytical results obtained.

Keywords : Rice pest, *Diopsis thoracica*, population dynamics, mathematical model, Stability.

Table des matières

Composition du jury i

Dédicace ii

Remerciements iii

Résumé iv

Abstract v

Table des matières vi

Liste des tableaux viii

Table des figures ix

Liste des abréviations x

Avant-propos xi

Introduction Générale 1

1 Revue de la littérature 3

1.1 Préalables biologiques 3

1.1.1 Introduction 3

1.1.2 Généralités sur le riz 4

1.1.2.1 Origine et distribution géographique 4

1.1.2.2 Classification 6

1.1.2.3 Biologie de la plante du riz 6

1.1.2.4 Morphologie de la plante 7

1.1.3 Les ravageurs du riz 8

1.1.3.1 Cycle biologique des diopsis . . . 10
1.1.3.2 Distribution géographique du ravageur *Diopsis* . . . 13
1.1.3.3 Dommages causés par le ravageur . . . 13
1.1.3.4 Influence des Agro-systèmes Rizicoles sur la population de *Diopsis* . . . 15
1.1.3.5 Méthodes de lutte contre le ravageur . . . 15
1.2 Préalables mathématiques . . . 17
1.2.1 Systèmes dynamiques . . . 17
1.2.1.1 Existence et unicité des solutions . . . 18
1.2.1.2 Systèmes dynamiques positifs . . . 19
1.2.1.3 Systèmes dynamiques coopératifs . . . 20
1.2.1.4 Reproduction de base . . . 21
1.3 Conclusion . . . 24

2 Dynamique de population du diopsis 25
2.1 Introduction . . . 25
2.2 Formulation du modèle . . . 26
2.3 Analyse de la sensibilité . . . 28
2.4 Analyse mathématique du modèle . . . 30
2.4.1 Existence et unicité . . . 30
2.4.2 Positivité et bornitude des solutions . . . 31
2.4.3 Point d'équilibre trivial et Nombre de descendants de base . . . 35
2.4.4 Point d'équilibre non trivial et sa stabilité . . . 37
2.4.5 Stabilité globale des points d'équilibre . . . 39
2.5 Simulations numériques . . . 40
2.6 Conclusion . . . 44

Conclusion générale 45

Bibliographie 47

Liste des tableaux

2.1 Caractéristiques des *diopsis thoracica* 25
2.2 Signification des paramètres 28
2.3 Solutions positives possibles de l'équation (2.8) 39
2.4 Valeur des paramètres constants 41

Table des figures

1.1 Développement de la culture du riz [15] 7
1.2 Champs de la culture du riz [15] 8
1.3 Shéma représentant les diopsis Thoracica et Appicalis [7] 10
1.4 Diopsis [25] 11
1.5 Schéma du cycle biologique des diopsis [7] 12
1.6 Symptômes des coeurs morts (a) et des pénicules blanches (b) [7] 14

2.1 Structure du modèle 27
2.2 Sensibilité des paramètres 29
2.3 Simulation du système du modèle (2.1) en utilisant les conditions initiales variées lorsque $\tau = 0.11$ (tel que $\mathcal{N}_0 = 0.9991 < 1$). Tous les autres valeurs des paramètres sont données dans le tableau 2.2 42
2.4 Simulation du système du modèle (2.1) en utilisant les conditions initiales variées lorsque $\tau = 0.5$ (tel que $\mathcal{N}_0 = 2.5735 > 1$). Tous les autres valeurs des paramètres sont données dans le tableau 2.2 43

Liste des abréviations

C R M P : Centre de Recherche en Mathématiques et Physique

U B : Université du Burundi

E D O : Equation Différentielle Ordinaire

F E D-Imbo : Fonds Européens de Développementde l'Imbo

S R D I : Société Régionale de Développement de l'Imbo

A D R A O : Association pour le Développement de la Riziculture en Afrique de l'Ouest

Avant-propos

Le présent travail a été réalisé dans le cadre de l'obtention du diplôme de fin d'étude du deuxième cycle des enseignements de l'Université du Burundi. L'idée est de faire une étude sur la variation du nombre d'individus des ravageurs "*Diopsis*" dans un champs de la culture du riz.

Pour ce faire, nous avons construit un modèle mathématique basé sur le cycle de vie du "*Diopsis*" qui est en son tour décrit par un système d'équations différentielles ordinaires non linéaires. Ces équations sont en général très difficile à résoudre analytiquement, c'est pourquoi on fait appel à des méthodes numériques. Cela est d'autant plus nécessaire compte tenu du fait que les EDO sont d'une très grande importance dans le monde scientifique car elles sont beaucoup utilisées pour modéliser des problèmes réels.

Dans ce travail, nous présentons la méthode de Van den Driessche qui nous a permis de calculer le nombre de descendants de base $\mathcal{N}_0$ autour du point d'équilibre trivial Eq^0. Ce nombre permet donc de mesurer le degré de remplacement d'une génération par la suivante.

Introduction Générale

Le riz (*Oryza sativa*) est la culture céréalière la plus importante dans le monde et il constitue la denrée alimentaire de base de plus de la moitié de la population mondiale. Le riz est généralement considéré comme une graminée annuelle semi-aquatique. Il est même très utile pour stabiliser les terres inondables et améliorer leur perméabilité [1].

Cependant, la production rizicole est confrontée à quelques défis : faible production, stress biotiques et abiotiques, parcelles de terre surexploitées, utilisation limitée d'engrais, et un petit nombre de chercheurs et techniciens qualifiés [30]. Le riz est aussi menacé par divers accidents, ennemis et maladies. Parmi ces ennemis, on peut citer les foreurs de tiges, les défoliateurs, les suceurs de plantes, les dévoreurs de racines, etc.

Depuis des années, la production du riz a du mal à suivre les prévisions, ceci malgré l'augmentation des surfaces culturales, l'amélioration des techniques de culture, et une main d'eouvre abondante et qualifiée. L'une des raisons qui peut expliquer cette situation est l'attaque de la culture par plusieurs insectes ravageurs dont le *Diopsis*. Notre étude porte sur les foreurs de tige "*Diopsis*" qui sont des insectes nuisibles clés qui réduisent le rendement du riz [7]. Quelques études ont été menées dans le but de décrire l'évolution de cet insecte. Mais il n'y a pas d'étude qui a été menée dans le sens de développer un modèle mathématique décrivant la dynamique d'évolution d'une population du ravageur dans le champ de riz.

L'objectif de notre travail est d'étudier la variation du nombre d'individus de la population de *Diopsis* dans un champ de riz ce qui permettra dans la suite de nos travaux d'identifier des stratégies de contrôle pour mieux éradiquer l'évolution du ravageur.

La modélisation des interactions plantes-insectes est un challenge important notamment dans l'étude et le contrôle des ravageurs de cultures dans notre pays où certaines cultures sont vitales pour l'économie. La modélisation a donc un rôle important dans le développement de nouvelles stratégies de lutte et donc dans l'amélioration des cultures. Afin de dégager les principaux facteurs pouvant influencer la dynamique de la population du ravageur, il est important de comprendre certains mécanismes biologiques et écologiques de l'insecte. Après une revue de la littérature sur la biologie et l'écologie du ravageur,

nous développons et étudions un modèle mathématique de la dynamique de cet insecte ravageur. Ce qui nous conduit à faire une étude et une analyse d'un système d'équations différentielles ordinaires.

Dans le premier chapitre, nous passons en revue la littérature sur la culture du riz, les ravageurs du riz en général et le ravageur *Diopsis* en particulier. L'étude biologique du *Diopsis* nous permettra d'abord de dégager les hypothèses importantes afin de pouvoir formuler le modèle dans le chapitre suivant. Nous présentons également dans le même chapitre des outils mathématiques afin de donner les différentes théories mathématiques utilisées dans l'étude qualitative du modèle développé.

Le deuxième chapitre est consacré à la formulation et à l'étude d'un modèle mathématique de la dynamique du ravageur. Une étude mathématique du modèle établi est réalisée. Nous calculons un seuil qui est un paramètre important en épidémiologie ou en écologie. Ce seuil nous permet de conclure de l'extinction ou la persistance du ravageur dans un champ du riz. Nous analysons le comportement asymptotique des solutions du système d'équations différentielles qui décrivent la dynamique du ravageur. Pour terminer, nous proposons les simulations numériques pour illustrer et valider les résultats analytiques obtenus.

Nous terminons le travail par une conclusion générale.

Chapitre 1

Revue de la littérature

1.1 Préalables biologiques

1.1.1 Introduction

Le riz (*Oryza sativa* et *Oryza glaberima*) constituent l'aliment de base de plus de la moitié de la population mondiale. La demande mondiale de riz devrait passer de 676 millions de tonnes en 2010 à 763 millions de tonnes en 2020 [30]. La production pourrait augmenter de 40% d'ici 2030 pour satisfaire la demande [31, 12]. L'augmentation de la production du riz est un défi majeur aux pays en développement qui dépendent de cette céréale pour assurer leur sécurité alimentaire.

Le riz est devenu un aliment de base important au Burundi. Le riz est un aliment de plus en plus consommé au Burundi et sa culture représente un intérêt majeur pour la sécurité et l'autosuffisance alimentaire du pays. La consolidation de la filière riz doit constituer un axe majeur pour le développement agricole du Burundi. Le riz est une plante à la fois alimentaire et génératrice de revenus. Il est largement commercialisé et consommé dans les centres urbains et auprès des collectivités (écoles, camps militaires, universités, orphelinats). Il est aussi une denrée prise par les ménages ruraux à l'occasion des fêtes familiales. Cependant, la riziculture pluviale et celle de marais ne bénéficient pas d'un encadrement de proximité comme le riz irrigué à l'Imbo par la SRDI (Société Régionale de Développement de l'Imbo)[45].

La superficie estimée des terres actuellement utilisées pour la production de riz au Burundi est d'environ 50 000 hectares. Cela comprend 5 000 hectares dans la plaine irriguée de l'Imbo, 15 000 hectares dans la plaine non irriguée de l'Imbo et 30 000 hectares dans la plaine de Moso et dans les marais de haute altitude. Entre 1984 et 2011, la production de riz est passée de 18 000 à 75 000 tonnes métriques par an, soit une augmentation de

316% en 27 ans. En 2019, la production de riz au Burundi était estimée à 120 000 tonnes métriques.

1.1.2 Généralités sur le riz

1.1.2.1 Origine et distribution géographique

Les céréales constituent l'alimentation de base dans le monde. Parmi les céréales, le riz occupe une place non négligeable et elle est la principale source d'aliment pour environ 40% de la population mondiale [1]. Les pays en voie de développement importent chaque année une quantité considérable de riz pour survenir aux besoins alimentaires des populations.

Les importations du riz sont de plus en plus croissantes. Le rythme de croissance de la demande en riz est en moyenne de 5,6% par an, en Afrique de l'Ouest [15]. Dans le bilan de ses activités, HEINRICHS indique que cette progression extrêmement rapide est imputable pour moitié environ à la poussée démographique, et l'autre moitié s'expliquant par le changement des habitudes alimentaires des citadins. Cependant , les productions nationales sont loin de suivre cette évolution de la demande. Ces changements ne peuvent être ignorés pour le continent africain dont la production rizicole par habitant connaît chaque année une chute considérable. Il n'est pas étonnant, dans ces conditions de voir les importations augmentées nettement et de façon vertigineuse dans le seul but de satisfaire les besoins des populations [23].

Au Burundi, Le riz est une culture relativement récente au pays ; il a été introduit en 1890 par des commerçants arabes venus de la Tanzanie. Ces derniers l'ont uniquement implanté le long du lac Tanganika (le chemin de trafic) où la culture fut cantonnée durant plus de soixante ans sous forme de riz pluvial. Il a fallu attendre l'année 1969 avec le projet "'Fonds Européen de Développement de l'Imbo"' (FED-Imbo) et surtout l'année 1973 avec la Société Régionale de Développement de l'Imbo (SRDI) pour voir le riz irrigué s'étendre sur une superficie assez considérable dans la plaine de l'Imbo-Centre [18].

Au fil du temps, le riz est devenu un aliment sollicité par les agglomérations urbaines et les collectivités (armée/police, écoles, hôpitaux), ce qui créa un engouement à son expansion. Ainsi, le riz fut introduit en régions de basse et de moyenne altitude après des essais fructueux menés de 1978 à 1980 par l'Institut des Sciences Agronomiques (ISABU) dans le marais de Gisha, en province de Ngozi (Nord du pays). En 1981/1982, les agriculteurs commencèrent à le cultiver dans toute la province de Ngozi, puis dans celles de Kirundo (Nord) et Muyinga (Nord-Est) avant de s'étendre au reste des provinces dont les

aptitudes rizicoles se sont révélées réelles (Cankuzo, Karuzi, Makamba, Ruyigi, etc). En moins de cinq ans, la superficie rizicole emblavée passa du simple au quintuple c'est-à-dire de 4.000 ha en 1986 à 20.000 ha en 1990 [18].

Les contextes et environnements dans lesquels les différentes rizicultures se sont développées au Burundi sont fort variés. En effet, dans la plaine de l'Imbo sous encadrement de la SRDI depuis 1973, les exploitants candidats à la riziculture se sont vus octroyer chacun 50 ares de terre domaniale destinés à la culture du riz. De fait, ils sont usufruitiers et le non respect des règles de conduite de la culture peut conduire au retrait de la propriété terrienne au profit d'un autre. Comme avantages, les riziculteurs profitent des aménagements hydro-agricoles mis en place par la SRDI au prix de gros investissements. Ils sont aussi encadrés sur les techniques culturales et reçoivent, sous forme de crédit en nature, les intrants (semences, engrais et produits phytosanitaires) combien nécessaires pour une bonne production. Moyennant un aval de la SRDI, ils accèdent aussi au crédit bancaire pour financer les activités de production notamment le paiement de la main d'oeuvre extérieure. En retour, les producteurs doivent impérativement vendre leur récolte de paddy à la SRDI qui se rembourse le crédit octroyé lors de la paie des ventes [18].

D'autre part, comme le riz est devenu une culture d'enjeu commercial dans la plaine de l'Imbo, la culture s'est aussi propagée dans cette plaine en dehors de la zone SRDI qui a servi de référence aux exploitants avoisinant cette zone. Ainsi, ces derniers se sont familiarisés à la culture du riz dans des parcelles qui ont accès à l'eau (le long des rivières) [18].

Contrairement à la zone couverte par la SRDI, ces nouveaux riziculteurs n'ont pas les mêmes facilités d'accès ni à l'eau, ni aux intrants, encore moins à l'encadrement ou au crédit bancaire que ceux de la zone SRDI. Cependant, ils ont une tenure foncière plus rassurante car ils sont totalement propriétaires de leurs terres. Ils ont le libre choix de cultiver le riz ou une autre spéculation agricole en fonction de leurs besoins et/ou souhaits sans hypothéquer leur droit de propriété sur la terre [18].

Enfin, dans cette même plaine de l'Imbo, une autre catégorie d'agriculteurs s'est développée depuis les années 1997 à 2000. En effet, à la suite d'un déficit national en produits vivriers (sécheresse et guerre civile), des terres jadis appartenant à la réserve naturelle de la Rusizi (Rukoko) ont été attribuées à des entrepreneurs privés, surtout de la capitale Bujumbura, dans le souci d'accroître la production agricole et assurer ainsi une souveraineté alimentaire. Les exploitations sont relativement grandes et sont cultivées avec du riz sans un encadrement agricole public. Elles profitent de l'eau des rivières Kajeke et Mutimbuzi, mais aussi des canaux d'irrigation de la SRDI dont l'eau est parfois détournée au profit

de ces nouveaux périmètres rizicoles. Les investissements y sont aussi plus consistants que dans le reste de la plaine et produisent pour le marché (ville de Bujumbura) [18].

Pour sa part, la riziculture des marais de basse et de moyenne altitude, relativement plus récente (1981) que celle de l'Imbo (1973), est menée dans des milieux à caractéristiques climatiques et pédologiques fort variées. Elle s'étend sur une dizaine de provinces du Nord, du Centre et de l'Est du pays où la diffusion s'est faite au cas par cas en fonction des moyens financiers disponibles pour aménager plus ou moins convenablement les marais. Un plan directeur d'aménagement de tous les marais du pays fut mis en place pour éviter des exploitations anarchiques susceptibles d'hypothéquer l'avenir de ces biotopes (risque de tassement ou de desséchement des marais) [18].

Quant à la riziculture pluviale, elle est devenue marginale et en voie de disparition. Elle est cultivée sporadiquement par très peu de ménages du Moso (Est) et de l'Imbo Sud (le long du lac Tanganika) où ce type de riz peu productif a été supplanté par le palmier à huile.

1.1.2.2 Classification

Les classifications de riz sont très nombreuses et il existe plusieurs systèmes de classification basés sur les critères différents. Le riz cultivé appartient au genre *Oryza*, de la famille des graminées et de l'ordre de *Poales*. Le genre *Oryza* renferme plus de trente espèces dont deux sont actuellement cultivés à savoir *Oryza sativa L.* et *Oryza glaberrima Steud* [11]. L'espèce *Oryza sativa L.* est originaire de l'Inde et de la Chine, dont la culture a gagné l'Asie, puis la Grèce et Rome, plus tard Madagascar, l'Afrique enfin l'Amérique [20].

D'après la classification botanique, l'espèce *Oryza sativa L.* comprend trois sous-espèces : les sous-espèces *Japonica, Javanica* et *Indica*. Elle se distingue d'*Oryza glaberrima* par la ligule courte et tronquée. L'espèce *Oryza glaberrima* s'adapte à des terres hydromorphes extrêmement variées.

1.1.2.3 Biologie de la plante du riz

Le cycle végétatif des variétés actuelles oscille entre 90 et 120 jours en fonction de la variété, de la température et de la sensibilité à la longueur du jour. Selon la durée du cycle végétatif, on a généralement les variétés de riz précoce ou de cycle court (90 à 120 jours), de riz de cycle moyen (120 à 150 jours).

Le cycle biologique du riz annuel s'opère en plusieurs étapes. Au cours de sa croissance,

le riz passe par trois phases essentielles. Une phase végétative, allant de la germination à l'initiation des primordiaux floraux ; une phase reproductive, qui va de cette initiation à la pollinisation ; et enfin une phase de maturation du grain.

Il convient de noter que la durée de la phase végétative varie significativement selon les espèces dans les mêmes conditions culturales, tandis que celle de la phase reproductive reste à peu près constante quelle que soit la variété.

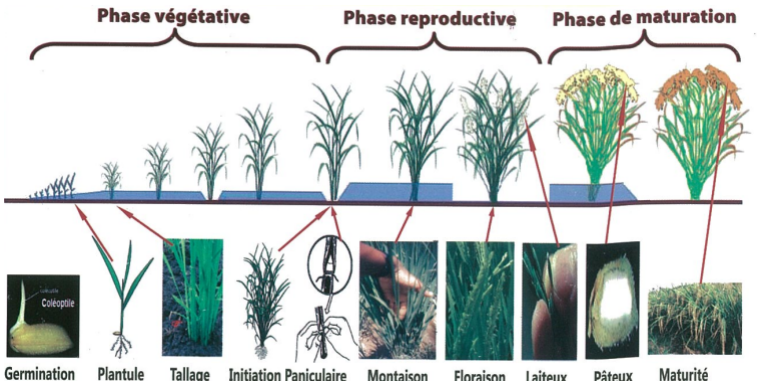


FIGURE 1.1 – Développement de la culture du riz [15]

1.1.2.4 Morphologie de la plante

Le riz est une graminée annuelle dont la tige peut atteindre $2m$ de haut, ou même davantage chez les variétés flottantes et semi flottantes. La base de la tige émet un bourgeon qui donne naissance à une tige secondaire, ou talle. Cette talle, grâce à ses bourgeons, donnera à son tour naissance à des tiges tertiaires, quaternaires, etc. C'est l'ensemble de ces talles qui constitue, à partir d'un seul plant, la touffe de riz. L'inflorescence est une panicule rameuse plus ou moins large et dense, de 20 à 40 cm de long. Les épillets ne possèdent qu'une fleur fertile hermaphrodite, à 6 étamines. Les glumelles, souvent aristées, enveloppent complètement le grain après sa formation. Le fruit est un caryopse. Avec les glumes et les glumelles qui l'entourent, il constitue ce que l'on appelle le riz paddy.

Sa couleur à maturité varie de la paille claire au pourpre foncé en passant par des teintes dorées. Le caryopse est composé des téguments et de l'albumen. Les téguments peuvent être diversement colorés : brun rouge, gris, violet. L'albumen est plus ou moins translucide en fonction de sa teneur en amylose. Chez les variétés glutineuses, l'album en est opaque, blanc et crayeux ; sa teneur en amylose est voisine de zéro. Le poids de 1 000 grains de paddy varie de 20 à 45g. Le limbe généralement pileux, mesure 30 à 50cm de

long et 1,0 à 1,5cm de large. La gaine enserre entièrement l'entre-noeud. Les auricules sont situées de part et d'autre à la base du limbe, et la ligule est une structure membraneuse, triangulaire, souvent bifide, de 10 à 45cm, qui prolonge la partie supérieure de la gaine. La dernière feuille est la feuille paniculaire, parfois appelée pavillon ou étendard ; son limbe est plus large que celui des autres feuilles. Chaque grain germé donne naissance à une touffe pouvant compter jusqu'à trente talles au stade végétatif. Un nombre limité de ces talles, jusqu'à une quinzaine, produit des panicules. La hauteur de la plante à maturité varie de 0,60 m à plus de 2m selon les variétés et peut aller jusqu'à 5 m pour les variétés flottantes.



FIGURE 1.2 – Champs de la culture du riz [15]

1.1.3 Les ravageurs du riz

Parmi les facteurs majeurs limitant la production du riz figurent les insectes ravageurs qui causent énormément des dégâts. Les insectes nuisibles sont une contrainte principale à la production du riz en Afrique et dans d'autres parties du monde. Ils occasionnent toujours des pertes de rendement de l'ordre de 30 à 100%. Les attaques des insectes nuisibles constituent l'une des raisons du faible rendement. Les pertes de rendement peuvent atteindre 30% pour le riz pluvial et être totales pour le riz de bas-fonds. Jusqu'a présent, les pertes causées par les attaques des insectes, n'ont pas reçu l'attention méritée en tant que contrainte principale à la production rizicole en Afrique. Les pertes considérables, à la fois quantitatives et qualitatives, pourraient être dans la plupart des cas, réduites ou même évitées. Pour cela, il faudrait connaitre l'identité, la biologie, la nature et les symptômes

des dégâts causés par les ravageurs afin d'adopter les méthodes de lutte appropriées [30].

Les insectes nuisibles du riz sont classés d'après la partie de la plante qu'ils attaquent :

— les foreurs de tiges,

— les défoliateurs,

— les suceurs de plantes (de feuilles, de tiges et de grains),

— les dévoreurs de racines.

Les foreurs de tiges sont en général la cécidomyie des galles du riz africain, le borer rayé, le borer tachetée, le borer blanc, le borer jaune, le borer rose et en particulier les *Diopsis*. En effet, les *diopsis* sont des insectes nuisibles clés qui réduisent le rendement du riz. Les pertes causées par les *diopsis* impliquent qu'ils n'avaient pas bénéficié l'attention de la recherche, ce qui fait l'objet de notre étude.

Les *diopsis* ou mouches des tiges sont des diptères dont les larves ou les asticots sont très préjudiciables aux plants de riz [21]. Ils sont présents dans tout le riz de l'Afrique intertropicale [8], mais de préférence dans les zones ombragées et humides telles que les basses terres rizières [33] ; et rizières irriguées. Dans les champs fortement infestés, les dommages peuvent induire une perte allant de 60% à 100% [39]. L'apparition de diopsis est généralement considérée comme phénomène sporadique et il est localisé dans de nombreuses régions [11]. Ainsi, de nombreux auteurs pensaient que les pertes économiques dues aux diopsis se sont produites de manière irrégulière [20]. Cependant, ces insectes se sont propagés à plusieurs pays d'Afrique subsaharienne (ASS), en raison de conditions climatiques favorables.

La prolifération de ces insectes entraîne une diminution alarmante pour les rendements de riz grâce à des dommages accrus de la récolte de riz. La présence de diopsis sur le riz irrigué est depuis longtemps rapporté au Bénin [9] mais ni les populations de mouches pédoncules ni leurs dommages étaient aussi importants qu'ils le sont de nos jours [47].

Au moins trois espèces du genre *Diopsis (D.)* sont reconnus comme ennemis du riz cultivé. Ceux-ci sont *D. longicornis*, *D. apicalis* et *D. necklaceis*. Le *D. longicornis* est considéré comme le plus important [20].

Les espèces *D. thoracica* et *D. macrophthalma* sont synonymes de *D. longicornis*, tandis que *D. tenuipes* est synonyme de *D. apicalis*. Les deux espèces (*D. thoracica* et *D. apicalis*) sont les plus répandues dans les rizières et largement dominantes par rapport à de nombreuses autres espèces de *Diopsis* présentes dans la région [11]. Figures 1 et 2 montrent les deux espèces qui affectent le plus les plants de riz.

Compte tenu de la grande diversité au sein de l'espèce, Feijen en 1985 [20] pensait qu'une étude systématique approfondie du genre *diopsis*, pourrait réveler certainement

d'autres espèces non identifiées d'importance.

Déjà, un travail systématique de Feijen (2012) sur des spécimens d'Afrique du Sud et du Swaziland révélés deux autres espèces *Diopsis eisentrauti* et *D. stuckenbergi sp* n' appartenant au même groupe que *D. thoracica*. Ces auteurs ont développé une clé pour discriminer les deux individus identifiés. Ces insectes sont répandus dans les régions de Cameroun, République démocratique du Congo, Gabon et le Togo. Une autre sous-espèce *Diopsis servillei* Macquart en Afrique a été mentionné par Pathak et Khan [34]. Ces auteurs ont également révélé l'existence de deux sous-espèces *Diopsis circularis* Macquart et *Diopsis ichneumonea* Linnaeus en Afrique, appartenant à l'espèce *Diopsis apicalis* Dalman.



Fig. 1: *Diopsis apicalis*
Source: Insectarium of IITA

Fig. 2: *Diopsis thoracica*
Source: Insectarium of IITA

FIGURE 1.3 – Shéma représentant les diopsis Thoracica et Appicalis [7]

Dans la suite de notre étude, nous allons considérer l'espèce de *Diopsis Thoracica* parce que celui qui causent des dégâts énormes par rapport aux autres espèces de *Diopsis* [7].

1.1.3.1 Cycle biologique des diopsis

Le cycle de développement biologique de *Diopsis* consiste en les étapes suivantes :

- Oeuf : Il a une forme allongée, avec des côtes, et a l'une de ses extrémités un petit excroissance.
- Larve : Elle est jaunâtre et caractérisée par deux extensions abdominales allongées attaché aux extrémités postérieures. Il a des crochets qui sont pliés vers l'avant.
- Cocoon : il est allongé, a un brun de couleur rougeâtre et porte des segmentations marquées.
- Adulte : il est grand et peut mesurer jusqu'à 10 mm. Son thorax est noir brillant, ses ailes transparentes ; l'abdomen rouge-orange et recouvert d'une fine cheveux denses.

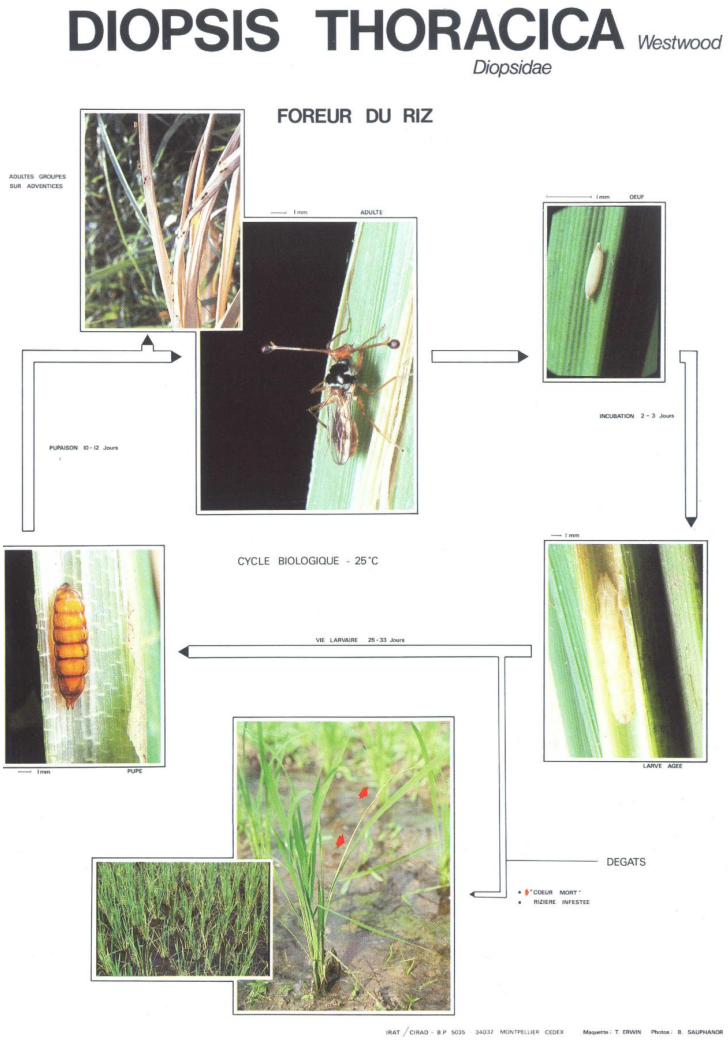


FIGURE 1.4 – Diopsis [25]

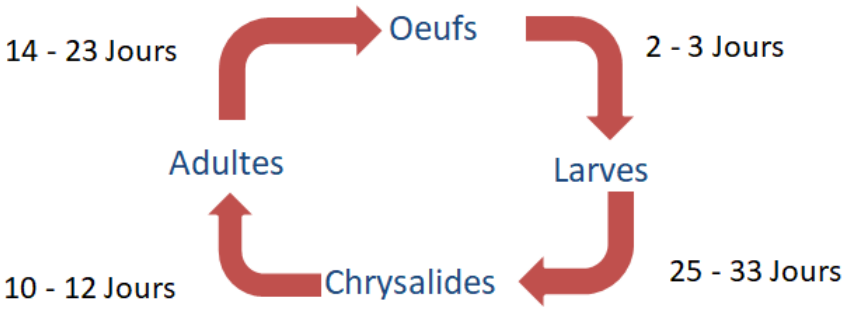


FIGURE 1.5 – Schéma du cycle biologique des diopsis [7]

Chaque femelle pond en moyenne 30 oeufs isolés pendant environ 20 jours avec un maximum de 4 à 5 oeufs par jour [8]. L'incubation des oeufs dure environ 2 à 3 jours. La durée de vie varie en conséquence : larve de 25 à 33 jours ; nymphe 10 à 12 jours, et l'adulte environ 14 jours. L'adulte atteint la saison sécheresse à l'état immature, groupé en essaims réunis près des piscines permanentes ou de préférence dans zones humides peu profondes. Dès les premières pluies, la maturité sexuelle est parvenu ; l'accouplement a toujours lieu au repos, soit sur la terre, soit sur la végétation ; il se produit généralement dès les premières pluies, au crépscule ou le matin avant que la température ne soit trop élevée [7].

Les insectes se posent sur les plants de riz. Le mâle vole vers la femelle qui est sur le plant de riz. Il tient la femelle à la région thoracique avec ses tarses. La femelle étend ses pattes médianes et postérieures, déploie ses ailes et courbe la pointe abdominale de sorte que la copulation soit possible [7].

L'accouplement dure environ 5 à 8 minutes, après le mâle s'envole. Parfois, les mouches de diopsis s'accouplent plusieurs fois avec le même partenaire ou avec un nouveau partenaire. Après l'émergence, 15 et 20 jour de maturation sont nécessaires avant que les femelles commencent à pondre des oeufs. Les femelles fécondées pondent individuellement sur la surface supérieure de jeunes feuilles, normalement dans le sillon de la nervure médiane de la feuille subterminale [2]. Environ 60 jours sont nécessaires depuis l'éclosion des larves jusqu'à la maturation, l'accouplement des adultes et la ponte pour la prochaine génération.

1.1.3.2 Distribution géographique du ravageur *Diopsis*

L'abondance des foreurs des tiges varie selon les sites, zone climatique et écologie. Les diopsis sont fortement peuplé et prolifique [20]. Elles sont largement distribué dans les régions humides, équatoriales et zones tropicales orientales de l'Afrique. Une propagation a été signalée dans plusieurs pays africains. Il aurait causé des dégâts remarquables en Côte d'Ivoire et au Bénin, en particulier dans les terres irriguées et dans les plaines, mais beaucoup moins dans les rizières de montagne [37] ; dans les rizières du sud de la Casamance au Sénégal [4] ; et en Guinée (Chiasson et Hill, 1993). C'est sporadique et limité aux zones où il y a suffisamment d'humidité pendant la saison sèche au Burkina Faso et au Mali [8].

Cependant, la distribution au Burkina Faso a été si étendu qu'il éperonne ; la création de timbres-poste à l'effigie des *diopsis* comme ravageur majeur. Il a été mentionné au Togo, au Ghana, au Cameroun, au Libéria, Guinée, Sierra Leone, Guinée Bissau et Nigéria [20]. Il est mentionné dans Tanzanie et Ouganda où il s'étend dans tout le riz écologies [6]. Il a été observé au Burundi et au Rwanda où il infecte régulièrement les champs de maïs et de riz [48]. La recherche au Kenya sur l'inventaire des foreurs de tige a signalé le *D. thoracica* dans les rizières [1]. De même, sa présence était signalé dans l'océan Indien en particulier à Madagascar [21]. De tout ce qui précède, il devient clair que les climats de l'Afrique subsaharienne sont propices à la prolifération du *Diopsis*.

1.1.3.3 Dommages causés par le ravageur

Après l'éclosion, la larve du *Diopsis* pénètre dans la tige à la gaine et se nourrit uniquement de tissus sains. Il n'y a pratiquement qu'une seule larve par tige endommagée. Habituellement, la tige est coupée à une distance d' environ 5-10 cm au-dessus du sol ou de l'eau [34]. Au fur et à mesure que la tige coupée se décompose, la larve quitte la tige et passe à une tige vivante voisine, détruisant 3 à 10 tiges en moyenne pendant son développement [21].

La pupation se produit à l'intérieur de la dernière tige colonisée. La larve vit exclusivement à l'intérieur des tiges pendant la phase de tallage. Des attaques tardives exceptionnelles peuvent affecter le riz à la tête mais pas au-delà de cette étape. Il ne peut y avoir qu'une seule génération de l'insecte au cours d'un cycle de production de riz. Les insectes adultes de la génération précédente recherchent les jeunes tiges de riz. Cela expose les récoltes tardives à l'attaque de la génération émergente d'insectes. Les dégâts sont estimés par le taux d'attaque de tiges par rapport au nombre total de talles

produites.

De plus, le tallage compensateur est induit par la perte de talles détruites par une réaction de la plante. Le mécanisme dépend de la précocité et de l'intensité de l'attaque, la capacité de tallage de la variété et ses conditions de développement. Les «coeurs morts» apparents sont souvent très abondant et il n'est pas rare de trouver à 80% des talles attaquées sans affecter significativement la récolte [52]. Cette situation mentionnée ci-dessus est souvent observée sur des variétés de riz tolérantes avec haute capacité de tallage. Les pertes sont difficiles à évaluer et sévère lorsqu'une concentration élevée d'oeufs est déposé dès le début du tallage, principalement au début cycle. Cependant, à densité d'infestation égale, il y a de fortes différences selon la résistance variétale et notamment en fonction de sa capacité à produire des talles.

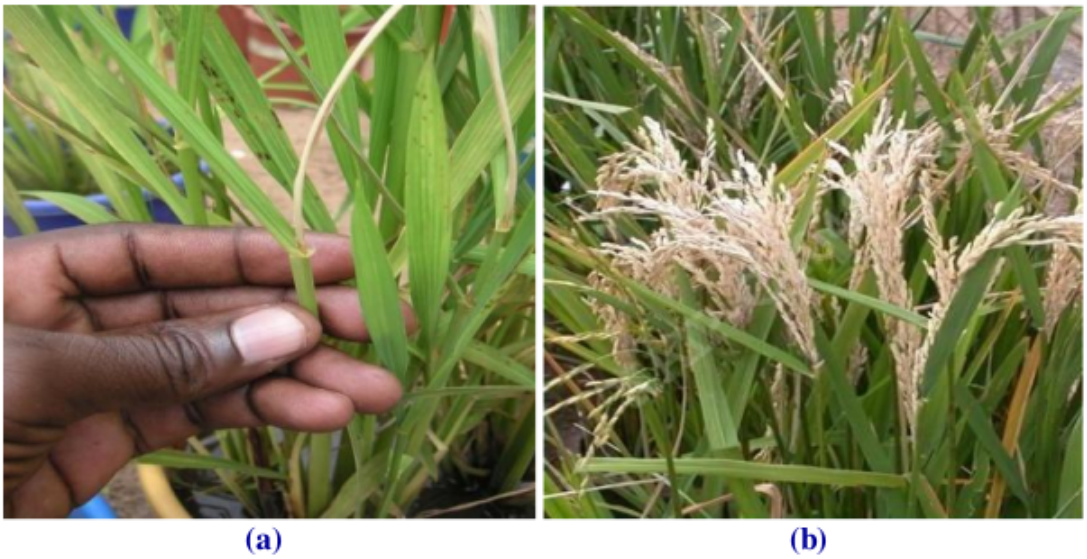


FIGURE 1.6 – Symptômes des coeurs morts (a) et des pénicules blanches (b) [7]

— Les premiers symptômes se manifestent avec les "coeurs morts" chez les jeunes plants ;
— Des talles entières meurent suite à la consommation des tissus de la base de la tige par les foreurs de tiges ;
— La verse peut se manifester surtout lorsque les vieux plants de riz sont attaqués ;
— Les panicules n'arrivent pas à sortir et se déssechent ;
— Sur des plants de riz plus agés, l'attaque se traduit parfois par un blanchissement des panicules ;
— On peut avoir des panicules insuffisamment remplies et des grains de qualité médiocre suite aux attaques des foreurs de tiges.

1.1.3.4 Influence des Agro-systèmes Rizicoles sur la population de *Diopsis*

Les plus fortes populations d'adultes et de larves ont été notées dans les parcelles de riz au stade de tallage maximal et dans les repousses. Cette évolution des populations de diopsis serait la conséquence d'une bonne condition nutritionnelle et environnementale [47].

Togola et Nwilene ont rapporté que le stade de tallage est favorable à la multiplication des mouches à pédoncules. Les repousses elles aussi, semblent procurer les mêmes avantages que le riz au tallage. De plus, elles conservaient leur tendresse jusqu'à l'épiaison. C'est pourquoi les population de diopsis s'y installent, se multiplient et se sédentarisent en causant aussi bien les coeurs morts que les panicules blanches [47]. En effet, les repousses permettraient le maintien des populations et la continuité de la reproduction des mouches contribuant ainsi à la pullulation de leur population et la contamination des parcelles de cultures adjacentes.

1.1.3.5 Méthodes de lutte contre le ravageur

Les mesures de lutte comprennent les méthodes culturales el biologiques, la résistance de la plante-hôte et les méthodes chimiques. Les méthodes chimiques présentent plusieurs inconvénients. La lutte intégrée contre les déprédateurs combine les avantages de plusieurs méthodes de lutte pour parvenir à des mesures écologiquement saines.

Un bon système de lutte contre ces insectes nuisibles exige une connaissance adéquate de l'identité et de la biologie des ravageurs et de leurs ennemis naturels.

Méthodes Variétales et culturales

L'une des stratégies majeures de lutte contre les ravageurs est l'utilisation de la résistance variétale. Elle est compatible avec toutes les autres méthodes de lutte. Cette méthode présente des avantages et elle n'est pas polluant.

En jouant sur certaines pratiques agricoles qui favorisent le développement des insectes , on peut assurer une réduction des populations des ravageurs du riz. Ces pratiques comprennent, la rotation des cultures, la préparation des parcelles, la jachère etc.La lutte culturale est beaucoup plus efficace dans la lutte contre les ravageurs :

1. Un semis précoce et synchronisé doit être pratiqué pour éviter les périodes coïncidant avec le début des dommages.
2. Une distance appropriée entre les plantes doit être respecté. Il a été démontré que l'augmentation des dégâts évolue avec une augmentation de la densité végétale [21].

3. Les plantes doivent être fertilisées avec du silicate de calcium pour renforcer le tissu de la tige pour résister à la larve mandibule.
4. Lors de la récolte, les tiges très hautes doivent être évités.
5. Une bonne gestion de l'eau est particulièrement nécessaire, s'assurer que le niveau d'eau recouvre la base du tige pour limiter la pénétration de la larve.
6. Garder les ennemis naturels : les araignées sont les ennemis de ces mouches.
7. Côntrole variétal : Le cultivar "WAB 115-921-211-691-2" a été signalé en Ouganda pour piéger la larve de *Diopsis thoracica* avec ses feuilles velues.
8. Utilisation des variétés résistantes CG14,NERICA4,K85 et quelques accessions de *O.glaberrima* et TOG (*TROPICAL ORYZA glaberrima*)

Lutte Biologique

Traditionnellement, elle implique l'utilisation de parasitoides et de prédateurs pour contrôler les populations de ravageurs. Il existe en Afrique, des parasitoides et prédateurs de diopsis. Ce sont : les guepes (ordre des *Hyménoptères*), les mouches (ordre des *Diptères*, les libellules (ordre des *Odonata*), les coléoptères (ordre des *Coleoptera*), les araignés (ordre des *Araneida*) et les acariens (ordre des *Acarina*) [24].

La plupart de ces ennemis naturels sont connus pour avoir de bonnes potentialités en tant qu'agent de lutte biologique et des travaux sont menés partout en Afrique, pour évaluer leur efficacité. Cette méthode de lutte reste réalisable, mais les techniques d'élevage des ennemis naturels sont très coûteuses [24].

Lutte chimique

L'utilisation de pesticides pour lutter contre les diopsis de tiges n'a pas toujours réussi parce que ces derniers trouvent refuge dans les tiges. Seuls les insecticides systémiques peuvent pénétrer et les tuer dans les tissus de la tige elle-même. Toutefois, la plupart des paysans africains ne peuvent pas se permettre d'acheter ces insecticides. Les insecticides systémiques peuvent se présenter en formulations liquides ou granulées [24]. Les formulations liquides sont généralement appliquées par des pulvérisations sur les surfaces foliaires mais elles tuent aussi les ennemis naturels des ravageurs. Ce phénomène introduit un déséquilibre dans le système ravageur/ennemi naturel de sorte que les ravageurs peuvent se multiplier de manière incontrôlée. Tout cela aboutit même à l'apparition de nouveaux ravageurs [24].

Les formulations granulées des insecticides systémiques sont les seuls types d'insecticides efficaces à cause de leur mode d'action sélectif. Leur utilisation est toutefois recommandée seulement en cas de besoin, il faut les manipuler avec beaucoup de précaution à cause de leur toxicité élevée. Parmi les formulations granulées, il y a : le Carbofuran (furadan) 3G à 20-25 kg/ha et l'isazofos (miral) 5G la dose de 10-15 kg/ha.

1.2 Préalables mathématiques

Dans cette section, nous présentons des outils mathématiques que nous allons utiliser le long de ce travail. Nous définissons les notions des systèmes dynamiques,développons des théories, des lemmes et des théorèmes relatifs aux systèmes dynamiques. Nous montrons la méthode Van den Driessche pour le calcul du nombre de descendant de base $\mathcal{N}_0$ et enfin, le calcul et la stabilité des points d'équilibres.

1.2.1 Systèmes dynamiques

Définition 1.1. *Les systèmes dynamiques sont des notions mathématiques qui permettent de modéliser des phénomènes évoluant dans le temps.*

Ces phénomènes peuvent provenir de la physique, la mécanique, l'économie, l'écologie, la biologie, la chimie,...

Un système dynamique est constitué d'un espace de phases, l'espace des états possibles du phénomène convenablement paramétré, muni d'une loi d'évolution qui décrit la variation temporelle de l'état du système. Dans le cadre de mes travaux, cette loi d'évolution prend la forme d'équation différentielle.

La résolution explicite, ou même approchée, d'une équation différentielle est en général impossible, les méthodes numériques permettant seulement de calculer sur un intervalle de temps fini une solution correspondant à des conditions initiales données. La théorie vise donc plutôt une étude qualitative des phénomènes et cherche en particulier à en comprendre l'évolution à long terme. Nous abordons l'étude générale des systèmes dynamiques régis par des équations différentielle ordinaires.

L'accent est mis principalement sur la notion de stabilité dont l'importance, pour de nombreux problèmes pratiques, est comparable à celle de la connaissance effective des solutions.

1.2.1.1 Existence et unicité des solutions

On considère le système d'équation différentielle

$$\dot{x} = f(t, x) \tag{1.1}$$

où f est continu sur un ouvert $\Omega = I \times U$, I intervalle de $\mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$.

Toute solution

$$x = x(t)\,(x_i = x_i(t), i = 1, ..., n)\,, \tag{1.2}$$

du système (1.1) décrit dans $\mathbb{R}^{n+1}$ une certaine courbe dite courbe intégrale du système (1.1). Par ailleurs, la projection de cette courbe dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ des variables $x_1, x_2, ..., x_n$, dit espace de phase, est appelée trajectoire du système. Posons qu'au point $t = t_0$, la solution (1.2) prend la valeur x_0, c'est -à-dire que $x(t_0) = x_0$. Ce qui équivaut à dire que la courbe intégrale et la trajectoire de (1.1) passent au point $x(t_0, x_0)$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ et x_0 de $\mathbb{R}^n$ respectivement.

Définition 1.2. *Soient $x_0 \in U$, $t_0 \in I$; $\beta(x_0, r_0)$ et $\beta(y_0, r_0)$ voisinages respectives de x_0 et y_0. On dit que $f : I \times U \to \mathbb{R}^n$ est localement lipschitzienne par rapport à la seconde variable en $x(t_0, x_0)$ s'il existe un $T > 0, r_0 > 0, k > 0$ tels que pour tout $(t, x, y) \in]t_0 - T, t_0 + T[\times \beta(x_0, r_0) \times \beta(y_0, r_0), \| f(t, x) - f(t, y) \| \leq k \| x - y \|$.*

On appelle k constante de Lipschitz pour f.

Définition 1.3. *On dit que $f : I \times U \to \mathbb{R}^n$ est localement lipschitzienne par rapport à x sur $I \times U$ si pour tout $(t_0, x_0) \in I \times U$, f est localement lipschitzienne par rapport à la seconde variable en $x(t_0, x_0)$.*

Définition 1.4. *Une fonction $f : I \times U \to \mathbb{R}^n$ est dite lipschitzienne (ou globalement lipschitzienne) par rapport à x s'il existe une fonction continue $k : J \to \mathbb{R}^+$ telle que, $\forall t \in I, \forall (x, y) \in U \times U, \| f(t, x) - f(t, y) \| \leq k(t) \| x - y \|$.*

Si de plus, la fonction k est constante sur I alors f est dite globalement lipschitzienne par rapport à x sur $I \times U$.

Remarque 1.1. 1. *Si f est globalement lipschitzienne par rapport à la seconde variable x sur $I \times U$, f est alors localement lipschitzienne par rapport à la seconde variable x sur $I \times U$.*

2. *si f est de classe C^1 sur $I \times U$ alors f est localement lipschitzienne par rapport à la seconde variable x sur $I \times U$.*

Définition 1.5. *Le problème de Cauchy pour un système d'équations différentielles* $\dot{x} = f(t,x)$ *consiste à trouver une solution* $x = x(t)$ *satisfaisant à la condition initiale* $x(t_0) = x_0$.

Théorème 1.1. *Si* $f : I \times U \to \mathbb{R}^n$ *est localement lipschitzienne par rapport à la seconde variable* x *sur* $I \times U$, *alors pour tout* $(t_0, x_0) \in I \times U$, *le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

admet une unique solution.

1.2.1.2 Systèmes dynamiques positifs

Considérons le système dynamique, en temps continu, suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{1.3}$$

On suppose que f est une fonction C^1. Ce qui permet d'assurer l'existence et l'unicité des trajectoires (t, x_0).

Définition 1.6. *Le système* (1.3) *est positif si et seulement si toutes les trajectoires* $x(t, x_0)$ *engendrées par le système, initialisées en* $x_0 \geq 0$, *restent positives pour tout temps* t *positif.*

La définition précédente est équivalence à la propriété suivante.

Proposition 1.1. *Le système dynamique* (1.3) *est un système positif si et seulement si*

$$\forall i \in [1, ..., n], \dot{x}_i = f_i(x_1 \geq 0, ..., x_i = 0, ..., x_n \geq 0) \geq 0.$$

Proposition 1.2. *Le système dynamique* (1.3) *est un système positif si et seulement si*

$$\forall i \in [1, ..., n], \dot{x}_i = f_i(x_1 \geq 0, ..., x_i = 0, ..., x_n \geq 0) > 0.$$

Il est clair qu'un système dynamique fortement positif est aussi un système positif.

Considérons le système linéaire (dans $\mathbb{R}^n$) suivant :

$$\dot{x} = Ax \tag{1.4}$$

Introduisons d'abord la définition suivante :

Définition 1.7. *Soit* A *une matrice d'ordre* n. *La matrice* A *est dite matrice de Metzler si tous les éléments non-diagonaux sont positifs c'est-à-dire, si* $a_{ij} \geq 0 \ \forall i \neq j$.

Théorème 1.2. *Le système linéaire* (1.4) *est un système linéaire positif si et seulement si* A *est une matrice de Metzler.*

Preuve Pour prouver la positivité de (1.4), il est nécessaire que, $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n_+, \forall i = 1, 2, ..., n, \forall t \geq 0$ telle que $x_i = 0$, alors $\dot{x_i} \geq 0$. Ainsi, $\forall i, x_i = 0$ implique

$$\dot{x_i} = a_{ii}x_i + \sum_{j \neq i} a_{ij}x_j$$

$$= \sum_{j \neq i} a_{ij}x_j$$

Pour s'assurer que $\dot{x_i} \geq 0$ pour toutes valeurs positives de x_j, il est nécessaire que $\forall i, i \neq j, a_{ij} \geq 0$. Par conséquent, une condition nécessaire pour que le système du modèle (1.4) soit positive est que A soit une matrice de Metzler.

1.2.1.3 Systèmes dynamiques coopératifs

Une classe des systèmes dynamiques se rapprochant le plus des systèmes linéaires positifs est la classe des systèmes "coopératifs" : la vitesse de variation d'une variable d'état est une fonction croissante (*en tout point*) des autres variables d'état.

Nous allons définir d'abord les systèmes dynamiques coopératifs. Considérons le système dynamique non autonome, $t \in \mathbb{R}$, dans un domaine ouvert convexe, $D \subset \mathbb{R}^n$

$$\dot{x} = f(t, x) \tag{1.5}$$

Nous noterons par la suite $x(t, x)$ (ou $x_f(t, x)$ s'il y a une ambiguïté) la trajectoire du système (1.5) issue de la condition initiale x_0.

Définition 1.8. *Le système dynamique* (1.5) *est coopératif si et seulement la fonction est telle que*

$$\forall i \neq j, \forall t \geq 0, \forall x \in D, \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(t, x) \geq 0,$$

c'est à dire que la jacobienne du système (1.5) *est pour tout temps et en tout point une matrice de Metzler.*

Les résultants les plus importants sur les systèmes dynamiques coopératifs sont ceux assurant la conservation de la relation d'ordre pour les trajectoires d'un système coopératif initialisées en x_0, y_0 et z_0.

Définition 1.9. *Soit* $x = (x_1, x_2, x_3, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n, A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$

— *On dit que le vecteur* x*, (respectivement la matrice* A*) est strictement positif, et on note* $x \gg 0$ *(respectivement* $A \gg 0$*), si pour tout* $i, 1 \leqslant i \leqslant n, x_i > 0$ *(respectivement pour tout* $i, j, 1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant n, (a_{ij}) > 0$*).*

— *On dit que le vecteur x, (respectivement la matrice A) est positif, et on note $x > 0$ (respectivement $A > 0$) si pour tout $i, 1 \leqslant i \leqslant n, x_i \geq 0$; et il existe aumoins un i tel que $x_i > 0$ (respectivement pour tout $i, j, 1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant n, (a_{ij} \geq 0)$ et pour aumoins un couple $(a_{ij} > 0)$.*

— *On dit que le vecteur x, (respectivement la matrice A) est positif (largement)et on note $x \geq 0$ (respectivement $A \geq 0$), si $x > 0$ ou $x = 0$ (respectivement $A > 0$ ou $A = 0$).*

Théorème 1.3. *Considérons le système coopératif (1.5). Soient $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et $y_0 \in \mathbb{R}^n$ tels que $x_0 \geq y_0$ $(resp. >, \gg)$ implique $x(t, x_0) \geqslant y(t, x_0)$ $(resp. >, \gg)$, $\forall t \geq 0$.[29]*

Théorème 1.4. *Considérons les systèmes dynamiques définis sur un ouvert convexe invariant $D \subset \mathbb{R}^n$ initialisés en x_0, y_0, z_0 appartenant à $D : \dot{y} = g(t, y)$, $\dot{x} = f(t, x)$, $\dot{z} = h(t, z)$. Supposons que :*

1. *Le système $\dot{x} = f(t, x)$ est coopératif (c'est à dire $\forall i \neq j, \forall x \in D, \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(t, x) \geq 0,$)*
2. *Pour tout $a \in D$ et pour tout $t \geq 0, g(t, a) \leq f(t, a) \leq h(t, a)$.*
3. *$y_0 \leq x_0 \leq z_0$*

Alors pour tout $t \geq 0 : x_g(t, y_0) \leq x_f(t, x_0) \leq x_h(t, z_0)$

Théorème 1.5. *Considérons le système coopératif autonome $\dot{x} = f(x)$. ce système est positif si et seulement si $f(0) \geq 0$.*

Théorème 1.6. *Soient $x_1, x_2 \in D$ tel que $x_1 \leq x_2, [x_1, x_2] \in D$ et $f(x_2) \leq f(x_1)$. Alors le système $\dot{x} = f(x)$ définit un système dynamique positif sur $[x_1, x_2]$. De plus, si $[x_1, x_2]$ contient un point d'équilibre unique, alors ce point est globalement asymptotiquement stable sur $[x_1, x_2]$ [43].*

1.2.1.4 Reproduction de base

En écologie, il existe un seuil à partir d'un concept sous-jacent pour déterminer la propagation ou le déclin d'une population d'insectes. Le nombre de descendant de base N_0 est le nombre moyen des jeunes femelles générées par une femelle pendant toute sa durée de vie. Son équivalent en épidémiologie est le nombre de Reproduction de base , noté R_0, qui est le nombre de cas secondaires générés par un seul individu infecté pendant toute sa période de contagiosité lorsqu'il est introduit dans une population sensible [3, 13]. La quantité seuil (N_0) détermine généralement si la population de ravageur persiste dans la parcelle $(N_0 > 1)$ ou elle est décroissante encore jusqu'à l'extinction $(N_0 \leq 1)$: c'est la stabilité de l'équilibre trivial.

Si $N_0 > 1$, la situation habituelle est qu'il existe un équilibre positif qui est asymptotiquement stable. Cet échange de stabilité entre l'équilibre trivial et positif se produit à $N_0 = 1$ est appelé bifurcation transcritique (ou bien super-critique).

Pour les modèles simples, le nombre de reproduction de base ou le nombre de progéniture de base est le produit du taux d'infection et la durée de la contagiosité. Mais également, la méthode de l'opérateur de prochaine génération est utilisé pour calculer N_0 et permet d'établir la stabilité asymptotique locale du point d'équilibre endémique associé. La méthode est décrite ci-dessous en utilisant la formulation et les notations tirées dans [49].

Soit $x = (x_1, ..., x_n)$, le nombre d'individus dans chaque compartiment avec chaque $x_i \geqslant 0$ et les m premiers compartiments correspondent aux individus infectés.

Définissons X_s comme étant l'ensemble de tous les états sans maladie, c'est à dire :

$$X_s = \{x \geqslant 0 | x_i = 0, i = 1, ..., m\} .$$

Le modèle de transmission de la maladie comprend des conditions initiales non négatives ainsi que les systèmes d'équations suivants :

$$\dot{x_i} = f_i(x) = \mathcal{F}_i(x) - \mathcal{V}_i(x), i = 1, ..., n \tag{1.6}$$

où $\mathcal{V}_i(x) = \mathcal{V}_i^-(x) - \mathcal{V}_i^+(x)$, $\mathcal{F}_i(x)$ est le taux d'apparition de nouvelles infections dans le compartiment i, $\mathcal{V}_i^+(x)$ le taux de transfert des individus dans le compartiment i par tous les autres moyens et $\mathcal{V}_i^-(x)$ le taux de transfert des individus hors du compartiment i.

Les fonctions sont différentiables au moins deux fois et satisfont aux hypothèses $(i)-(v)$ décrites ci-dessous :

(i) Si $x \geqslant 0$, alors $\mathcal{F}_i(x), \mathcal{V}_i^+(x), \mathcal{V}_i^-(x) \geqslant 0$ *pour* $i = 1, ..., n$.

(ii) Si $x_i = 0$, alors $\mathcal{V}_i^+(x) = 0$. En particulier, si $x \in X_s$ alors $\mathcal{V}_i^+(x) = 0$ pour $i = 1, ..., m$.

(iii) $\mathcal{F}_i(x) = 0$ si $i > m$.

(iv) Si $x \in X_s$ alors $\mathcal{F}_i(x) = 0$ et $\mathcal{V}_i^+(x) = 0$ pour $i = 1, ..., m$.

(v) Si $\mathcal{F}(x) = 0$, alors toutes les valeurs propres de $D\mathcal{F}(x_0)$ ont des parties réelles négatives où $D\mathcal{F}(x_0)$ est la dérivée évaluée à l'équilibre sans maladie, x_0 (c'est à dire la matrice jacobienne).

Soit A une matrice carrée avec des entrées non positives hors diagonale et non négatives en diagonale comme indiqué ci-dessous.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & -a_{12} & -a_{13} & ... \\ -a_{21} & a_{22} & -a_{23} & ... \\ -a_{31} & -a_{32} & a_{33} & ... \\ . & . & . & ... \\ . & . & . & ... \\ . & . & . & ... \end{pmatrix}$$

où les a_{ij} sont non négatives. De plus, A est exprimée comme :

$$A = SI - B, S > 0, B \geqslant 0. \tag{1.7}$$

Définition 1.10. *(M-matrice[36]) : Toute matrice A de la forme (1.7) pour laquelle $S \geqslant \rho(B)$ (où $\rho(B)$ est le rayon spectral de B), est appelée M-matrice.*

Considérons le système suivant :

$$\frac{dx}{dt} = f_i(x) \tag{1.8}$$

Lemme 1.1. *(Van den $Driessche$ et $Watmough$[49]) Si x_0 est un point d'équilibre trivial de (1.8) et $f_i(x)$ satisfait $(i) - (v)$, alors les dérivées $D\mathcal{F}(x_0)$ et $D\mathcal{V}(x_0)$ sont partitionnées comme :*

$$D\mathcal{F}(x_0) = \begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$D\mathcal{V}(x_0) = \begin{pmatrix} V & 0 \\ J_3 & J_4 \end{pmatrix},$$

où F et V sont les $m*m$ matrices définies $F = \left[\frac{\partial \mathcal{F}_i(x_0)}{\partial x_j}\right]$ et $V = \left[\frac{\partial \mathcal{V}_i(x_0)}{\partial x_j}\right]$ avec $1 \leqslant i, j \leqslant m$. De plus, F est non négatif, V est une M-matrice non singuliière et J_3, J_4 sont des matrices associées aux termes de transition du modèle, et toutes les valeurs propres de J_4 ont une partie réelle positive.

Le théorème suivant indique que R_0 est une quantité seuil qui régit la pérsistence ou contrôle efficace (élimination de la maladie)

Théorème 1.7. *(Van den $Driessche$ et $Watmough$[49]) : Considérons le modèle de transition de la maladie donné par (1.8) avec $f_i(x)$ vérifiant les conditions $(i) - (v)$.*

Si x_0 est un point d'équilibre trivial du modèle, alors x_0 est localement asymptotyquement stable si $R_0 < 1$, mais instable si $R_0 > 1$, où R_0 est définie par $R_0 = \rho(FV^{-1})$.

La formulation ci-dessus a été étendu par Wang et Zhao [51] pour calculer la reproduction ration pour les modèles de transition de maladies dans un environnement périodique.

La stabilité locale énoncé par le théorème 1.7 signifie qu'un flux suffisamment faible d'individu infectieux ne génèrera pas d'éclosion de la maladie à moins que $R_0 > 1$.

1.3 Conclusion

Dans ce premier chapitre, nous avons développé les notions se rapportant sur la culture du riz. Nous avons parlé de son origine, des espèces les plus cultivées en Afrique, en Asie et partout dans le monde. Nous avons évoqué les problèmes rencontrés par cette culture entre autres les *diopsis* qui sont des ravageurs qui causent beaucoup de dégâts. Nous avons aussi développé des outils mathématiques qui vont nous permettre d'étudier la dynamique de la population des *diopsis*.

Chapitre 2

Dynamique de population du diopsis

2.1 Introduction

La description des adultes, des oeufs, des stades larvaires et des pupes du *Diopsis*, ravageur du riz, a été donnée en détails par Descamps [12]. Le *Diopsis thoracica* dépose leurs oeufs sur les feuilles de riz selon diverses modalités.

Pendant la saison sèche, plusieurs millliers d'individus se rassemblent autour des points d'eau permanents, posés sur des plantes les plus souvent ombragées, à quelques centimètres au dessus de la surface de l'eau ; ces essaims en estimation peuvent être observés jusqu'à l'arrivée des premières pluies.

A l'arrivée des pluies, les insectes regagnent les rizières pour y pondre. Le *Diospis thoracica* pond précocement sur les jeunes talles du riz, sa larve se nourrit exclusivement en mineuse des tissus sains du jeune plant qui présente rapidement le symptôme du "coeur mort" [12]. Cette larve nomade prélève successivement sa nourriture sur plusieurs plants de riz. Le tableau suivant résume les caractéristiques essentielles observées sur cette espèce [12].

	D. thoracica
Incubation de l'oeuf	50 heures
Développement larvaire	25-33 jours
Pupaison	10-12 jours
De l'oeuf à l'adulte	44 jours
Maturation de la femelle	15-20 jours
De l'oeuf à l'oeuf	60 jours

TABLE 2.1 – Caractéristiques des *diopsis thoracica*

Le cycle de vie de *Diopsis* est composé de trois stades principaux : Stade Oeuf , Stade larvaire et Stade Adulte. Les oeufs ont une forme allongée avec des côtes et à l' une de ses extrémités un petit excroissance. La période d'incubation des oeufs dure environ 2 à 3 jours avant d' atteindre le stade larvaire. La durée de vie des *Diopsis* varie en conséquence : Larve de 25 à 33 jours, nymphe 10 à 12 jours et adulte 14 jours.

Après l'éclosion, la larve pénètre dans la tige au niveau de la gaine et se nourrit uniquement de tissus sains. La larve quitte la tige pénétrée vers la tige voisine, en détruisant ainsi trois à dix tiges en moyenne au cours de son développement. Le stade adulte est divisé en deux compartiments : les mâles et les femelles. L'accouplement dure 5 à 8 minutes, après le mâle s'envole. Parfois, les femelles s'accouplent plusieurs fois avec le même partenaire ou avec un nouveau partenaire [21].

Dans le présent chapitre, nous allons construire un modèle mathématique basé sur le cycle de vie du *Diopsis*, analysons la sensibilité des paramètres et faisons l'analyse mathématique de ce modèle. Nous allons aussi calculer les points d'équilibre et étudions leur stabilité globale et faisons les simulations numériques afin de valider les résultats théoriques.

2.2 Formulation du modèle

En se basant sur les hypothèses biologiques et écologiques , nous construisons un modèle mathématique décrivant la dynamique de la population du *Diopsis.*

Nous formulons maintenant un modèle basé sur le cycle de vie du *Diopsis* qui est résumé dans la figure 2.1 ci-dessous. On considère trois (3) stades principaux dans le développement du *Diopsis* : Stade oeuf (E), stade larvaire (L) et le stade adulte qui est subdivisé en mâle (A_m), femelles non fécondées (A_f), et femelles fécondées (F) . A un moment donné, la population du *Diopsis* est dans l' un des états suivants : Oeufs, Larves, femelles non fécondées, Mâles et femelles fécondées. Nous désignons ces états par E, L, A_f, A_m, F respectivement.

Posons β le taux d'éclosion des oeufs en larves. Nous supposons également que les larves émergent en adulte (papillons) au taux τ. Parmis les larves qui émergent, on suppose qu'une fraction des larves r devient des femelles non fécondées, tandis que la partie complémentaire des larves $(1-r)$ devient des mâles. Notez que les femelles non fécondées deviennent des femelles fécondées seulement après l'accouplement. Ainsi le taux de transfert de A_f vers F est modélisé par γ. Nous supposons que les femelles fécondées produisent des oeufs à une proportion $\alpha(1-\frac{E}{K})$ où α est le nombre moyen d'oeufs pondus par les

femelles fécondées et K la capacité limite. Les paramètres $\mu_E, \mu_L, \mu_f, \mu_m, \mu_F$ modèlisent respectivement les mortalités naturelles des oeufs (E), des larves (L), des adultes femelles (A_f), des adultes mâles (A_m),et des femelles fécondées (F) et $\tilde{\mu}_L$ la compétition larvaire. Le modèle proposé est structuré dans le diagramme suivant :

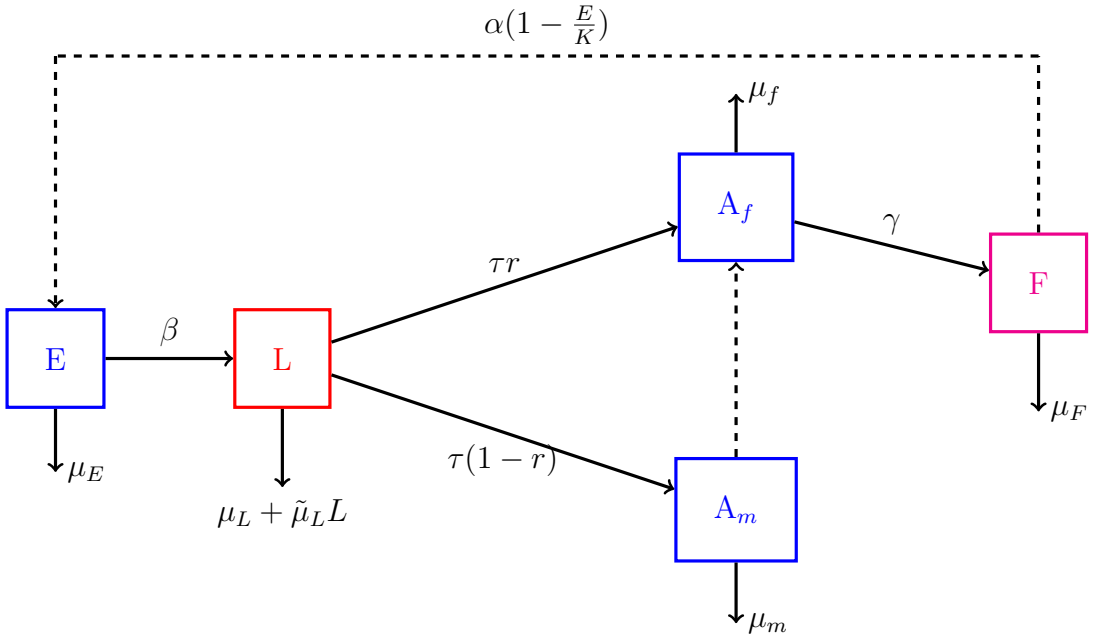


FIGURE 2.1 – Structure du modèle

En utilisant le diagramme de la Figure 2.1, la dynamique de la population du ravageur peut être décrite par le système d'équations différentielles ordinaires non linéaires suivant :

$$\begin{cases} \dot{E} = \alpha\left(1-\frac{E}{K}\right)F - (\beta+\mu_E)\,E \\ \dot{L} = \beta E - (\tau+\mu_L+\tilde{\mu}_L L)\,L \\ \dot{A}_m = \tau(1-r)L - \mu_m A_m \\ \dot{A}_f = \tau r L - (\mu_f+\gamma)\,A_f \\ \dot{F} = \gamma A_f - \mu_F F \end{cases} \tag{2.1}$$

avec conditions initiales non négatives :

$$E(0)=E_0,\ L(0)=L_0,\ A_m(0)=A_{m0},\ A_f(0)=A_{f0},\ F(0)=F_0 \tag{2.2}$$

La signification biologique des paramètres est donnée dans la Table 2.2.

Paramètre	Description	Unité
α	Le nombre moyen des oeufs pondus par un adulte femelle	Jour^{-1}
K	La capacité limite	nombre
β	Le taux des oeufs qui éclosent en larves	Jour^{-1}
τ	Le taux d'émergence des larves en adultes	Jour^{-1}
r	Fraction des larves qui émergent en Adultes femelles	Jour^{-1}
$(1-r)$	Fraction des larves qui émergent en Adultes males	Jour^{-1}
$\tilde{\mu}_L$	Compétition larvaire	$\text{Jour}^{-1}\text{nombre}^{-1}$
μ_E	Taux de mortalité naturelle des oeufs	Jour^{-1}
μ_L	Taux de mortalité naturelle des larves	Jour^{-1}
μ_f	Taux de mortalité naturelle des adultes femelles	Jour^{-1}
μ_m	Le taux de mortalités naturelles des adultes males	Jour^{-1}
μ_F	Mortalité Naturelle des femelles fécondées	Jour^{-1}
γ	Le taux de transfert des femelles non fécondées en femelles fécondées	Jour^{-1}

TABLE 2.2 – Signification des paramètres

2.3 Analyse de la sensibilité

Dans cette section, nous effectuons l'analyse de sensibilité des paramètres afin de détécter les paramètres les plus sensibles, c'est à dire les paramètres qui influencent le plus la variable de sortie du modèle. Cela peut nous aider à prédire l'effet de chaque paramètre du modèle et de les classer selon leur degré de sensibilité. Pour cela, nous utilisons la méthode de sensibilité eFast. Cette méthode met en évidence les effets du premier ordre appelés effets principaux et les effets totaux qui combinent les effets principaux et tous les effets d'interaction des paramètres sur les sorties du modèle. C'est une technique globale de sensibilité basée sur la décomposition ou le repartitionnement de la variance. La variance de la sortie du modèle est décomposée en composantes résultant des effects individuels des paramètres ainsi que leurs interactions [38] et [32].

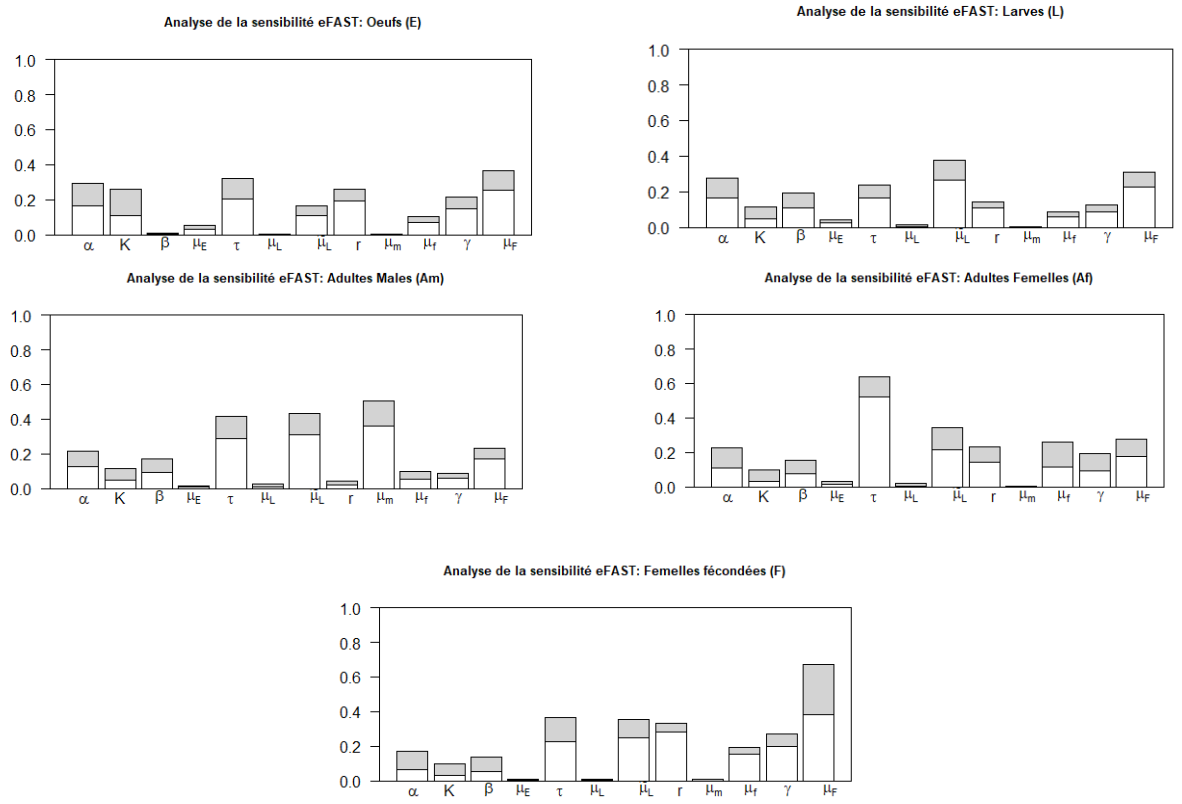


FIGURE 2.2 – Sensibilité des paramètres

La partie blanche de la figure 2.2 montre l'indice de sensibilité du premier ordre (indice principal), tandisque la somme de deux parties (blanc et gris) indique l'indice de sensibilité total. Elle illustre la sensibilité de douze paramètres sur les variables de sortie E, L, A_m, A_f *et* F. Il apparaît clairement que les paramètres $\alpha, k, \tau, r, \gamma, \mu_F$ influencent fortement la variabilité de la variable de sortie E. Sur cette variable, les paramètre τ, μ_F ont pour indices de sensibilité les plus élevés. Ansi, le taux d'émergence des larves en adultes et la mortalité naturelle des femmelles fécondées influencent fortement la variabilité de la variable de sortie E.

Pour L, les paramètres $\alpha, \beta, \tau, \mu_L, r, \gamma, \mu_F$ sont sensibles mais μ_L et μ_F ont la valeur la plus élevée en premier indice de commande par rapport aux autres paramètres. Ce sont des paramètres qui influencent le plus la variable de sortie L.

Pour A_m, les paramètres $\alpha, k, \beta, \tau, \mu_L, \mu_m, \mu_f, \gamma, \mu_F$ sont sensibles mais τ, μ_L, μ_m ont des valeurs les plus élevées en premier indice de commande. Ces sont des paramètres qui influencent le plus sur la variable de sortie A_m.

Pour A_f, les paramètres $\alpha, \beta, \tau, \mu_L, r, \mu_f, \gamma, \mu_F$ sont sensibles mais τ a l'indice de sensibilité le plus élevée du premier ordre. Il a une influence sur la variabilité de la variable

de sortie A_f.

Enfin, les paramètres $\alpha, k; \beta, \tau, \mu_L, r, \mu_f, \gamma, \mu_F$ sont sensibles pour F mais μ_F a la valeur la plus élevée en premier indice de commande. C'est le paramètre le plus influent sur la variable de sortie F.

2.4 Analyse mathématique du modèle

Dans cette section, nous présentons une analyse du modèle (2.1). En effet, l'analyse mathématique permet d'obtenir une quantité impressionnante d'informations sur le modèle. Même si l'on ne sait pas trouver une solution explicite du modèle (2.1), il est important d'en étudier les propriétés mathématiques dans la mesure du possible. Il est nécessaire et important de se poser les questions suivantes :

- Le problème est-il bien posé ? C'est-à-dire y a-t-il existence et unicité de la solution ?
- Les propriétés biologiques auxquelles on s'attend sont-elles satisfaites par les solutions du modèle (2.1) ? Autrement dit, les variables du modèle sont-elles toujours positives ? Les solutions du modèle sont-elles bornées ? Existe-il des points d'équilibre ? Ces points d'équilibre sont-ils stables ou instables ?

Nous allons donc essayer d'apporter des réponses à toutes ces questions tout au long de notre section.

2.4.1 Existence et unicité

Ecrivons le système du modèle (2.1) sous la forme :

$$\dot{X}(t) = F\left(X(t)\right) \tag{2.3}$$

où

$$X(t) = \left(E(t), L(t), A_m(t), A_f(t), F(t)\right)^T$$

et

$$F\left(X(t)\right) = \begin{pmatrix} \alpha\left(1 - \frac{E(t)}{K}\right) F(t) - \left(\mu_E + \beta\right) E(t) \\ \beta E(t) - \left(\tau + \mu_L + \tilde{\mu}_L L\right) L(t) \\ \tau(1-r)L(t) - \mu_m A_m(t) \\ \tau r L(t) - (\mu_f + \gamma) A_f(t) \\ \gamma A_f(t) - \mu_F F(t) \end{pmatrix}$$

Le second membre du système (2.3) est continue et indéfiniment différentiable sur $\mathbb{R}^5_+$. Il est donc localement lipschitzienne sur $\mathbb{R}^5_+$, ce qui garantit l'existence et l'unicité de solution du système (2.1) avec les conditions initiales $X(t_0) = X_0 \in \mathbb{R}^5_+$.

2.4.2 Positivité et bornitude des solutions

Le système (2.1) s'écrit aussi sous la forme matricielle suivante :

$$\dot{X} = A(X)X \tag{2.4}$$

où

$$X(t) = (E, L, A_m, A_f, F)^T$$

et

$$A(X) = \begin{pmatrix} -(\mu_E + \beta + \frac{\alpha F}{K}) & 0 & 0 & 0 & \alpha \\ \beta & -(\tau + \mu_L + \tilde{\mu}_L L) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tau(1-r) & -\mu_m & 0 & 0 \\ 0 & \tau r & 0 & -(\mu_f + \gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma & -\mu_F \end{pmatrix}$$

Considérons le problème suivant

$$\begin{cases} \dot{X} = A(X)X \\ X(t_0) = X_0 \end{cases} \tag{2.5}$$

D'après la définition 1.6 donnée dans les préalables mathématiques, le système (2.5) est positif si et seulement si toutes les trajectoires $X(t, X_0), X_0 \geq 0$ engendrées par le système restent positives pour tout le temps t positif.

Autrement dit, étudier la positivité d'un système dynamique revient à garantir l'invariance par (2.5) de l'orthant positif $\mathbb{R}^5_+$. Pour garantir l'invariance de l'orthant positif $\mathbb{R}^5_+$, il faut et il suffit de vérifier que les frontières de $\mathbb{R}^5_+$ sont infranchissables par les trajectoires du système initialisées dans R^5_+. Il faut donc garantir que pour tout i, si la variable d'état X_i est nulle au temps t (avec $X(t) \geq 0$), X_i est positive, ce qui garantira que pour tout $T > t, X_i(T) \geq 0$ et assurera donc la positivité du système [29].

Une autre façon de prouver la positivité des solutions est de montrer tout simplement que la matrice du système $A(X)$ est une matrice de Metzler.

Il est donc facile de remarquer que, pour le cas de notre système (2.4), la matrice A(X) est une matrice de Metzler. Ce qui garantit la positivité des solutions du système.

Proposition 2.1. *L'ensemble*

$$\Omega = \left\{(E, L, A_f, A_m, F) \in \mathbb{R}_+^5 : E(t) \leq K,\ L(t) \leq \frac{BK}{(\tau+\mu_L)},\ A_f(t) \leq \frac{\tau r BK}{(\tau+\mu_L)(\mu_f+\gamma)},\right.$$
$$\left. A_m(t) \leq \frac{\tau(1-r)\beta K}{\mu_m(\tau+\mu_L)},\ F(t) \leq \frac{\gamma\tau r\beta K}{\mu_F(\mu_f+\gamma)(\tau+\mu_L)}\right\}$$

est positivement invariant pour le système du modèle (2.1).

Preuve

- Montrons que pour tout $t > 0,\ E(t) \leq K$. Soit $t^* = inf\{t > 0 | E(t) \geq K\}$. Ainsi, $E(t^*) = K$ et la première équation du système (2.1) donne

$$\begin{aligned}\dot{E}(t^*) &= -(\mu_E+\gamma)E(t^*)\\ &= -(\mu_E+\gamma)K < 0,\end{aligned}$$

  ce qui montre que $E(t_0) > K$ juste avant t^*. Il existe $t_0 < t^*$ telle que $E(t_0) > K$. Ce qui est absurde car cela contrédit la définition de t^*. On en déduit que $E(t) \leq K$.

- Montrons que pour tout $t > 0,\ L(t) \leq \frac{BK}{(\tau+\mu_L)}$.

  En partant de la deuxième équation du système (2.1)

$$\dot{L} = \beta E - (\tau + \mu_L + \tilde{\mu_L} L)\, L,$$

  On a :

$$\dot{L} \leq \beta K - (\tau + \mu_L + \tilde{\mu_L} L)\, L \qquad car \quad E(t) \leq K$$

$$\Leftrightarrow \dot{L} \leq \beta K - (\tau + \mu_L)\, L$$

  L'intégrale dans l'inégalité précédente nous donne :

$$\Rightarrow L(t) \leq \mathrm{e}^{-\int(\tau+\mu_L)\mathrm{d}t}\left[\int \beta K \mathrm{e}^{\int(\tau+\mu_L)\mathrm{d}t}\mathrm{d}t + L_0\right],$$

$$\Leftrightarrow L(t) \leq \mathrm{e}^{-(\tau+\mu_L)t}\left[\int \beta K \mathrm{e}^{(\tau+\mu_L)t}\mathrm{d}t + L_0\right],$$
$$\Leftrightarrow L(t) \leq \mathrm{e}^{-(\tau+\mu_L)t}\left[\frac{\beta K}{\tau+\mu_L}\mathrm{e}^{(\tau+\mu_L)t} + L_0\right],$$
$$\Leftrightarrow L(t) \leq \frac{\beta K}{\tau+\mu_L}\mathrm{e}^{-(\tau+\mu_L)t}\mathrm{e}^{(\tau+\mu_L)t} + L_0\mathrm{e}^{-(\tau+\mu_L)t},$$
$$or, \quad \mathrm{e}^{-(\tau+\mu_L)t}\mathrm{e}^{(\tau+\mu_L)t} = 1.$$

$$\Leftrightarrow L(t) \leq \frac{BK}{(\tau+\mu_L)} + L_0 \mathrm{e}^{-(\tau+\mu_L)t},$$

cela implique que

$$L(t) \leq \frac{BK}{(\tau+\mu_L)} \quad lorsque \quad t \to \infty.$$

- Partons de la troisième équation du système (2.1) pour Montrer que $A_m(t) \leq \frac{\tau(1-r)\beta K}{\mu_m(\tau+\mu_L)}$

  .

  On a :

  $$\dot{A}_m(t) = \tau(1-r)L(t) - \mu_m A_m(t).$$

  En remplaçant $L(t)$ par $\frac{BK}{(\tau+\mu_L)}$, on a l'inégalité :

  $$\dot{A}_m(t) \leq \frac{\tau(1-r)\beta K}{(\tau+\mu_L)} - \mu_m A_m(t).$$

  Et l'intégration nous donne :

  $$A_m(t) \leq \mathrm{e}^{-\int \mu_m \mathrm{d}t} \left[\int \frac{\tau(1-r)\beta K}{(\tau+\mu_L)} \mathrm{e}^{\int \mu_m \mathrm{d}t} \mathrm{d}t + A_{m0} \right],$$

  $$\Leftrightarrow A_m(t) \leq \mathrm{e}^{-\mu_m t} \left[\int \frac{\tau(1-r)\beta K}{(\tau+\mu_L)} \mathrm{e}^{\mu_m t} \mathrm{d}t + A_{m0} \right],$$

  $$\Leftrightarrow A_m(t) \leq \frac{\tau(1-r)\beta K}{\mu_m(\tau+\mu_L)} \mathrm{e}^{-\mu_m t} \mathrm{e}^{\mu_m t} + A_{m0} \mathrm{e}^{-\mu_m t},$$

  $$Or, \mathrm{e}^{-\mu_m t} \mathrm{e}^{\mu_m t} = 1.$$

  $$\Leftrightarrow A_m(t) \leq \frac{\tau(1-r)\beta K}{\mu_m(\tau+\mu_L)} + A_{m0} \mathrm{e}^{-\mu_m t},$$

  Alors

  $$A_m(t) \leq \frac{\tau(1-r)\beta K}{\mu_m(\tau+\mu_L)} \quad lorsque \quad t \to \infty.$$

- Partons de la quatriième équation du système (2.1) pour montrer que $A_f(t) \leq \frac{\tau r B K}{(\tau+\mu_L)(\mu_f+\gamma)}$.

  On a :

  $$\dot{A}_f(t) = \tau r L(t) - (\mu_f + \gamma) A_f.$$

  En remplaçant $L(t)$ par $\frac{BK}{(\tau+\mu_L)}$, on a l'inégalité :

  $$\dot{A}_f(t) \leq \frac{\tau r \beta K}{(\tau+\mu_L)} - (\mu_f + \gamma) A_f.$$

Et l'intégration nous donne :

$$A_f(t) \leq \mathrm{e}^{-\int(\mu_f+\gamma)\mathrm{d}t}\left[\int \frac{\tau r B K}{(\tau+\mu_L)}\mathrm{e}^{\int(\mu_f+\gamma)\mathrm{d}t}\mathrm{d}t + A_{f0}\right],$$

$$\Leftrightarrow A_f(t) \leq \mathrm{e}^{-(\mu_f+\gamma)t}\left[\int \frac{\tau r B K}{(\tau+\mu_L)}\mathrm{e}^{(\mu_f+\gamma)t}\mathrm{d}t + A_{f0}\right],$$

$$\Leftrightarrow A_f(t) \leq \frac{\tau r B K}{(\tau+\mu_L)(\mu_f+\gamma)}\mathrm{e}^{-(\mu_f+\gamma)t}\mathrm{e}^{(\mu_f+\gamma)t} + A_{f0}\mathrm{e}^{-(\mu_f+\gamma)t},$$

$$Or, \mathrm{e}^{-(\mu_f+\gamma)t}\mathrm{e}^{(\mu_f+\gamma)t} = 1.$$

$$\Leftrightarrow A_f(t) \leq \frac{\tau r B K}{(\tau+\mu_L)(\mu_f+\gamma)} + A_{f0}\mathrm{e}^{-(\mu_f+\gamma)t},$$

Finalement

$$A_f(t) \leq \frac{\tau r B K}{(\tau+\mu_L)(\mu_f+\gamma)} \quad lorsque \quad t \to \infty.$$

- Partons de la cinquième équation du système (2.1) pour montrer que $F(t) \leq \frac{\gamma\tau r\beta K}{\mu_F(\mu_f+\gamma)(\tau+\mu_L)}$

  On a :

$$\dot{F(t)} = \gamma A_f(t) - \mu_F F(t)$$

  En remplaçant$A_f(t)$ par $\frac{\tau r B K}{(\tau+\mu_L)(\mu_f+\gamma)}$,
  nous obtenons l'inégalité suivante :

$$\dot{F(t)} \leq \frac{\gamma\tau r\beta K}{(\mu_f+\gamma)(\tau+d+\mu_L)} - \mu_F F(t),$$

  Alors

$$F(t) \leq \mathrm{e}^{-\int\mu_F\mathrm{d}t}\left[\int \frac{\gamma\tau r\beta K}{(\mu_f+\gamma)(\tau+\mu_L)}\mathrm{e}^{\int\mu_F\mathrm{d}t} + F_0\right],$$

$$\Leftrightarrow F(t) \leq \mathrm{e}^{-\mu_F t}\left[\int \frac{\gamma\tau r\beta K}{(\mu_f+\gamma)(\tau+\mu_L)}\mathrm{e}^{\mu_F t} + F_0\right],$$

$$\Leftrightarrow F(t) \leq \frac{\gamma\tau r\beta K}{\mu_F(\mu_f+\gamma)(\tau+\mu_L)}\mathrm{e}^{-\mu_F t}\mathrm{e}^{\mu_F t} + F_0\mathrm{e}^{-\mu_F t},$$

  Or,

$$\mathrm{e}^{-\mu_F t}\mathrm{e}^{\mu_F t} = 1.$$

$$\Leftrightarrow F(t) \leq \frac{\gamma\tau r\beta K}{\mu_F(\mu_f+\gamma)(\tau+\mu_L)} + F_0\mathrm{e}^{-\mu_F t},$$

  Donc

$$F(t) \leq \frac{\gamma\tau r\beta K}{\mu_F(\mu_f+\gamma)(\tau+\mu_L)} \quad lorsque \quad t \to \infty.$$

Alors, le compact :

$$\Omega = \left\{(E, L, A_f, A_m, F) \in \mathbb{R}^5_+ : E(t) \leq K,\ L(t) \leq \frac{BK}{(\tau+\mu_L)},\ A_f(t) \leq \frac{\tau r BK}{(\tau+\mu_L)(\mu_f+\gamma)},\right.$$
$$\left. A_m(t) \leq \frac{\tau(1-r)\beta K}{\mu_m(\tau+\mu_L)},\ F(t) \leq \frac{\gamma\tau r\beta K}{\mu_F(\mu_f+\gamma)(\tau+\mu_L)}\right\}$$

est positivement invariant et par conséquent, toutes les solutions du modèles sont bornées.

2.4.3 Point d'équilibre trivial et Nombre de descendants de base

Nous calculons $\mathcal{N}_0$ le "*Basic offspring number*" ou le nombre de descendants (ou progéniture) de base du modèle (2.1). Nous allons utiliser la méthode de Van den Driessche and J. Watmough [49] (voir le premier chapitre pour plus d'informations sur la méthode). Le système (2.1) possède un point d'équilibre trivial $Eq^0 = (0, 0, 0, 0, 0)$. Ce point d'équilibre est obtenu en égalant à zéro la partie droite du système lorsque $F = 0$.

Nous posons :

— $\mathcal{F}_i(x)$ le taux de recrutement de nouveaux individus dans le compartiment i

— $\mathcal{V}_i^+(x)$ le transfert des individus dans le compartiment i

— $\mathcal{V}_i^-(x)$ le transfert des individus hors du compartiment i

Le système (2.1) peut s'écrire

$$\dot{X}_i = \mathcal{F}_i(x) - \mathcal{V}_i(x)$$

où $\mathcal{V}_i(x) = \mathcal{V}_i^-(x) - \mathcal{V}_i^+(x)$ avec $i = 1, 2, 3, 4, 5$. Sous forme matricielle, on a

$$\dot{X} = \mathcal{F}(x) - \mathcal{V}(x)$$

où

$$\mathcal{F}(x) = \begin{pmatrix} \alpha(1-\frac{E}{K})F \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\mathcal{V}(x) = \begin{pmatrix} (\mu_E+\beta)E \\ (\tau+\mu_E+\tilde{\mu}_L L)L - \beta E \\ \mu_m A_m - \tau(1-r)L \\ (\mu_f+\gamma)A_f - \tau r L \\ \mu_F F - \gamma A_f \end{pmatrix}$$

Calculons maintenant les matrices jacobiennes de $\mathcal{F}$ et de $\mathcal{V}$ au point d'équilibre trivial Eq^0. Nous obtenons

$$F = J_{\mathcal{F}}(Eq^0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$V = J_{\mathcal{V}}(Eq^0) = \begin{pmatrix} (\mu_E + \beta) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\beta & (\tau + \mu_L) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\tau(1-r) & \mu_m & 0 & 0 \\ 0 & -\tau r & 0 & (\mu_f + \gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma & \mu_F \end{pmatrix}$$

Nous calculons maintenant l'inverse de la matrice V. Ce qui nous permet de calculer la *matrice de la prochaine génération*. D'après la méthode de Van den Driessche et Watmough [49] et Diekmann [13], nous appelons *matrice de la prochaine génération* la matrice obtenue en calculant le produit de la matrice des recrutements des nouveaux individus dans le compartiment i et l'inverse de la matrice des transferts des individus dans et hors du compartiment i, c'est-à-dire FV^{-1} où V^{-1} est l'inverse de la matrice V. Nous obtenons

$$V^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\mu_E+\beta} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\beta}{(\mu_E+\beta)(\tau+\mu_L)} & \frac{1}{(\tau+\mu_L)} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\tau(1-r)\beta}{\mu_m(\mu_E+\beta)(\tau+\mu_L)} & \frac{\tau(1-r)}{\mu_m(\tau+\mu_L)} & \frac{1}{\mu_m} & 0 & 0 \\ \frac{\tau r\beta}{(\mu_f+\gamma)(\mu_E+\beta)(\tau+\mu_L)} & \frac{\tau r}{(\mu_f+\gamma)(\tau+\mu_L)} & 0 & \frac{1}{(\mu_f+\gamma)} & 0 \\ \frac{\gamma\tau r\beta}{\mu_F(\mu_f+\gamma)(\mu_E+\beta)(\tau+\mu_L)} & \frac{\gamma\tau r}{\mu_F(\mu_f+\gamma)(\tau+\mu_L)} & 0 & \frac{\gamma}{\mu_F(\mu_f+\gamma)} & \frac{1}{\mu_F} \end{pmatrix}.$$

Ainsi, la matrice de la prochaine génération est

$$FV^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha\tau\gamma r\beta}{\mu_F(\mu_f+\gamma)(\mu_E+\beta)(\tau+\mu_L)} & \frac{\alpha\gamma\tau r}{\mu_F(\mu_f+\gamma)(\tau+\mu_L)} & 0 & \frac{\alpha\gamma}{\mu_F(\mu_f+\gamma)} & \frac{\alpha}{\mu_F} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le nombre de descendants (progénitures) de base est obtenu en calculant le *rayon spectral* de la matrice de la prochaine génération $\rho(FV^{-1})$.

Nous avons donc

$$\mathcal{N}_0 = \rho(FV^{-1}) = \frac{\alpha\tau\gamma r\beta}{\mu_F(\mu_f+\gamma)(\mu_E+\beta)(\tau+\mu_L)}. \tag{2.6}$$

Le nombre de descendants de base se calcule à partir de la stabilité du point d'équilibre trivial Eq^0. En effet, l'évolution d'une population est en générale liée à son nombre de descendants de base. C'est le nombre moyens de jeunes femelles nées d'un individu femelle qui serait soumise à chaque âge, durant sa vie féconde, aux conditions de fécondité et de mortalités observées durant la période considérée. Ce nombre permet donc de mesurer le degré de remplacement d'une génération par la suivante.

Ainsi, d'après Van den Driessche et Watmough [49], on a le résultat suivant :

Lemme 2.1. *Le point d'équilibre trivial* $Eq^0 = (0, 0, 0, 0, 0)$ *du modèle* (2.1) *est localement asymptotiquement stable si* $\mathcal{N}_0 \leq 1$ *et instable si* $\mathcal{N}_0 > 1$.

Ecologiquement parlant, le lemme 2.1 stipule que si $\mathcal{N}_0 \leq 1$, il y aura extinction de la population du *Diopsis* dans un champ du riz alors qu'il y aura persistance de la population lorsque $\mathcal{N}_0 > 1$.

2.4.4 Point d'équilibre non trivial et sa stabilité

Soit $Eq^* = (E^*, L^*, A_m^*, A_f^*, F^*)$ le point d'équilibre non trivial du système (2.1) avec $E^* \neq 0, L^* \neq 0, A_m^* \neq 0, A_f^* \neq 0$ et $F^* \neq 0$ satisfaisant le système d'équations suivant

$$\begin{cases} \alpha\left(1 - \frac{E^*}{K}\right) F^* - (\beta + \mu_E) E^* = 0 \\ \beta E^* - (\tau + \mu_L + \tilde{\mu}_L L^*) L^* = 0 \\ \tau(1-r)L^* - \mu_m A_m^* = 0 \\ \tau r L^* - (\mu_f + \gamma) A_f^* = 0 \\ \gamma A_f^* - \mu_F F^* = 0 \end{cases} \tag{2.7}$$

En effet, d'après l'équation

$$\tau(1-r)L^* - \mu_m A_m^* = 0,$$

on a

$$A_m^* = \frac{\tau(1-r)}{\mu_m} L^*$$

et de

$$\tau r L^* - (\mu_f + \gamma) A_f^* = 0,$$

on a :

$$A_f^* = \frac{\tau r}{\mu_f + \gamma} L^*.$$

En mettant l'expression précédente dans la cinquième équation du système (2.7), on obtient

$$F^* = \frac{\gamma\tau r}{\mu_F(\mu_f+\gamma)}L^*.$$

Considérons maintenant la première équation du système (2.7) :

$$\alpha(1-\frac{E^*}{K})F^* - (\mu_E+\beta)E^* = 0$$

En utilisant l'expression de F^*, cette première équation du système devient

$$\alpha(1-\frac{E^*}{K})\frac{\gamma\tau r}{\mu_F(\mu_f+\gamma)}L^* - (\mu_E+\beta)E^* = 0,$$

ce qui est équivalent à

$$\alpha\gamma\tau rKL^* - \left(K\mu_F(\mu_f+\gamma)(\mu_E+\beta) + \alpha\gamma\tau rL^*\right)E^* = 0,$$

Par conséquent,

$$E^* = \frac{\alpha\gamma\tau rKL^*}{K\mu_F(\mu_f+\gamma)(\mu_E+\beta)+\alpha\gamma\tau rL^*}.$$

De la deuxième équation du système $\beta E^* - (\tau+\mu_L+\tilde{\mu}_L L^*)\,L^* = 0$, On a :

$$\begin{aligned}
&\beta E^* - (\tau+\mu_L)L^* - \tilde{\mu}_L {L^*}^2 = 0,\\
\Leftrightarrow\ &\tilde{\mu}{L^*}^2 + (\tau+\mu_L)L^* - \beta E^* = 0,\\
\Leftrightarrow\ &\tilde{\mu}_L {L^*}^2 + (\tau+\mu_L)L^* - \frac{\beta K\alpha\tau\gamma rL^*}{\alpha\tau\gamma rL^* + K\mu_F(\mu_f+\gamma)(\mu_E+\beta)} = 0,\\
\Leftrightarrow\ &\alpha\tau\gamma r\tilde{\mu}_L {L^*}^3 + \left(K\mu_F\tilde{\mu}_L(\mu_E+\beta)(\mu_f+\gamma) + \alpha\tau\gamma r(\tau+\mu_L)\right){L^*}^2\\
&+\left(K\mu_F(\mu_f+\gamma)(\mu_E+\beta)(\tau+\mu_L) - K\beta\alpha\tau\gamma r\right)L^* = 0,\\
\Leftrightarrow\ &\alpha\tau\gamma r\tilde{\mu}_L {L^*}^2 + \left(K\mu_F\tilde{\mu}_L(\mu_E+\beta)(\mu_f+\gamma) + \alpha\tau\gamma r(\tau+\mu_L)\right)L^*\\
&+\left(K\mu_F(\mu_f+\gamma)(\mu_E+\beta)(\tau+\mu_L) - K\beta\alpha\tau\gamma r\right) = 0,\\
\Leftrightarrow\ &\alpha\tau\gamma r\tilde{\mu}_L {L^*}^2 + \left(K\mu_F\tilde{\mu}_L(\mu_E+\beta)(\mu_f+\gamma) + \alpha\tau\gamma r(\tau+\mu_L)\right)L^*\\
&+K\mu_F(\mu_f+\gamma)(\mu_E+\beta)(\tau+\mu_L)\left(1-\frac{\beta\alpha\tau\gamma r}{\mu_F(\mu_f+\gamma)(\mu_E+\beta)(\tau+\mu_L)}\right) = 0.
\end{aligned}$$

Au final, on obtient le polynôme du second degré en L^* suivant :

$$a_2{L^*}^2 + a_1L^* + a_0 = 0, \tag{2.8}$$

où

$$\begin{aligned}
a_2 &= \alpha\tau\gamma r\tilde{\mu}_L,\\
a_1 &= K\mu_F\tilde{\mu}_L(\mu_E+\beta)(\mu_f+\gamma) + \alpha\tau\gamma r(\tau+\mu_L),\\
a_0 &= K\mu_F(\mu_f+\gamma)(\mu_E+\beta)(\tau+\mu_L)\left(1-\frac{\beta\alpha\tau\gamma r}{\mu_F(\mu_f+\gamma)(\mu_E+\beta)(\tau+\mu_L)}\right),\\
&= K\mu_F(\mu_f+\gamma)(\mu_E+\beta)(\tau+\mu_L)\left(1-\mathcal{N}_0\right).
\end{aligned}$$

Le nombre des solutions possibles de l'équation (2.8) dépend du signe des coefficients a_2, a_1, a_0. Pour ce faire, nous utilisons la règle des signes de Descartes. Ainsi, les solutions positives possibles sont résumées dans la Table 2.3 suivante.

Condition pour $\mathcal{N}_0$	a_2	a_1	a_0	Solutions positives possibles
$\mathcal{N}_0 < 1$	+	+	+	pas de solutions
$\mathcal{N}_0 > 1$	+	+	-	une solution possible

TABLE 2.3 – Solutions positives possibles de l'équation (2.8)

Par conséquent, il apparaît clairement qu'il ne peut y avoir qu'une seule solution positive de l'équation (2.8) lorsque $\mathcal{N}_0 > 1$.

D'où le point d'équilibre non trivial $Eq^* = (E^*, L^*, A_m^*, A_f^*, F^*)$ défini par :

$$\begin{aligned} E^* &= \frac{\alpha\gamma\tau r K L^*}{K\mu_F(\mu_f+\gamma)(\mu_E+\beta)+\alpha\gamma\tau r L^*}, \\ A_m^* &= \frac{\tau(1-r)}{\mu_m} L^*, \\ A_f^* &= \frac{\tau r}{\mu_f+\gamma} L^*, \\ F^* &= \frac{\gamma\tau r}{\mu_F(\mu_f+\gamma)} L^* \end{aligned}$$

où L^* est la solution positive de l'équation (2.8).

2.4.5 Stabilité globale des points d'équilibre

Utilisons les résultats des systèmes coopératifs donnés dans les préalables mathématiques pour étudier la stabilité globale des équilibres. Nous avons les résultats suivants :

Théorème 2.1. *Le système du modèle (2.1) définit un système dynamique positif en* $\mathbb{R}^5_+$.

(i) *Si* $N_0 \leq 1$, *alors le point d'équilibre* $Eq^0 = (0,0,0,0,0)$ *est globalement asymptotiquement stable sur* $\mathbb{R}^5_+$.

(ii) *Si* $N_0 > 1$, *alors le point d'équilibre* Eq^0 *est instable et le point d'équilibre positif* $Eq^* = \left(E^*, L^*, A_m^*, A_f^*, F^*\right)$ *est globalement asymptotiquement stable sur* $\mathbb{R}^5_+ \setminus \{(0,0,0,0,0)\}$.

Preuve

(i) Si $\mathcal{N}_0 \leq 1$, le système possède l'unique point d'équilibre trivial Eq^0. Prenons $a = (0,0,0,0,0)$ et $b = \left(K, \frac{BK}{(\tau+\mu_L)}, \frac{\tau r BK}{(\tau+\mu_L)(\mu_f+\gamma)}, \frac{\tau(1-r)\beta K}{\mu_m(\tau+\mu_L)}, \frac{\gamma\tau r\beta K}{\mu_F(\mu_f+\gamma)(\tau+\mu_L)}\right)$. En calculant

$f(a)$ et $f(b)$ dans

$$f(X) = \begin{pmatrix} \alpha\left(1 - \frac{E(t)}{K}\right) F(t) - (\mu_E + \beta)\, E(t) \\ \beta E(t) - (\tau + \mu_L + \tilde{\mu}_L L)\, L(t) \\ \tau(1-r)L(t) - \mu_m A_m(t) \\ \tau r L(t) - (\mu_f + \gamma) A_f(t) \\ \gamma A_f(t) - \mu_F F(t) \end{pmatrix};$$

on a $f(a) = 0$ et

$$f(b) = \begin{pmatrix} -(\beta + \mu_E)\, k \\ -\frac{\tilde{\mu}_L \beta^2 K^2}{(\tau + \mu_L)^2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $f(0) = 0$ et $f(b) \leq 0$, alors d'après le théorème 1.6 donné dans les préalables mathématiques du premier chapitre, le système du modèle (2.1) définit un système dynamique positif sur $[0, b]$. Etant donné que $Eq^0 \in [0, b]$, le système du modèle (2.1) admet une unique solution dans $[0, b]$ pour tout $t \geq 0$. Par conséquent, l'équilibre trivial Eq^0 est globalement assymptotiquement stable sur $[0, b]$ quand $N_0 \leq 1$.

(ii) Pour $N_0 > 1$, en prenant $Eq^* \in [a, b]$ alors $f(Eq^*) = 0$ et $f(b) \leq 0$. Ainsi, d'après le théorème 1.6, l'équilibre Eq^* est globalement asymptotiquement stable sur $[Eq^*, b]$. Puisque Eq^* peut être choisi plus petit que tout $x > 0$, alors Eq^* est asymptotiquement stable sur Ω avec bassin d'attraction $\tilde{\Omega} = \Omega \backslash (0, 0, 0, 0, 0)$

2.5 Simulations numériques

Dans cette section, nous présentons les résultats des simulations numériques pour illustrer et valider les résultats analytiques obtenus dans la section précédente. Les valeurs des paramètres sont donnés dans le tableau 2.4 suivant :

Paramètres	Valeurs
α	5
K	500
β	0,45
τ	variable
r	0,5
$\tilde{\mu}_L$	0,6
μ_E	0,4
μ_L	0,4
μ_f	0,1
μ_m	0,1
μ_F	0,25
γ	0,7

TABLE 2.4 – Valeur des paramètres constants

Les résultats des simulations numériques du modèle (2.1) montrant les trajectoires de la population du *Diopsis* pour plusieurs conditions initiales dans les stades Oeufs, larvaires, adultes males, adultes femelles et femelles fécondées lorsque $\mathcal{N}_0 \leq 1$ et $\mathcal{N}_0 > 1$ sont présentés dans les figures 2.3 et 2.4 respectivement.

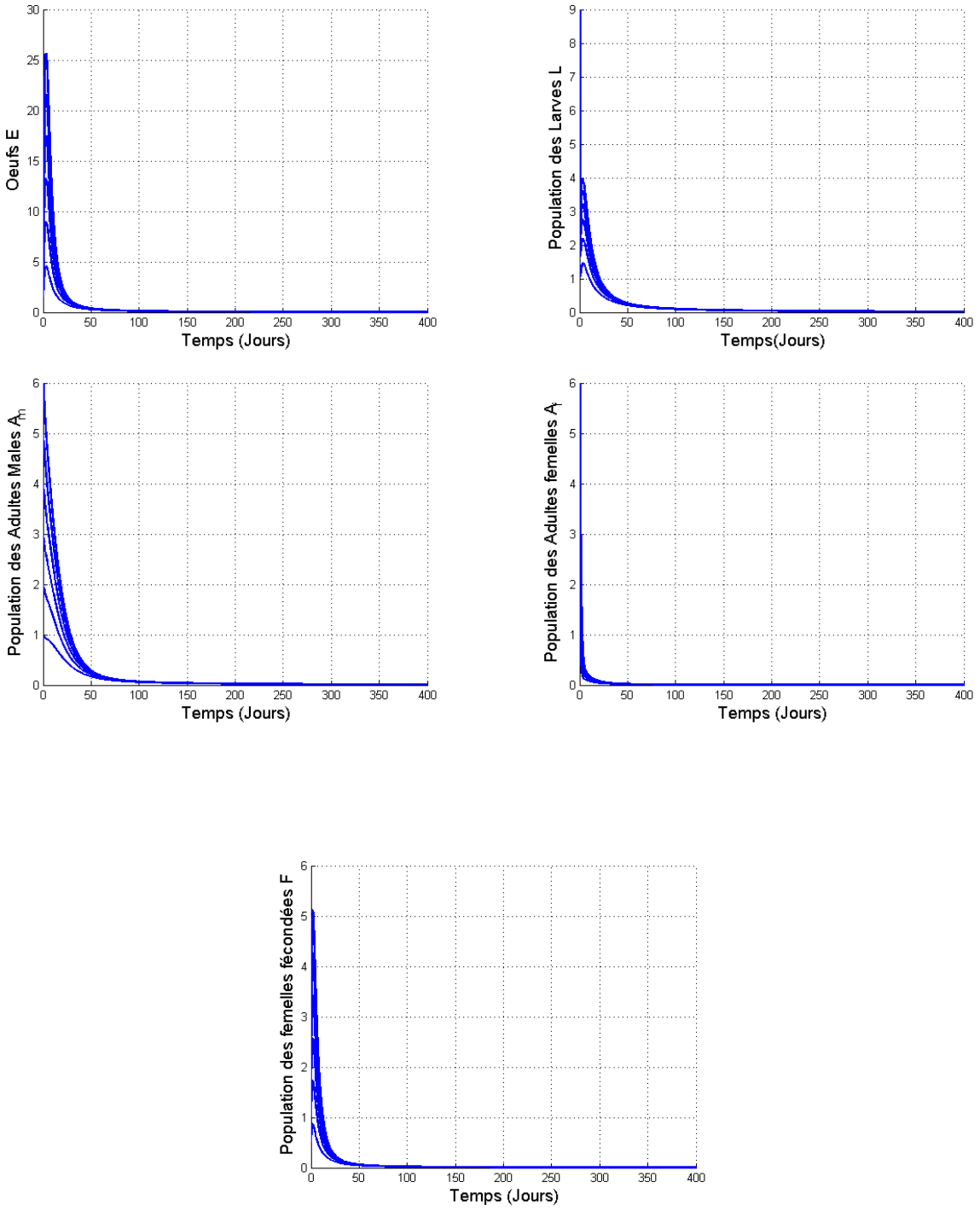


FIGURE 2.3 – Simulation du système du modèle (2.1) en utilisant les conditions initiales variées lorsque $\tau = 0.11$ (tel que $\mathcal{N}_0 = 0.9991 < 1$). Tous les autres valeurs des paramètres sont données dans le tableau 2.2

Les figures 2.3 présentent les trajectoires du système du modèle (2.1) lorsque $\tau = 0.11$ (tel que $\mathcal{N}_0 = 0.9991 < 1$). Elles illustrent que les trajectoires du système du modèle (2.1) convergent vers l'équilibre trivial Eq^0. Cela signifie que la population du *Diopsis* disparait

dans le champs du riz.

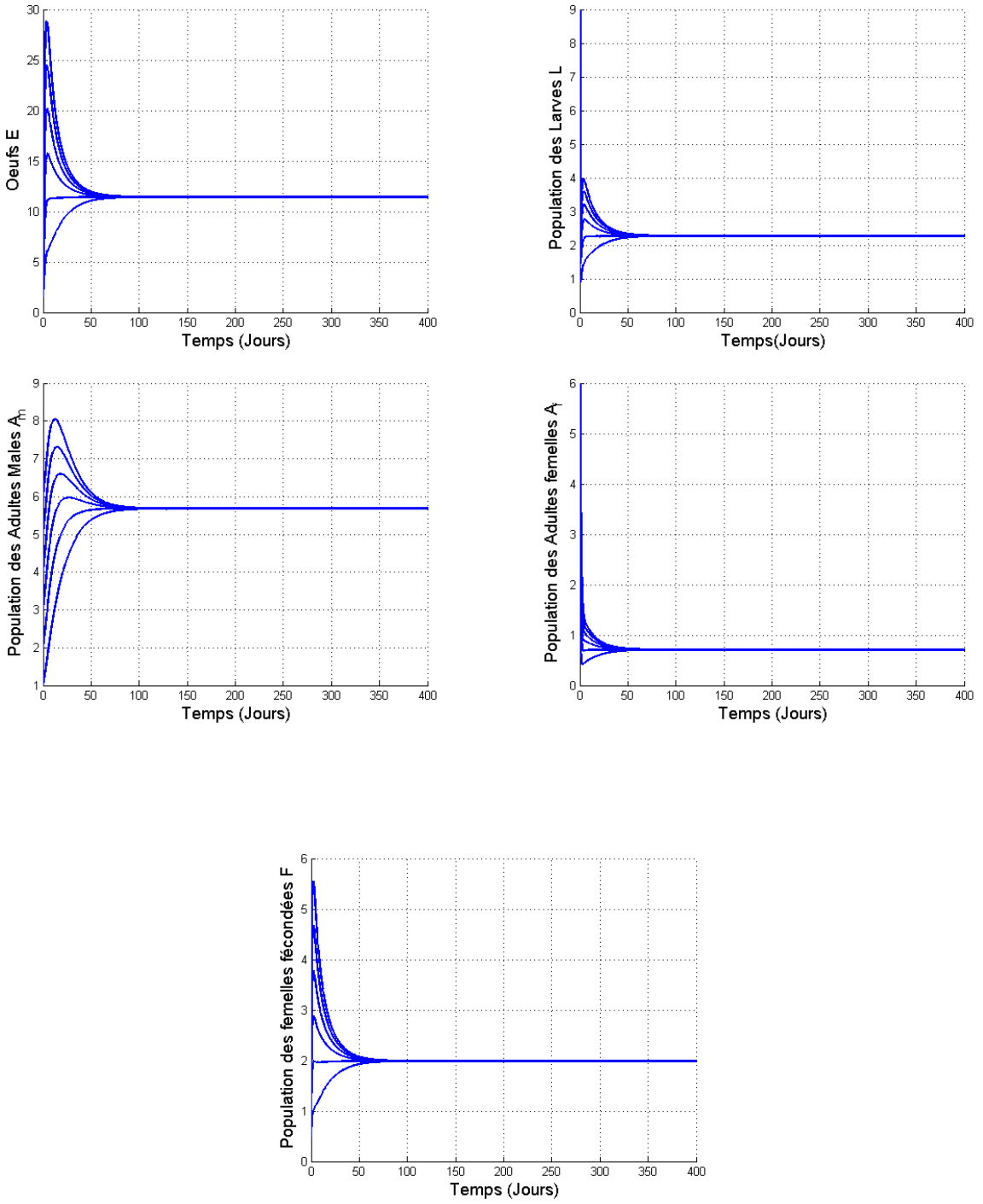


FIGURE 2.4 – Simulation du système du modèle (2.1) en utilisant les conditions initiales variées lorsque $\tau = 0.5$ (tel que $\mathcal{N}_0 = 2.5735 > 1$). Tous les autres valeurs des paramètres sont données dans le tableau 2.2

Les figures 2.4 présentent les trajectoires du système du modèle (2.1) lorsque $\tau = 0.5$ (tel que $\mathcal{N}_0 = 2.5735 > 1$). Elles illustrent que les trajectoires du système du modèle (2.1)

convergent vers le point d'équilibre non trivial Eq^*. Ce qui signifie que, dans de telles conditions, la population du *Diopsis* persiste dans le champs du riz.

2.6 Conclusion

Nous avons porté notre chapitre sur la dynamique des population du ravageur *Diopsis thoracica*. Nous avons formulé un modèle mathématique de la dynamique de la population de cet insecte ravageur en se basant sur son cycle de développement. L'analyse de sensibilité a été effectuée. Nous avons constaté qu'il y a des paramètres qui ont une influence très significative sur les variables de sortie. Nous avons déterminé un seuil appélé "nombre de progénuture de base (*Basic Offspring Number*)" $\mathcal{N}_0$. Selon les valeurs des paramètres de $\mathcal{N}_0$, nous avons montré qu'il existe un point d'équilibre correspondant à l'extinction de la population et un autre qui correspond à la persistance de la population du *Diopsis* dans le champs du riz. Nous avons donc montré que lorsque $\mathcal{N}_0 \leq 1$, l'équilibre trivial est globalement assymptotiquement stable, alors que lorsque $\mathcal{N}_0 > 1$, l'équilibre trivial est instable et il existe un équilibre unique non trivial qui est globalement asymptotiquement stable. De l'analyse de la sensibilité et de l'expression de $\mathcal{N}_0$, il apparaît clairement que certains paramètres jouent un rôle important dans l'évolution de la population du *Diopsis*. En réduisant ou en augmentant la valeur de ces paramètres de telle sorte que le nombre $\mathcal{N}_0 \leq 1$, cela pourra contribuer à l'élimination progressive du ravageur dans un champ de riz.

Conclusion générale et perspectives

Dans les travaux de ce mémoire, nous nous sommes intéressés à la modélisation, l'analyse et la simulation de la dynamique d'évolution du *Diopsis*, ravageur du riz (*Oryza sativa*). Cet insecte qui se développe sur les plants de plusieurs céréales est un ravageur le plus dangereux de la culture du riz dans les régions du monde et plus particulièrement en Afrique. Son étonnante capacité de destruction de plusieurs tiges du riz nous ont permis d'aborder le problème de modélisation. L'approche développée consiste à formuler un modèle de type compartimental. Nous nous sommes intéressés à la formulation d'un modèle décrivant la dynamique de croissance du ravageur qui repose sur le cycle de vie et la biologie de l'insecte. Ceci nous a conduit à une étude qualitative d'un système d'équation différentielle ordinaire. Nous avons montré l'existence d'un paramètre de seuil $\mathcal{N}_0$ assurant l'existence des points d'équilibre et leur stabilité. Suivant les valeurs du seuil N_0, nous avons donné les conditions de la stabilté globale des états d'équilibres. Plus précisement, nous avons montré que suivant les valeurs des paramètres de $\mathcal{N}_0$, il y a un équilibre stable correspondant à l'extinction de la population et un autre qui correspond à la persistence de la population du *Diopsis* dans le champs du riz.

En perspective, il serait intéressant de coupler le modèle étudié avec la croissance de la culture du riz pour pouvoir prédire ou estimer les dégâts causés par le ravageur dans un champ du riz. Le *Diopsis* notamment dans le stade adulte peut se déplacer d'un champ à un autre, cela peut entraîner l'inéfficacité d'une ou des méthodes de contrôle, il serait donc intéressant de modéliser cet aspect en considérant l'évolution de l'insecte dans le temps et dans l'espace. On peut aussi se demander par exemple si il est judicieux de contrôler le ravageur en utilisant seulement les produits chimiques ou les méthodes biologiques ? Cela revient à faire une étude mathématique rentrant dans le cadre la théorie du controle optimal afin d'évaluer l'éfficacité de ces méthodes de contrôle et proposer une meilleure statégies pour pouvoir limiter ou réduire l'expansion et la force d'attaque de ce ravageur. Il est également intéressant de varier certains paramètres afin de tenir compte de l'influence de la variation climatique (par exemple la température et l'humidité) dans l'évolution de l'insecte. Les résultats obtenus dans ce travail nous incitent à aller plus loin,

c'est-à-dire à mettre en place des nouvelles expérimentations afin d'obtenir des données complémentaires pour le contrôle des *Diopsis*.

Bibliographie

[1] ADRAO (Association pour le Développement de la Riziculture en Afrique de l'Ouest), 1996. *Rapport annuel*. Bouaké (Côte d'Ivoire), 59 p.

[2] Alghali AM. 1983. Relative susceptibility of some rice varieties to the stalk-eyed fly Diopsis thoracica West. *Insect Sci. Appl*. 4 :135-140.

[3] Anderson R.M. and May R.M,1991. *Infectious Disease of Humans*. Oxford university press.

[4] Appert, J., 1964. *Les chenilles mineuses des céréales en Afrique tropicale*. Agron. Trop. 19, 60-74.

[5] Appert J.et Deuse J., 1988, *Le technicien d'agriculture tropicale : insectes nuisibles aux cultures vivrières et maraîchères*.Éd. Maisonneuve et Larose et ACCT. (Paris), 267 p.

[6] Banwo, O.O., 2002. Management of major insect pests of rice in Tanzania.*Plant Prot. Sci*. 38(3), 108-113.

[7] Bocco, R., Gandonou C. B., Dannon, A. E., Zanklan, A. S., 2017. *Diopsis thoracica and D. apicalis damaging rice production in Africa*.

[8] Brenière, J., 1983. *Principaux ennemis du riz en Afrique de l'Ouest et leur contrôle*. 2nd Edn. ADRAO, Monrovia, Liberia.

[9] Breniere, J., 1976. Reconnaissance des principaux lepidopteres du riz de l' Afrique de l'Ouest. *Agron. Trop*. 31(3), 213-231.

[10] Chiasson, H., Hill, S.B., 1993. Population density, development and behaviour of Diopsis longicornis and D. apicalis on rice in the Republic of Guinea. *Bull. Entomol*. Res. 83, 5-13.

[11] Cochereau, P., 1978. Fluctuations des Populations Imaginales de « textitDiopsis thoracica» westwood et «*Diopsis apicalis* » Westwood «*Diptera, diopsidae* » en Liaison avec la Phénologie d'un riz de bas-fond à Bouaké (Côte d'Ivoire). Cahiers ORSTOM, Série Biologie. *Entomol. Agric*. 13(1), 45-58.

[12] Descamps (M.), 1957 a. *Contribution à l'étude des Diptères Diopsides nuisibles au riz dans le nord- Cameroun*. J. Agr. Trop., Bot. Appl., 4 :83-93.

[13] Diekmann. O.et al, 2009. *The construction of nextgeneration matrices for compartmental epidemic models*, Journal of The Royal Society Interface.

[14] Farina, L and Rinaldi,S, 2000. *Positive linear systems, theory and applications*. John Wiley and Sons, .

[15] Feijen, H.R., 1985. *The correct name of the African rice stem-boring Diopsidae* (stalk-eyed fly).*Int. RiceRes. Newsl*. 10(5), 21.

[16] Frobenius ,G , 1908. *Uber Matrizen aus positiven Elementen*. Sitzungsberichte, Konigl. Preussichen Akad. Wiss., 8 :471-476.

[17] Gouzé,J. L, 1995. *Positivity, space scale and convergence towards the equilibrium.*Journal of biologicalsystems, 3 :613-620.

[18] Habarugira,H.,2005. *caractérisation des variétés de riz sélectionnées à la faculté des sciences Agronomiques du Burundi pendant 10ans*. Mémoire de fin d'études, université du Burundi, Bujumbura, 62p.

[19] Hale,J.K et NY : Krieger., 1980. *Ordinary Differential Equations. Pure and Applied Mathematics*.

[20] Heinrichs, E.A., 2000. *Le riz en Afrique Occidentale dans les foreurs de Tiges de céréales en Afrique*. In :Importance Economique, Systematique, Ennemis Naturels et Methodes de Lutte (Eds. : Polaszek, A., Delvare, G. CIRAD, Montpellier).

[21] Heinrichs, E.A., Barrion, A.T., 2004. Rice feeding insects and selected natural enemies in West Africa, Biology, ecology identification. (Eds. : Hettel, G. P.). *International Rice Research Institute*, Philippines, 237p.

[22] Hirsch, M. W, 1982. *Systems of ordinary differential equations which are competitive or cooperativeI* : Limit sets. SIAM J. Math. Anal., 13 :167-179.

[23] INERA,Févier, 1994. *Bilan des activités de recherche rizicoles au Burkina Faso*, station de Farako- bâ, 62 p.

[24] Joshi,R.C., février,1993.*Insectes nuisibles du riz en Afrique : Biologie et méthode de lutte*.

[25] IRAT-CIRAD. *Division de défense des cultures*, BP 5035, 34032 Montpellier Cedex, France.*Institut internation d' agriculture*.

[26] Jifa, J,1993. The algebraic criteria for the asymptotic behaviour of cooperative systems with concave nonlinearities. *J. Syst. Sci. Complex*. 6 :193.

[27] Kamke,E, 1932. *Zur Theorie der Systeme Gewoknlicher Differentialgliechungen*. Acta Math., 58 :57-85.

[28] Luenberger,D. G, 1979 . *Introduction to Dynamic Systems*. Theory, Models and Applications. John Wiley and Sons, New York.

[29] Mailleret,L. 2004. *Stabilisation Globale de Systèmes Dynamiques Positifs Mal Connus*. Applications en Biologie. PhD thesis, Université Nice Sophia Antipolis.

[30] Monina et al, 2019. La culture de riz et ses problèmes phytosanitaires.*Rev. Mar. Sci. Agron. Vét* : 2018, 6(4) :544-557.

[31] Morgan H.G. and Abu J.F., 1973. Seasonal Ohundance of Diopsis (*Diptera, Diopsidae*) on irrigated rice in the Accra plains. Ghana. *J. Agr. SC.*, 6 (3) : 185-191.

[32] Muma M. Gumiière SI. Rousceau AN, 2014. Analyse de la sensibilité globale du modèle cathy aux proipriétés hydrodynamiques du sol d'un micro-bassin agricole drainé. Hydrol Sci j 59 (8) : 1606-1623.

[33] Olalekan O.B., 2002. *Management of major insects pests of rice in Tanzania* (Review). Plant Protection Science. Vol. 38 Nº 3, 108-113.

[34] Pathak, M.D., Khan, Z.R., 1994. *Insect pests of rice*. IRRI and ICIPE, ISBN 971-22-0028-0. 5p.

[35] Perron,O., 1907. *Zur Theorie der Matrizen*. Math. Ann., 64.

[36] Plemmons R. J. and Berman A,1994. *Nonnegative matrices in the mathematical sciences*.

[37] Pollet, A., 1977. *Species diversity and distribution of Scolytidae along the forest boundary in a forestsavanna mosaic belt of the Ivory Coast*. Oikos. 29,186-192.

[38] Salteli A. et Al, 1999. A quantitative model indepenndant method for global sensitivity analysis of model output, technometrics j.stat phys chemeng sci 41 (1) : 39-56.

[39] Scheibelreiter, G., 1974. The importance of *Diopsis tenuipes Westwood* as a pest of rice, based on a comparison of the egg-laying behaviour of *D. tenuipes and D. thoracica Westwood. Ghana J. Agric. Sci.* 7, 143-145.

[40] Silva-Navarro, G. and Alvarez-Gallegos, J. 1997. *Sign and stability of equilibria in quasi-monotone positive non-linear systems*. IEEE Transactions on automatic control, 42 :403-407.

[41] Smith H. L., 1986. *Cooperative system of differential equations with concave nonlinearities*, Nonlinear Anal, : Theory, Meth. Appl., 10 :1037-1052.

[42] Smith ,H. L., 1986. On the asymptotic behavior of a class of deterministic models of cooperating species. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 46 :368-375.

[43] Smith ,H. L.,1995. *Monotone dynamical systems, an introduction to the theory of competitive and cooperative systems. Mathematical Surveys and Monographs*. American mathematical society.

[44] Smith H. L. and Waltman,P., 1995. The theory of the chemostat : dynamics of microbial competition. *Cambridge University Press*.

[45] Stratégie Nationale de Développement de la Filière Riz au Burundi : Aménager, Intensifier, Transformer et Commercialiser. Bujumbura 2014.

[46] Takeuchi, Y.,1996. Global dynamical properties of Lotka-Volterra systems. *World-Scientific*.

[47] Togola, A., Nwilene, F.E., Kone, B., Chouqourou, D., 2011b. Sédentarisation des populations des mouches Diopsides dans les agrosystèmes rizicoles au Benin. *Tropicultura*. 29(2), 101-106.

[48] Tran, M., 1981. Reconnaissance des principaux foreurs des tiges du riz, du maïs et de la canne à sucre en Côte d'Ivoire.Travaux et documentations de l'Orstom, n^{o}48. Paris, Orstom éditions.

[49] P. Van den Driessche et J. Watmough, 2002 *Reproduction numbers and sub-threshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission*, Mathematical Biosciences 180 ; 29-48.

[50] Vercambre, B., 1982. *Diopsis thoracica West. (Dipt.Diopsidae)*, important ravageur du riz en Afrique de l'Ouest : données bio-écologiques et application à la lutte intégrée. Agron. Trop. 37, 89-98.

[51] Wang W. and Zhao X-Q, 2008. Threshold dynamics for compartmental epidemic models in periodic environments. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, 20 :699-717.

[52] WARDA, 2000. *Rapport annuel ADRAO*. Points saillants des activités. Une petite mouche à gros problèmes : la cécidomyie africaine des galles du riz. pp. 20-26.

[53] Wopereis, M.C.S. et al, 2008. Curriculum d'apprentissage participatif et recherche action (APRA) pour la gestion intégrée de la culture de riz de bas-fonds (GIR) en Afrique subsaharienne.Les insectes de la culture de riz. Curriculum APRAGIR :Manuel technique. pp. 92-103.