Résolution des équations différentielles par la méthode de Frobenius

Nyandwi, Michel; Sous la direction de : M. Nzinahora, Anatole

2010-09
UB, IPA
https://repository.ub.edu.bi/handle/123456789/2336

UNIVERSITE DU BURUNDI

INSTITUT DE PEDAGOGIE APPLIQUEE

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

« RESOLUTION DES EQUATIONS DIFFERENTIELLES PAR LA METHODE DE FROBENIUS »

Par :

NYANDWI Michel

Sous la direction de:

M. NZINAHORA Anatole

Mémoire présenté et défendu publiquement en vue de l'obtention du grade de Licencié en Pédagogie Appliquée agrégé de l'Enseignement Secondaire en Mathématiques.

Bujumbura, Septembre 2010

DEDICACE

A nos regrettés Père RUHOGORERA Simon ; Mère KAYIBIGI Charlotte et
Grand frère NDAYIKENGURUKIYE Gilbert ;
A nos grands frères Général de Brigade NIYUNGEKO Juvénal et
NIYONSABA Moïse ;
A nos frères et sœurs;
A tous ceux qui nous sont chers,

Nous dédions ce mémoire.

NYANDWI Michel

REMERCIEMENTS

Nous exprimons notre reconnaissance et gratitude à toute personne qui, directement ou indirectement a contribué à la réalisation de ce mémoire.

Nos vifs remerciements vont particulièrement à Monsieur NZINAHORA Anatole, promoteur et directeur de ce mémoire. En dépit de ses multiples responsabilités, il s'est donné corps et âme pour mener à bon port le navire dans lequel nous nous sommes embarqués pour la recherche scientifique.

A tous nos formateurs, depuis l'école primaire jusqu'à l'Université nous leur rendons un vibrant hommage.

Enfin, à vous tous qui, sans nul besoin de vous citer, ont contribué à la réalisation de ce mémoire, nous exprimons nos sentiments de gratitude.

NYANDWI Michel

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION GENERALE

Dans le présent travail, nous nous proposons de traiter la résolution des équations différentielles par la méthode de FROBENIUS.

Les équations différentielles constituent un couronnement formé par le calcul différentiel et par le calcul intégral. Le calcul différentiel sert surtout à mettre les problèmes en équations, le calcul intégral permet de les résoudre.

Ce travail est structuré en trois chapitres. Le premier et le second chapitre traitent de la résolution des équations différentielles du premier et du second ordre respectivement.

Le troisième chapitre montre la résolution des équations différentielles par la méthode de FROBENIUS.
Une conclusion est donnée à la fin du travail.

CHAPITRE I : EQUATIONS DIFFERENTIELLES ORDINARES DU PREMIER ORDRE

1.1. Définition

On appelle équations différentielles les équations dont les inconnues sont des fonctions d'une ou plusieurs variables. Ces équations comportant non seulement les fonctions elles-mêmes, mais aussi leurs dérivées. Si les fonctions inconnues dépendent d'une seule variable indépendante, les équations sont appelées équations différentielles ordinaires. Une équation différentielle du premier ordre est une équation pouvant contenir la variable x, la fonction inconnue y et nécessairement la seule dérivée y' de y.
Elle se présente sous la forme générale $F(x,y,y')=0$ où x désigne la variable indépendante, y la fonction inconnue, $y' = \frac{dy}{dx}$ sa dérivée et F une fonction donnée de ces trois variables.

Par exemple les équations différentielles $xy'+y-y^2\ell n(x)=0$ **(1.1)** et $(1-x)y'+xy-1=0$ **(1.2)** sont des équations différentielles ordinaires du premier ordre.

Par des calculs algébriques élémentaires, on peut transformer l'équation différentielle $F(x,y,y')=0$ sous la forme $y' = f(x,y)$.

Exemple : soit $xy'+y-y^2\ell n(x)=0$. On a : $y'=\frac{1}{x}(y^2\ell nx-y)$ **(1.3)** avec $x>0$.
Sous cette forme y' est isolé dans le premier membre, l'équation différentielle **(1.3)** est dite « résolue par rapport à y' ». Le second membre de l'équation **(1.3)** ne contient pas y', il peut contenir x et y et de manière générale avec y' isolé dans le premier membre l'équation différentielle du premier ordre se présente sous la forme $y'=f(x,y)$ **(1.4)**.
Cette forme est appelée forme de référence de l'équation différentielle du premier ordre. La forme la plus simple pour **(1.4)** est celle $y'=f(x)$ **(1.5)**

La solution de l'équation différentielle **(1.5)** est donnée par $y(x)=\int_{x_o}^{x} f(t)dt+c$. **(1.6)** dans la région où $f(x)$ est continue. La constante d'intégration c est déterminée pour les valeurs $y(x)$ en $x=x_o$ **(1.7)** ; c'est-à-dire $y_0=y(x_0)=c$ **(1.8).**
Par conséquent la solution (1.6) qui satisfait à la condition $y=y_0$ pour $x=x_0$ est donnée par :

$$y(x)=y_0+\int_{x_o}^{x} f(t)dt. \qquad \textbf{(1.9)}$$

La condition $y = y_0$ lorsque $x = x_0$ est dite initiale pour la solution de l'équation **(1.5).** Toute condition initiale détermine uniquement la solution $y = \varphi(x)$ de l'équation **(1.4).**

Pour préciser la condition initiale **(1.8),** désignons cette solution par $y = \varphi(x, x_0, y_0)$. Par exemple la solution particulière de l'équation différentielle $\frac{dy}{dx} = y^2$ est donnée par :

$$\varphi(x, x_0, y_0) = \frac{1}{x_0 - 1 + \frac{1}{y_0}}.$$

1.2. Equation différentielle linéaire du premier ordre

1.2.1. Définition

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. On appelle équation différentielle linéaire du premier ordre une équation de la forme : $u'(x) + p(x).u(x) = f(x)$ **(1.10)** où p, f : I $\to$ $\mathbb{R}$ sont deux fonctions continues.

Par exemple l'équation différentielle $u'(x) + \cos x . u(x) = \sin 2x$ est une équation différentielle linéaire du premier ordre.

1.2.2. Solution générale de l'équation différentielle linéaire sans second membre

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, x_0 un élément quelconque de I et p : I $\to$ $\mathbb{R}$ une fonction continue.
Toute solution de l'équation différentielle dite sans second membre : $u'(x) + p(x)u(x) = 0$ **(1.11)** est de la forme $v(t) = C\, e^{-\int_{x_0}^{x} p(s)\, ds}$ **(1.12)** avec C$\in$ $\mathbb{R}$.

Par définition, l'expression **(1.12)** est appelée solution générale de l'équation différentielle. **(1.11)**

Démonstration

Supposons que v : I$\to \mathbb{R}$ est une solution de l'équation différentielle **(1.11)** et considérons la fonction auxiliaire $\bar{v}$: I$\to \mathbb{R}$ défini par $\bar{v}(x) = v(x)\; e^{\int_{x_0}^{x} p(s)\,ds}$.

Alors pour tout $x \in I$: $\bar{v}'(x) = 0$, ce qui entraîne que la fonction $\bar{v} : I \to \mathbb{R}$ est constante sur I. Par conséquent, il existe un nombre réel c tel que pout tout élément x de I : $v(x) = c\, e^{-\int_{x_0}^{x} p(s)\,ds}$

La réciproque est évidente.

1.2.3. Solution générale de l'équation différentielle linéaire du premier ordre avec second membre

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, x_0 un élément quelconque de I et p, f : I $\to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. De plus supposons que v_0 : I $\to \mathbb{R}$ soit une solution particulière de l'équation différentielle **(1.10)**. Toute solution v : I $\to \mathbb{R}$ de l'équation différentielle $u'(x) + p(x)u(x) = f(x)$ est de la forme

$v(x) = v_0 + C\, e^{-\int_{x_0}^{x} p(s)\,ds}$ **(1.13)** avec C$\in \mathbb{R}$. Par définition l'expression **(1.13)** est appelée solution générale de l'équation **(1.10).**

Démonstration

Supposons que v : I$\to \mathbb{R}$ est une solution de l'équation différentielle **(1.10)** et considérons la fonction auxiliaire $\bar{v}$: I$\to \mathbb{R}$ définie par $\bar{v}(x) = v(x) - v_0(x)$.

Par construction : $\bar{v}$: I$\to \mathbb{R}$ est une solution de l'équation différentielle **(1.11).** Ce qui entraîne l'existence d'une constante C tel que pour tout $x \in I$, $\bar{v}(x) = C\, e^{-\int_{x_0}^{x} p(s)\,ds}$

Donc pour tout élément x de I : $v(x) = v_0(x) + \bar{v}(x) = v_0(x) + C\, e^{-\int_{x_0}^{x} p(s)\,ds}$.

1.2.4. Existence d'une solution particulière de l'équation différentielle linéaire du premier ordre

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, x_0 un élément de I et p, f : I $\rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues. On se propose de trouver une fonction C : I $\rightarrow \mathbb{R}$ de sorte que l'application v_0 : I$\mapsto \mathbb{R}$ définie par $v_0(x)=C(x)W(x)$ avec $W(x)=e^{-\int_{x_0}^{x} p(s)\,ds}$
soit une solution de l'équation différentielle **(1.10)**. Pour cela il suffit que pour tout x $\in$ I on ait la relation :

$$\begin{aligned} v_0'(x)+P(x)v_0(x) &= C'(x)W(x)+C(x)W'(x)+P(x)C(x)W(x) \\ &= C'(x)W(x)+C(x)(W'(x)+P(x)W(x)) \\ &= C'(x)W(x)=f(x) \text{ ou} \end{aligned}$$

En intégrant, on a $C(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{f(s)}{W(s)}ds + C$.

Par conséquent, en posant $C=0$, on obtient que la fonction v_0 : I$\mapsto \mathbb{R}$ définie par :

$v_0(x) = W(x)\int_{x_0}^{x}\frac{f(s)}{W(s)}ds$ **(1.14)** est une solution particulière de l'équation différentielle. **(1.10)**

1.2.5. Principe de superposition de solutions [15]

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$; f_1, f_2 et p : I$\mapsto \mathbb{R}$ trois fonctions continues et

$\bar{v}$: I$\mapsto \mathbb{R}$ (respectivement $\tilde{v}: I \rightarrow \mathbb{R}$) une solution particulière de l'équation differentielle $u'(x)+p(x)u(x)=f_1(x)$ (respectivement de $u'(x)+p(x).u(x)=f_2(x)$)

Alors la fonction v : I$\mapsto \mathbb{R}$ définie par $v(x)=\bar{v}(x)+\tilde{v}(x)$ est une solution particulière de l'équation différentielle $u'(x)+p(x).u(x)=f_1(x)+f_2(x)$.

Par exemple, trouvons la solution générale de l'équation différentielle : $u'(x)+\cos(x).u(x)=\sin 2x+\cos x$

Etant donné que pour tout x $\in \mathbb{R}$:

$e^{-\int_0^x \cos x dx} = e^{-\sin x}$, on sait en utilisant la formule $v_0(x) = W(x)\int_{x_0}^{x} \frac{f(s)}{W(s)} ds$

(d'après 1.14) que la fonction $\bar{v}$: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$\bar{v}(x) = e^{-\sin x} \int_0^x e^{\sin s} \sin 2s ds = 2(\sin x - 1) + 2e^{-\sin x}$ est une solution particulière de l'équation différentielle $u'(x) + \cos x.u(x) = \sin 2x$ tandis que la fonction :

$\tilde{v}$: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\tilde{v}(x) = e^{-\sin x} \int_0^x e^{\sin s} \cos s \, ds = 1 - e^{-\sin x}$ est une solution particulière de l'équation différentielle $u'(x) + \cos x.u(x)) = \cos x$.

Par conséquent v_0 : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $v_0(x) = \bar{v}(x) + \tilde{v}(x)$, $v_0(x) = 2\sin x - 1 + e^{-\sin x}$ est une solution particulière de l'équation différentielle
$u'(x) + \cos(x)u(x) = \sin 2x + \cos x$.
Finalement, on obtient en utilisant **(1.13)** que :

$v(x) = (2\sin x - 1) + C e^{-\sin x}$ est la solution de l'équation différentielle
$u'(x) + \cos x.u(x) = \sin 2x + \cos x$.

1.3. Quelques équations différentielles particulières du premier ordre

a) L'équation différentielle du premier ordre qui peut s'écrire sous la forme $y' = g(x).h(y)$ est appelée équation différentielle à second membre séparé.

Par exemple l'équation $y' = x^2 y$ est une équation différentielle à second membre séparé.

b) Dans une équation différentielle du premier ordre écrite sous la forme $y' = F(s)$ (dite forme de référence), il peut arriver que le second membre ne dépende que du rapport $\frac{y}{x}$. Cela signifie que si l'on remplace *y* par *ty* et x par *tx*, le second membre ne change pas.

Une équation de ce type s'écrit $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$

L'équation différentielle du premier ordre $y'=\frac{y}{x}\ell n\frac{y}{x}$ est une équation de ce type.
Si dans les deux membres, on remplace y par ty et x par tx, on obtient $\frac{ty}{tx}\ell n\frac{ty}{tx}=\frac{y}{x}\ell n\frac{y}{x}$.

Le second membre ne change pas dans cette transformation. L'équation donnée est dite homogène.
Les équations différentielles du premier ordre qui peuvent s'écrire sous la forme $y'=f\left(\frac{y}{x}\right)$ sont appelées équations homogènes.

c) Les équations différentielles du premier ordre qui, sous la forme de référence s'écrivent $y'=f\left(\frac{ax+by+c}{a'x+b'y+c'}\right)$ **(1.15)** $\left(\frac{a}{a'}\neq\frac{b}{b'}\right)$ sont appelées équations différentielles du premier ordre se ramenant à l'équation homogène.
Par exemple l'équation différentielle $y'=\frac{2x-y+1}{x-2y+1}$ est du type **(1.15)** car $\frac{2}{1}\neq\frac{-1}{-2}$.

d) L'équation différentielle du premier ordre s'écrivant $y'=a(x)y+b(x)y^m$ avec $m\neq1$ est appelée équation de Bernoulli.

e) L'équation différentielle du premier ordre qui s'écrit $y'=\frac{1}{a(y)+b(y)}$ est appelée équation renversée.

CHAPITRE II : EQUATIONS DIFFERENTIELLES LINEAIRES DU SECOND ORDRE

2.1. Définition

Une équation différentielle du second ordre est une équation différentielle qui contient nécessairement un terme contenant la dérivée seconde (y'') de y.

Ainsi l'équation différentielle $xyy''+x(y')^2 y=3yy'$ **(2.1)** est une équation différentielle du second ordre.

Une équation différentielle du second ordre est dite linéaire si pour chacun de ses termes, la somme des exposants de y'', y' et y vaut au plus un.
Ainsi dans l'équation différentielle du second ordre $2y''+y'-y=2e^x$ **(2.2)**, la somme des exposants de y'', y' et y dans chacun des termes vaut respectivement 1,1,1.

Donc l'équation différentielle du second ordre **(2.2)** est une équation différentielle linéaire du second ordre.
Par contre l'équation différentielle du second ordre $2yy''+x(y')^2 y=3y'y$ n'est pas une équation linéaire du second ordre car la somme des exposants de y'', y' et y dans chacun des termes vaut :

1+1 = 2 pour le premier terme
2+1 = 3 pour le deuxième terme
1+1 = 2 pour le troisième terme

2.2. Forme générale de l'équation différentielle linéaire du second ordre

Une équation différentielle du second ordre en y est un équation de la forme $y''+P(x)y'+Q(x)y=f(x)$ **(2.3)** ; elle est dite homogène quand $f(x)=0$ et non homogène quand $f(x)\neq 0$.

Nous supposons que les coefficients $P(x)$ et $Q(x)$ sont tous continus dans un domaine D et en outre que $P(x)\neq 0$ dans D.

Les coefficients peuvent être complexes mais ici nous traitons les équations à coefficients réels.
Par exemple l'équation différentielle $2y''+y'-y-2e^x=0$ **(2.4)** est une équation différentielle linéaire du second ordre dont les coefficients de y'', y' et y sont respectivement 2,1 et -1.

Théorème [15]

Etant donné un point quelconque x_0 dans D et un ensemble arbitraire de deux nombres α et β, il existe une solution et une seule de l'équation **(2.3)** dans D satisfaisant aux conditions initiales $y(x_0)= \alpha$ et $y'(x_0)=\beta$. De plus, la solution $y(x)$ de la même que ses dérivées $y'(x)$, $y''(x)$ est continue dans D.

Corollaire

Si une solution $y(x)$ de l'équation homogène $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$ **(2.5)** satisfait à $y(x_0)=y'(x_0)=0$ **(2.6)** en un point x situé dans D, alors $y(x)$ est identiquement nulle.

Démonstration

La fonction qui est identiquement nulle satisfait certainement à **(2.5)**. Par conséquent, en accord avec l'unicité de la solution, $y(x)$ doit être identiquement nulle.

Théorème d'existence et unicité de la solution [3]

Soient P, Q $\in C_0(]\alpha,\beta[)$ avec $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$.

Alors il existe $y(x)$ unique tel que :

- dans $]\alpha,\beta[$ elle satisfait à l'équation différentielle linéaire du second ordre **(2.5)**
$\begin{cases} y(x_0)=y_0 \\ y'(x_0)=y'_0 \end{cases}$ et
$y\in C^2\,]\alpha,\beta[$ (espace des fonctions deux fois continûment dérivables dans $]\alpha,\beta[$).

Si $y_1(x)$ et $y_2(x)$ sont solutions de **(2.5)** alors $y(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ (où C_1 et C_2 appartiennent à l'ensemble des nombres complexes) est une solution de **(2.5)**.

Définition

Un ensemble de deux solutions de **(2.5)** qui sont linéairement indépendantes est appelé un système fondamental de solutions de **(2.5)**.
Par exemple, les solutions $y_1(x)$ et $y_2(x)$ définies comme ci-dessus constituent un système fondamental.

2.3. Le Wronskien de y_1 et y_2

a) Définition

Considérons y_1 et y_2 deux solutions de l'équation différentielles **(2.5)**
Le Wronskien de ces deux solutions est :

$$W(x) = W[y_1(x), y_2(x)](x) = \text{dét} \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x) \quad \textbf{(2.7)}$$

b) Formule de Liouvile

Théorème [15]

Soient $]\alpha, \beta[$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, P, Q : $]\alpha, \beta[\to \mathbb{R}$ deux fonctions continues et $y_1(x)$, $y_2(x)$: $]\alpha, \beta[\to \mathbb{R}$ deux solutions de l'équation différentielle **(2.5)**.
Alors, les deux fonctions $y_1(x)$ et $y_2(x)$ sont linéairement indépendantes si leur Wronskien ne s'annule en aucun point de $]\alpha, \beta[$.

Démonstration

Soient $y_1(x)$ et $y_2(x)$ deux solutions linéairement indépendantes de l'équation **(2.5)**. Montrons que pour tout $x \in]\alpha, \beta[$, $W[y_1(x), y_2(x)]\ (x) \neq 0$.

Pour cela, raisonnons par absurde et supposons qu'il existe un élément x_0 de $]\alpha, \beta[$ pour lequel $W[y_1(x), y_2(x)]\ (x_0) = 0$.
Alors, il existe deux constantes c_1 et c_2 non toutes nulles telles que

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) = 0 \\ C_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) = 0 \end{cases} \quad \textbf{(2.8)}$$

Considérons maintenant la fonction auxiliaire :

$y :]\alpha, \beta[\to \mathbb{R}$ définie par :
$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$. Par construction, on a que pour tout $x \in]\alpha, \beta[$,
$y''(x) + p(x)y'(x) + Q(x)y(x) = 0$

Comme d'autre part $y(x_0) = y'(x_0) = 0$ (par le corollaire du Théorème de la page 9), on obtient que pour tout $x \in]\alpha, \beta[$, $y(x) = 0$.

De ce résultat, on en déduit que les deux fonctions $y_1(x)$ et $y_2(x)$ sont linéairement dépendantes. D'où contradiction. On a aussi montré que $y_1(x)$ et $y_2(x)$ sont linéairement indépendantes et leur Wronskien ne s'annule en aucun point de $]\alpha,\beta[$.
Pour démontrer la réciproque de cette assertion, raisonnons de nouveau par absurde et supposons qu'il existe une constante C, telle que $y_1(x)=Cy_2(x)$ (c'est-à-dire $y_1(x)$ et $y_2(x)$ sont linéairement dépendantes avec $W[y_1(x),y_2(x)]\neq 0$).

Alors pour tout $x\in]\alpha,\beta[$:

$$\begin{aligned} W[y_1(x),y_2(x)](x) &= y_1(x)y_2'(x)-y_1'(x)y_2(x) \\ &= cy_2(x)y_2'(x)-cy_2'(x)y_2(x)=0 \end{aligned}$$

D'où contradiction.

Théorème [10]

Soit un intervalle $]\alpha,\beta[$ ouvert de $\mathbb{R}$: P ; Q : $]\alpha,\beta[\to\mathbb{R}$ deux fonctions continues et $y_1(x)$ et $y_2(x)$ deux solutions linéairement indépendantes de l'équation **(2.5)**.

Toute solution $y(x)$ de **(2.5)** de la forme $y(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ avec $c_1,c_2\in\mathbb{R}$ est appelée solution générale de l'équation donnée.

Démonstration

Soit $y(x)$ une solution de l'équation différentielle **(2.5)** et x_0 un élément quelconque de $]\alpha,\beta[$. Comme $W[y_1(x),y_2(x)](x_0)\neq 0$, on sait qu'il existe deux constantes c_1 et c_2 telles que

$$\begin{cases} c_1y_1(x)+c_2y_2(x)=y(x_0) \\ c_1y_1'(x)+c_2y_2'(x)=y'(x_o) \end{cases}$$

Ainsi la fonction $\bar{y}:]\alpha,\beta[\to\mathbb{R}$ définie par :

$\bar{y}(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ est solution de l'équation **(2.5)** satisfaisant les conditions initiales $\bar{y}(x_0)=y(x_o)$ et $\bar{y}'(x_0)=y'(x_0)$. Par conséquent en utilisant le théorème d'existence et d'unicité de la solution de l'équation différentielle **(2.5)**, on peut affirmer que pour $x\in]\alpha,\beta[$: $y(x)=\bar{y}(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$.

Théorème [15]

Considérons P, Q des fonctions continues, $y_1(x)$ et $y_2(x)$ deux solutions de l'équation **(2.5),** P,Q$\in C_0\,]\alpha,\beta[$.

Alors soit $W(x)=0$ dans $]\alpha,\beta[$

Soit $W(x)\neq 0 \quad \forall(x)\in]\alpha,\beta[$

$W(x)$ est solution de l'équation différentielle homogène du premier ordre **(1.11).**

Démonstration

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x)y_2'(x)-y_1'(x)y_2(x)$$

$$\frac{dW(x)}{dx}=y_1(x)y_2''(x)+y_1'(x)y_2'(x)-y_1'(x)y_2'(x)-y_1''(x)y_2(x)=y_1(x)y_2''(x)-y_1''(x)y_2(x)$$

$y_1(x)$ et $y_2(x)$ sont solutions de l'équation **(2.5)**

$$y_1''(x)+P(x)y_1'(x)+Q(x)y_1(x)=0 \qquad \textbf{(1)}$$

$$y_2''(x)+P(x)y_2'(x)+Q(x)y_2(x)=0 \qquad \textbf{(2)}$$

Après avoir multiplié respectivement (1) et (2) par $y_2(x)$ et $y_1(x)$,
la soustraction membre à membre donne :

$$y_1(x)y_2''(x)-y_2(x)y_1''(x)+P\big(y_2'(x)y_1(x)-y_2(x)y_1'(x)\big)+Q\big(y_1(x)y_2(x)-y_2(x)y_1(x)\big)=0$$

or $y_1(x)y_2''(x)-y_2(x)y_1''(x)=\dfrac{dW(x)}{dx}$ et $y_2'(x)y_1(x)-y_2(x)y_1'(x)=W(x)$

D'où $\dfrac{dW(x)}{dx}+PW(x)=0$ **(2.9)**

En intégrant **(2.9)**, on a : $W(x)=W(x_0)\exp\left\{-\int_{x_0}^{x}p(\xi)d\xi\right\}\forall x\in]\alpha,\beta[$ **(2.10)**

où $W(x_0)$ est une constante et $\exp\left\{-\int_{x_0}^{x}p(\xi)d\xi\right\}\neq 0$

L'équation **(2.10)** est appelée Formule de Liouville.

c) Méthode de réduction d'ordre

On suppose qu'on connait la solution $y_1(x)$ de l'équation **(2.5)**. A partir de là, on cherche la deuxième solution $y_2(x)$ linéairement indépendante de $y_1(x)$.

Calculons $\frac{d}{dx}\left(\frac{y_2(x)}{y_1(x)}\right)=\frac{y_2'(x)y_1(x)-y_1'(x)y_2(x)}{[y_1(x)]^2}=\frac{W[y_1(x),y_2(x)]}{[y_1(x)]^2}$ **(2.11)**

Selon la formule de Liouville donnée en **(1.10)** ; on a :

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y_2(x)}{y_1(x)}\right)=\frac{W(x_0)\exp\left\{-\int_{x_0}^{\xi}p(\xi)d\xi\right\}}{[y_1(x)]^2} \quad \textbf{(2.12)}$$

En intégrant **(2.12)** on a : $y_2(x)=y_1(x)W(x_o)\int_{x_1}^{x}\exp\left\{-\int_{x_0}^{\xi}P(\varepsilon)d\varepsilon\right\}\frac{d\xi}{[y_1(\xi)]^2}$ **(2.13)**

Cherchons une solution linéairement indépendante en utilisant une variable C, on a : $y_2(x)=C(x)y_1(x)$ **(2.14)** $\Rightarrow C(x)=\frac{y_2(x)}{y_1(x)}$

Selon **(2.12)** $c(x)=\mathrm{A}\int_{x_1}^{x}\exp\left\{-\int_{x_o}^{\xi}P(\varepsilon)d\varepsilon\right\}\frac{d\xi}{[y_1(\xi)]^2}$ où x_0, x_1 sont des constantes et A une constante choisie arbitrairement.

Exemple

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}+2x\frac{dy}{dx}-2y=0 \quad (-1<x<1)$$

$y_1(x)=x$ est solution

$$p(x)=\frac{2x}{1-x^2}, \qquad p(x)\in C_0\,]-1,1[$$

$$W(x)=\exp\left\{-\int_{x_0}^{x}p(\xi)d\xi\right\}=\exp\left\{-\int\frac{2x}{1-x^2}dx\right\}=1-x^2$$

$$y_2=x\int\frac{1-x^2}{x^2}dx=x\left[\int\frac{dx}{x^2}-\int dx\right]$$

$$y_2=x\left(-\frac{1}{x}-x\right)=-(1+x^2)$$

Ainsi la solution générale de l'équation différentielle $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}+2x\frac{dy}{dx}-2y=0$ est $y(x)=C_1x-C_2(1+x^2)$

2.4. Equation différentielle avec second membre

Soit $y''+P(x)y'+Q(x)y=R(x)$ **(2.15)**

Posons l'opérateur $L=\dfrac{d^2}{dx^2}+P(x)\dfrac{d}{dx}+Q(x)$

a) On va trouver les deux solutions linéairement indépendantes de l'équation homogène associée à $L(y)=0$. Ces deux solutions sont $y_1(x)$ et $y_2(x)$.
b) La solution générale (y_h) de cette équation homogène est la combinaison linéaire des deux premières.
c) Soit y_p la solution particulière de l'équation avec second membre. La solution générale de $y''+P(x)y'+Q(x)y=R(x)$ s'écrit alors $y(x)=y_h+y_p$

Soit $P(x)$, $Q(x)\in C_0\,]\alpha,\beta[$, y_1 et y_2 deux solutions linéairement indépendantes de $L(y)=0$, $y(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$.

Théorème [3]

La différence entre deux solutions particulières est aussi une solution de l'équation homogène c'est-à-dire si ψ_1 et ψ_2 sont solutions particulières de $L(y)=R(x)$.
Alors $\psi_1-\psi_2$ est une solution de $L(y)=0$

Démonstration

Comme ψ_1 et ψ_2 sont solutions de $L(y)=R(x)$; on a
$\psi_1''+P(x)\psi_1'+Q(x)\psi_1=R$
$\psi_2''+P(x)\psi_2'+Q(x)\psi_2=R$

La soustraction membre à membre donne :

$$(\psi_1-\psi_2)''+P(x)(\psi_1-\psi_2)'+Q(x)(\psi_1-\psi_2)=0 \qquad \textbf{(2.16)}$$

Posons $\psi_1-\psi_2=\varphi$. On a alors $\varphi''+P(x)\varphi'+Q(x)\varphi=0$

Ce qui implique que $\varphi=\psi_1-\psi_2$ est solution de l'équation homogène $L(y)=0$..

2.5. Equation homogène à coefficients constants

Dans les équations différentielles linéaires de second ordre à coefficients constants, le seul terme pouvant contenir la variable x est le terme indépendant (indépendant de y'', y' et y) et généralement on écrira une équation différentielle linéaire homogène du second ordre à coefficients constants sous la forme $ay''+by'+cy=0$ **(2.17)** où a, b, c sont des constantes.

Ainsi l'équation différentielle $2y''+y'-y-2e^x=0$ est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants car les coefficients de y'', y' et y sont respectivement 2,1,-1 et ils ne dépendent pas de x. Ce sont des constantes. Considérons l'équation différentielle homogène à coefficients constants $ay''+by'+cy=0$. **(2.18)**

Pour r convenablement choisi la fonction exponentielle $y(x)=e^{rx}$ **(2.19)** satisfait l'équation **(2.18).**

On le démontre en dérivant deux fois **(2.19)** par rapport à x. Substituons $y'=re^{rx}, y''=r^2e^{rx}$ dans le premier membre de **(2.17),** nous obtenons :

$P(r).e^{rx}=ar^2e^{rx}+bre^{rx}+ce^{rx}$ avec $P(r)=ar^2+br+c$ **(2.20)**

Par conséquent si r est une racine de l'équation **(2.20),** on a $P(r)=0$.
Cette expression est appelée équation caractéristique de **(2.17),** alors la fonction **(2.19)** satisfait. **(2.17)**
L'équation **(2.20)** est une équation du second degré en r. On distingue donc trois cas suivant le signe de b^2-4ac

Premier cas : $b^2-4ac>0$

Donc on a deux racines réelles distinctes r_1 et r_2. On a deux solutions $y_1=e^{r_1x}$ et $y_2=e^{r_2x}$ de l'équation **(2.17)**

Mais comme $W[y_1(x), y_2(x)](x)=\begin{vmatrix} e^{r_1x} & e^{r_2x} \\ r_1e^{r_1x} & r_2e^{r_2x} \end{vmatrix}=(r_2-r_1)e^{(r_1+r_2)x}$

et que $r_2-r_1\neq 0 \Rightarrow W[y_1(x), y_2(x)]\neq 0$
La solution générale de l'équation **(2.17)** est la combinaison linéaire de $y_1(x)$ et $y_2(x)$. Donc $y(x)=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$ est solution générale de **(2.17).**

Deuxième cas : $b^2 - 4ac = 0$

On a deux racines réelles égales $r_1 = r_2 = -\frac{b}{2a}$

$$P(x) = \frac{b}{a}, \quad Q(x) = \frac{c}{a}$$

$$W(x) = \exp\left\{-\int p(\xi)d\xi\right\} = e^{-\frac{b}{a}x}$$

$$y_2 = y_1(x)\int \frac{W(x)}{[y_1(x)]^2}dx = e^{-\frac{b}{a}x}\int \frac{e^{-\frac{b}{a}x}}{e^{-\frac{b}{a}x}}dx = xe^{-\frac{b}{2a}x}$$

$$y_2(x) = xe^{-\frac{b}{2a}x}$$

Troisième cas : $b^2 - 4ac < 0$

On a deux racines complexes conjugués r_1 et r_2. $y(x) = c_1e^{r_1x} + c_2e^{r_2x}$ est solution générale de l'équation donnée.

2.6. Equations différentielles du second ordre de FUCHS

2.6.1. Définition d'un point singulier d'équations différentielles linéaires

On appelle un point singulier de l'équation différentielle **(2.5)** un point x auquel l'un au moins des coefficients $P(x)$ et $Q(x)$ possède une discontinuité.

Par exemple, considérons la fonction $2x = y$. Evidemment y satisfait $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}y$ et est continue (holomorphe) au point $x = 0$, tandis que le coefficient $\frac{1}{x}$ possède une discontinuité (pôle simple) en ce point.

En effet $\lim\limits_{x\to 0} y(x) = y(0) = 2.0 = 0 \Rightarrow y$ est continue en $x = 0$

$\lim\limits_{x\to 0} y'(x) = \frac{y}{0}$ alors $\frac{y}{0}$ n'existe pas dans $\mathbb{R}$, donc $\frac{1}{x}$ présente une discontinuité en $x = 0$. On appelle ordre de pôle de $P(x)$ le degré du point singulier.

Par exemple $P(x) = \frac{1}{x^2}$ a un pole d'ordre 2 en $x = 0$.

2.6.2. Points singuliers réguliers : Théorème de FUCHS

Nous considérons l'équations différentielle **(2.5)** : $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$ où $P(x)$ et $Q(x)$sont des fonctions à valeurs complexes avec une singularité isolée en un point x_0, mais analytiques uniformes dans un domaine K du plan complexe défini par : $0<|x-x_0|<a'$ **(2.21)** ; a'>0.

Soit x un point dans K. Alors quelques soient les conditions initiales que l'on se fixe en ce point x, il existe une solution de l'équation **(2.5)** satisfaisant à ces conditions. Quand pour toute solution $y(x)$, il existe un nombre positif ρ tel que $\lim_{x\to 0}(x-x_0)^{\rho}\,y(x)=0\ \forall(x)$ **(2.22)** le point $x_0$est dit point singulier régulier pour l'équation **(2.5)**

Théorème de FUCHS [15]

Pour que x_0 soit un point singulier régulier pour l'équation différentielle homogène **(2.5),** il faut et il suffit que $P(x)$ ait un pôle d'ordre un au plus et $Q(x)$ait un pôle d'ordre deux au plus au point x_0.

Démonstration

La condition est nécessaire. L'équation **(2.5)** possède une solution $y_1(x)=(x-x_0)^{r_1}\varphi_0(x)$ ainsi que cela a été établi précédemment. Puisque $x_0$est un point singulier régulier pour **(2.5),** $\varphi_0(x)$ possède tout au plus un pôle au pointx_0, car dans le cas contraire **(2.22)** ne pourrait avoir lieu. Ainsi $y_1(x)$ peut s'écrire sous la forme $y_1(x)=(x-x_0)^{r}\ \varphi(x)$ **(2.23).**
Pour trouver une autre solution linéairement indépendante dey_1, on utilise la méthode de réduction de l'ordre et l'on pose $y_2(x)=y_1(x)\int^{x}\omega(t)\,dt$.

Alors, $\omega(x)$ satisfait à l'équation

$$\frac{d\omega}{dx}+\left\{P(x)+\frac{2y_1'(x)}{y_1(x)}\right\}\omega=0 \qquad \textbf{(2.24)}$$

Par conséquent, $\omega(x)$ peut se mettre sous la forme $\omega(x)=(x-x_0)^s\psi_1(x)$ où $\psi_1(x)$ est une fonction holomorphe dans le domaine K.

$y_2(x)=y_1(x)\{h\log(x-x_0)+(x-x_0)^s\psi(x)\}$ **(2.25)** où h est une constante, $\psi(x)$ une fonction holomorphe dans le domaine K. De plus en vertu de l'équation **(2.22),** $\psi(x)$ possède tout au plus un pôle au point x_0.

Puisque $y_1(x)$ et $y_2(x)$ sont des solutions linéairement indépendantes de **(2.5),** $P(x)$ peut se mettre sous cette forme :

$$P(x)=\frac{y_1''(x)y_2(x)-y_2''(x)y_1(x)}{y_1(x)y_2'(x)-y_2(x)y_1'(x)}$$

$$=-\frac{d}{dx}\left\{\log\left[y_1(x)^2\frac{d}{dx}\left(\frac{y_2(x)}{y_1(x)}\right)\right]\right\}$$

$$=-\frac{2y_1'(x)}{y_1(x)}-\frac{d}{dx}\left\{\log\frac{d}{dx}\left(\frac{y_2(x)}{y_1(x)}\right)\right\}$$

$P(x)$ a un pôle d'ordre un au plus.

Puisque $Q(x)$ est donnée par : $Q(x)=-\frac{y_1''(x)}{y_1(x)}-P(x)\frac{y_1'(x)}{y_1(x)}$ le résultat ci-dessus avec **(2.23)** implique que $Q(x)$ a en x_0 un pôle d'ordre au plus égal à deux.

La condition est suffisante : Par hypothèse, l'équation **(2.23)** peut être écrite sous la forme.

$$(x-x_0)^2y''+(x-x_0)P(x)y'+Q(x)y=0 \qquad \textbf{(2.26)}$$

avec $P(x)$ et $Q(x)$ holomorphes dans un domaine $|x-x_0|<a'$

Soient $P(x)=p_0+p_1(x-x_0)+p_2(x-x_0)^2+...$

$$Q(x)=q_0+q_1(x-x_0)+q_2(x-x_0)^2+... \qquad \textbf{(2.27)}$$

les développements de TAYLOR de $P(x)$ et $Q(x)$ respectivement. Soit la fonction $y(x)$ de la forme $y(x)=(x-x_0)^r\left\{1+\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x-x_0)^n\right\}$ **(2.28)**

qui satisfait à **(2.26)**. En substituant **(2.28)** dans **(2.26),** nous obtenons :

$$(x-x_0)^r\left\{r(r-1)+\sum_{n=1}^{\infty}a_n(r+n)(r+n-1)(x-x_0)^n\right\}+(x-x_0)^r$$

$$P(x)\left\{r+\sum_{n=1}^{\infty}a_n(r+n)(x-x_0)^n\right\}+(x-x_0)^rQ(x)\left\{1+\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x-x_0)^n\right\}$$

Ensuite en substituant **(2.27)** dans cette équation nous obtenons, par identification des coefficients, les équations suivantes :

$$\begin{aligned}
&r^2 + (P_0 - 1)r + q_0 = 0 \\
&a_1\{(r+1)^2 + (P_0 - 1)(r+1) + q_0\} + rp_1 + q_1 = 0 \qquad \textbf{(2.29)} \\
&a_2\{(r+2)^2 + (P_0 - 1)(r+2) + q_0\} + a_1\{(r+1)P_1 + q_1\} + rp_2 + q_2 = 0
\end{aligned}$$

donc, r doit satisfaire l'équation $F(r) = r^2 + (P_0 - 1) + q_0 = 0$ **(2.30)**

Cette équation est appelée équation aux indices pour **(2.26).** Soient r_1 et r_2 les deux racines de l'équation aux indices **(2.30)** et $s = r_1 - r_2$ **(2.31)**

Ensuite, faisant usage de $F(r_1) = 0$ et de $(P_0 - 1) + 2r_1 = s$, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
F(r_1 + n) &= (r_1 + n)^2 + (P_0 - 1)(r_1 + n) + q_0 \\
&= F(r_1) + 2nr_1 + n^2 + (P_0 - 1)n \\
&= n^2 + n\{(P_0 - 1) + 2r_1\} = n(s+n)
\end{aligned}$$

C'est-à-dire $F(r_1 + n) = n(s+n)$ **(2.32)**

A cause de **(2.31),** $F(r_1 + n) \neq 0$ pour tout $n = 1,2$

Donc posant $r_1 = r$, les coefficients a_n sont successivement déterminés par les équations **(2.29).**

Si la série de puissances entières $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ **(2.33)**

ainsi obtenue a un rayon de convergence positif, alors (2.5) possède effectivement une solution de la forme $y_1(x) = (x - x_0)^{r_1}\left\{1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n\right\}$

Ensuite, nous allons déterminer une autre solution qui soit linéairement indépendante de $y_1(x)$. Nous allons d'abord considérer le cas où $s = r_1 - r_2$ est différent d'un entier positif.

De **(2.30)** et de $F(r_2 + n) = n(-s + n)$, il résulte :

$$\frac{1}{F(r_2 + n)} = \frac{1}{n^2\left(1 - \dfrac{s}{n}\right)} \leq \frac{K}{n^2} \text{ où } K = \sup_{n \geq 1}\left|1 - \frac{s}{n}\right|^{-1}$$

Nous obtenons une solution $y_2(x)$ de la forme :

$y_2(x)=(x-x_0)^{r_2}\left\{1+\sum_{n=1}^{\infty}b_n(x-x_0)^n\right\}$ **(2.34)** qui est linéairement indépendante de $y_1(x)$.

Nous allons considérer ensuite le cas où la différence $s=r_1-r_2$ est égale à un entier. Par la méthode de réduction d'ordre, autrement dit, en posant

$$y=y_1\int^x z(t)dt \tag{2.35}$$

nous obtenons $$z'+\left(\frac{p(x)}{(x-x_0)}+\frac{2y_1'(x)}{y_1(x)}\right)z=0 \tag{2.36}$$

Puisque $\frac{P(x)}{x-x_0}+\frac{2y_1'(x)}{y_1(x)}$ a un pôle d'ordre un au plus au point $x=x_0$, la solution

$z(x)$ de **(2.36)** est donnée par $z(x)=\exp\left(\int^x\left\{\frac{P(t)}{(t-x_0)}+\frac{2y_1'(t)}{y_1(t)}\right\}dt\right)$ où le second membre est le produit de $(x-x_0)$ et d'une série de puissances entières de $(x-x_0)$.

Il existe donc une solution $y_2(x)$ linéairement indépendante de $y_1(x)$, qui est de la forme $y_2(x)=y_1(x)\int^x z(t)dt=y_1(x)\{\beta\log(x-x_0)+\varphi_2(x)(x-x_0)^\alpha\}$

$\varphi_2(x)$ est holomorphe dans le domaine $|x-x_o|<a'$.

CHAPITRE III. RESOLUTION DES EQUATIONS DIFFERENTIELLES PAR LE DEVELOPPEMENT EN SERIE AUTOUR D'UN POINT SINGULIER REGULIER : METHODE DE FROBENIUS

3.1. Définition d'une série de Frobenius

On appelle série de Frobenius une série de la forme $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n} (a \neq 0)$ **(3.1)**
qui satisfait l'équation différentielle $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$.

Théorèmes de FUCHS [3]

1. Soit $x=0$ un point régulier singulier de l'équation **(2.5).** Alors toute solution de cette équation est :

- soit holomorphe en $x=0$
- soit possède un pôle en $x=0$
- soit possède un point de blanchiment en $x=0$ qui est soit du type puissance ou du type logarithmique.

2. Si $x=0$ est point régulier singulier de l'équation **(2.5)** il existe $\rho>0$ tel que pour tout $Z\in$ $\mathbb{C}$, $|z|<\rho$ et on peut écrire $zp(z)=p_0+p_1z^1+p_2z^2+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n$
3. Soit $r(r-1)+p_0r+q_s=0$ une équation appelée équation indicielle du second degré de solution r_1 et r_2 qui sont des réels tels que $r_1 \geq r_2$. Alors l'équation différentielle **(2.5)** possède au moins dans l'intervalle $0<x<\rho$ deux solutions $y_1(x)$ et $y_2(x)$ linéairement indépendantes qui sont de la forme suivante :

1) $y_1(x)=x^{r_1}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

2) $y_2(x)=x^{r_2}\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ avec $r_1-r_2 \neq$ entier positif

3) $y_2(x)=y_1(x)\ell n|x|+x^{r_2}\sum b_n x^n$ avec $r_1=r_2$

4) $y_2(x)=Ay_1(x)\ell n(x)+x^{r_2}$ avec $r_1-r_2=$ entier positif.

3.2. Exemples

a) $r_1 \neq r_2 \in$ $\mathbb{R}$; $r_1-r_2 \notin$ $\mathbb{N}$

Soit $2xy''+y'+xy=0$ **(3.2)**

$P(x)=\dfrac{1}{2x}$ et $Q(x)=\dfrac{1}{2}$

$x=0$ est un point régulier singulier car
Donc $P(x)$possède un pôle simple en $x=0$
C'est alors possible de faire le développement en série de la solution.

Posons $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n}$

$$y'(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (r+n) x^{r+n-1}$$

$$y''(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (r+n)(r+n-1)^{r+n-2}$$

Faisans la substitution dans l'équation différentielle **(3.3)**

On a :

$$2x\sum_{n=0}^{\infty} a_n (r+n)(r+n-1)^{r+n-2}+\sum_{n=0}^{\infty} a_n (r+n)x^{r+n-1}+x\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x)^{r+n}=0 \quad \textbf{(3.4)}$$

$$\Leftrightarrow\ 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n (r+n)(r+n-1)^{r+n-1}+\sum_{n=0}^{\infty} a_n (r+n)x^{r+n-1}+\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n+1}=0 \quad \textbf{(3.5)}$$

Posons dans la troisième somme de **(3.5)** que :
$n'=n+2$
$\Rightarrow n=n'-2$
$\Rightarrow n+1=n'-1$

La troisième somme devient $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n+1}=\sum_{n'=2}^{\infty} a_{n'-2} x^{r+n'-1}$ **(3.6)**

La somme **(3.6)** peut être écrite : $\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{r+n-1}$

L'équation différentielle **(3.5)** prend la forme :

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2a_n (r+n)(r+n-1)x^{r+n-1}+\sum_{n=0}^{\infty} a_n (r+n)x^{r+n-1}+\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{r+n-1}=0 \quad \textbf{(3.7)}$$

Dans les deux premières sommes de **(3.7)**, *n* varie de 0 à 1 tandis que dans la troisième somme $n\geq 2$, on a :

$$[2a_0 r(r-1)+a_0 r]x^{r-1}+[2a_1(r+1)r+a_1(r+1)]x^r+$$
$$\sum_{n=2}^{\infty}\{a_n[2(r+n)(r+n-1)+(r+n)]+a_{n-2}\}x^{r+n-1}=0 \quad \textbf{(3.8)}$$

Le coefficient de x^{r-1} (n=0), on a :

$$a_0\left[2r(r-1)+r\right]=0$$
$$\Leftrightarrow\ 2r(r-1)+r=0$$
$$\Leftrightarrow\ 2r^2-2r+r=0$$
$$\Leftrightarrow\ 2r^2-r=0$$
$$\Leftrightarrow r=0 \text{ ou } 2r-1=0$$
$$\Leftrightarrow r_1=\tfrac{1}{2} \text{ et } r_2=0$$

Cherchons les coefficients a_1, a_2, a_3, … pour $r_1=\tfrac{1}{2}$, remplaçant r par sa valeur dans le coefficient du deuxième terme de **(3.8),** on a :

$$a_1[2(r+1)r+r+1]=0$$
$$\Leftrightarrow a_1\left[2(\tfrac{3}{2})\tfrac{1}{2}+\frac{1}{2}+1\right]=0$$
$$a_1=0$$

Le coefficient de $x^{r+n-1}: n\geq 2$:

$$a_n[2(r+n)(r+n-1)+(r+n)]+a_{n-2=0}$$
$$\Leftrightarrow a_n\{(r+n)[2(r+n-1)+1]\}=-a_{n-2}$$
$$\Leftrightarrow a_n[(r+n)(2r+2n-2+1)]=-a_{n-2}$$
$$\Leftrightarrow a_n(r+n)(2r+2n-1)=-a_{n-2}$$
$$\Leftrightarrow a_n=-\frac{a_{n-2}}{(r+n)(2r+2n-1)} \text{ or } r=0$$
$$\Leftrightarrow a_n=-\frac{a_{n-2}}{n(2n+1)}$$

$$a_1=0\ ;\ a_3=\frac{a_{3-2}}{3(6+1)}=\frac{-a_1}{21}=0\ ;\ a_2=\frac{-a_0}{2.5}\ ;\ a_4=\frac{-a_{4-2}}{4(8+1)}=\frac{-a_2}{4.9}$$

or $a_2=\dfrac{-a_0}{2.5}$ d'où $a_4=\dfrac{a_0}{2.4.5.9}$, $a_5=\dfrac{-a_{5-2}}{5(10+1)}=\dfrac{-a_3}{5.11}=0$;

$$a_6=-\frac{a_6-2}{6(12+1)}=-\frac{a_4}{6.13}=\frac{-a_0}{2.4.5.6.9.13}\ ;\ a_7=\frac{-a_{7-5}}{7.15}=0$$

Rappelons que $y_1(x)=x^{r_1}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$

$$y_1(x)=x^{\frac{1}{2}}\left[a_0x^0+a_1x^1+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5+a_6x^6+\ldots\right]$$
$$y_1(x)=x^{\frac{1}{2}}\left[a_0-\frac{a_0x^2}{2.5}+\frac{a_0x^4}{2.4.5.9}-\frac{a_0x^6}{2.4.5.6.9.13}\right]$$
$$y_1(x)=a_0x^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{x^2}{2.5}+\frac{x^4}{2.4.5.9}-\frac{x^6}{2.4.5.6.9.13}+\ldots\right)$$

$y_2(x)=x^{r_2}\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$ avec $r_{2=0}$

Le coefficient de x^r $(n=1)$

$$2b_1(r+1)r+b_1(r+1)=0$$
$$\Leftrightarrow b_1[2(r+1)r+r+1]=0$$
$$\Leftrightarrow b_1(2r^2+2r+r+1)=0$$
$$\Leftrightarrow b_1(2.0+2.0+0+1)=0$$
$$\Leftrightarrow b_1=0$$

Le coefficient de x^{r+n-1}

$$b_n[2(r+n)(r+n-1)+r+n]+b_{n-2}=0$$
$$\Leftrightarrow b_n[(r+n)[2(r+n-1)+1]]=-b_{n-2} \qquad \text{or } r=0$$
$$\Leftrightarrow b_n=[2n(n-1)+n]=-b_{n-2}$$
$$\Leftrightarrow b_n=-\frac{b_{n-2}}{2n(n-1)+n}$$
$$\Leftrightarrow b_n=-\frac{b_{n-2}}{n(2n-2+1)}$$
$$\Leftrightarrow b_n=\frac{-b_{n-2}}{n(2n-1)}$$

$$b_1=0\ ;\ b_2=\frac{-b_{2-2}}{2(4-1)}=\frac{-b_0}{2.3}\ ;\ b_3=\frac{-b_{3-2}}{3(6-1)}=\frac{-b_1}{3.5}=0\ ;$$
$$b_4=\frac{-b_{4-2}}{4(8-1)}=-\frac{-b_2}{4.7}=\frac{b_0}{2.3.4.7}\ ;\ b_5=\frac{-b_{5-2}}{5(10-1)}=\frac{-b_3}{5.9}=0\ ;$$
$$b_6=\frac{-b_{6-2}}{6(12-1)}=\frac{-b_4}{6.11}=\frac{-b_0}{2.3.4.6.7.11}$$

$$y_2(x)=x^0\left[b_0x^0+b_1x^1+b_2x^2+b_3x^3+b_4x^4+b_5x^5+b_6x^6+\ldots\right]$$
$$\Leftrightarrow y_{2-}(x)=\left[b_0-\frac{b_0}{2.3}x^2+\frac{b_0}{2.3.4.7}x^4-\frac{b_0x^6}{2.3.4.6.7.11}+\ldots\right]$$
$$\Leftrightarrow y_2(x)=b_0\left(1-\frac{x^2}{2.3}+\frac{x^4}{2.3.4.7}-\frac{-x^6}{2.3.4.6.7.11}+\ldots\right)$$

La solution générale de l'équation **(3.2)** est :

$y(x)=a_0y_1(x)+b_0y_2(x)$ où a_0 et b_0 doivent déterminées par les conditions initiales.

b) $r_1 \neq r_2 \in \mathbb{C}\ /\ \mathbb{R}$

$$x^2y''+xy'+y=0 \quad \textbf{(3.9)}$$

$$P(x)=\frac{1}{x}, \qquad Q(x)=\frac{1}{x^2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=\lim_{x\to 0}P(x)=\frac{1}{0}$$

$$\lim_{x\to 0}Q(x)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=\frac{1}{0}$$

Donc $P(x)$ et $Q(x)$ possèdent une discontinuité au point $x=0$, de plus $P(x)$ et $Q(x)$ possèdent des pôles respectivement d'ordre 1 et 2.
Donc le point $x=0$ est un point régulier singulier.
C'est possible de faire le développement en série de la solution.

Posons $y(x)=\sum_{n-0}^{\infty}a_nx^{r+n}(a_0\neq 0)$ la solution de **(3.9)**

$$y_x'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(r+n)x^{r+n-1}$$

$$y''(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(r+n)(r+n-1)x^{r+n-2}$$

Faisant la substitution dans (3.9), on a :

$$x^2\sum_{n=0}^{\infty}a_n(r+n)(r+n-1)x^{r+n-2}+x\sum_{n-o}^{\infty}a_n(r+n)x^{r+n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{r+n}=0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty}a_n(r+n)(r+n-1)x^{r+n}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n(r+n)x^{r+n}+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{r+n}=0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty}a_n[(r+n)(r+n-1)+r+n+1]x^{r+n}=0 \quad \textbf{(3.10)}$$

Le coefficient de x^r $(n=0)$

$$a_0[(r+n)(r+n-1)+r+n+1]=0, \quad a_0\neq 0$$

$$\Leftrightarrow a_0[r(r-1)+r+1]=0$$

$$\Leftrightarrow a_0(r^2-r+r+1)=0$$

$$\Leftrightarrow a_0(r^r+1)=0$$

$$\Leftrightarrow r^2+1=0 \quad \text{(équation indicielle)}$$

$$\Leftrightarrow r^2=-1$$

$$\Leftrightarrow r^2=i^2$$

$$\Leftrightarrow r_1=i, r_2=-i$$

$r_1=i$:

$$n \geq 1: \quad a_n\left[(r+n)(r+n-1)+r+n+1\right]=0$$
$$a_n\left[(i+n)(n+i-1)+i+n+1\right]=0$$
$$a_n\left(i^2+ni-i+ni+n^2-n+n+i+1\right)=0$$
$$a_n\left(-1+2ni+n^2+i-i+n-n+1\right)=0$$
$$a_n\left(n^2+2ni\right)=0$$
$$a_n=0 \text{ car } \left(n^2+2ni\right)\neq 0$$
$$a_1=a_2=a_3=\dots\dots\dots=0$$
$$\text{Or } y_1(x)=x^{r_1}\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$$

$$\Rightarrow y_1(x)=x^i a_0 \Rightarrow y_1(x)=x^i$$

$$r_2=-i \;:\; y_2(x)=x^{r_2}\sum_{n=0}^{\infty}b_n x^n$$

$$n\geq 1: b_n\left[(n-i)(n-i-1+1)+1\right]=0$$
$$b_n=0 \quad \text{car } (n-i)^2+1\neq 0$$
$$y_2(x)=x^{-i}$$

On a deux solutions réelles linéairement indépendantes

$$y_1(x)=x^i=e^{i\ell nx}$$
$$y_2(x)=x^{-i}=e^{-i\ell nx}$$

Pour $x\in\mathbb{R}_0^+$, $\ell n|x|=\ell nx$ et $\arg.x=0$

$$\Rightarrow y_1(x)=e^{i\ell nx}=\cos(\ell nx)+i\sin(\ell nx)$$
$$y_2(x)=e^{-i\ell nx}=\cos(\ell nx)-i\sin(\ell nx)$$

$y_1(x)$ et $y_2(x)$ sont linéairement indépendantes si $W\left[y_1(x),y_2(x)\right]\neq 0$

$$y_1(x)+y_2(x)=2\cos\ell n(x)$$
$$\tfrac{1}{2}\left(y_1(x)+y_2(x)\right)=\cos(\ell nx)$$
$$y_1(x)-y_2(x)=2i\sin\ell n(x)$$
$$\tfrac{1}{2i}\left(y_1(x)-y_2(x)\right)=\sin(\ln x)$$

$$\left.\begin{array}{l}\tfrac{1}{2}\left(y_1(x)+y_2(x)\right)=\cos(\ln x)\\ \tfrac{1}{2i}\left(y_1(x)-y_2\right)=\sin\ell n(x)\end{array}\right\}\text{ deux solutions linéairement indépendantes } (W(x)\neq 0)$$

La solution générale de l'équation **(3.9)** est :

$$\forall z \in \mathbb{C} /\{0\}: y(z) = a_0 z^i + b_0 z^{-i}$$
$$\forall x \in \mathbb{R}_0^+: y(x) = c_1 \cos(\ell n(x)) + c_2 \sin(\ell n(x))$$

c) $r_1 = r_2$

$$xy'' + y' = 0 \qquad \textbf{(3.11)}$$
$$P(x) = \frac{1}{x}, Q(x) = 0$$
$$\lim_{x\to 0} P(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = \frac{1}{0}$$

Donc $P(x)$ possède une discontinuité au point $x = 0$. De plus $P(x)$ possède un pôle d'ordre 1 (pôle simple) d'où le point $x = 0$ est un point régulier singulier. On peut faire le développement en série de la solution.

Posons $y(x) = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n (a_0 \neq o)$ la solution de **(3.11)**

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (r+n) x^{r+n-1}$$
$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (r+n)(r+n-1) x^{r+n-2}$$

Substituons dans (3.11)

$$x \sum_{n=0}^{\infty} a_n (r+n)(r+n-1) x^{r+n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (r+n) x^{r+n-1} = 0$$
$$\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n (r+n)(r+n-1) x^{r+n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (r+n) x^{r+n-1} = 0$$
$$\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n (r+n)(r+n+1-1) x^{r+n-1} = 0$$
$$\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n (r+n)^2 x^{r+n-1} = 0 \qquad \textbf{(3.12)}$$

Le coefficient de $x^{r-1} (n = 0)$

$a_0 r^2 = 0$, $\quad a_0 \neq 0$

$r^2 = 0$ (équation indicielle)

$\Leftrightarrow r_1 = r_2 = 0$

Le coefficient de $x^r(n=1)$, on a :

$a_1(r+1)^2=0$ or $r_1=0$

$\Leftrightarrow a_1(0+1)^2=0$

$\Leftrightarrow a_1=0$

Le coefficient pour $n>1$, $a_n(r+n)^2=0$

$a_n=0$ car $r+n\neq 0$

$y_1(x)=1a_0$ (a_0 doit être déterminée par les conditions initiales)

$y_1(x)=1$.

On cherche la deuxième solution. L'équation indicielle est $a_0r^2=0$, on a $r_1=r_2=0$ et a_0 choisie arbitrairement.

$y_1(x)=$ constante $=c_0=1$. Dans l'équation **(3.11),** $P(x)=\frac{1}{x}$

$y_1(x)=c_0$, Prénoms $x_0=x_1=1$, A$=Co$

$$y_2(x)=C(x)c_0=Ac_0\int_{x1}^{x}\exp\left\{-\int_{x_0}^{\xi}\frac{d\varepsilon}{\varepsilon}\right\}\frac{d\xi}{c_0^2}$$

$$y_2(x)=\frac{A}{c_0}\int_{x_1}^{x}\frac{d\xi}{\xi}=\frac{A}{c_0}\ell nx=\ell nx$$

La solution est de la forme $\ell nx\sum_{n=0}^{\infty}C_nx^{r+n}\,(C_0\neq 0)$,

La solution générale de (3.11) est :

$$y(x)=\ell nx\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{r+n}+\sum_{m=0}^{\infty}a_mx^{r+m}\,(a_0\neq 0, c_0\neq 0)$$

3.3. Equation de Bessel

3.3.1 Définition et résolution

On appelle équation de Bessel, l'équation $y''+\frac{1}{x}y'+\left(1-\frac{\mu^2}{x^2}\right)y=0$ **(3.13)**

μ est un nombre complexe donné dont on peut toujours supposer la partie réelle supérieure ou égale à 0. Les solutions usuelles de cette équation sont de la forme

$$y=x^{\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k \qquad \textbf{(3.14)}$$

Soient $y''+\frac{1}{x}y'+\left(1-\frac{\mu^2}{x^2}\right)y=0$ et $y=x^{\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}x^{k+\lambda}$ sa solution

$$y'(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(\lambda+k)x^{\lambda+k-1}$$

$$y''=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(\lambda+k)(\lambda+k-1)x^{\lambda+k-2}$$

Substituant dans **(3.13),** on a :

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(\lambda+k)(\lambda+k-1)x^{\lambda+k-2}+x^{-1}\sum_{k=0}^{\infty} a_k(\lambda+k)x^{\lambda+k-1}+\left(\frac{x^2-\mu^2}{x^2}\right)\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+\lambda}=0$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(\lambda+k)(\lambda+k-1)x^{\lambda+k-2}+\sum_{k=0}^{\infty} a_k(\lambda+k)x^{\lambda+k-2}+\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+\lambda}-\mu^2\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+\lambda-2}=0$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left\{(k+\lambda)^2-\mu^2\right\}a_k x^{k+\lambda-2}+\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+\lambda}=0 \qquad \textbf{(3.15)}$$

Nous faisons cette hypothèse pour fixer les idées et simplifier les démonstrations.

En fait, presque tous les résultats établis ici, en particulier, ceux de **(3.13), (3.14)** sont valables pour x quelconque complexe.

En écrivant que les coefficients respectifs des termes en x^{λ}, $x^{\lambda+1}$, $x^{\lambda+k}$ pour $k\geq 2$, doivent être nuls ;

On obtient $(\lambda^2-u^2)a_0=0$ **(3.16)**

$$\left\{(1+\lambda)^2-u^2\right\}a_1=0 \qquad \textbf{(3.17)}$$

$$\left\{(k+\lambda)^2-\mu^2\right\}a_k+a_{k-2}=0 \qquad \textbf{(3.18)}$$

Comme on peut toujours supposer $a_0\neq 0$ dans **(3.14)** en convenant d'appeler a_0x^{λ} le premier terme non nul du développement **(3.14),** l'équation **(3.16)** donne !

$$\lambda=\pm\mu \qquad \textbf{(3.19)}$$

Cherchons d'abord la solution correspondante à $\lambda=\mu$

Les équations **(3.17)** et **(3.18),** s'écrivent :

$$(2\mu+1)a_1=0 \qquad \textbf{(3.20)}$$

$$k(k+2\mu)a_k+a_{k-2}=0 \qquad \textbf{(3.21)}$$

Il résulte de **(3.20)** et **(3.21)** que tous les coefficients d'indices impairs sont nuls, quand aux coefficients d'indices pairs, a_{2n} pour $n\geq 1$, on obtient facilement leur expression d'après **(3.21)**

$$a_{2n}=\frac{(-1)^n a_0}{2^{2n}n!(\mu+1)(\mu+2)\ldots(\mu+n)}\,n\geq 1 \qquad \textbf{(3.22)}$$

En choisissant :

$$a_0=\frac{1}{2^{\mu}\tau(\mu+1)} \qquad \textbf{(3.23)}$$

On obtient : $a_{2u} = \frac{1}{2^u} \frac{(-1)^n}{2^{2n} n! \tau(\mu + n + 1)}$ **(3.24)** et pour **(3.14)**

$$J_\mu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\mu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}}{\tau(n+\mu+1)} \qquad \textbf{(3.25)}$$

Il est évident que la série au second membre converge quelque soit x et même uniformément sur tout intervalle borné et on appelle fonction de Bessel d'indice μ, la fonction $J_\mu(x)$ définie par **(3.25).**

3.3.2. Exemples

1) $x^2 y'' + xy' + x^2 y = 0$ **(3.26)**

C'est une équation différentielle d'ordre $\mu = 0$

$P(x) = \frac{1}{x}, \lim_{x \to 0} p(x) = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \frac{1}{0}$ ($p(x)$ possède une discontinuité au point $x = 0$).
De plus $P(x)$ possède un pôle simple $Q(x) = 1$.

Le point $x = 0$ est un point régulier singulier.
Faisons le développement :

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{r+k} \text{ avec } a_0 \neq 0$$

$$y'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (r+k) x^{r+k-1}$$

$$y''(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (r+k)(r+k-1) x^{r+k-2}$$

Remplaçons dans l'équations **(3.26)**

$$x^2 \sum_{k=0}^{\infty} a_k (r+k)(r+k-1) x^{r+k-2} + x \sum_{k=0}^{\infty} a_k (r+k) x^{r+k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{r+k+2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k (r+k)(r+k-1) x^{r+k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k (r+k) x^{r+k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{r+k+2} = 0 \qquad \textbf{(3.27)}$$

Pour la troisième somme de **(3.27)**

Posons $k+2=k' \Rightarrow k=k'-2$ donc $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{r+k+2} = \sum_{k'=2}^{\infty} a_{k'-2} x^{r+k'}$

Prenons $\sum_{k'=2}^{\infty} a_{k'-2} x^{r+k'} = \sum_{k=2}^{\infty} a_{k-2} x^{r+k}$

L'équation (3.27) devient :

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (r+k)(r+k-1)x^{r+k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k (r+k)x^{r+k} + \sum_{k=2}^{\infty} a_{k-2} x^{r+k} \qquad \textbf{(3.28)}$$

Dans les deux premières sommes de **(3.28)** k varie de 0 à 1 tandis que dans la troisième somme $k \geq 2$; on a :

$$[a_0 r(r-1) + a_0 r]x^r + [a_1(r+1)r + a_1(r+1)]x^{r+1} + \sum_{k=2}^{\infty} \{a_k[(r+k)(r+k-1) + (r+k)]$$
$$+ a_{k-2}\}x^{r+k} = 0 \qquad \textbf{(3.29)}$$

Le coefficient de $x^r (k=0)$

$a_0[r(r-1)+r]=0 \quad , \quad a_0 \neq 0$

$r(r-1)+r=0$

$r^2 - r + r = 0$ (équation indicielle)

$r^2 = 0$

$\Rightarrow r_1 = r_2 = 0$

Cherchons les coefficients $a_1, a_2, ...,$ pour $r_1 = r_2 = 0$ c'est-à-dire les coefficients de $x^{r+1}(k=1)$.

Le coefficient $x^{r+1}(k=1)$:

$a_1(r+1)r + a_1(r+1) = 0$

$\Leftrightarrow a_1[(r+1)r + r + 1] = 0$

$\Leftrightarrow a_1 = 0$ car $(r+1)r + r + 1 \neq 0$

Pour $k \geq 2$: $[k(k-1)+k]a_k + a_{k-2} = 0$

$\Leftrightarrow (k^2 - k + k)a_k + a_{k-2} = 0$

$\Leftrightarrow k^2 a_k + a_{k-2} = 0$

$\Leftrightarrow a_k = -\frac{1}{k^2} a_{k-2}$

$a_2 = \frac{a}{2} a_{2-2} = \frac{1}{2^2} a_0$

$a_3 = -\frac{1}{3^2} a_{3-2} = -\frac{1}{3^2} a_1 = 0$

$a_4 = -\frac{1}{4^2} a_{4-2} = -\frac{1}{4^2} a_2 = \frac{1}{2^2 4^2} a_0$

$$a_5 = -\frac{1}{5^2} a_{5-2} = -\frac{1}{5^2} a_2 = 0$$

$$a_6 = -\frac{1}{6^2} a_{6-2} = -\frac{1}{6^2} a_4 = (-)^3 \frac{1}{2^2 4^2 6^2} a_0$$

$$a_{2m} = (-1)^m \frac{a_0}{2^2 4^2 6^2 2^2 m^2}$$

$$= (-1)^m \frac{a_0}{2^2.1^2.(2.2)^2.(3.2)^2....2^2 m^2}$$

$$= (-1)^m \frac{a_0}{2^{2m}(1.2.3.4...m)^2}$$

or (1.2.3.4…m)=m !

$$= (-1)^m \frac{a_0}{2^{2m}(m!)^2}, a_0 = 1$$

$$y_1(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2^{2m}(m!)^2} x^{2m} = J_0(x)$$

Or $J_\mu(x)$ est une fonction de Bessel de première espèce d'ordre μ.
$y_\mu(x)$ est une fonction de Bessel de deuxième espèce d'ordre μ.

$$J_0(x) = y_1(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2^{2m}(m!)^2} x^{2m}$$

Deuxième solution : méthode de réduction d'ordre

$r_1 = r_2$ donc $y_2(x) = y_1 \ell nx + \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$

Posons : $v(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$; $y_2(x) = \ell nx J_0(x) + v(x)$

$$y'(x) = \frac{1}{x} J_0(x) + \ell nx J_0'(x) + v'(x)$$

$$y''(x) = -\frac{1}{x^2} J_0(x) + \frac{1}{x} J_0'(x) + \ell nx J_0''(x) + v''(x)$$

$$x^2 y'' + xy' + x' y =$$

$$x^2\left(-\frac{1}{x^2} J_0(x) + \frac{2}{x} J_0'(x) + \ell n(x) J_0''(x) + v''(x) + x\left(\frac{1}{x} J_0(x) + \ell n(x) J_0'(x) + v'(x)\right)\right)$$

$$+ x^2(\ell n(x) J_0(x) + v(x)) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 y'' + xy' + x^2 y = -J_0(x) + 2x J_0'(x) + x^2 \ell n(x) J_0''(x) + x^2 v''(x) + J_0(x) + x \ell nx J_0'(x)$$
$$+ xv'(x) + x^2 \ell n(x) J_0(x) + x^2 v(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 y'' + xy' + x^2 y = \ell n(x)\left(x^2 J_0''(x) + x\, J_0'(x) + x^2 J_0(x)\right) + x^2 v''(x) + xv'(x)$$

$$+x^2v(x)+2xJ_0'(x)=0$$

+Or $x^2J_0''(x)+xJ_0'(x)+x^2J_0(x)=0$ car elle est semblable à l'équation différentielle $x^2y''+xy'+x^2y=0$

Donc, on a : $x^2v''(x)+xv'(x)+x^2v(x)+2xJ_0'(x)=0$

$$x^2v''(x)+xv'(x)+x^2v(x)=-2xJ_0'(x) \qquad \textbf{(3.30)}$$

Or $v(x)=\sum_{k=0}^{\infty}b_kx^k$; $v'(x)=\sum_{k=0}^{\infty}b_kkx^{k-1}$; $v''(x)=\sum_{k=0}^{\infty}b_k(k-1)x^{k-2}$

(3.30) devient :

$$\sum_{k=0}^{\infty}b_k(k-1)x^k+\sum_{k=0}^{\infty}b_kkx^k+\sum_{k=0}^{\infty}b_kx^{k+2}=-2\sum_{k=2,4,6^{2k}}\frac{(-1)^k}{\left(\frac{k!}{2}\right)^2}kx^k \qquad \textbf{(3.21)}$$

Dans la troisième somme de (3.31)

Posons : $k'=k+2\Rightarrow k=k'-2$

Donc $\sum_{k=0}^{\infty}b_kx^{k+2}=\sum_{k'=2}^{\infty}b_{k'-2}x^{k'}=\sum_{k=2}^{\infty}b_kx^k$

(3.31) devient :

$$\sum_{k=0}^{\infty}b_k(k-1)x^k+\sum_{k=0}^{\infty}b_kkx^k+\sum_{k=2}^{\infty}b_{k-2}x^k=-2\sum_{k=2,4}\frac{(-1)^k}{6^{2k}\left(\frac{k}{2}!\right)^2}kx^k$$

Pour $k=0$, on a : $b_0.0+b_0+0+0$

$\Rightarrow b_0$ est quelconque

Pour $k=1$; $b_1.0+b_1.1=0$

$\Rightarrow b_1=0$

Pour $K=2,4,6,...$

$$k\geq 2\ ;\ b_k[k(k-1)+k]+b_{k-2}=\begin{cases}\dfrac{-2(-1)^{k/2}}{2^{k-1}\left(\frac{k}{2}!\right)^2} & : k \text{ paire}\\ 0 : k \text{ impaire}\end{cases}$$

$$b_k k^2 + b_{k-2} = \begin{cases} \dfrac{-2(-1)^{k/2}}{2^{k-1}\left(\dfrac{k}{2}!\right)^2} \\ 0 \end{cases}$$

Pour k impaire : $b_k = \dfrac{-b_{k-2}}{k^2}$

$b_1 = 0$, $b_3 = \dfrac{-b_1}{3^2} = 0$, $b_5 = \dfrac{-b_3}{5^2} = 0...$

Pour k pair : $k = 2$, on a : $4b_2 + b_0 = \dfrac{-(-1)^1 2}{2(1!)^2} = 1$

$\Leftrightarrow 4b_2 + b_0 = 1$

$\Leftrightarrow 4b_2 = 1 - b_0$

$\Leftrightarrow b_2 = \dfrac{1}{4} - \dfrac{b_0}{4}$,

$b_0 = 0$ ne pas ajouter à y_2 un multiple de y_1

$$b_k = -\frac{1}{k^2} b_{k-2} - \frac{(-1)^{k/2}}{k.2^{k-1}\left(\dfrac{k}{2}!\right)^2}$$

Or $\dfrac{1}{k^2} b_{k-2} = 0$

$$\Rightarrow b_k = -\frac{(-1)^{k/2}}{k.2^{k-1}\left(\dfrac{k}{2}!\right)^2}$$

$$y_2(x) = \ell nx J_0(x) + \frac{x^2}{4} - \frac{3x^4}{2^7} + \frac{11}{2^3 3^3} x^6 - ... = Y_0(x)$$

C'est la fonction de Bessel de deuxième espèce d'ordre 0.
La solution générale de **(3.26)** est
$y(x) = J_0(x) + Y_0(x)$

2. $x^2 y'' + xy' \left(x^2 - \dfrac{1}{4}\right) y = 0$, Ici $\mu = \dfrac{1}{2}$ **(3.32)**

C'est la fonction de Bessel de première espèce d'ordre $\dfrac{1}{2}$

$P(x) = \dfrac{1}{x}$, $\qquad Q(x) = \dfrac{4x^2 - 1}{4x^2}$

$\lim\limits_{x\to 0} P(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{0} = \dfrac{1}{0}$ (n'existe pas)

$\lim\limits_{x\to 0} Q(x) = \dfrac{4.0 - 1}{4.0} = \dfrac{-1}{0}$ (n'existe pas)

$P(x)$ et $Q(x)$ possèdent une discontinuité au point $x=0$. De plus $P(x)$ et $Q(x)$ possèdent respectivement un pôle d'ordre 1 et 2. Le développement autour de $x=0$ est possible car $x=0$ est un point régulier singulier.

Posons $y(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{r+k}$ solution de **(3.32)**

$$y'(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k (r+k) x^{r+k-1}$$

$$y''(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k (r+k)(r+k-1) x^{r+k-2}$$

Remplaçons dans l'équation **(3.32),** on a :

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (r+k)(r+k-1)x^{r+k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k (r+k)x^{k+r} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+r+2} - \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+r} = 0 \qquad \textbf{(3.33)}$$

Le coefficient $x^r (k=0)$

$$a_0\left[r(r-1)+r-\frac{1}{4}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow a_0\left(r^2-r+r-\frac{1}{4}\right)=0, a_0 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow r^2-\frac{1}{4}=0 \qquad \text{(équation indicielle)}$$

$$\Leftrightarrow r^2=\frac{1}{4} \Rightarrow r_1=\frac{1}{2} \text{ ou } r_2=-\frac{1}{2}$$

$r_1=\frac{1}{2}$:

Le coefficient $x^{r+1}(k=1)$

$$a_1\left[r(r+1)+r+1-\frac{1}{4}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow a_1\left(r^2+r+r+1-\frac{1}{4}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow a_1\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+1-\frac{1}{4}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 2a_1=0$$

$$\Leftrightarrow a_1=0$$

$$k\geq 2 : a_k\left\{(k+r)[(r+k-1)+1]-\frac{1}{4}\right\}+a_{k-2}=0$$

$$\Leftrightarrow a_k\left\{\left(k+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right\}+a_{k-2}=0$$

$$\Leftrightarrow a_k\left(k^2+k+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)=-a_{k-2}$$

$$\Leftrightarrow a_k\left[k(k+1)\right]=-a_{k-2}$$

$$a_k=-\frac{1}{k(k+1)}a_{k-2}$$

$$a_1=0,\quad a_2=-\frac{a_{2-2}}{2(2+1)}=\frac{-a_0}{2.3},\ a_3=\frac{-a_{3-2}}{3(3+1)}=\frac{-a_1}{3.4}=0$$

$$a_4=-\frac{a_{4-2}}{4(4+1)}=\frac{-a_2}{4.5}=\frac{a_0}{2.3.4.5}$$

La première solution $y_1(x)=J_{\frac{1}{2}}(x)=a_0+\sqrt{x}\left(1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\ldots\right)$ **(3.34)**

Multiplions **(3.34)** par $\frac{x}{x}$, on a :

$$J_{\frac{1}{2}}(x)=a_0\frac{\sqrt{x}}{x}\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots\right)$$

$$\Leftrightarrow J_{\frac{1}{2}}(x)=a_0x^{-\frac{1}{2}}\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots.\right)$$

Or $x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots=\sin(x)$

Posons $a_0=\sqrt{\frac{2}{\pi}}$

$$J_{\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin x$$

Deuxième solution

$r_1-r_2\in\square_0$,

$$y_2(x)=x^{r_2}\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n \quad \text{avec } r_2=-\frac{1}{2}$$

$$y_2'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(r+n)b_nx^{r+n-1}$$

$$y_2''(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(r+n)(r+n-1)x^{r+n-2}$$

Remplaçons dans l'équation **(3.32),** on a :

$$\sum_{n=0}^{\infty}b_n(r+n)(r+n-1)x^{r+n}+\sum_{n=0}^{\infty}b_n(r+n)x^{r+n}+\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^{r+n+2}-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^{r+n}=0 \qquad \textbf{(3.34)}$$

Pour la troisième somme de **(3.34)**

Posons $n' = n+2 \Rightarrow n = n'-2$, on a :

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{r+n+2} = \sum_{n'=2}^{\infty} b_{n'-2} x^{r+n'} = \sum_{n=2}^{\infty} b_{n-2} x^{r+n}$$

(3.34) devient

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n (r+n)(r+n-1) x^{r+n} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n (r+n) x^{r+n} - \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{r+n} + \sum_{n=2}^{\infty} b_{n-2} x^{r+n} = 0$$

$$r_2 = \frac{1}{2}$$

Le coefficient de $x^r (n=0)$:

$$b_0\left[r(r-1)+r-\frac{1}{4}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow b_0\left[-\tfrac{1}{2}\left(-\tfrac{1}{2}-1\right)-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right]=0, \quad b_0 \neq 0$$

$\Rightarrow b_0$ est quelconque.

Le coefficient de $x^{r+1}(n=1)$:

$$b_1\left[(r+1)r+r+1-\frac{1}{4}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow b_1\left[\left(-\tfrac{1}{2}+1\right)\left(-\tfrac{1}{2}\right)+\left(-\tfrac{1}{2}\right)+1-\tfrac{1}{4}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow b_1\left[\frac{1}{2}\left(-\tfrac{1}{2}\right)+\left(-\tfrac{1}{2}\right)+\tfrac{3}{4}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow b_1\left(-\tfrac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)=0$$

$\Leftrightarrow 0b_1 = 0 \;\Rightarrow\; b_1$ quelconque

Pour $n \geq 2$, le coefficient x^{r+n} :

$$b_n\left[\left(n-\tfrac{1}{2}\right)\left(n-\tfrac{1}{2}-1\right)+\left(n-\tfrac{1}{2}\right)-\tfrac{1}{4}\right]+b_{n-2}=0$$

$$\Leftrightarrow b_n\left(n^2-\tfrac{1}{2}n-n-\tfrac{1}{2}n+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{2}+n-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{4}\right)=-b_{n-2}$$

$$\Leftrightarrow b_n\left(n^2-n\right)=-b_{n-2}$$

$$\Leftrightarrow b_n\left[n(n-1)\right]=-b_{n-2}$$

$$\Leftrightarrow b_n = \frac{-b_{n-2}}{n(n-1)}$$

$$b_2 = -\frac{b_{2-2}}{2(2-1)} = \frac{-b_0}{1.2} \; ; \; b_4 = \frac{-b_2}{4.3} = \frac{b_0}{1.2.3.4} = \frac{b_0}{4!}$$

$$b_{2n} = (-1)^n \frac{b_0}{(2n)!} \; ; \; b_3 = \frac{-b_1}{3.2} \; ; \; b_5 = \frac{-b_3}{5.4} = \frac{b_1}{2.3.4.5} = \frac{b_1}{5!}$$

$$b_{2m+1} = \frac{(-1)^m b_1}{(2m+1)!}$$

$$y_2(x) = x^{-1/2}\left\{b_0\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots\right) + b_1\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots\right)\right\}$$

Or $1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots = \cos x$ et $x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{3!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots .\sin x$

$$y_2(x) = b_0 x^{-1/2} \cos x + b_1 x^{-1/2} \sin x$$

Prenons $b_1 = b_0 = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$

$$J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} x^{-1/2} \cos x \; ; \; J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} x^{-1/2} \sin x$$

$$y(x) = y_1(x) + y_2(x)$$

La solution générale de **(3.32)** peut être écrite comme

$$y(x) = C_1 J_{1/2}(x) + C_2 J_{-1/2}(x)$$

CONCLUSION GENERALE

Dans ce travail, nous avons étudié les équations différentielles ordinaires du premier ordre et les équations différentielles linéaires du second ordre.
Nous avons ensuite résolu ces dernières par la série de FROBENIUS autour d'un point singulier régulier $x = 0$ à travers des exemples variés.

Notre but a été atteint. Cependant, la résolution que nous avons faite n'est pas exhaustive. La résolution des équations différentielles par la méthode de FROBENIUS garde donc un caractère exploratoire.

C'est ainsi que nous invitons d'autres chercheurs à s'intéresser à ce sujet et nous sommes disposés à recevoir toute remarque qui pourrait améliorer ce travail.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] CODDINGTON, E.A, and N. LEVINSON, **Theory of ordinary differential équations**, New York : McGraw : Hiel Book co, 1955.

[2] CODDINGTON, E.A, **An introduction to ordinary equations,** Englewood cliffs, N.J : Prentice-Hall, Inc, 1961.

[3] EUGENE BUTKOV, **Mathematical physics**, St. John's University, New York, 1968.

[4] FAVARD, **Théorie des équations,** Tome III : Cours d'Analyse de l'école Polytechnique, Paris 1963.

[5] GOUTER R.S, IANPOLSKI A.R, **Les équations différentielles**, Editions Mir, Moscou, 1964.

[6] INCE, E.L, **Ordinary differential equations**, New York : Dover Publications Inc, 1926.

[7] A.PHILIPPOV, G. PETROSSOV, **Recueil des équations différentielles,** Edition Mir, Moscou, 1976.

[8] PIERRE ALAIS ET MICHEL HULIN, **Rappels et compléments des mathématiques**, Edition librairie Armand, Colin, 1967.

[9] N.PISKOUNOV, **Calcul différentiel et intégral**, Editions Mir, Moscou, 1980.

[10] N.PONTRIAGUINE, **Equations différentielles ordinaires**, Edition Mir, Moscou, 1969.

[11] J.QUINET, **Cours élémentaires de mathématiques supérieurs 4- équations différentielles**, Bordas, Montréal, 1974.

[12] RAINVILLE, E.D, **intermediate course in differential equation,** New York : John Wiley & Sons, 1943.

[13] V. SMIRNOV, **Cours de mathématiques supérieures**, Tome III, Edition Mir, Moscou, 1970.

[14] V.SMIRNOV, **Cours de mathématiques supérieures**, Tome III, deuxième partie, Edition Mir, Moscou, 1972.

[15] K. YOSIDA, **Equations différentielles et intégrales**, Dunod, Paris, 1971.

[16] M. ZEPISKOVNOV, **Calcul différentiel et intégral**, Tome II, Edition MIR, Moscou, 1980