UNIVERSITÉ DU BURUNDI
GRENIER DU SAVOIR DU BURUNDI
Dépôt institutionnel officiel
https://repository.ub.edu.bi

# Résolution du problème de modélisation de la tuberculose au Burundi par les groupes de lie

**NYANDWI, Charles; Sous la direction de : Dr David NIYUKURI**

**2024**
UB, Faculté des sciences
https://repository.ub.edu.bi/handle/123456789/948

Document téléchargé depuis le **Grenier du Savoir du Burundi** — https://repository.ub.edu.bi

UNIVERSITE DU BURUNDI
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES
CENTRE DE RECHERCHE EN MATHEMATIQUES ET PHYSIQUE

# RESOLUTION DU PROBLEME DE MODELISATION DE LA TUBERCULOSE AU BURUNDI PAR LES GROUPES DE LIE

Par :

**Charles NYANDWI**

Mémoire présenté et défendu publiquement en vue de l'obtention du Diplôme de Master en Mathématiques fondamentales et appliquées.

**Sous la direction de :**
**Dr David NIYUKURI**

Bujumbura, Mai 2024

# Composition du Jury

Pr Aboubacar NIBIRANTIZA (**Président** )

Dr Denis NKURUNZIZA (**Secrétaire** )

Dr David NIYUKURI (**Directeur** )

Prof Servat NYANDWI (**Membre**)

# Dédicaces

A mes parents ;
A mon épouse ;
A mes frères et sœurs ;
A tous ceux qui me sont chers.

# Remerciements

La préparation de ce travail a été réalisée avec l'aide appréciable de mon directeur de mémoire Dr David NIYUKURI que je tiens à remercier tout particulièrement pour m'avoir proposé un sujet de recherche. En effet, grâce à lui j'ai pu acquérir une expérience enrichissante sur la théorie des groupes de Lie, les modèles épidémiologique et la résolution des équations différentielles ordinaires du premier ordre dérivées du modèle épidémiologique. Je lui remercie aussi pour ses conseils, sa patience, sa rigueur scientifique et ses suggestions qui m'ont été d'une grande utilité.
Je remercie également tous les membres du jury pour le temps qu'ils ont consacré à lire et évaluer ce travail, leurs précieux commentaires qui m'ont été d'une importance capitale.
Mes chaleureux remerciements vont à tous les enseignants et professeurs qui ont contribué à ma formation plus particulièrement ceux du département de mathématiques. Je n'oublie pas mes camarades et amis, avec qui j'ai partagé les meilleurs moments durant mon cursus de formation. C'est aussi une opportunité d'exprimer également ma profonde gratitude à mes parents qui ont contribué dans mon parcours académique. Mes frères et sœurs, je n'oublie pas tout l'amour et le confort qu'ils m'ont toujours témoigné. Je termine à remercier mon épouse qui m'a soutenu durant les deux années d'études en master. Qu'ils trouvent ici l'expression de ma profonde gratitude.

# Résumé

L'objectif principal de ce mémoire est la résolution du problème de la modélisation de la tuberculose au Burundi en utilisant la méthode des groupes de Lie. Dans un contexte où la tuberculose reste un problème de santé publique majeur, en particulier dans les pays à faible et moyen revenu comme le Burundi, la modélisation mathématique offre un outil précieux pour comprendre et prévoir la dynamique de cette maladie. Dans ce travail, un modèle mathématique décrivant la propagation de la tuberculose dans la population Burundaise a été résolu analytiquement en utilisant la méthode des groupes de Lie. Les générateurs infinitésimaux et les symétries du système ont été identifiés en utilisant l'approche de cette partie de mathématiques. Le modèle a été alors résolu en utilisant les symétries. La solution du modèle obtenue a été appliquée aux données de la tuberculose au Burundi. Les résultats obtenus fournissent des informations précieuses sur l'utilisation de la théorie des groupes de Lie dans la résolution des modèles épidémiologiques en particulier celui de la tuberculose au Burundi. Ce travail a démontré l'efficacité de la méthode des groupes de Lie dans la résolution des problèmes de modélisation et souligne l'importance de la collaboration interdisciplinaire.

**Les mots clés** : modélisation, tuberculose, groupes de Lie.

# Abstract

The main objective of the dissertation is to resolve the problem of modeling tuberculosis in Burundi using the Lie group method. In a context where tuberculosis remains a major public health problem, particularly in low- and middle-income countries such as Burundi, mathematical modeling offers a valuable tool for understanding and predicting the dynamics of this disease. In this work, a mathematical model describing the spread of tuberculosis in the Burundian population was established. Then, the Lie group method was applied to this system to solve it analytically. The infinitesimal generators and symmetries of the system were identified using the Lie group approach. The model was then solved using these symmetries. The resulting model solution was applied to tuberculosis modeling data in Burundi. The results obtained provide valuable information on the use of Lie group theory in the resolution of epidemiological models, particularly that of tuberculosis in Burundi. This work demonstrated the effectiveness of the Lie group method in solving modeling problems and highlights the importance of interdisciplinary collaboration.

**Key words** :modeling, tuberculosis, Lie groups.

# Table des matières

**Composition du Jury** i

**Dédicaces** ii

**Remerciements** iii

**Résumé** iv

**Abstract** v

**Table des matières** vi

**Liste des figures** viii

**Liste des sigles et abréviations** ix

**Avant-propos** x

**1 Introduction générale** 1

1.1 Problématique . . . . . 3

1.2 Intérêt de recherche . . . . . 3

1.3 Objectif global . . . . . 3

1.4 Objectifs Spécifiques . . . . . 3

1.5 Méthodologie de recherche . . . . . 4

1.6 Hypothèses de recherche . . . . . 4

1.7 Organisation du mémoire . . . . . 4

**2 Théorie des groupes de Lie 5**

2.1 Introduction . . . . . 5

2.2 Symétrie dans le plan . . . . . 6

2.3 Symétries des équations différentielles . . . . . 8

2.3.1 Groupe de transformation de Lie . . . . . 8

2.3.2 Groupe de transformation de Lie à un paramètre . . . . . 9

2.3.3 Générateur infinitésimal . . . . . 10

2.3.4 Prolongation du générateur infinitésimal . . . . . 12

2.3.5 Condition d'invariance des équations différentielles sous les transformations du groupe . . . . . 13

**3 Formulation du modèle de la tuberculose au Burundi 15**

3.1 Généralités sur la tuberculose . . . . . 15

3.2 Etymologie et terminologie en épidémiologie . . . . . 17

3.3 Modélisation mathématique des maladies infectieuses . . . . . 18

3.4 Modèles épidémiques . . . . . 19

3.5 Formulation du modèle . . . . . 20

**4 Résolution du modèle par les groupes de Lie 23**

4.1 Transformation ponctuelle des variables du modèle . . . . . 24

4.2 Générateurs infinitésimaux du modèle . . . . . 31

4.3 Condition d'invariance du modèle . . . . . 32

**5 Simulation numérique des solutions du modèle et interprétation des résultats 37**

5.1 Simulation numérique des solutions du modèle . . . . . 37

5.2 Simulation numérique du modèle par la méthode de Runge-Kutta . . . . . 39

5.3 Interprétation des résultats . . . . . 40

**Conclusion 42**

**Recommandations 43**

**Bibliograhie 44**

# Table des figures

2.1 Symétrie d'un cercle centré à l'origine des axes . . . . . 7

3.1 Figure du modèle S-E-I-R de la tuberculose. . . . . 21

5.1 (a) Courbe d'évolution des personnes susceptibles, (b) Courbe d'évolution personnes exposées, (c) Courbe d'évolution des personnes infectées, (d) Courbe d'évolution des personnes rétablies. . . . . 38

5.2 Courbes du modèle par la méthode de Runge-Kutta. . . . . 39

# Liste des sigles et abréviations

EDO : Equations Différentielles Ordinaires
PNILT : Programme National Intégré Lèpre et Tuberculose
SEIR : Sensible-Exposé-Infecté-Récupéré
SIDA : Syndrome d'Immunodéficience Acquise
SIR : Sensible-Infecté-Récupéré
TB : Tuberculose
VIH : Virus d'Immunodéficience Humaine

# Avant-propos

Le présent travail de mémoire a été réalisé dans le cadre de l'obtention du diplôme de fin d'études du deuxième cycle des enseignements de l'Université du Burundi.
L'objectif de ce mémoire est de résoudre le problème de modélisation de la tuberculose au Burundi par les groupes de Lie .
Dans ce travail, nous déterminons les symétries admises par les équations différentielles du modèle en calculant les générateurs infinitésimaux et l'invariance du modèle.
Le résultat obtenu a montré que les groupes de Lie constituent un outil puissant dans la résolution des modèles épidémiologiques.

# Chapitre 1

# Introduction générale

La tuberculose (TB) reste l'une des maladies infectieuses les plus préoccupantes dans de nombreux pays en voie de développement[42], y compris le Burundi. Malgré les progrès réalisés dans le diagnostic et le traitement de la TB au fil des années, elle reste un défi majeur pour les systèmes de santé dans le monde entier.
Au Burundi, la prévalence de la TB demeure élevée, le rapport annuel 2023 du programme en charge de la tuberculose montre que 7799 cas de tuberculose soit 61% des cas attendus ont été notifiés et mis sous traitement [45].
Au niveau mondial, 10,6 millions de personnes ont développé la tuberculose en 2022 et 1,3 millions sont mortes de cette maladie [41].

La modélisation mathématique de la TB offre un cadre puissant pour étudier la propagation de cette maladie, en permettant l'analyse des différents facteurs qui influencent sur sa transmission et en évaluant l'impact des interventions de santé publique.
Cependant de nombreux phénomènes qui surviennent en épidémiologie sont modélisés sous formes de systèmes d'équations différentielles ordinaires du premier ordre. Ainsi, ces modèles ont été examinés à travers l'analyse de la stabilité des systèmes dynamiques et à la recherche du nombre de reproduction de base $R_o$ [29]. Habituellement de tels systèmes sont non-linéaires et ne se prêtent pas à une solution en utilisant des méthodes d'intégrations traditionnelles. C'est ainsi que le mathématicien norvégien Marius Sophus Lie (1842-1899) a consacré la majeur partie de sa vie à la théorie des groupes continus aujourd'hui connus sous le nom de de la théorie des groupe de Lie et à leur impact sur les équations différentielles [11]. Lie a découvert que les méthodes de résolution standards utilisent des groupes de symétries des équations différentielles pour obtenir la solution. Par conséquent, des solutions exactes peuvent être trouvées grâce à l'utilisation systématique des symétries de ces equations [18].
L'idée derrière à l'application des groupes de Lie aux équations différentielles est d'appliquer des transformations appropriées des variables indépendantes et dépendantes pour obtenir des symétries de Lie. Il a unifié les méthodes d'équations différentielles et en a déduit qu'elles peuvent toutes être caractérisées par sa théorie des groupes de Lie [39]. Lie

a découvert que la caractéristique importante des groupes de Lie est le concept des symétrie et des générateurs infinitésimaux du groupe. En travaillant à partir des générateurs infinitésimaux, les symétries d'équations différentielles peuvent être générées. Celles-ci simplifient le système d'équations différentielles afin de trouver la solution analytique du système équivalent.

La méthode des groupes de Lie a été appliquée avec succès aux différents problèmes de physique, en finance, en chimie, mais rarement en biologie (ou en épidémiologie) peut-être parce que les EDO étudiées dans ce domaine sont généralement du premier ordre contrairement à ceux des autres domaines qui sont généralement du second ordre, alors qu'il est bien connu qu'un système d'équations différentielles ordinaires du premier ordre admet une algèbre de symétrie de Lie de dimension infinie .

Dans [30], l'analyse des groupes de Lie est appliquée aux équations d'Euler-Poisson obtenues à partir de la méthodes de réduction . Dans [37], l'analyse des groupes de Lie relie le célèbre système de Lorentz aux équations d'Euler d'un corps rigide se déplaçant d'un point fixe et soumis à une torsion en fonction du temps et de la vitesse angulaire. Dans cet article, l'analyse des groupes de Lie transforme le "papillon" en une "tornade". Un problème à $n$ corps introduit par Calogelo [10] a été résolu au moyen des groupes de Lie jusqu'à la quadrature par Jacobi qui s'est révélé réductible à l'équation du mouvement d'une seule particule libre sur une droite.

En finance, la méthode des groupes de Lie a été aussi appliquée à une équation d'évolution issue des mathématiques financières [17] à l'équation la plus célèbre de ce domaine, l'équation de Black-Scholes [17]. Récemment [35, 34] ont étendu leurs recherches sur les groupes des symétries dans le domaine des équations différentielles ordinaires en mathématiques financières.

En épidémiologie, l'analyse des groupes de Lie a été appliquée à un modèle fondamental proposé par Anderson qui décrit la transmission du VIH des cohortes masculines homosexuelles/bisexuelles. Ce modèle est un modèle des équations différentielles ordinaires non linéaire du premier ordre et sa solution exacte est déterminée. Lorsque l'analyse des groupes de Lie est appliquée avec succès aux modèles épidémiologiques, plusieurs ont trouvés des nombres des cas d'intégrabilité voire même de linéarité qui conduisent à l'idée générale de la solution du modèle dans lequel des symétries de Lie ont été trouvé et la solution générale du modèle épidémiologique [14, 38].

Dans cette étude, nous nous intéressons à la résolution du problème de modélisation de la tuberculose au Burundi [46] en utilisant les groupes de Lie, une approche mathématique puissante pour étudier les systèmes dynamiques complexes.

Le modèle décrit la transmission de la tuberculose et comporte quatre différents compartiments de la population : les personnes susceptibles (S), les personnes exposées (E), les personnes infectées (I) et les personnes rétablies (R), ainsi que d'autres paramètres.

La solution analytique obtenue du modèle est appliquée aux données de la tuberculose au

Burundi issues de [46].
Le résultat montre que la théorie des groupes de Lie est un outil puissant pour trouver une solution analytique des modèles épidémiologiques.

## 1.1 Problématique

La tuberculose au Burundi est l'une des maladies infectieuses les plus préoccupantes [42].Des modèles épidémiologiques sur la tuberculose ont été établis et résolus en utilisant l'étude de la stabilité du système ou en calculant le taux de reproduction de base et des solutions efficaces ont été trouvées [46]. La résolution de ces modèles par la théorie des groupes de Lie, peut-elle améliorer l'étude de la dynamique de cette maladie au Burundi ?

## 1.2 Intérêt de recherche

La théorie des groupes de Lie joue un rôle important en épidémiologie pour trouver la dynamique de la tuberculose au Burundi. Elle est aussi le moyen le plus efficace pour trouver des solutions exactes à des problèmes de modélisation afin de prédire où d'éradiquer les maladies épidémiologiques.

## 1.3 Objectif global

L'objectif global de ce mémoire est de résoudre analytiquement le problème de modélisation de la tuberculose au Burundi en utilisant les groupes de Lie, pour comparer le résultat obtenu par cette approche par rapport aux autres méthodes numériques de résolution des modèles épidémiologiques.

## 1.4 Objectifs Spécifiques

Pour trouver le résultat de notre travail, nous avons :

- identifier les symétries admises par le modèle de la tuberculose au Burundi ;
- déterminer des générateurs infinitésimaux associés à chaque symétrie ;
- prolonger le système d'équations différentielles pour inclure les dérivées par rapport aux paramètres des transformations.

## 1.5 Méthodologie de recherche

Elle comprend les étapes suivantes :

- utiliser les symétries du modèle de la tuberculose pour transformer le système d'équation différentielles en un système plus simple à résoudre.
- résoudre le système le plus simple.
- simuler les solutions du modèle par le langage de programmation python.
- utiliser le logiciel mathématica.

## 1.6 Hypothèses de recherche

Les hypothèses de notre recherche sont groupés en deux :

- les groupes de Lie ont-ils une représentation plus précise et flexible de la dynamique de la tuberculose que les méthodes traditionnelles ?
- la solution générale du système de modélisation de la tuberculose peut être trouvée en utilisant les concepts des groupes de Lie ?

## 1.7 Organisation du mémoire

Ce mémoire est organisé en cinq chapitres. Le premier chapitre parle de l'introduction générale sur la tuberculose et les groupes de Lie, le deuxième chapitre démontre les concepts de base de la théorie des groupes de Lie, le troisième chapitre présente la formulation du modèle, le quatrième chapitre consiste à la résolution du modèle par les groupes de Lie, le dernier chapitre concerne la simulation numérique des solutions du modèle et interprétation des résultats.

# Chapitre 2

# Théorie des groupes de Lie

Dans ce chapitre nous présentons les concepts de base nous permettant de trouver la solution des équations différentielles ordinaires non linéaires du modèle de la tuberculose au Burundi en utilisant les groupes de Lie.

## 2.1 Introduction

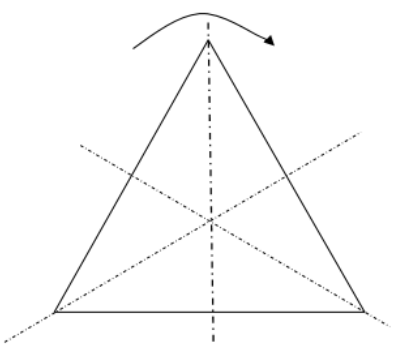
La théorie des groupes de Lie est une branche fondamentale des mathématiques qui étudie les symétries continues des objets mathématiques, en particulier des espaces vectoriels et des variétés différentielles. Cette théorie a des applications profondes en physique théorique, en particulier en physique des particules, en relativité générale et en théorie des cordes [21, 28]. Les groupes de Lie tirent leur nom du mathématicien norvégien Marius Sophus Lie (1842-1899), qui a joué un rôle crucial dans leur développement et leur formalisation au cours de la seconde moitié du $XIX^e$ siècle. L'intérêt de Lie pour les groupes de transformations, notamment les groupes continus, est né de son étude des équations différentielles. Lie a observé que les solutions d'équations différentielles ordinaires peuvent être obtenues par des transformations qui préservent la structure des équations invariantes. Il a ensuite généralisé ces idées pour inclure des transformations continues plus générales. En 1873, Lie publie son travail fondateur intitulé "Théorie des transformations continues de groupes de transformations" dans lequel il établit les bases de la théorie des groupes de transformations continues. Il introduit la notion de groupe continu, qu'il nomme plus tard "groupe de Lie" en l'honneur de son travail. La contribution principale de Lie à la théorie des groupes de Lie réside dans sa capacité à formaliser les concepts de manière algébrique et géométrique, en particulier en introduisant l'algèbre de Lie associée à un groupe de Lie. Cette algèbre, qui décrit les propriétés infinitésimales du groupe, s'est avérée être un outil puissant pour comprendre la structure des groupes de Lie et leurs représentations. Depuis les travaux de Lie, la théorie des groupes de Lie est devenue une branche fondamentale des mathématiques, avec des applications étendues en physique théorique, en

particulier en mécanique quantique, en physique des particules et en relativité générale. Elle continue d'être un domaine de recherche actif, avec des implications profondes dans de nombreux domaines des mathématiques et épidémiologiques . La théorie des groupes de Lie fournit un cadre abstrait mais puissant pour étudier les équations différentielles, en identifiant les symétries, en réduisant les ordres, en trouvant des solutions explicites et en étudiant l'intégrabilité. Elle constitue un outil précieux pour aborder une grande variété de problèmes en théorie des équations différentielles [40].
Pour mieux comprendre la symétrie des équations différentielles, commençons avec la symétrie dans le plan $X, Y$.

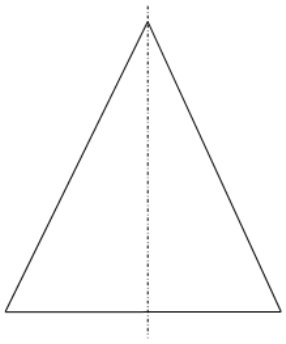
## 2.2 Symétrie dans le plan

Considérons les symétries de simples objets dans le plan. Une définition générale est qu'une symétrie d'un objet géométrique est une transformation qui, sous son action, laisse l'objet inchangé c'est-à-dire invariant [48].

**Exemple 2.1.** *Les deux triangles suivants admettent des symétries. Le premier (a) est un triangle équilatéral et l'autre (b) est un triangle isocèle. Les lignes pointillées représentent les réflexions possibles du triangle et la flèche le fait que cette figure puisse subir une rotation. On voit que (a) admet trois réflexions et peut subir une rotation $\frac{2\pi}{3}x$ tour, où $x$ est un entier. Par contre, le triangle (b) n'a qu'un seul axe de symétrie et ne peut subir qu'une seule rotation soit d'un tour complet.*



*(a)*



*(b)*

*Il existe certaines lois régissant les symétries d'objets géométriques. L'une d'entre elles est que chaque symétrie est inverse, et son inverse est aussi une transformation symétrique. L'action combinée d'une symétrie et son inverse laisse l'objet inchangé. Par exemple, si nous revenons à l'exemple précédant et que l'opérateur $\Gamma$ dénote la rotation du triangle (a) de $\frac{2\pi}{3}$, alors $\Gamma^{-1}$ est aussi une rotation de $\frac{4\pi}{3}$. Nous nous concentrons sur les symétries continues (lisses). Supposons que $x$ représente la position générale d'un objet.*
*Si $\Gamma : x \mapsto \hat{x}(x)$ est une symétrie quelconque, alors $\hat{x}$ est différentiable par rapport à $x$. De plus puisque $\Gamma^{-1}$ est aussi une symétrie, alors $x$ est également différentiable par rapport*

*à $\hat{x}$. Les symétries doivent aussi préserver leur structure, c'est-à-dire que l'objet ne doit pas subir de déformation sous l'action de la transformation. En résumé, une symétrie ( en termes de transformation) se caractérise par trois propriétés :*

- *la transformation préserve la structure de l'objet invariant ;*
- *la transformation et son inverse sont lisses ;*
- *la transformation déplace l'objet de façon à ce qu'il redevienne lui-même*

*En fait si les transformations satisfont les deux premières propriétés, cela est suffisant pour dire qu'il y a une symétrie. Par contre, certaines transformations sont des symétries si elles satisfont aussi à troisième propriété.*
*Illustrons ces propriétés par l'exemple tiré dans [48].*

**Exemple 2.2.** *Le cercle : $x^2 + y^2 = 1$ a une symétrie,*

$$\Gamma_\varepsilon : (x, y) \mapsto (\hat{x}, \hat{y}) = (xcos\varepsilon - ysin\varepsilon, xsin\varepsilon + ycos\varepsilon) \tag{2.1}$$

pour chaque $\varepsilon \in [-\pi, \pi]$ illustrée par :

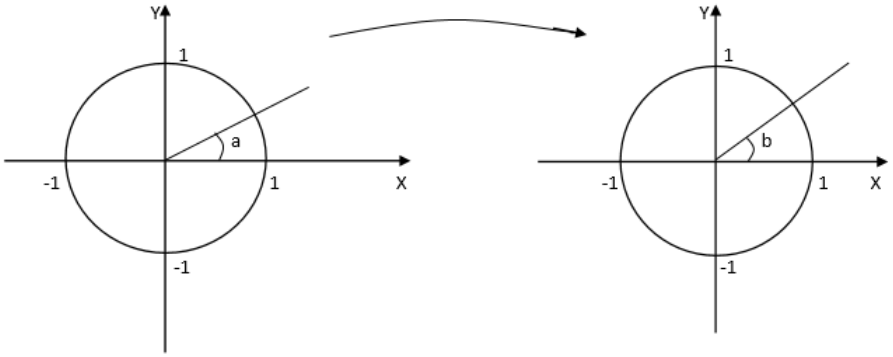



FIGURE 2.1 – Symétrie d'un cercle centré à l'origine des axes

où $a = \theta$ et $b = \theta + \varepsilon$

Réécrivons le tout en termes de coordonnées polaires c'est-à-dire :

$$\Gamma_\varepsilon : (cos\theta, sin\theta) \mapsto (cos(\theta + \varepsilon), sin(\theta + \varepsilon)). \tag{2.2}$$

La transformation correspond donc à une rotation de degré $\varepsilon$ autour du cercle. La structure est préservée (les rotations sont dites rigides, elles n'impliquent pas la déformation), elle est lisse et inversible (l'inverse est de rotation $-\varepsilon$). Les premières propriétés sont satisfaites.

On démontre la troisième.

$$\begin{aligned} x^2+y^2=1 \Leftrightarrow \hat{x}^2+\hat{y}^2 &= (xcos\varepsilon - ysin\varepsilon)^2 + (xsin\varepsilon + ycos\varepsilon)^2 \\ &= x^2(cos^2\varepsilon + sin^2\varepsilon) + y^2(cos^2\varepsilon + sin^2\varepsilon) \\ &= x^2+y^2 \\ &= 1 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Ce qui implique que $\hat{x}^2+\hat{y}^2=1$ lorsque $x^2+y^2=1$

## 2.3 Symétries des équations différentielles

Parmi les méthodes analytiques pour obtenir des solutions à des problèmes différentiels, la recherche des symétries est l'une des méthodes la plus élégante et la plus efficace. Développée par le mathématicien Lie à la fin du XIX$^e$ siècle. Cette approche nécessite un bagage mathématique important et pas mal de manipulations algébriques, ce qui explique qu'elle soit tombée en désuétude au cours du XX$^e$ siècle, surtout à cause du développement des ordinateurs auxquels aucune équation différentielle ne semblait résister. C'est une approche très générale qui cherche à déterminer et à exploiter les transformations qui peuvent laisser une équation différentielle invariante. La recherche du groupe de symétrie selon [13, 43, 44] passe par les étapes suivantes :

### 2.3.1 Groupe de transformation de Lie

Avant d'aborder la notion de groupe de transformation de Lie, commençons par la définition d'un groupe.

**Définition 2.1.** *Un groupe $G$ est un ensemble d'éléments muni d'une loi de composition $\phi$ entre des éléments satisfaisant les axiomes suivant :*

- *propriétés de fermeture : $\forall a$, et $b \in G$, $\phi(a,b)$ est un élément de $G$.*
- *Associativité : $\forall a,b,c \in G$ : $\phi(a,\phi(b,c)) = \phi(\phi(a,b),c)$.*
- *Elément d'identité : Il existe un élément d'identité unique de $G$ tel que $\forall a \in G$ : $\phi(a,e) = \phi(e,a) = a$.*
- *Un inverse : $\forall a \in G$, il existe un élément unique, élément d'inverse $a^{-1}$ dans $G$, sachant que : $\phi(a,a^{-1}) = \phi(a^{-1},a) = e$*

*Un groupe $G$ est commutative si $\phi(a,b) = \phi(b,a)$ est valable $\forall a,b \in G$.*

Alors un groupe de transformation de Lie est défini comme suit :

**Définition 2.2.** *Soit $X(x_1, x_2, ..., x_n)$ un ensemble qui se situe dans la région $D \subset \mathbb{R}^n$. L'ensemble des transformations $\hat{X} = X(x, \varepsilon)$, définie pour chaque $X$ dans $D$ et de paramètre $\varepsilon$ dans l'ensemble $S \subset \mathbb{R}$, avec $\phi(\varepsilon, \rho)$ définissant une loi de composition de paramètre $\varepsilon$ et $\rho$ dans $S$, forme une loi de transformation à un paramètre sur $D$ si les conditions suivantes sont vérifiées :*

- *$\forall \varepsilon \in S$ ; les transformations sont biunivoques sur $D$. Par conséquent, $x$ se trouve dans $D$.*
- *$S$ avec la loi de composition forme un groupe $G$.*
- *$\forall x \in D$ ; $\hat{x} = x$ quand $\varepsilon = \varepsilon_0$ correspond à l'identité $\varepsilon$, c-à-d : $X(x, \varepsilon_0) = X$*
- *si $\hat{X} = X(x, \varepsilon); \hat{\hat{X}} = X(\hat{X}, \rho)$, alors $\hat{\hat{X}} = X(x, \phi(\varepsilon, \rho))$*

**Définition 2.3.** *Un groupe de Lie est un concept fondamental en mathématiques qui combine les idées de groupe et de variété différentielle. Formellement, un groupe de Lie est un ensemble muni à la fois d'une structure de groupe et d'une structure de variété différentielle, de telle sorte que les opérations de groupe (addition et inverse) sont des fonctions lisses (ou différentiables) sur la variété. En termes simples, un groupe de Lie est un espace mathématique dans lequel les éléments peuvent être multipliés et inversés de manière lisse et continue.*
*Plus précisément, un groupe de Lie $G$ est un ensemble muni d'une opération de groupe $G \times G \to G$ qui satisfait les propriétés suivantes :*

- *associativité : Pour tout $a, b, c$ dans $G$, $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.*
- *existence d'un élément neutre : Il existe un élément $e$ dans $G$ tel que pour tout $a$ dans $G$, $a \cdot e = e \cdot a = a$.*
- *existence de l'inverse : Pour chaque élément $a$ dans $G$, il existe un élément $a^{-1}$ dans $G$ tel que $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$.*
- *La loi de composition interne $\cdot$ est lisse, ce qui signifie que $G$ est également une variété différentielle.*

### 2.3.2 Groupe de transformation de Lie à un paramètre

Soient

$$x = (x_1, x_2, x_3, ..., x_p) \in X \in \mathbb{R}^n \tag{2.4}$$

et

$$y = (y_1, y_2, y_3, ..., y_q) \in Y \in \mathbb{R}^m \tag{2.5}$$

deux éléments de l'ensemble $\mathbb{R}^{n+m}$ de $p$ variables indépendantes et $q$ variables dépendantes.

**Définition 2.4.** *Un groupe de transformation continu à un paramètre $\varepsilon$ est la donnée*

*d'une application qui transforme les variables indépendantes $x$ et dépendantes $y$ .*

$$G : \begin{cases} \hat{x_j} = \hat{x_j}(x, y, \varepsilon), j = 1, ..., p \\ \hat{y_j} = \hat{y_j}(x, y, \varepsilon), j = 1, ..., q \end{cases} \tag{2.6}$$

Ces applications doivent respecter les axiomes suivants :

– la composition : pour toutes les valeurs des paramètres $\varepsilon_1$ et $\varepsilon_2$, on doit avoir :

$$\begin{aligned} \hat{x_j}(x, y, \varepsilon_1) \circ \hat{x_j}(x, y, \varepsilon_2) = \hat{x_j}(x, y, \varepsilon_1 + \varepsilon_2) \\ \hat{y_j}(x, y, \varepsilon_1) \circ \hat{y_j}(x, y, \varepsilon_2) = \hat{y_j}(x, y, \varepsilon_1 + \varepsilon_2) \end{aligned} \tag{2.7}$$

où $\circ$ est une loi de composition.

– L'existence d'un élément neutre : si $\hat{x}_j^{\varepsilon}(x, y)$ et $\hat{y}_j^{\varepsilon}(x, y)$ désignent les fonctions citées dans la définition pour une valeur donnée du paramètre $\varepsilon$, alors $\hat{x}_j^{\circ}(x, y)$ et $\hat{y}_j^{\circ}(x, y)$ doivent coïncider avec les applications identiques de $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^q$.

$$\begin{aligned} \hat{x_j}(x, y, \varepsilon = 0) = x_j \\ \hat{y_j}(x, y, \varepsilon = 0) = y_j \end{aligned} \tag{2.8}$$

– L'existence d'un inverse au sens de la composition : pour toutes les valeurs du paramètre $\varepsilon$, on doit avoir :

$$\begin{aligned} \hat{x_j}(x, y, -\varepsilon) \circ \hat{x_j}(x, y, \varepsilon) = \hat{x_j}(x, y, \varepsilon) \circ \hat{x_j}(x, y, -\varepsilon) = x_j \\ \hat{y_j}(x, y, -\varepsilon) \circ \hat{y_j}(x, y, \varepsilon) = \hat{y_j}(x, y, \varepsilon) \circ \hat{y_j}(x, y, -\varepsilon) = y_j \end{aligned} \tag{2.9}$$

### 2.3.3 Générateur infinitésimal

Un générateur infinitésimal est un concept clé en théorie des groupes de Lie et en symétrie. Pour comprendre ce concept, commençons par décomposer le terme.

- Générateur : Dans le contexte des groupes de symétrie, un générateur est une quantité mathématique qui décrit comment une transformation opère sur un système. Il peut s'agir d'une transformation spatiale, temporelle, ou autre, et il est souvent représenté par un opérateur linéaire agissant sur les coordonnées du système.
- Infinitésimal : Ce terme fait référence à quelque chose d'extrêmement petit, presque négligeable. Dans le contexte des générateurs, l'infinitésimal se réfère à une transformation qui est très proche de l'identité, c'est-à-dire une transformation très petite.

Ainsi, un générateur infinitésimal est un opérateur qui décrit une transformation extrêmement petite, presque négligeable, agissant sur un système.
Maintenant, en ce qui concerne son rôle dans les équations différentielles, les générateurs infinitésimaux sont souvent utilisés pour étudier les symétries des équations différentielles.

Lorsqu'une équation différentielle est invariante sous une certaine transformation, cela signifie que les solutions de l'équation restent inchangées lors de l'application de cette transformation. Les générateurs infinitésimaux sont utilisés pour formaliser cette notion d'invariance.
Les générateurs infinitésimaux nous permettent de linéariser les transformations, les rendant plus faciles à manipuler mathématiquement. En considérant des transformations infinitésimales, nous pouvons souvent obtenir des résultats plus précis et des expressions plus simples pour les symétries des équations différentielles. En pratique, les générateurs infinitésimaux sont souvent utilisés pour trouver des symétries cachées dans les équations différentielles. Ces symétries peuvent ensuite être utilisées pour simplifier les équations et résoudre des problèmes plus facilement. En résumé, les générateurs infinitésimaux sont des opérateurs qui décrivent des transformations infinitésimales sur un système, et ils jouent un rôle crucial dans l'étude des symétries des équations différentielles, ce qui peut simplifier leur résolution.
Considérons un groupe de transformation à un paramètre $\varepsilon$ défini par :

$$\begin{aligned} \hat{x} &= F(x, y, \varepsilon) \\ \hat{y} &= H(x, y, \varepsilon) \end{aligned} \tag{2.10}$$

Un développement de Taylor à l'ordre 1 autour de $\varepsilon = 0$ de (2.10) est :

$$\begin{aligned} \hat{x} &= x + \varepsilon(\frac{\partial F}{\partial \varepsilon}|_{\varepsilon=0}) + O(\varepsilon) \\ \hat{y} &= y + \varepsilon(\frac{\partial H}{\partial \varepsilon}|_{\varepsilon=0}) + O(\varepsilon) \end{aligned} \tag{2.11}$$

$$\begin{aligned} \hat{x} &= x + \varepsilon\xi(x, y) \\ \hat{y} &= y + \varepsilon\eta(x, y) \end{aligned} \tag{2.12}$$

où $\xi(x, y) = \frac{\partial F}{\partial \varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}$ et $\eta(x, y) = \frac{\partial H}{\partial \varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}$.

Soit $X$ le générateur associé à cette transformation, il est défini par :

$$X = \xi(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y)\frac{\partial}{\partial y}. \tag{2.13}$$

Les fonctions $\xi(x, y) = \frac{\partial F}{\partial \varepsilon}|_{\varepsilon=0}$ et $\eta(x, y) = \frac{\partial H}{\partial \varepsilon}|_{\varepsilon=0}$ sont appelées coefficients du générateur infinitésimal .

### 2.3.4 Prolongation du générateur infinitésimal

Dans un contexte plus général et quotidien, la prolongation fait référence à l'action d'ajouter ou d'étendre la durée, la portée ou l'étendue de quelque chose au-delà de sa limite initiale ou de sa fin prévue.
Dans le contexte des équations différentielles, la prolongation d'une équation différentielle consiste à augmenter l'espace des variables indépendantes ou des fonctions solutions afin d'obtenir un système d'équations différentielles plus général qui inclut l'équation initiale et ses solutions comme un sous-ensemble particulier .
La notion de prolongation du générateur infinitésimal est un concept important dans la théorie des équations différentielles et des symétries. Lorsque nous voulons étendre l'action d'une transformation infinitésimale à des ordres supérieurs, nous effectuons ce que l'on appelle la prolongation du générateur infinitésimal.
Cela signifie que nous introduisons des termes d'ordre supérieur dans le générateur infinitésimal pour décrire des transformations finies plutôt qu'infinitésimales. En introduisant les générateurs infinitésimaux et leur prolongation, nous pouvons souvent simplifier la résolution des équations différentielles en exploitant les symétries du système. Par exemple, si nous avons une équation différentielle qui est invariante sous translation, nous pouvons utiliser le générateur infinitésimal de translation pour simplifier l'équation et trouver des solutions.
En résumé, la prolongation du générateur infinitésimal est une méthode permettant d'étendre les transformations infinitésimales à des transformations finies. Cela joue un rôle crucial dans l'analyse des équations différentielles invariantes sous certaines symétries, car cela nous permet de simplifier ces équations et de trouver des solutions plus facilement.
Avant de donner l'expression de la prolongation d'ordre $n$, définissons un générateur infinitésimal $X$ associé à un groupe de transformation de (2.10) et qui doivent satisfaire les axiomes de la composition, d'élément neutre, et d'inversion.

**Définition 2.5.** *Dans [44] le générateur $X$ du groupe est donné par :*

$$\begin{aligned} X &= \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial F_i}{\partial \varepsilon}|_{\varepsilon=0} \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{q} \frac{\partial H}{\partial \varepsilon}|_{\varepsilon=0} \frac{\partial}{\partial y_i} \\ &= \sum_{i=1}^{p} \xi_i(x,y) \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{q} \eta_i(x,y) \frac{\partial}{\partial y_i} \end{aligned} \tag{2.14}$$

Alors,

**Définition 2.6.** *le prolongement à l'ordre $n$ du générateur infinitésimal $X$ défini par*

(2.14) *est le générateur infinitésimal noté* $X^{(n)}$ *donné par [51] :*

$$X^{(n)} = X + \eta_m^{(k)}(x, y, y', ..., y^{(k)})\frac{\partial}{\partial y_m} \tag{2.15}$$

*avec*

$$\eta_m^{(k)} = D_t\eta_m - y_m^{(k)} D_t\xi(x, y) \tag{2.16}$$

où $D_t$ est la dérivée totale définie par [32] :

$$D_t = \partial x + y'\partial y + y''\partial y' + ... + y^{(k+1)}\partial y^{(k)} \tag{2.17}$$

$$y^{(k)} = \frac{d^k y}{dx^k}$$

$$\partial y = \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\partial x = \frac{\partial}{\partial x}$$

### 2.3.5 Condition d'invariance des équations différentielles sous les transformations du groupe

Les conditions d'invariance des équations différentielles sous les transformations de groupe sont fondamentales en physique et en mathématiques. Pour comprendre cela, examinons brièvement ce que signifie l'invariance d'une équation différentielle sous une transformation de groupe. On a vu qu'une transformation de groupe est une transformation qui laisse inchangées certaines propriétés d'un système. Par exemple, une translation spatiale est une transformation de groupe, car elle ne change pas les propriétés fondamentales d'un système physique. On parle de l'invariance sous une transformation de groupe, lorsqu'une équation différentielle reste inchangée (c'est-à-dire qu'elle conserve sa forme) après l'application d'une transformation de groupe, on dit qu'elle est invariante sous cette transformation. Les conditions d'invariance des équations différentielles sous les transformations de groupe dépendent du type de transformation et de l'équation différentielle considérée. Voici quelques exemples [22] :

- Invariance sous une translation : considérons une équation différentielle qui décrit un phénomène physique. Si cette équation reste inchangée lorsque toutes les coordonnées spatiales sont déplacées d'une certaine quantité (translation spatiale), alors elle est dite invariante sous translation. Les conditions pour que cela se produise dépendent généralement de la forme spécifique de l'équation différentielle.
- Invariance sous rotation : de manière similaire, une équation différentielle est invariante sous rotation si elle conserve sa forme sous une rotation de l'espace. Les

conditions d'invariance peuvent être exprimées en termes de dérivées partielles par rapport aux coordonnées angulaires.

Considérons un système d'équation différentielle d'ordre $k$ sous forme :

$$F(x, y, y^1, y^2, ..., y^k) = 0 \tag{2.18}$$

Le groupe de transformation (2.10) est une symétrie de l'équation (2.18) si

$$F(x, y, y^1, ..., y^k) = 0 \Rightarrow F(\hat{x}, \hat{y}, \hat{y}^1, ..., \hat{y}^k) = 0 \tag{2.19}$$

L'égalité (2.19) signifie que l'image d'une solution de l'équation (2.18), sous la transformation de (2.10) est aussi une solution de (2.18) .

**Définition 2.7.** *Une fonction $F(x, y)$ est un invariant pour un groupe de transformation donné si elle reste constante pour toute valeur transformée de $x$ et $y$ , c'est-à-dire :*

$$F(\hat{x}, \hat{y}) = F(x, y) \tag{2.20}$$

Le critère d'existence d'un groupe de symétrie d'un système d'équation différentielle est donné par le théorème suivant.

**Théorème 2.1.** *Selon [8], le groupe de transformation* (2.10) *est une symétrie de* (2.18) *si et seulement*

$$X^{(n)}.F(x, y, y^1, y^2, ..., y^k)|_{F=0} = 0 \tag{2.21}$$

*où $X^{(n)}$ est la $n^{ième}$ prolongation.*

# Chapitre 3

# Formulation du modèle de la tuberculose au Burundi

## 3.1 Généralités sur la tuberculose

La tuberculose (TB) est présente chez l'homme depuis des milliers d'années. Les restes squelettiques que les humains préhistoriques (4000 avant notre ère) souffraient de la TB et que la carie tuberculose a été découverte dans les épines des momies égyptiennes datant de 3000-2400 avant notre ère [23]. Ce n'était pas identifié comme une maladie unique jusque dans les années 1820 en raison de la variété de ses symptômes. En 1834, Jorhann Lukas Schönlein donne à la maladie le nom de « Tuberculose » [23]. La tuberculose est une maladie infectieuse causée par mycobacterium tuberculosis. Il se propage dans l'air comme le rhume. La plupart des infections tuberculeuses se traduit par une infection latente où le corps est capable de combattre les bactéries et les empêcher de grandir. Les bactéries vont ainsi devenir dormantes et rester dans l'organisme sans provoquer des symptômes [12]. Cependant lorsque le système immunitaire d'un patient atteint de la tuberculose latente est affaibli, la tuberculose peut devenir actif et provoque une infection des poumons ou d'autres parties du corps. Seules les personnes atteintes de la tuberculose active peuvent provoquer la maladie. Selon l'organisation mondiale de la santé (OMS), 5 à 10 % des personnes qui sont infectées par la tuberculose, elles présenteront des symptômes à un moment donné de leur vie si elles sont laissées non traitées. Chaque personne infectera 10 à 15 personnes chaque année [1].

Du point de vue contamination, la tuberculose se transmet par voie aérienne d'une personne à une autre. Les bactéries pénètrent dans l'air lorsqu'une personne atteinte d'une infection pulmonaire tuberculeuse tousse, éternue, crie ou crache [1]. Les personnes se trouvant à proximité peuvent alors éventuellement respirer la bactérie dans leur poumons et être infectée. La tuberculose ne peut pas se propager par les poignées de main ou le

fait de s'asseoir sur le siège des toilettes ou partager de la vaisselles et des ustensiles avec une personne atteinte de la TB. On dit que chaque seconde, une personne dans le monde est nouvellement infectée par les bacilles tuberculeux [20]. Tout le monde peut contracter la TB mais les personnes exposées sont :

- ceux qui vivent en contact étroit avec des personnes atteintes d'une tuberculose active infectieuse ;
- ceux dont le système immunitaire est faible en raison de leur âge ou problème de santé, diabétique du VIH/SIDA ;
- ceux qui vivent dans les environnements où le niveau d'infection tuberculeuse existante est supérieur à la normale par exemple environnement pauvre et surpeuplé, détenus, les sans-abris.

Les symptômes de la tuberculose dépendent de l'endroit où se développe les bactéries tuberculeuses dans le corps. Les cas de la TB active peuvent être pulmonaires lorsqu'ils affectent les poumons. Les premiers symptômes sont généralement la fatigue ou faiblesse, perte de poids inexpliqué, fièvre, frissons, perte d'appétit et sueur nocturne [1]. Puisque les symptômes ressemblent beaucoup à ceux d'un rhume, les gens ont tendance à le traiter comme tel. Il existe également de cas où l'infection se propage au delà des poumons vers d'autres parties du corps tels que les os et les articulations, le système digestif, la vessie et les organes de reproducteurs, système nerveux, c'est ce qu'on appelle la tuberculose extra-pulmonaire. Les symptômes dépendent des organes impliqués.
Le traitement de la TB dure au moins 6 mois et parfois plus longtemps jusqu'à 24 mois. Le succès du traitement anti-tuberculeux dépend largement de l'observance du patient. L'une des principales causes de l'échec du traitement est que le patient n'a pas pris les médicaments prescrits. Dans la plupart des cas un traitement approprié guérira la tuberculose. Sans traitement la tuberculose peut être une infection mortelle.
A l'échelle mondiale, le rapport de l'OMS publié en 2022 [42] indique que 10.6 millions de personnes sont tombées malades de la TB en 2021 (+4.5% par rapport à 2020) et 1.6 million de personnes sont mortes de la TB dont 187000 chez les personnes séropositives (+100 000 par rapport à 2020). Cette augmentation du nombre est causée par la pandémie de la COVID-19 en 2021 qui a touché le service de lutte contre la TB.
La tuberculose est la neuvième cause de mortalité dans le monde et la principale cause d'un seul agent infectieux en tête de classement des causes de décès par rapport au VIH/SIDA. On estime qu'un tiers de la population mondiale souffre de la TB latente, ce qui signifie que les gens ont été infectés par des bactéries tuberculeuses mais ne sont pas (encore) malades de la maladie et ne peuvent pas transmettre.
L'infection au VIH et la pauvreté, des comorbidités comme la malnutrition ou le diabète augmente le risque de la TB et d'issue défavorable du traitement.
AU Burundi, la tuberculose (TB) constitue un important problème de santé publique et sévit une forme endo-épidémique [41]. Selon le rapport de Programme National Intègre

Lèpre et Tuberculose (PNILT), le nombre de cas de la tuberculose a diminué en 2022 par rapport à 2021, voir le tableau 3.1. En 2014 l'assemblée mondiale de la santé a adopté la stratégie « Mettre fin à la TB » visant à mettre fin à l'épidémie d'ici 2035 dans le cadre des objectifs de développement durable des nations unies. Les objectifs de cette stratégie sont d'obtenir d'ici 2035, une réduction de 95% de la mortalité due à la maladie et de 90% de l'incidence par rapport à 2015. Le Burundi a fait d'énormes progrès en matières de Lutte

Tableau 3.1 – Cas enregistrés au cours de la période située entre 2010 et 2021

| Année | 2010 | 2011 | 2012 | 2013 | 2014 | 2015 | 2016 | 2017 | 2018 | 2019 | 2020 | 2021 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Nombre de cas enregistrés | 7719 | 6828 | 7016 | 7547 | 7309 | 6969 | 7862 | 7202 | 6827 | 7215 | 7105 | 6874 |

[33]

contre la TB. Selon la revue externe du programme tuberculose, le Burundi a enregistré des succès thérapeutiques de 95% contre 90% qui est la cible de l'OMS. La réduction des décès liés à la TB s'évalue à 16% alors que la cible de l'OMS est de 20%. La réduction de l'incidence de la TB s'élève à 45% contre 35% qui est la cible de l'OMS. Ces résultats classe le Burundi parmi les premiers pays ayant fait d'énormes progrès dans l'éradication de la TB [41]. Malgré les avancées significatives enregistrées dans cette lutte contre la TB, le Burundi n'est pas à l'abri de cette maladie infectieuse car selon les statistiques émanant du ministère de la santé publique et de la lutte contre le SIDA , le rapport annuel 2023 du programme en charge de la tuberculose montre que 7799 cas de tuberculose soit 61% des cas attendus ont été notifiés et mis sous traitement [45]. La lutte contre cette maladie doit être continuelle.

## 3.2 Etymologie et terminologie en épidémiologie

Le mot épidémiologie a pour racine grec suivant :

- épi : au dessus ou bien parmi
- demos : peuple ou bien district
- logos : mot ou bien discours

**Définition 3.1.** *L'épidémiologie est l'étude des rapports entre les maladies et les facteurs susceptibles d'exercer une influence sur leur fréquence, leur distribution, leur évolution.*

Cette décomposition étymologique du mot épidémiologie suggère que cette discipline ne s'intéresse qu'aux populations humaines.
L'épidémiologie a pour objectif les études de santé, des maladies et des facteurs associés au sein d'une population. Elle a aussi pour objectif l'étude des fréquences des maladies et

la dynamique des états de santé dans une population humaine telles que la propagation des agents pathogènes à travers des déterminants tels que l'exposition et le facteur de risque.
Il est à noter que les études épidémiologiques s'intéressent plus aux groupes qu'à l'individu lui-même.

**Définition 3.2.**
- *Endémie : une endémie est une maladie infectieuse et contagieuse qui affecte de manière durable une région donnée. Elle y sévit en permanence ou de façon latente.*
- *Epidémie : une épidémie est défini comme une augmentation de la fréquence d'apparition d'une maladie dans une population au dessus de son niveau de référence ou du niveau attendu dans une période donnée.*
- *Pandémie : une pandémie est une épidémie de très grande envergure qui se développe sur un vaste territoire en dépassant la frontière d'un état.*
- *Maladie infectieuse : maladie provoquée par la transmission d'un agent pathogène virus, bactérie, parasite, mycose, prion,...*
- *Un individu infecté et infectieux : si l'agent pathogène s'établit dans un individu exposé (individu hôte), ce dernier devient infecté. Les individus infectés ne sont pas nécessairement infectieux pendant la période de leur infection*
- *Patient zéro : il désigne le premier cas reconnu d'une pathologie qui est à l'origine de tous les autres cas recensés.*
- *Individu exposé : quand un individu sain mais vulnérable à contracter une maladie, il n'est pas typiquement infectieux*
- *individu latents et période de latence : les individus latents sont des individus infectés mais pas encore infectieux. La période de latence est définie comme le temps entre l'infection et le moment où l'hôte est capable de transmettre l'agent infectieux à un autre individu. La période entre l'exposition et le début de la période de transmissibilité qui peut être plus courte ou plus longue que la période d'incubation.*
- *Individus asymptomatiques : asymptomatique signifie qui ne montre aucun signe de la maladie. Une personne asymptomatique (porteur sain) est une personne qui est porteuse d'une maladie mais sans en développer les symptômes.*

## 3.3 Modélisation mathématique des maladies infectieuses

Les modèles mathématiques sont devenus un outil important pour analyser la propagation et contrôle de maladies infectieuses. Les résultats des modèles mathématiques peuvent aider à déterminer la plausibilité des explications épidémiologiques et prédire l'impact de

changement sur la dynamique du système. Il est important de comprendre la population dynamique de la transmission des agents infectieux et l'impact potentiel des maladies infectieuses[36].
Le tout premier modèle épidémiologique a été formulé par Daniel Bernouilli en 1760 [4] afin d'évaluer l'impact de la variation sur l'espérance de vie humaine. Cependant la modélisation épidémiologique déterministe semble avoir commencé au $20^{\text{è}}$ siècle lorsque Hames [16] a formulé et analysé un modèle à temps discret de la rougeole en 1906, suivi par Ross avec ses travaux sur le paludisme en 1911.
En 1927, Kermack et Mckendrick ont obtenu l'un des résultats clés dans l'épidémiologie en dérivant le théorème du seuil qui prédit la fraction critique des sensibles dans la population qui doit être dépassé pour qu'une flambée épidémique se déclare se produire. Dès le milieu du $XX^{\text{è}}$ siècle, l'épidémiologie mathématique a montré une croissance rapide. Le livre sur la modélisation mathématique des systèmes épidémiologiques a été publié par Bailey considéré comme un jalon important qui, en parie, conduit à la reconnaissance de l'importance de la modélisation dans la prise de décision en santé publique.
En épidémiologie de la TB, l'approche modèle a été appliquée pour la première fois par Frost. Il a prédit en 1937 qu'avec le taux de transmission de l'infection faible et en baisse aux Etats-Unis, il est parfois probable que la maladie finira par être éradiquée. Sa prédiction a été confirmée par Feldman [15] en 1957 en réalisant de nouveaux progrès dans maquettisme.
Aujourd'hui, divers modèles ont été formulés, analysés mathématiquement et appliqués aux maladies infectieuses.

## 3.4 Modèles épidémiques

En 1927, [27] développèrent des modèles de maladies infectieuses pour étudier la Grande Peste de Londres sur les périodes 1665-1666. Ces modèles ont servi de fondement des modèles théoriques en épidémiologie. La population est divisée en trois catégories (compartiments) comme sensibles, infectées et récupérées [27] et le modèle est appelé $SIR$ qui incluait les naissances et les décès. Les systèmes d'équations différentielles non linéaires issues des modèles $SIR$ représentent les équations du type Lotka Voltera. En 1981, le virus de l'immunodéficience humaine $VIH$ est apparu, provoque la maladie sexuellement transmissible, à savoir le syndrome d'immunodéficience acquise (SIDA). Les résultats rapportés dans l'analyse de la transmission du VIH à San Fransisco ont été reproduits grâce à un modèle mathématique développé par Anderson. Une grande variété des modèles ont été formulés pour les maladies infectieuses et une discution sur la dynamique globale de la TB avec une croissance démographique dépendante de la densité est réalisée [24][47]. L'étude des modèles mathématiques d'épidémiologie est essentiellement pour découvrir

les aspects essentiels de la propagation des maladies infectieuses et aide les décideurs de santé publique à comparer, planifier, évaluer et mettre en œuvre différents controls .
Le processus fondamental représenté dans le modèle mathématique de l'épidémiologie de la maladie infectieuse est la transmission d'agents infectieux.
Les modèles mathématiques caractérisent la transmission en termes d'infection ; taux liés à la fréquence des contacts entre les individus et les probabilités de transmission étant donné un contact entre un hôte sensible et hôte infectieux [36].
L'hôte infecté sera capable de transmettre l'infection à d'autres lorsque l'hôte devient infectieux. La période de temps qui s'écoule avant qu'un hôte infecté devient infectieux, on parle alors de période de latence.
Les compartiments avec des étiquettes telles $S, E, I$ et $R$ sont souvent utilisés pour présentés les classes épidémiologiques dans une population. La première classe est sensible $(S)$ qui peut contracter l'infection. La deuxième classe est exposée $(E)$ qui est en période de latence. la classe suivante est $(I)$ qui est la classe contagieuse qui peut transmettre l'infection aux personnes sensibles et enfin la classe des récupérés $(R)$ qui est immunisée.
Les acronymes des modèles épidémiologiques sont souvent basés sur les schémas du flux entre les compartiment tel que $SEI, SIS, SIR, SEIR, SEIS, SEIRS$, ... .
Le modèle $SEIR$ suppose que la densité de la population totale est une constante bien que la taille totale de la population puisse varier avec le temps.

## 3.5 Formulation du modèle

Un modèle mathématique de la TB est établi en utilisant les compartiments S-E-I-R où S représente les personnes sensibles à être infectées, E les personnes exposées (dans la période de latence), I les personnes infectées par la TB active et R les personnes rétablies (guéries) au temps $t > 0$ .
La plupart des individus initialement infectés, entreront dans une phase de latence à long terme et déplacés de la classe sensible $(S)$ vers exposé $(E)$ aux taux $\beta$. Ils évoluent vers une tuberculose active et entrent dans le compartiment des infectés $(I)$ aux taux de contamination $\lambda$. Si le traitement se fait rapidement, ceux qui guérissent de la maladie passe dans le compartiment des guéris $(R)$ à un taux de guérison $\gamma$ et ceux qui retardent le traitement sont ignorés dans notre modèle. Les individus qui guérissent, ils ne sont pas immunisés contre la maladie, ils perdent leur immunité à un taux $\rho$ et deviennent sensibles $(S)$. Notons que le compartiment $S$ est sensible à la naissance à un taux $\kappa$. Ainsi dans chaque compartiment chaque individu peut subir la mort naturelle à un taux $\mu$. Sauf dans le compartiment des infectés $(I)$ qu'un individu peut mourir aux taux $\alpha$ et $\mu$ respectivement à cause de la maladie ou la mort naturelle.
Le modèle de cette maladie selon [46] est décrit par la figure suivante :

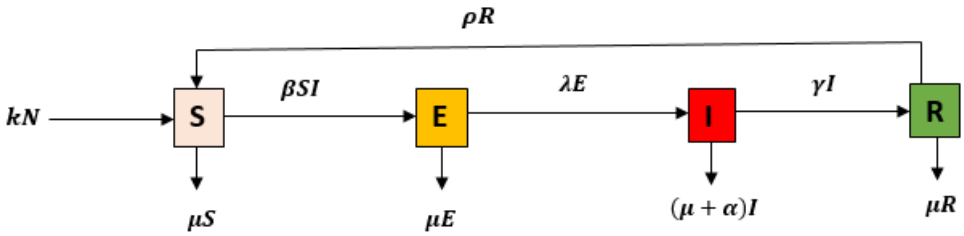



FIGURE 3.1 – Figure du modèle S-E-I-R de la tuberculose.

Ce modèle a quatre compartiments donc la population total c'est-à-dire $N = S+E+I+R$ est divisé en quatre regroupements dont les variables dépendantes $S$, $I$, $E$, $R$ et variable indépendante $t$ avec leur paramètres regroupés dans le tableau suivant :

| N$^o$ | variables et paramètres | significations |
|---|---|---|
| 1 | S | personnes susceptibles |
| 2 | E | personne exposée à la TB |
| 3 | I | personnes infectées de la TB |
| 4 | R | personnes guéries de la TB |
| 5 | $\kappa$ | taux de natalité |
| 6 | $\alpha$ | taux de mortalité causé par la TB |
| 7 | $\mu$ | taux de mortalité naturelle |
| 8 | $\beta$ | taux auquel les susceptibles sont exposés à la TB |
| 9 | $\lambda$ | taux d'infection de la TB |
| 10 | $\gamma$ | taux auquel les infectés deviennent immunisées |
| 11 | $\rho$ | taux auquel les récupérés perdent leur immunité |

La propagation de la maladie à l'instant $t \geq 0$ est décrite par les équations différentielles suivantes :

$$\begin{cases} \dfrac{dS}{dt} = \kappa N + \rho R - (\beta I + \mu)S & (i) \\ \dfrac{dE}{dt} = \beta IS - (\mu + \lambda)E & (ii) \\ \dfrac{dI}{dt} = \lambda E - (\mu + \alpha + \gamma)I & (iii) \\ \dfrac{dR}{dt} = \gamma I - (\mu + \rho)R & (iv) \end{cases} \tag{3.1}$$

Ces équations sont utilisées dans les modèles épidémiologiques pour représenter la propagation d'une maladie au sein d'une population. Elles sont basées sur le modèle $SEIR$, qui divise la population en quatre groupes. Elles définissent donc :

- Equation (i) : cette équation décrit le taux de variation des individus susceptibles

$S(t)$. Elle prend en compte le taux d'infection $\beta$ multiplié par le nombre d'individus infectieux $I(t)$, ainsi que le taux de naissance $\kappa$ et de décès naturels $\mu$, et soustrait la perte d'individus susceptibles en raison de l'infection et du rétablissement $\rho$. De plus, elle soustrait le taux auquel les individus passent du compartiment rétabli $R$ à d'autres compartiments (comme susceptible) en raison d'une force telle que l'affaiblissement de l'immunité ou la réinfection $\rho$.

- Equation (ii) : cette équation représente le taux de variation des individus exposés $E(t)$. Elle prend en compte le taux auquel les individus passent du compartiment susceptible au compartiment exposé (exposé à l'infection mais pas encore infectieux), déterminé par le taux d'infection $\beta$ multiplié par le nombre d'individus infectieux $I(t)$, et soustrait le taux de décès naturels $\mu$ ainsi que le taux auquel les individus passent de exposé à infectieux (ou à d'autres compartiments) $\lambda$.
- Equation (iii) : cette équation représente le taux de variation des individus infectieux $I(t)$. Elle prend en compte le taux auquel les individus passent du compartiment exposé au compartiment infectieux $\lambda$, et soustrait le tau de décès naturels $\mu$, le taux de guérison $\alpha$, et le taux auquel les individus passent d'infectieux à rétablis $\gamma$.
- Equation (iv) : cette équation représente le taux de variation des individus rétablis $R(t)$. Elle prend en compte le taux auquel les individus passent du compartiment infectieux au compartiment rétablis $\gamma$, et soustrait le taux de décès naturels $\mu$, et le taux auquel les individus passent du compartiment rétablis à d'autres compartiments $\rho$.

Ensemble, ces équations décrivent comment la population dans chaque compartiment change au fil du temps lors d'une épidémie, en prenant en compte des paramètres tels que le taux d'infection, le taux de guérison, le taux de mortalité et les taux de mouvement entre les compartiments. Ce modèle donne une idée de base sur la façon dont la transmission de la tuberculose se produit. Nous pouvons analyser ces équations de la transmission de la tuberculose grâce à une nouvelle technique des méthodes des groupes de Lie pour obtenir une solution exacte qui aide à contrôler la transmission de la tuberculose au Burundi. Le modèle de la transmission de la tuberculose est une équation différentielle ordinaire non linéaire du premier ordre.

# Chapitre 4

# Résolution du modèle par les groupes de Lie

Dans ce chapitre, nous abordons la résolution du modèle mathématique de la tuberculose au Burundi en utilisant la méthode des groupes de Lie. Nous fournissons une méthodologie détaillée pour la résolution du modèle mathématique de la tuberculose au Burundi en utilisant la méthode des groupes de Lie en commençant par identifier les symétries du système d'équations différentielles décrivant la dynamique de la tuberculose. Ces symétries peuvent inclure des transformations spatiales ou temporelles qui préservent la forme des équations différentielles. Une fois les symétries identifiées, nous déterminons les générateurs infinitésimaux correspondants. Ces générateurs sont des opérateurs différentiels qui engendrent les transformations associées et nous permettent de réduire le système d'équations différentielles. En utilisant les générateurs infinitésimaux,nous calculons les invariants du système d'équations différentielles. Les invariants sont des quantités qui restent inchangées sous l'action des symétries et les conditions d'invariance sont des équations aux dérivées partielles que les invariants doivent satisfaire. Dernièrement, nous calculons le prolongement. En utilisant les invariants et les conditions d'invariance, nous réduisons le système d'équations différentielles à un système plus simple. Cette réduction facilite la résolution analytique du système . Enfin,nous résolvons le système d'équations réduit pour obtenir des solutions analytiques décrivant l'évolution de la tuberculose au Burundi. Ces solutions nous permettent de comprendre l'importance des groupes de Lie dans la résolution des modèles épidémiologiques pour trouver la solution exacte des équations différentielles décrivant la transmission de la tuberculose au Burundi. Commençons d'abord à voir l'évolution des variables dépendantes sous une transformation ponctuelle.

## 4.1 Transformation ponctuelle des variables du modèle

Lorsque nous résolvons un système d'équation différentielle décrivant la propagation d'une maladie comme la tuberculose, il est crucial de tenir compte des événements soudains qui peuvent changer radicalement la situation. Les transformations ponctuelles des variables du modèle représentent ces changements brusques et immédiats dans la dynamique de la maladie à des moments précis. Dans cette analyse, nous examinons un système d'équations différentielles qui dépeint comment les populations de personnes susceptibles, exposées, infectées et rétablies évoluent au fil du temps. En identifiant les transformations ponctuelles appropriées pour chaque variable du modèle, nous pouvons mieux comprendre comment les interventions telles que les campagnes de vaccination soudaines, les traitements intensifs ou d'autres actions immédiates peuvent affecter la propagation de la tuberculose. En comprenant ces transformations, nous sommes mieux équipés pour évaluer l'efficacité des stratégies de lutte contre la maladie et pour prendre des décisions éclairées en matière de santé publique.
Dans ce contexte, considérons une transformation de la forme
$M(t, S, E, I, R) \longmapsto \hat{M}(\hat{t}, \hat{S}, \hat{E}, \hat{I}, \hat{R}, )$ où $M$ représente l'état du système à un moment donné, et $\hat{t}, \hat{S}, \hat{E}, \hat{I}, \hat{R}$ représentent les nouveaux états du système après la transformation, définie selon (2.10) par :

$$\begin{aligned} \hat{t} &= M_0(t, S, E, I, R) \\ \hat{S} &= M_1(t, S, E, I, R) \\ \hat{E} &= M_2(t, S, E, I, R) \\ \hat{I} &= M_3(t, S, E, I, R) \\ \hat{R} &= M_4(t, S, E, I, R) \end{aligned} \tag{4.1}$$

.

Les transformations ponctuelles considérées par Lie sont des transformations dépendant d'au-moins un paramètre. Ce paramètre est un paramètre du groupe associé. Ainsi appelons $\varepsilon$ un paramètre du groupe de la transformation. Un groupe de transformation à un

paramètre $\varepsilon$ est donc :

$$\begin{aligned}
\hat{t} &= M_0(t, S, E, I, R, \varepsilon) \\
\hat{S} &= M_1(t, S, E, I, R, \varepsilon) \\
\hat{E} &= M_2(t, S, E, I, R, \varepsilon) \\
\hat{I} &= M_3(t, S, E, I, R, \varepsilon) \\
\hat{R} &= M_4(t, S, E, I, R, \varepsilon)
\end{aligned} \tag{4.2}$$

.

De telles transformations ont des propriétés d'un groupe qui sont au à la base de la définition d'un groupe de Lie. En faisant le développement en série de Taylor d'ordre 2 de (4.2) au point $\varepsilon = 0$ , nous obtenons

$$\begin{aligned}
\hat{t} &= t + \varepsilon(\frac{\partial M_0}{\partial \varepsilon}|_{\varepsilon=0}) + \frac{1}{2}\varepsilon^2(\frac{\partial^2 M_0}{\partial \varepsilon^2}|_{\varepsilon=0}) \\
\hat{S} &= S + \varepsilon(\frac{\partial M_1}{\partial \varepsilon}|_{\varepsilon=0}) + \frac{1}{2}\varepsilon^2(\frac{\partial^2 M_1}{\partial \varepsilon^2}|_{\varepsilon=0}) \\
\hat{E} &= E + \varepsilon(\frac{\partial M_2}{\partial \varepsilon}|_{\varepsilon=0}) + \frac{1}{2}\varepsilon^2(\frac{\partial^2 M_2}{\partial \varepsilon^2}|_{\varepsilon=0}) \\
\hat{I} &= I + \varepsilon(\frac{\partial M_3}{\partial \varepsilon}|_{\varepsilon=0}) + \frac{1}{2}\varepsilon^2(\frac{\partial^2 M_3}{\partial \varepsilon^2}|_{\varepsilon=0}) \\
\hat{R} &= R + \varepsilon(\frac{\partial M_4}{\partial \varepsilon}|_{\varepsilon=0}) + \frac{1}{2}\varepsilon^2(\frac{\partial^2 M_4}{\partial \varepsilon^2}|_{\varepsilon=0}).
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Simplifions encore l'écriture, pour obtenir

$$\begin{aligned}
\hat{t} &= t + \varepsilon\xi(t, S, E, I, R) + O(\varepsilon^2) \\
\hat{S} &= S + \varepsilon\eta_1(t, S, E, I, R) + O(\varepsilon^2) \\
\hat{E} &= E + \varepsilon\eta_2(t, S, E, I, R) + O(\varepsilon^2) \\
\hat{I} &= I + \varepsilon\eta_3(t, S, E, I, R) + O(\varepsilon^2) \\
\hat{R} &= R + \varepsilon\eta_4(t, S, E, I, R) + O(\varepsilon^2).
\end{aligned} \tag{4.4}$$

De (2.12), on a les équations de transformation suivantes :

$$\begin{aligned}
\hat{t} &= t + \varepsilon\xi(t, S, E, I, R) \\
\hat{S} &= S + \varepsilon\eta_1(t, S, E, I, R) \\
\hat{E} &= E + \varepsilon\eta_2(t, S, E, I, R) \\
\hat{I} &= I + \varepsilon\eta_3(t, S, E, I, R) \\
\hat{R} &= R + \varepsilon\eta_4(t, S, E, I, R).
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Réécrivons le système (3.1) sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{S} + (\beta I + \mu)S - (\kappa N + \rho R) = 0 \\ \dot{E} + (\mu + \lambda)E - \beta IS = 0 \\ \dot{I} + (\mu + \alpha + \gamma)I - \lambda E = 0 \\ \dot{R} + (\mu + \rho)R - \gamma I = 0. \end{cases} \tag{4.6}$$

Le remplacement par $\hat{t}, \hat{S}, \hat{E}, \hat{I}, \hat{R}$ les nouvelles variables de la transformation dans le système (4.6), donne :

$$\begin{cases} \dot{\hat{S}} + (\beta \hat{I} + \mu)\hat{S} - (\kappa N + \rho \hat{R}) = 0 \\ \dot{\hat{E}} + (\mu + \lambda)\hat{E} - \beta \hat{I}\hat{S} = 0 \\ \dot{\hat{I}} + (\mu + \alpha + \gamma)\hat{I} - \lambda \hat{E} = 0 \\ \dot{\hat{R}} + (\mu + \rho)\hat{R} - \gamma \hat{I} = 0. \end{cases} \tag{4.7}$$

Soit $\phi(t)$ une fonction de transformation ponctuelle du système et définissons les nouvelles transformations ponctuelles des variables $S(t)$, $E(t)$, $I(t)$ et $R(t)$ de manière suivantes :

$$\begin{cases} \hat{t} = t \\ \hat{S} = S + \phi_1(t) \\ \hat{E} = E + \phi_2(t) \\ \hat{I} = I + \phi_3(t) \\ \hat{R} = R + \phi_4(t) \end{cases} \tag{4.8}$$

où $\hat{S}$, $\hat{E}$, $\hat{I}$, $\hat{R}$ sont les nouvelles variables de la transformation et $\phi_1$,$\phi_2$, $\phi_3$, $\phi_4$ sont des fonctions à déterminer.
La substitution de (4.8) dans le système (4.7) donne :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(S + \phi_1(t)) + (\beta(I + \phi_3(t)) + \mu)(S + \phi_1(t)) - \kappa N + \rho(R + \phi_4(t)) = 0 \\ \frac{d}{dt}(E + \phi_2(t)) + (\mu + \lambda)(E + \phi_2(t)) - \beta(I + \phi_3(t))(S + \phi_1(t)) = 0 \\ \frac{d}{dt}(I + \phi_3(t)) + (\mu + \alpha + \gamma)(I + \phi_3(t)) - \lambda(E + \phi_2(t)) = 0 \\ \frac{d}{dt}(R + \phi_4(t)) + (\mu + \rho)(R + \phi_4(t)) - \gamma(I + \phi_3(t)) = 0. \end{cases} \tag{4.9}$$

Le développement de (4.9) donne :

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} + \frac{d\phi_1(t)}{dt} + \beta(I+\phi_3(t))S + \beta(I+\phi_3(t))\phi_1(t) + \mu S + \mu\phi_1(t) - \kappa N + \rho R + \rho\phi_4(t) = 0 \\ \frac{dE}{dt} + \frac{d\phi_2(t)}{dt} + (\mu+\lambda)E + (\mu+\lambda)\phi_2(t) - \beta(I+\phi_3(t))S - \beta\phi_1(t) = 0 \\ \frac{dI}{dt} + \frac{d\phi_3(t)}{dt} + (\mu+\alpha+\gamma)I + (\mu+\alpha+\gamma)\phi_3(t) - \lambda E - \lambda\phi_2(t) = 0 \\ \frac{dR}{dt} + \frac{d\phi_4(t)}{dt} + (\mu+\rho)R + (\mu+\rho)\phi_4(t) - \gamma I - \gamma\phi_3(t) = 0. \end{cases} \tag{4.10}$$

Le regroupement des termes contenant les dérivées des fonctions $\phi_i$ est :

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} + \beta(I+\phi_3(t))S + \mu S - \kappa N + \rho R + (\frac{d\phi_1(t)}{dt} + \beta(I+\phi_3(t))\phi_1(t) + \mu\phi_1(t)) + \rho\phi_4(t) = 0 \\ \frac{dE}{dt} + (\mu+\lambda)E - \beta(I+\phi_3(t))S - \beta\phi_1(t) + \left(\frac{d\phi_2(t)}{dt} + (\mu+\lambda)\phi_2(t)\right) = 0 \\ \frac{dI}{dt} + (\mu+\alpha+\gamma)I - \lambda E - \lambda\phi_2(t) + \left(\frac{d\phi_3(t)}{dt} + (\mu+\alpha+\gamma)\phi_3(t)\right) = 0 \\ \frac{dR}{dt} + (\mu+\rho)R - \gamma I - \gamma\phi_3(t) + \left(\frac{d\phi_4(t)}{dt} + (\mu+\rho)\phi_4(t)\right) = 0. \end{cases} \tag{4.11}$$

Nous résolvons les termes contenant les dérivées des fonctions $\phi_i(t)$ dans chaque équation en intégrant de part et d'autre de l'équation pour résoudre $\phi_i(t)$.
Les équations contenant les fonctions inconnues $\phi_i(t)$ sont les suivantes :

$$\begin{cases} \frac{d\phi_1(t)}{dt} + \beta(I+\phi_3(t))\phi_1(t) + \mu\phi_1(t) = 0 \\ \frac{d\phi_2(t)}{dt} + \mu\phi_2(t) + \lambda\phi_2(t) = 0 \\ \frac{d\phi_3(t)}{dt} + \mu\phi_3(t) + \alpha\phi_3(t) + \gamma\phi_3(t) = 0 \\ \frac{d\phi_4(t)}{dt} + \mu\phi_4(t) + \rho\phi_4(t) = 0. \end{cases} \tag{4.12}$$

Résolvons chaque équation du système par la méthode d'intégration de séparation des variables.
Le système (4.12), peut s'écrire :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\phi_1(t) = -(\beta I + \beta\phi_3(t) + \mu)\phi_1(t) \\ \frac{d}{dt}\phi_2(t) = -(\mu+\lambda)\phi_2(t) \\ \frac{d}{dt}\phi_3(t) = -(\mu+\alpha+\gamma)\phi_3(t) \\ \frac{d}{dt}\phi_4(t) = -(\mu+\rho)\phi_4(t). \end{cases} \tag{4.13}$$

Ou encore

$$\begin{cases} \frac{d\phi_1(t)}{\phi_1(t)} = -(\beta I + \beta\phi_3(t) + \mu)dt \\ \frac{d\phi_2(t)}{\phi_2(t)} = -(\mu + \lambda)dt \\ \frac{d\phi_3(t)}{\phi_3(t)} = -(\mu + \alpha + \gamma)dt \\ \frac{d\phi_4(t)}{\phi_4(t)} = -(\mu + \rho)dt \\ . \end{cases} \tag{4.14}$$

En intégrant chaque équation du système membre à membre nous obtenons :

$$\begin{cases} \int \frac{d\phi_1(t)}{\phi_1(t)} = -\int(\beta I + \beta\phi_3(t) + \mu)dt \\ \int \frac{d\phi_2(t)}{\phi_2(t)} = -\int(\mu + \lambda)dt \\ \int \frac{d\phi_3(t)}{\phi_3(t)} = -\int(\mu + \alpha + \gamma)dt \\ \int \frac{d\phi_4(t)}{\phi_4(t)} = -\int(\mu + \rho)dt. \end{cases} \tag{4.15}$$

Le système (4.15) équivaut à

$$\begin{cases} ln|\phi_1(t| = -(\beta I + +\mu) - \int \beta\phi_3(t)t \\ ln|\phi_2(t| = -(\mu + \lambda)t \\ ln|\phi_3(t| = -(\mu + \alpha + \gamma)t \\ ln|\phi_4(t| = -(\mu + \rho)t. \end{cases} \tag{4.16}$$

En exponentiant chaque équation du système, nous trouvons les expressions suivantes de $\phi_i(t)$

$$\begin{cases} \phi_1(t) = C_1 e^{-\beta It - \beta \int \phi_3(t)\, dt - \mu t} \\ \phi_2(t) = C_2 e^{-(\mu+\lambda)t} \\ \phi_3(t) = C_3 e^{-(\mu+\alpha+\gamma)t} \\ \phi_4(t) = C_4 e^{-(\mu+\rho)t} \end{cases} \tag{4.17}$$

où $C_1$, $C_2$, $C_3$, $C_4$ sont les constantes d'intégration qui doivent être déterminées en fonction des conditions initiales du problème.

Maintenant nous pouvons substituer ces fonctions dans les équations transformées (4.10)

pour obtenir les transformations finales de $\hat{S}(t)$, $\hat{E}(t)$, $\hat{I}(t)$, $\hat{R}(t)$. On a :

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} + \frac{d}{dt}\left(C_1 e^{-\beta It - \beta\int C_3 e^{-(\mu+\alpha+\gamma)t}\,dt - \mu t}\right) + \beta(I + C_3 e^{-(\mu+\alpha+\gamma)t})S \\ +\beta(I + C_3 e^{-(\mu+\alpha+\gamma)t})C_1 e^{-\beta It - \beta\int C_3 e^{-(\mu+\alpha+\gamma)t}\,dt - \mu t} \\ +\mu S + \mu C_1 e^{-\beta It - \beta\int C_3 e^{-(\mu+\alpha+\gamma)t}\,dt - \mu t} - \kappa N + \rho R + \rho C_4 e^{-(\mu+\rho)t} = 0 \\ \frac{dE}{dt} + \frac{d}{dt}\left(C_2 e^{-(\mu+\lambda)t}\right) + (\mu+\lambda)E + (\mu+\lambda)C_2 e^{-(\mu+\lambda)t} \\ -\beta(I + C_3 e^{-(\mu+\alpha+\gamma)t})S - \beta C_1 e^{-\beta It - \beta\int C_3 e^{-(\mu+\alpha+\gamma)t}\,dt - \mu t} = 0 \\ \frac{dI}{dt} + \frac{d}{dt}\left(C_3 e^{-(\mu+\alpha+\gamma)t}\right) + (\mu+\alpha+\gamma)I + (\mu+\alpha+\gamma)C_3 e^{-(\mu+\alpha+\gamma)t} \\ -\lambda E - \lambda C_2 e^{-(\mu+\lambda)t} = 0 \\ \frac{dR}{dt} + \frac{d}{dt}\left(C_4 e^{-(\mu+\rho)t}\right) + (\mu+\rho)R + (\mu+\rho)C_4 e^{-(\mu+\rho)t} \\ -\gamma I - \gamma C_3 e^{-(\mu+\alpha+\gamma)t} = 0. \end{cases} \tag{4.18}$$

Simplifions ces équations et nous avons les expressions suivantes

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} - \beta C_1 e^{-\beta It - \beta\int C_3 e^{-(\mu+\alpha+\gamma)t}\,dt - \mu t}(I + \int C_3 e^{-(\mu+\alpha+\gamma)t}\,dt + \mu)S \\ +\beta(I + C_3 e^{-(\mu+\alpha+\gamma)t})C_1 e^{-\beta It - \beta\int C_3 e^{-(\mu+\alpha+\gamma)t}\,dt - \mu t} \\ +\mu S + \mu C_1 e^{-\beta It - \beta\int C_3 e^{-(\mu+\alpha+\gamma)t}\,dt - \mu t} - \kappa N + \rho R + \rho C_4 e^{-(\mu+\rho)t} = 0 \\ \frac{dE}{dt} - (\mu+\lambda)C_2 e^{-(\mu+\lambda)t} + (\mu+\lambda)E + (\mu+\lambda)C_2 e^{-(\mu+\lambda)t} \\ -\beta(I + C_3 e^{-(\mu+\alpha+\gamma)t})S - \beta C_1 e^{-\beta It - \beta\int C_3 e^{-(\mu+\alpha+\gamma)t}\,dt - \mu t} = 0 \\ \frac{dI}{dt} + (\mu+\alpha+\gamma)I + (\mu+\alpha+\gamma)C_3 e^{-(\mu+\alpha+\gamma)t} \\ -\lambda E - \lambda C_2 e^{-(\mu+\lambda)t} = 0 \\ \frac{dR}{dt} + (\mu+\rho)R + (\mu+\rho)C_4 e^{-(\mu+\rho)t} \\ -\gamma I - \gamma C_3 e^{-(\mu+\alpha+\gamma)t} = 0. \end{cases} \tag{4.19}$$

Maintenant ces équations simplifiées peuvent être résolues pour obtenir le dynamique de chaque compartiment sous une transformation ponctuelle. La résolution de ces équations par le logiciel mathématica nous donne les expressions suivantes :

$$\begin{cases} \hat{S}(t) = e^{(\mu+\beta)t}[C_1 + \frac{\rho}{(\mu+\beta+\kappa)}e^{-(\mu+\beta+)t}] \\ \hat{E}(t) = e^{(\mu+\lambda)t}[C_2 - \frac{\mu}{(\mu+\lambda)}e^{-(\mu+\lambda)t} - \frac{\lambda}{(\mu+\lambda)}e^{-(\mu+\lambda)t}] \\ \hat{I}(t) = e^{(\mu+\alpha+\gamma)t}[C_3 - \frac{\mu}{(\mu+\alpha+\gamma)}e^{-(\mu+\alpha+\gamma)t} - \frac{\alpha}{(\mu+\alpha+\gamma)}e^{-(\mu+\alpha+\gamma)t} - \frac{\lambda}{(\mu+\lambda)}e^{-(\mu+\lambda)t}] \\ \hat{R}(t) = e^{(\mu+\rho)t}[C_4 - \frac{\mu}{(\mu+\rho)}e^{-(\mu+\rho)t} - \frac{\rho}{(\mu+\rho)}e^{-(\mu+\rho)t}] \end{cases} \tag{4.20}$$

où $C_1$, $C_2$, $C_3$, $C_4$ sont des constantes d'intégrations. Ces expressions décrivent l'évolution temporelle des variables du système transformé sous l'action d'une transformation ponctuelle.

- $\hat{S}(t)$ : cette équation décrit l'évolution du nombre de personnes susceptibles au fil du temps $t$. La population susceptible diminue exponentiellement avec le temps en raison des infections, mais peut également augmenter en raison de la réinfection. Les termes exponentiels $e^{(\mu+\beta)t}$ et $e^{-(\mu+\beta+\kappa)t}$ représentent respectivement la croissance naturelle de la population et la diminution due à l'infection et à la guérison spontanée. $C_1$ représente l'ensemble des facteurs qui peuvent influencer le dynamique de la maladie mais qui sont mis en considération lors de la modélisation.
- $\hat{E}(t)$ : Cette équation décrit l'évolution du nombre de personnes exposées au fil du temps $t$. La population exposée augmente exponentiellement avec le temps en raison des nouvelles infections et diminue en raison de la progression de l'exposition à l'infection et de la progression vers d'autres compartiments. Les termes exponentiels $e^{(\mu+\lambda)t}$ et $e^{-(\mu+\lambda)t}$ représentent respectivement la croissance naturelle de la population et la diminution due à la progression de l'exposition à l'infection.
- $\hat{I}(t))$ : l'expression de cette variable décrit l'évolution des personnes infectées à un moment donné $t$. Elle dépend du taux de mortalité naturelle ($\mu$), du taux de progression de l'infection à la maladie active ($\alpha$) et du taux de guérison sous traitement ($\gamma$). La première partie, $e^{(\mu+\alpha+\gamma)t}$, représente une croissance exponentielle, indiquant le taux auquel de nouvelles personnes exposées entrent dans le compartiment des personnes infectées. La seconde partie, $[C_3 - \frac{\mu}{(\mu+\alpha+\gamma)}e^{-(\mu+\alpha+\gamma)t} - \frac{\alpha}{(\mu+\alpha+\gamma)}e^{-(\mu+\alpha+\gamma)t} - \frac{\gamma}{(\mu+\lambda)}e^{-(\mu+\lambda)t}]$, représente les personnes qui sortent du compartiment des personnes infectées, soit par décès naturel, soit par guérison sous traitement.
- $\hat{R}(t))$ : cette expression décrit l'évolution des personnes rétablies à un moment donné $t$. Elle dépend du taux de mortalité naturelle ($\mu$) et du taux de rétablissement ($\rho$). La première partie, $e^{(\mu+\rho)t}$, représente une croissance exponentielle, indiquant le taux auquel de nouvelles personnes entrent dans le compartiment des personnes rétablies. La seconde partie, $[C_4 - \frac{\mu}{(\mu+\rho)}e^{-(\mu+\rho)t} - \frac{\rho}{(\mu+\rho)}e^{-(\mu+\rho)t}]$, représente les personnes qui sortent du compartiment des personnes rétablies, soit par décès naturel, soit par réinfection après un certain temps.

Les courbes représentatives de chaque compartiment sont représentées au chapitre 5. Ainsi les étapes suivants consistent à la détermination des symétries admises par le modèle.

## 4.2 Générateurs infinitésimaux du modèle

Pour calculer les générateurs infinitésimaux du système, nous allons rechercher les transformations infinitésimales qui peuvent laisser les équations différentielles inchangées. Soit $\psi(t)$ une fonction génératrice de transformation infinitésimales. Les transformations prennent la forme suivante :

$$\begin{cases} S(t) \to S(t) + \varepsilon\psi_1(t)S(t) \\ E(t) \to E(t) + \varepsilon\psi_2(t)E(t) \\ I(t) \to I(t) + \varepsilon\psi_3(t)I(t) \\ R(t) \to R(t) + \varepsilon\psi_4(t)R(t). \end{cases} \tag{4.21}$$

Nous cherchons les coefficients $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$, $\psi_3(t)$ et $\psi_4(t)$. En appliquant ces transformations aux équations différentielles (4.6) et nous obtenons :

$$\begin{cases} \dot{S}(t) + (\beta I(t) + \mu)S(t) - (\kappa N + \rho R(t)) + \varepsilon(\psi_1\dot{S}(t) + (\beta I(t) + \mu)\psi_1 S(t) - (\kappa N + \rho R(t)))\psi_4 R(t) = 0 \\ \dot{E}(t) + (\mu + \lambda)E(t) - \beta I(t)S(t) + \varepsilon(\psi_2\dot{E}(t) + (\mu + \lambda)\psi_2 E(t) + I(t)\psi_1 S(t)) = 0 \\ \dot{I}(t) + (\mu + \alpha + \gamma)I(t) - \lambda E(t) + \varepsilon(\psi_3\dot{I}(t) + (\mu + \alpha + \gamma)\psi_3 I(t) - \lambda\psi_3 E(t) = 0 \\ \dot{R}(t) + (\mu + \rho)R(t) - \gamma I(t) + \varepsilon(\psi_4\dot{R}(t) + (\mu + \rho)\psi_4 R(t) - \gamma\psi_3 I(t) = 0. \end{cases} \tag{4.22}$$

Egalisons les termes en $\varepsilon$ à zéro de chaque équation, on a :

$$\begin{cases} \psi_1\dot{S}(t) + (\beta I(t) + \mu)\psi_1 S(t) - (\kappa N + \rho R(t))\psi_4 R(t) = 0 \\ \psi_2\dot{E}(t) + (\mu + \lambda)\psi_2 E(t) + I(t)\psi_1 S(t) = 0 \\ \psi_3\dot{I}(t) + (\mu + \alpha + \gamma)\psi_3 I(t) - \lambda\psi_3 E(t)) = 0 \\ \psi_4\dot{R}(t) + (\mu + \rho)\psi_4 R(t) - \gamma\psi_3 I(t) = 0. \end{cases} \tag{4.23}$$

En suivant les mêmes étapes de résolution de (4.28) comme (4.12) à (4.16), nous avons trouvé les expressions de $\psi_i$ suivantes :

$$\begin{cases} \psi_1 S(t) = \psi_1 S_0 e^{-(\beta I(t) + \mu + \kappa N)t} \\ \psi_2 E(t) = \psi_2 E_0 e^{-(\mu+\lambda)t} \\ \psi_3 I(t) = \psi_3 I_0 e^{-(\mu+\alpha+\gamma)t} \\ \psi_4 R(t) = \psi_4 R_0 e^{-(\mu+\rho)t}. \end{cases} \tag{4.24}$$

Chaque expression trouvée, est un générateur infinitésimal de chaque equation et représente la symétrie du système. Nous allons alors appliquer ces générateurs aux équations différentielles du système pour trouver la condition d'invariance du modèle.

## 4.3 Condition d'invariance du modèle

En appliquant les expressions de (4.24) aux système d'équations différentielles originales (4.6) respectivement, on a :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(S(t)+\varepsilon\psi_1 S(t))+(\beta I(t)+\mu)(S(t)+\varepsilon\psi_1 S(t)-(\kappa N+\rho R(t)+\varepsilon\psi_4 R(t))=0 \\ \frac{d}{dt}(E(t)+\varepsilon\psi_2 E(t))+(\mu+\lambda)(E(t)+\varepsilon\psi_2 E(t))-\beta(I(t)S(t)+\varepsilon I(t)\psi_1 S(t) \\ +\psi_3 I(t)S(t))=0 \\ \frac{d}{dt}(I(t)+\varepsilon\psi_3 I(t))+(\mu+\alpha+\gamma)(I(t)+\varepsilon\psi_3 I(t)-\lambda(E(t)+\varepsilon\psi_2 E(t))=0 \\ \frac{d}{dt}(R(t)+\varepsilon\psi_4 R(t))+(\mu+\rho)(R(t)+\varepsilon\psi_4 R(t)-\gamma(I(t)+\varepsilon\psi_3 I(t))=0. \end{cases} \tag{4.25}$$

En développant

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt}+\varepsilon\psi_1\frac{dS}{dt}+\beta IS+\mu S+\varepsilon(\psi_1\beta IS+\psi_1\mu S-\psi_4 R)-\kappa N-\rho R=0 \\ \frac{dE}{dt}+\varepsilon\psi_2\frac{dE}{dt}+(\mu+\lambda)E+\mu\varepsilon\psi_2 E+\lambda\varepsilon\psi_2 E-\beta IS-\varepsilon(\beta IS+\beta\psi_3 IS)=0 \\ \frac{dI}{dt}+\varepsilon\psi_3\frac{dI}{dt}+(\mu+\alpha+\gamma)I+\mu\varepsilon\psi_3 I+\alpha\varepsilon\psi_3 I+\gamma\varepsilon\psi_3 I-\lambda E-\varepsilon\lambda(\psi_2 E)=0 \\ \frac{dR}{dt}+\varepsilon\psi_4\frac{dR}{dt}+(\mu+\rho)R+\mu\varepsilon\psi_4 R+\rho\varepsilon\psi_4 R-\gamma I-\varepsilon\gamma(\psi_3 I)=0. \end{cases} \tag{4.26}$$

Regroupons les termes en $\varepsilon$ ,

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt}+\varepsilon\left(\psi_1\frac{dS}{dt}+\beta\psi_1 IS+\mu\psi_1 S\right)+(\beta IS+\mu S-\kappa N-\rho R)=0 \\ \frac{dE}{dt}+\varepsilon\left(\psi_2\frac{dE}{dt}+\mu\psi_2 E+\lambda\psi_2 E-\beta IS-\beta\psi_3 IS\right)+(\mu E+\lambda E)=0 \\ \frac{dI}{dt}+\varepsilon\left(\psi_3\frac{dI}{dt}+\mu\psi_3 I+\alpha\psi_3 I+\gamma\psi_3 I-\lambda\psi_2 E\right)+(\mu I+\alpha I+\gamma I)=0 \\ \frac{dR}{dt}+\varepsilon\left(\psi_4\frac{dR}{dt}+\mu\psi_4 R+\rho\psi_4 R-\gamma\psi_3 I\right)+(\mu R+\rho R)=0. \end{cases} \tag{4.27}$$

En égalisant les termes en $\varepsilon$ à zéro, nous obtenons la condition d'invariance suivante :

$$\begin{cases} \psi_1\frac{dS}{dt}+\beta\psi_1 IS+\mu\psi_1 S=0 \\ \psi_2\frac{dE}{dt}+\mu\psi_2 E+\lambda\psi_2 E-\beta IS-\beta\psi_3 IS=0 \\ \psi_3\frac{dI}{dt}+\mu\psi_3 I+\alpha\psi_3 I+\gamma\psi_3 I-\lambda\psi_2 E=0 \\ \psi_4\frac{dR}{dt}+\mu\psi_4 R+\rho\psi_4 R-\gamma\psi_3 I=0. \end{cases} \tag{4.28}$$

Le système (4.27) est invariant sous la condition (4.28).

Nous allons résoudre le système (4.27) à l'aide des symétries trouvées (4.24)(générateurs infinitésimaux) pour obtenir les solutions des variables $S(t)$, $E(t)$, $I(t)$ et $R(t)$ sous la condition (4.28).

Résolvons chaque équation du système (4.27) séparément.

L'équation différentielle pour $S(t)$ sous la condition d'invariance (4.28) est :

$$\frac{dS(t)}{dt} = -(\beta I(t) + \mu + \kappa)S(t) + \psi_1 S(t). \tag{4.29}$$

En substituant l'expression de $\psi_1 S(t)$, nous obtenons :

$$\frac{dS(t)}{dt} = -(\beta I(t) + \mu + \kappa)S(t) + \psi_1 S_0 e^{-(\beta I(t)+\mu+\kappa)t}. \tag{4.30}$$

Pour résoudre cette équation différentielle, nous utilisons la méthode d'intégration directe :

$$\int \frac{dS(t)}{S(t)} = -(\beta I(t) + \mu + \kappa) \int dt + \psi_1 S_0 \int e^{-(\beta I(t)+\mu+\kappa)t} dt \tag{4.31}$$

$$ln|S(t)| = -(\beta I(t) + \mu + \kappa)t + C_1 - \frac{\psi_1 S_0}{\beta I(t) + \mu + \kappa} e^{-(\beta I(t)+\mu+\kappa)t} + C_2 \tag{4.32}$$

où $C_1$ et $C_2$ sont des constantes d'intégration.

En appliquant l'exponentielle aux deux cotés, nous obtenons :

$$S(t) = e^{-(\beta I(t)+\mu+\kappa)t - \frac{\psi_1 S_0}{\beta I(t)+\mu+\kappa} e^{-(\beta I(t)+\mu+\kappa)t)}} + C_3 \tag{4.33}$$

où $C_3 = e^{C_1}.e^{C_2}$ est une constante d'intégration.

Passons à la résolution d'équation différentielle pour $E(t)$ qui est :

$$\frac{dE(t)}{dt} = -(\mu + \lambda)E(t) + \psi_2 E(t) \tag{4.34}$$

En substituant l'expression de $\psi_2 E(t)$, nous avons :

$$\frac{dE(t)}{dt} = -(\mu + \lambda)E(t) + \psi_2 E_0 e^{-(\mu+\lambda)t} \tag{4.35}$$

En intégrant des deux cotés de l'équation, nous obtenons :

$$\int \frac{dE(t)}{E(t)} = -(\mu + \lambda) \int dt + \psi_2 E_0 \int e^{-(\mu+\lambda)t} dt \tag{4.36}$$

$$\int \frac{dE(t)}{E(t)} = -(\mu + \lambda) \int dt + \psi_2 E_0 \int e^{-(\mu+\lambda)t} dt \tag{4.37}$$

$$ln|E(t)| = -(\mu + \lambda)t + C_1 - \frac{\psi_2 E_0}{\mu + \lambda} e^{-(\mu+\lambda)t} + C_2 \tag{4.38}$$

En exponentiant les deux cotés de l'équation, nous obtenons :

$$E(t) = e^{-(\mu+\lambda)t - \frac{\psi_2 E_0}{\mu+\lambda} e^{-(\mu+\lambda)t}} + C_3 \tag{4.39}$$

L'équation différentielle pour $I(t)$ est :

$$\frac{dI(t)}{dt} = -(\mu + \alpha + \gamma)I(t) + \psi_3 I(t) \tag{4.40}$$

En substituant l'expression de $\psi_3 I(t)$, nous avons :

$$\frac{dt}{dt} = -(\mu + \alpha + \gamma)I(t) + \psi_3 I_0 e^{-(\mu+\alpha+\gamma)t} \tag{4.41}$$

Intégrons de deux cotés l'équation :

$$\int \frac{dI(t)}{I(t)} = -(\mu + \alpha + \gamma)\int dt + \psi_3 I_0 \int e^{-(\mu+\alpha+\gamma)t} dt \tag{4.42}$$

$$ln|I(t)| = -(\mu + \alpha + \gamma)t + C_1 - \frac{\psi_3 I_0}{\mu + \alpha + \gamma} e^{-(\mu+\alpha+\gamma)t} + C_2 \tag{4.43}$$

En exponentiant les deux cotés de l'équation, nous obtenons :

$$I(t) = e^{-(\mu+\alpha+\gamma)t - \frac{\psi_3 I_0}{\mu+\alpha+\gamma} e^{-(\mu+\alpha+\gamma)t}} + C_3 \tag{4.44}$$

L'équation différentielle pour $R(t)$ est :

$$\frac{dR(t)}{dt} = -(\mu + \rho)R(t) + \psi_4 R(t) \tag{4.45}$$

En substituant les expressions de $R(t)$, nous avons :

$$\frac{dR(t)}{dt} = -(\mu + \rho)R(t) + \psi_4 R_0 e^{-(\mu+\rho)t} \tag{4.46}$$

Intégrons de deux cotés de l'équation :

$$\int \frac{dR(t)}{R(t)} = -(\mu + \rho)\int dt + \psi_4 R_0 \int e^{-(\mu+\rho)t} dt \tag{4.47}$$

$$ln|R(t)| = -(\mu + \rho)t + C_1 - \frac{\psi_4 R_0}{\mu + \rho} e^{-(\mu+\rho)t} + C_2 \tag{4.48}$$

En exponentiant les deux cotés de l'équation, nous obtenons :

$$R(t) = e^{-(\mu+\rho)t - \frac{\psi_4 R_0}{\mu+\rho} e^{-(\mu+\rho)t}} + C_3 \tag{4.49}$$

La solution du modèle de la tuberculose au Burundi est donc :

$$\begin{cases} S(t) = e^{-(\beta I(t)+\mu+\kappa)t-\frac{\psi_1 S_0}{\beta I(t)+\mu+\kappa}e^{-(\beta I(t)+\mu+\kappa)t}} + C_3 \\ E(t) = e^{-(\mu+\lambda)t-\frac{\psi_2 E_0}{\mu+\lambda}e^{-(\mu+\lambda)t}} + C_3 \\ I(t) = e^{-(\mu+\alpha+\gamma)t-\frac{\psi_3 I_0}{\mu+\alpha+\gamma}e^{-(\mu+\alpha+\gamma)t}} + C_3 \\ R(t) = e^{-(\mu+\rho)t-\frac{\psi_4 R_0}{\mu+\rho}e^{-(\mu+\rho)t}} + C_3 \end{cases} \tag{4.50}$$

où $C_3$ est une constante d'intégration.
Ces équations représentent les solutions pour chaque groupe de personnes dans le modèle de propagation de la tuberculose. Expliquons chaque solution en détail :

- la solution pour les personnes susceptibles $S(t)$, représente le nombre de personnes susceptibles d'être infectées par la tuberculose à un moment donné, en fonction du temps t. La première partie de l'équation $e^{-(\beta I(t)+\mu+\kappa)t}$ représente le nombre de personnes susceptibles qui ne sont pas infectées pendant un certain intervalle de temps.
  La deuxième partie de l'équation, $\frac{\psi_1 S_0}{\beta I(t)+\mu+\kappa}e^{-(\beta I(t)+\mu+\kappa)t}$ représente le nombre de personnes susceptibles qui deviennent infectées pendant cet intervalle de temps. La constante $C_3$ peut être utilisé pour représenter des facteurs qui influencent le nombre de personnes susceptibles mais qui ne sont pas pris en compte dans les autres termes de l'équation. Par exemple, cela pourrait inclure des facteurs environnementaux, des interventions de santé publique spécifiques aux susceptibles, ou d'autres variables non explicitement modélisées.

- solution pour les personnes exposées E(t), représente le nombre de personnes exposées à la tuberculose à un moment donné, en fonction du temps $t$. La première partie de l'équation $e^{-(\mu+\lambda)t}$ représente le nombre de personnes exposées qui ne deviennent pas infectées pendant un certain laps de temps. La deuxième partie de l'équation, $\frac{\psi_2 E_0}{\mu+\lambda}(e^{-(\mu+\lambda)t}$ représente le nombre de personnes exposées qui deviennent infectées pendant ce laps de temps. Le terme $C3$ est encore une fois un terme constant qui peut être utilisé pour inclure d'autres facteurs ou conditions influençant la dynamique des personnes exposées.

- Solution pour les personnes infectées I(t), représente le nombre de personnes infectées par la tuberculose à un moment donné, en fonction du temps t. La première partie de l'équation $e^{-(\mu+\alpha+\gamma)t}$ représente le nombre de personnes infectées qui ne guérissent pas pendant un certain intervalle de temps. La deuxième partie de l'équation $\frac{\psi_3 I_0}{\mu+\alpha+\gamma}e^{-(\mu+\alpha+\gamma)t}$ représente le nombre de personnes qui guérissent pendant ce laps de temps et la constante $C3$ peut être utilisé pour représenter des facteurs qui affectent le nombre de personnes infectées mais qui ne sont pas explicitement

modélisés dans les autres termes de l'équation. Cela pourrait inclure des variables telles que l'accès aux soins de santé, les comportements à risque, ou d'autres facteurs sociodémographiques.

- solution pour les personnes rétablies R(t), représente le nombre de personnes qui se sont rétablies de la tuberculose à un moment donné, en fonction du temps t. La première partie de l'équation $e^{-(\mu+\rho)t}$ représente le nombre de personnes rétablies qui ne retombent pas malades pendant un certain laps de temps. La deuxième partie de l'équation $\frac{\psi_4 R_0}{\mu+\rho} e^{-(\mu+\rho)t}$ représente le nombre de personnes qui retombent malades et se rétablissent pendant ce laps de temps. Le terme $C_3$ peut être utilisé pour représenter des facteurs qui influencent le nombre de personnes rétablies mais qui ne sont pas explicitement pris en compte dans les autres termes de l'équation. Cela pourrait inclure des facteurs tels que l'efficacité des traitements, la durée de l'immunité, ou d'autres variables non modélisées.

en général le terme $C_3$ est utilisé pour incorporer des facteurs supplémentaires qui peuvent affecter la dynamique de la maladie mais qui ne sont pas directement modélisés dans les équations principales. Son inclusion permet de tenir compte de la complexité de la réalité et peut aider à ajuster le modèle pour mieux correspondre aux données observées.

En combinant ces solutions, il est possible de comprendre l'évolution de la tuberculose dans une population donnée en fonction de divers paramètres et conditions initiales.

# Chapitre 5

# Simulation numérique des solutions du modèle et interprétation des résultats

Dans ce chapitre, nous allons examiner l'évolution de chaque solution par une simulation numérique qui est un outil puissant pour comprendre la dynamique des épidémies et évaluer l'impact des interventions de santé publique. Elle permet aussi aux chercheurs et aux décideurs de tester différentes stratégies de contrôle et de prévention dans un environnement virtuel, afin d'élaborer des politiques efficaces pour lutter contre cette maladie infectieuse.
Nous interprétons les résultats obtenus de chaque solution et nous examinons comment les différentes variables et paramètres influencent la dynamique de la maladie. Une conclusion générale est donnée sur l'efficacité de la théorie des groupes de Lie dans la résolution des modèles épidémiologiques en se basant sur le résultat obtenu et celui obtenu dans la simulation numérique du modèle .Ainsi une recommandation sur la population Burundaise et aux futurs chercheurs est donnée.

## 5.1 Simulation numérique des solutions du modèle

Les figures suivantes représentent l'évolution de chaque solution (4.50) du modèle de la TB (3.1) obtenues en utilisant la théorie des groupes de Lie. Ces courbes sont obtenues en utilisant un langage de programmation python avec les conditions initiales suivantes, $S_0 = 10000$, $E_0 = 100$, $I_0 = 80$ et $R_0 = 6000$.Ainsi les valeurs des paramètres utilisées sont issues d'une étude faite par [46] sur la modélisation de la tuberculose au Burundi. Elles sont reprises dans le tableau suivant :

Tableau 5.1 – Valeurs des paramètres du modèle .

| N$^o$ | paramètres | valeurs utilisées |
|---|---|---|
| 1 | $\kappa$ | 0.2 taux de natalité |
| 2 | $\alpha$ | 0.05 taux de mortalité causé par la TB |
| 3 | $\mu$ | 0.001468 taux de mortalité naturelle |
| 4 | $\beta$ | 0.9 taux auquel les susceptibles sont exposés à la TB |
| 5 | $\lambda$ | 0.05 taux d'infection de la TB |
| 6 | $\gamma$ | 0.04 taux auquel les infectés deviennent immunisés |
| 7 | $\rho$ | 0.09 taux auquel les récupérés perdent leur immunité |

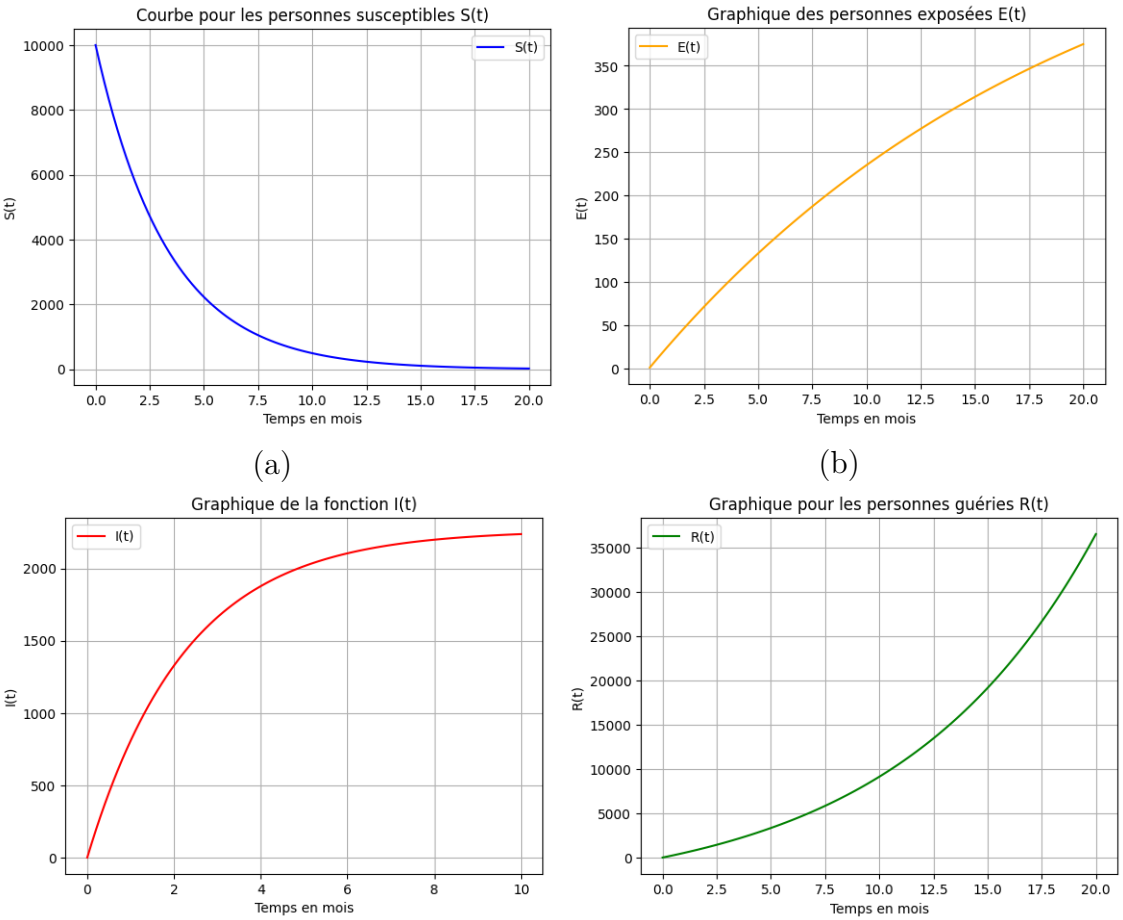



FIGURE 5.1 – (a) Courbe d'évolution des personnes susceptibles, (b) Courbe d'évolution personnes exposées, (c) Courbe d'évolution des personnes infectées, (d) Courbe d'évolution des personnes rétablies.

## 5.2 Simulation numérique du modèle par la méthode de Runge-Kutta

Soit le problème suivant :

$$\frac{dy}{dt} = y = f(t, y), y(to) = y_0 \tag{5.1}$$

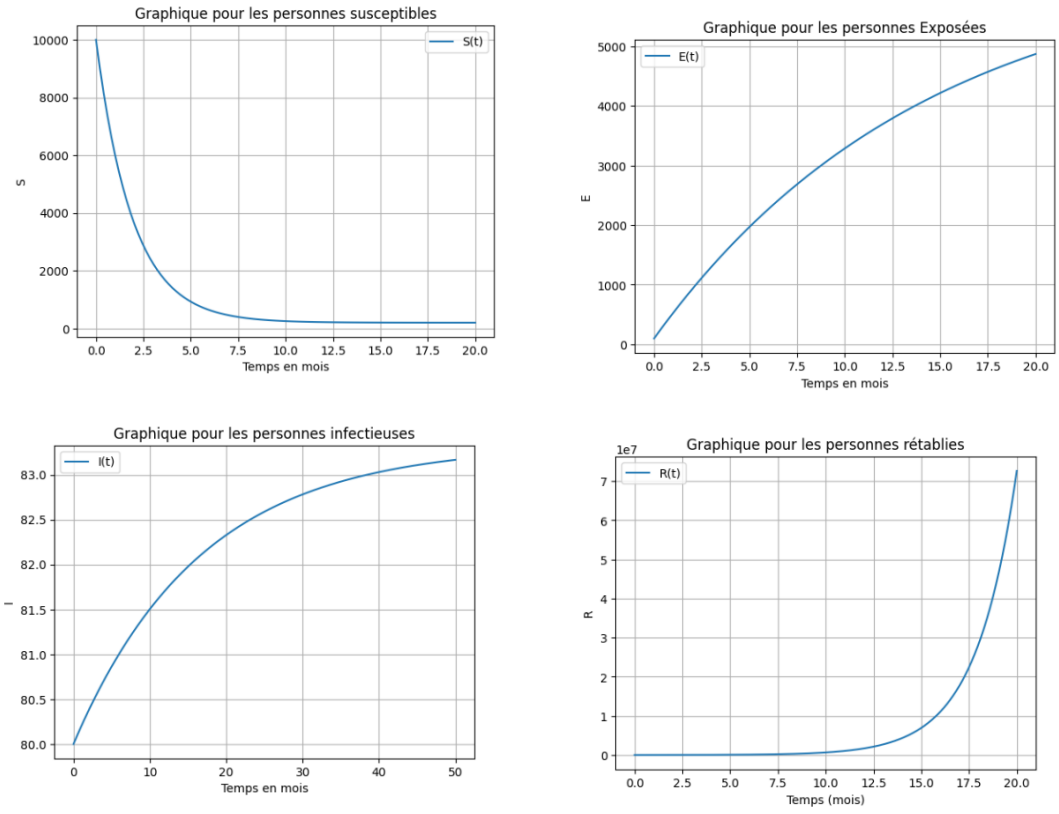
que nous allons chercher à résoudre en un ensemble discret $t_0 0 < t1 < ... < t_N$. Runge-Kutta proposent d'introduire les points intermédiaires $(t_n, i, y_n, i)$. Alors la méthode de Runge-Kutta d'ordre $q$ sera donc donnée par [9]

$$\forall i = 1.....q, \begin{cases} t_n, i = t_n + c_i h_n \\ y_n, i = y_n + h_n \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik} P_{n,k} \\ P_n, i = f(t_n, i, y_n, i) \end{cases} \tag{5.2}$$

Nous alors

$$y_{n+1}, i = y_n + h_n \sum_{k=1}^{i-1} b_{ik} P_{n,k} \tag{5.3}$$

La résolution numérique du système (3.1) par cette méthode de Runge-kutta en utilisant le langage de programmation python, nous a donné les courbes suivantes :




(c)

FIGURE 5.2 – Courbes du modèle par la méthode de Runge-Kutta.

## 5.3 Interprétation des résultats

- FIGURE 5.1 (a) : au début de l'épidémie, à un temps proche de zéro mois, le nombre de personnes susceptibles diminue rapidement. Cela se produit car un grand nombre de personnes susceptibles entrent en contact avec des individus infectés, ce qui conduit à une augmentation significative des infections au fil du temps. À mesure que le temps passe, mois après mois, le nombre de nouvelles infections diminue progressivement. Cela peut être dû à plusieurs facteurs, tels que l'épuisement du pool initial de personnes susceptibles, l'adoption de mesures de prévention telles que la distanciation sociale ou le port de masques, ou encore le développement d'une immunité collective au sein de la population.

- FIGURE 5.1 (b) : on distingue deux phase la croissance rapide et la décroissance des nombres d 'infectées de la maladie. au début de l'épidémie (lorsque le temps est proche de zéro mois), le nombre de personnes exposées (E) augmente rapidement. Cela se produit car les personnes exposées entrent en contact avec des individus infectés, ce qui conduit à une augmentation rapide des infections au fil du temps. Étant donné que le taux de transmission $\beta$ est supposé être significatif, chaque personne exposée a une probabilité élevée d'être infectée au cours de chaque intervalle de temps. Par conséquent, le nombre de personnes exposées augmente rapidement au départ.
  La décroissance progressive survient après la phase initiale de croissance rapide. Cela peut être dû à plusieurs facteurs, certains des individus exposés peuvent devenir infectés et passer de la catégorie des personnes exposées à la catégorie des personnes infectées, réduisant ainsi le nombre de personnes exposées. D'autres individus exposés peuvent également développer une immunité ou être retirés de la population en raison de la mortalité naturelle $\mu$, ce qui diminue également le nombre de personnes exposées. Ces mécanismes réduisent le nombre de personnes exposées au fil du temps, entraînant une décroissance progressive de la courbe.

- FIGURE 5.1 (c) : comme précédemment, pour la courbe des personnes infectées nous avons la croissance initiale rapide et la décroissance progressive de la courbe. Au début de l'épidémie, lorsque le temps est proche de zéro, le nombre de personnes infectées (I) augmente rapidement. Cela est principalement dû au taux de transmission de la tuberculose $\lambda$ qui est élevé. Plus le taux de transmission est élevé, plus le risque d'infection est grand lorsqu'une personne entre en contact avec des individus infectés.Le taux de transmission élevé entraîne une augmentation exponentielle du nombre de personnes infectées au début de l'épidémie. Pendant cette phase initiale, le taux de récupération $\gamma$ peut jouer un rôle limité car il faut généralement du temps pour que les individus récupèrent de la tuberculose.

Après la phase initiale de croissance rapide, la courbe commence à décroître au fil du temps. Cela peut être attribué à plusieurs facteurs, certains des individus infectés récupèrent de la maladie et deviennent immunisés, réduisant ainsi le nombre de personnes infectées. Le taux de mortalité naturel $\mu$ et de mortalité $\alpha$ causé par la tuberculose peuvent également contribuer à la décroissance de la courbe, car ils représentent la proportion de personnes infectées qui décèdent. Ainsi si le traitement n'est pas efficace ou si la maladie est sévère, cela peut augmenter le taux de mortalité et réduire le nombre de personnes infectées au fil du temps.
Les mesures de contrôle telles que le traitement médicamenteux, la quarantaine, l'isolement des cas, la vaccination et l'amélioration des conditions sanitaires peuvent également aider à réduire la propagation de la tuberculose et à diminuer le nombre de nouvelles infections au fil du temps. ce qui explique la décroissance de la courbe au fil du temps

- FIGURE 5.1 (d) : pour cette courbe, il y a la croissance continu, le nombre de personnes guéries (R) augmente rapidement. Cela est principalement dû au fait que certaines personnes infectées se rétablissent de la maladie et entrent dans la catégorie des personnes guéries. Le taux de récupération $\gamma$ est supposé jouer un rôle important ici. Cette courbe peut être influencée par divers facteurs, tels que l'accès aux soins de santé, la disponibilité de traitements anti-tuberculeux efficaces, la conformité au traitement et le niveau de résistance aux médicaments. En outre, le taux auquel les personnes rétablies perdent leur immunité $\rho$ peut également avoir un impact sur cette courbe. Si le taux de récupération est élevé et/ou si le taux de perte d'immunité est faible, le nombre de personnes guéries continuera à augmenter au fil du temps, si ces taux sont plus équilibrés, la courbe peut atteindre un plateau où le nombre de personnes guéries reste relativement stable.

# Conclusion

La résolution du modèle de la tuberculose au Burundi en utilisant la théorie des groupes de Lie a abouti à des résultats significatifs. En examinant les différentes étapes de notre démarche de résolution du système, nous avons réussi à déterminer les symétries du système, à identifier les générateurs infinitésimaux correspondants, et à établir la condition d'invariance nécessaire pour obtenir une solution exacte. En exploitant les symétries et les invariances, les groupes de Lie nous ont permis d'obtenir des solutions précises et informatives, ouvrant ainsi la voie à de nouvelles possibilités de recherche et d'intervention dans le domaine de la santé mondiale.

En appliquant les données épidémiologiques de la tuberculose au Burundi à la solution analytique obtenue et aux équations différentielles issues du modèle de la TB, nous avons pu constater l'efficacité des groupes de Lie dans la résolution des modèles épidémiologiques. Le résultat nous montre les même courbes d'évolution. Ce travail nous ont permis de mettre en lumière l'applicabilité et la pertinence de la théorie des groupes de Lie dans le domaine de la santé publique.

Notre étude a démontré que les groupes de Lie constituent une approche puissante et efficace pour résoudre les modèles épidémiologiques, offrant ainsi des perspectives importantes pour la compréhension et la gestion des maladies infectieuses telles que la tuberculose. Il ouvre la voie à de nouvelles recherches et collaborations interdisciplinaires visant à utiliser les outils mathématiques avancés pour améliorer la santé et le bien-être des populations à travers le monde.

# Recommandations

Pour les futurs chercheurs qui désirent améliorer notre étude et d'explorer l'utilisation des groupes de Lie dans la résolution des modèles épidémiologiques, plusieurs recommandations sont essentielles pour guider leurs efforts et maximiser leur contribution à ce domaine en évolution. Tout d'abord, il faut plonger dans l'étude approfondie de la théorie des groupes de Lie et de son application spécifique à la modélisation épidémiologique. Cette compréhension approfondie vous fournira une base solide pour aborder les défis complexes des modèles épidémiologiques.

Ensuite, il faut explorer de nouvelles voies dans cette approche des groupes de Lie pour développer des méthodes de résolution novatrices qui pourraient offrir de nouvelles perspectives sur la manière de comprendre et de lutter contre les maladies épidémiologiques.

La collaboration interdisciplinaire est également essentielle. Il faut Travailler en étroite collaboration avec des experts dans des domaines connexes tels que les mathématiques appliquées, la biologie et la médecine pour enrichir vos perspectives et développer des modèles épidémiologiques complets.

Validez vos résultats en les confrontant à des données et à des situations réelles de ces épidémies. Cette étape cruciale garantira la fiabilité et la pertinence de vos modèles dans la pratique.

# Bibliographie


[1] N. Abdul Halim : *Tuberculosis Model : A Mathematical Analysis/Nadhirah bt Abdul Halim*. Thèse de doctorat, University of Malaya, 2013.

[2] R. M. Anderson : The role of mathematical models in the study of HIV transmission and the epidemiology of *aids*. *Journal of Acquired Immune Deficiency Syndromes*, 1(3):241–256, 1988.

[3] J. P. Aparicio, A. F. Capurro et C. Castillo-Chavez : Transmission and dynamics of tuberculosis on generalized households. *Journal of theoretical biology*, 206(3):327–341, 2000.

[4] D. Bernoulli : Essai d'une nouvelle analyse de la mortalite causee par la petite verole, et des avantages de l'inoculation pour la prevenir. *Histoire de l'Acad., Roy. Sci.(Paris) avec Mem*, p. 1–45, 1760.

[5] S. Bertrand : *Surfaces solitoniques plongées dans des algèbres de Lie associées aux modèles intégrables*. Thèse de doctorat, Université du Québec à Trois-Rivières, 2013.

[6] G. Bluman et S. Anco : *Symmetry and integration methods for differential equations*, vol. 154. Springer Science & Business Media, 2008.

[7] G. W. Bluman et J. D. Cole : *Similarity methods for differential equations*, vol. 13. Springer Science & Business Media, 2012.

[8] J. Borgqvist, F. Ohlsson et R. E. Baker : Symmetries of systems of first order odes : symbolic symmetry computations, mechanistic model construction and applications in biology. *arXiv preprint arXiv :2202.04935*, 2022.

[9] J. C. Butcher : Runge-kutta. *Mathematics of computation*, 18(85):50–64, 1964.

[10] F. Calogero : The neatest many-body problem amenable to exact treatments (a "goldfish" ?). *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 152:78–84, 2001.

[11] B. J. Cantwell : *Introduction to symmetry analysis*. Cambridge University Press, 2002.

[12] L. Chunrong, F. Hongxia, L. Puxuan et J. Lecai : The global tuberculosis report 2021 : key data analysis for china and the global world. *Electronic Journal of Emerging Infectious Diseases*, 6(4):368, 2021.

[13] A. Cohen : *An Introduction to the Lie Theory of one-parameter groups : With Applications to the solution of Differential Equations*. DC Health & Company, 1911.

[14] M. Edwards et M. C. Nucci : Application of lie group analysis to a core group model for sexually transmitted diseases. *Journal of Nonlinear Mathematical Physics*, 13(2):211–230, 2006.

[15] F. M. Feldmann : How much control of tuberculosis : 1937-1957-1977. *American Journal of Public Health and the Nations Health*, 47(10):1235–1241, 1957.

[16] W. H. Frost : How much control of tuberculosis ? *American Journal of Public Health and the Nations Health*, 27(8):759–766, 1937.

[17] R. K. Gazizov et N. H. Ibragimov : Lie symmetry analysis of differential equations in finance. *Nonlinear Dynamics*, 17:387–407, 1998.

[18] R. Gilmore : *Lie groups, physics, and geometry : an introduction for physicists, engineers and chemists*. Cambridge University Press, 2008.

[19] J. Graunt : Natural and political observations made upon the bills of mortality. *London*, 12:24–35, 1939.

[20] A. Haddadi, A. Jiji, A. Cherifi, W. Boufeldja *et al.* : *Etude épidémiologique sur l'évolution de la tuberculose au niveau de la commune d'Adrar (de 2017 à 2021) Code*. Thèse de doctorat, UNIVERSITE AHMED DRAIA-ADRAR, 2022.

[21] B. C. Hall et B. C. Hall : *Lie groups, Lie algebras, and representations*. Springer, 2013.

[22] M. Hamermesh : *Group theory and its application to physical problems*. Courier Corporation, 2012.

[23] H. Herzog, Basel : History of tuberculosis. *Respiration*, 65(1):5–15, 1998.

[24] H. W. Hethcote : A thousand and one epidemic models. *In Frontiers in mathematical biology*, p. 504–515. Springer, 1994.

[25] P. E. Hydon : *Symmetry methods for differential equations : a beginner's guide*. Num. 22. Cambridge University Press, 2000.

[26] S. M. Kadhim, M. G. Mohammad et H. K. Jassim : How to obtain lie point symmetries of pdes. *Journal of Mathematics and Computer science*, 22:306–324, 2021.

[27] W. O. Kermack et A. G. McKendrick : A contribution to the mathematical theory of epidemics. *Proceedings of the royal society of london. Series A, Containing papers of a mathematical and physical character*, 115(772):700–721, 1927.

[28] A. W. Knapp et A. W. Knapp : *Lie groups beyond an introduction*, vol. 140. Springer, 1996.

[29] A. Korobeinikov et G. C. Wake : Lyapunov functions and global stability for sir, sirs, and sis epidemiological models. *Applied Mathematics Letters*, 15(8):955–960, 2002.

[30] M. Marcelli et M. C. Nucci : Lie point symmetries and first integrals : the kowalevski top. *Journal of Mathematical Physics*, 44(5):2111–2132, 2003.

[31] M. B. Matadi : Lie symmetry analysis of early carcinogenesis model. *Appl. Math. E-Notes*, 18(299):238–249, 2018.

[32] M. B. Matadi : Application of lie symmetry to a mathematical model that describes a cancer sub-network. *Symmetry*, 14(2):400, 2022.

[33] l. s. Ministère de la santé publique et de lutte contre : Republique du burundi. 2021.

[34] S. Myeni et P. Leach : Nonlocal symmetries and the complete symmetry group of 1+ 1 evolution equations. *Journal of Nonlinear Mathematical Physics*, 13(3):377–392, 2006.

[35] S. M. Myeni : *Complete symmetry groups of some evolution equations arising in finance*. Thèse de doctorat, University of KwaZulu-Natal, 2005.

[36] K. E. Nelson et C. M. Williams : *Infectious disease epidemiology : theory and practice*. Jones & Bartlett Publishers, 2014.

[37] M. Nucci : Lorenz integrable system moves à la poinsot. *Journal of Mathematical Physics*, 44(9):4107–4118, 2003.

[38] M. Nucci : Jacobi last multiplier and lie symmetries : a novel application of an old relationship. *Journal of Nonlinear Mathematical Physics*, 12(2):284–304, 2005.

[39] F. Oliveri : Lie symmetries of differential equations : classical results and recent contributions. *Symmetry*, 2(2):658–706, 2010.

[40] P. J. Olver : *Applications of Lie groups to differential equations*, vol. 107. Springer Science & Business Media, 1993.

[41] W. H. Organization : Bureau de la représentation de l'OMS au burundi rapport annuel 2022, 2022.

[42] W. H. Organization *et al.* : Tuberculosis deaths and disease increase during the covid-19 pandemic. *Global tuberculosis report*, 2022.

[43] L. V. Ovsyannikov : *Lectures on the theory of group properties of differential equations*. World Scientific Publishing Company, 2013.

[44] D. H. S. Perera et D. Gallage : Solution methods for nonlinear ordinary differential equations using lie symmetry groups. *Advanced Journal of Graduate Research*, 13(1):37–61, 2023.

[45] C. Régional de l'Afrique : Activités de l'oms dans la région africaine : rapport annuel de la directrice régionale, juillet 2022-juin 2023. 2023.

[46] S. Sibomana, K. J. G. Sinigirira, P. Gahungu et D. Niyukuri : Mathematical model for transmission dynamics of tuberculosis in burundi. *arXiv preprint arXiv :2304.01975*, 2023.

[47] B. Song, C. Castillo-Chavez et J. P. Aparicio : Global dynamics of tuberculosis models with density dependent demography. *In Mathematical Approaches for Emerging and Reemerging Infectious Diseases : Models, Methods, and Theory*, p. 275–294. Springer, 2002.

[48] I. Ste-Marie : *Symétries des systèmes dynamiques discrets de dimension deux*. Thèse de doctorat, Université du Québec à Trois-Rivières, 2009.

[49] H. Steudel : Olver, pj, applications of lie groups to differential equations. berlin-heidelberg-new york-tokyo, springer-verlag 1986. xxvi, 497 s., dm 158,–. isbn 3-540-96250-6 (graduate texts in mathematics 107), 1987.

[50] V. Torrisi et M. Nucci : Application of lie group analysis to a mathematical model. *In The Geometrical Study of Differential Equations : NSF-CBMS Conference on the Geometrical Study of Differential Equations, June 20-25, 2000, Howard University, Washington*, vol. 285, p. 11. American Mathematical Soc., 2001.

[51] F. Valiquette : Discrétisation des équations différentielles aux dérivées partielles avec préservation de leurs symétries. 2005.

[52] P. L. Zondi et M. B. Matadi : Lie group theoretic approach of one-dimensional black-scholes equation. *Aust. J. Math. Anal. Appl*, 18:1–19, 2021.