UNIVERSITÉ DU BURUNDI
GRENIER DU SAVOIR DU BURUNDI
Dépôt institutionnel officiel
https://repository.ub.edu.bi

Modèle mathématique d'optimisation non-linéaire du bruit des avions commerciaux en approche sous contrainte energetique

Nahayo, Fulgence

2012
Université de Lyon
https://repository.ub.edu.bi/handle/123456789/1289

Document téléchargé depuis le **Grenier du Savoir du Burundi** — https://repository.ub.edu.bi

Université Claude Bernard Lyon 1

UNIVERSITÉ DE LYON

N° d'ordre 80 - 2012

Année 2012

THÈSE DE L'UNIVERSITÉ DE LYON

Délivrée par
L'UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD LYON 1
École Doctorale Infomaths

Domaine de recherche : Mathématiques Appliquées

DIPLOME DE DOCTORAT
(arrêté du 7 août 2006)

Soutenue publiquement le 04 juin 2012
par

Fulgence NAHAYO

Modèle mathématique d'optimisation non-linéaire du bruit des avions commerciaux en approche sous contrainte énergétique

---

Devant la commission d'Examen

JURY

L. Azrar	Professeur, FST, Université Abdelmalek Essaadi, Tanger, Maroc	Rapporteur
N. Hernández Gress	Professeur des Universités, S. T. de Monterrey, Mexique	Rapporteur
X. Prats I Menedez	Ass. Professor-HDR, Universitat Politècnica de Catalunya, Spain	Examinateur
D. Tromeur-Dervout	Professeur, Université Claude Bernard Lyon 1	Examinateur
M. Hamadiche	Dr d'Etat ès-Sciences et M.C., Université Claude Bernard Lyon 1	Co-Encadrant
M. Haddou	Professeur des Universités, INSA de Rennes	Co-Directeur
J. Ndimubandi	Professeur des Universités, Université du Burundi	Co-Directeur
S. Khardi	CRI-HDR, IFSTTAR - LTE	Directeur

Dédicace

A tous ceux qui luttent pour la recherche scientifique et la dignité de l'homme,

A ma très chère épouse NIJIMBERE Florence, à mes chers enfants

Elsie-Charlène NAHAYO, Génie-Elgie NAHAYO, Philly-Blint NAHAYO,

Desley-Floréale NAHAYO pour leur sagesse durant ma formation,

Je dédie ce travail !

Remerciements

La présente thèse n'aurait pas vu le jour sans le concours de certaines personnes auxquelles notre reconnaissance n'a d'égal que l'assiduité et le dévouement qu'elles ont consenti tout au long de ce travail.

Nous adressons nos vifs remerciements aux membres du jury : Monsieur X. Prats I Menedez, Ass. Professor, HDR/UPC-Spain, Monsieur L. Azrar, Professeur des Universités, FST, Université Abedelmalek Essaadi, Tanger- Maroc, Monsieur N. Hernández Gress, Professeur des Universités, S. T de Monterrey- Mexique et Monsieur D. Tromeur Dervout, Professeur des Universités, UCBL I, Lyon- France, pour avoir consacré leur temps précieux à corriger et à lire cette thèse. Que l'aboutissement de ce travail soit le couronnement de leurs éfforts. Nos remerciements les plus sincères sont aussi addressés aux Professeurs S. Khardi, Directeur de thèse, M. Haddou et J. NDIMUBANDI, Co-directeurs de thèse ainsi que M. Hamadiche, Co-encadrant, qui, sans nous connaître, ont accepté d'être de meilleurs guides scientifiques. Leur rigueur scientifique, leur critique pertinente, leur temps précieux, leur esprit de créativité, ont guidé nos pas dans le domaine de la recherche en mathématiques appliquées. Qu'ils sachent que nous partageons le fruit des éfforts fournis.

Nous témoignons également notre profonde gratitude à l'IFSTTAR, à la région Rhône Alpes, à l'AUF Afrique centrale, au CNF de Bujumbura et au gouvernement du Burundi pour avoir financé mes études à l'Université Claude Bernard de Lyon 1. Que vive la mobilité interuniversitaire pour l'apport de l'éxcellence et la promotion de la recherche scientifique pour un meilleur monde francophone. Nous aimerions aussi remercier tous nos collègues de l'IFSTTAR, plus particulièrement ceux du LTE pour nous avoir légué une bonne formation scientifque. Nous

leur serons toujours reconnaissant.

Nous attribuons une distinction nette à toute notre famille pour nous avoir tout donné et encouragé durant notre séjour en France. A mon père KABUZEVYOSE André, à la famille SIRYUYUMUSI Thaddée, à la famille NIMBONA Vite Abdon, à toutes mes soeurs et petits frères, Nous disons Merci !
Enfin, à tous nos amis ayant agrémenté notre séjour à Lyon, Nous vous en sommes entièrement reconnaissant.

Résumé

La progréssion de l'aviation commerciale induit une détérioration de la qualité de l'environnement autour des aéroports à cause du bruit et des émissions de polluants. L'ACARE (Advisory Council For Aeronautics Research in Europe) et le Grenelle de l'Environnement recommandent d'atteindre, à l'horizon 2020, des objectifs quantitatifs permettant d'améliorer l'environnement aux environs des plateformes aéroportuaires.

Cette thèse s'inscrit dans ce cadre et a pour objectif le développement d'un modèle mathématique d'optimisation acoustique des trajectoires de vol de deux avions commerciaux en approche sous contrainte énergétique, aérodynamique et opérationnelle. Il s'agit d'un modèle analytique de contrôle optimal non-linéaire et non-convexe régi par un système d'équations différentielles ordinaires issues de la dynamique de vol et des contraintes associées. Dans ce travail, notre contribution porte sur la modélisation mathématique des équations, l'optimisation et la programmation algorithmique et enfin la mise en pratique. Plus explicitement, nous mettons tout en oeuvre pour obtenir des solutions d'un modèle d'optimisation acoustique de deux avions en approche simultanée.

Les points abordés sont les suivants :

1. Développement mathématique du modèle 3D « exact » de la dynamique de vol de deux avions en approche.
2. Modélisation mathématique de la commande optimale de ce système.
3. Introduction de la consommation du carburant par les avions comme une équation différentielle avec une fonction consommation spécifique variable en fonction de l'évolution de la dynamique des avions.
4. Modélisation mathématique instantanée de la fonction objectif représentant le bruit global des deux avions en approche.
5. Au niveau de la résolution du problème de contrôle optimal obtenu, nous avons utilisé le langage de modélisation AMPL et le solveur de programmation non linéaire KNITRO pour calculer des solutions locales.
6. D'une part, ces solutions sont trouvées de manière globale par la méthode de programmation séquentielle quadratique avec régions de confiance. Cette méthode directe résout le problème discrétisé, en transformant un problème de commande optimale à contraintes instantanées en un problème de programmation non linéaire en dimension finie. Cette

transformation permet d'appliquer la technique de programmation séquentielle quadratique en considérant les conditions d'optimalités de Karush-Kuhn-Tucker.

7. D'une autre part, nous avons aussi utilisé une méthode indirecte en appliquant le principe de maximun de Pontryaguine suivie d'une discrétisation de type Runge Kutta partitionnée symplectique d'ordre 4.
8. Démonstration de la commutation entre l'approche directe et l'approche indirecte en utilisant l'algorithme de Runge Kutta partitionnée symplectique et le principe de maximum de Pontryaguine pour la résolution du problème de contrôle optimal dans le cas de deux avions en approche en minimisant le bruit. Les résultats obtenus sont en accord avec les résultats obtenus en utilisant des coefficients de Runge Kutta classique comme cela est indiqué dans la commutation.
9. La comparaison entre les résultats obtenus avec les deux approches montrent que la solution optimale reste la même quelque soit la démarche adoptée.
10. Au niveau physique, des trajectoires optimales en descente continue, réduisant le bruit au sol ainsi que la consommation de carburant sont obtenues.

Les résultats obtenus permettent de construire des trajectoires réduisant les niveaux de bruit perçus au sol et la consommation de kérosène pendant la phase d'approche simultanée des deux avions. Les gains en bruit se situent entre 5% et 8% pour les valeurs maximales en fonction des positions d'observation lorsque l'optimisation est considérée ou non. Une analyse de leur séparation a été menée. Cette recherche pourrait être étendue ultérieurement à la gestion du trafic aérien en considérant la résolution des conflits pour plusieurs types d'avions soit en approche ou en décollage.

Mots clés : Système dynamique de deux avions, contrôle optimal, bruit global, méthodes directes et méthodes indirectes, SQP,SPRK4, AMPL, KNITRO.

Abstract

Progression of the commercial aviation induced a deterioration of the environmental quality around the airports (noise, pollutant emissions and greenhouse gases). ACARE "Advisory Council For Aeronautics Research in Europe" and "Grenelle of the Environment" recommend obtaining, by 2020, quantitative objectives making possible to improve the environment around airports.

This thesis lies within this scope and aims to develop an mathematical non linear optimization model of flight paths of two aircraft in approach minimizing the perceived noise on the ground while energetic constraint is considered. It is an analytical model of non-linear and non-convex optimal control governed by a system of ordinary differential equations resulting from the dynamics of flight and with their associated constraints.

In this work, our contribution focuses on the mathematical modeling equations, optimization and algorithmic programming and finally the practice. Explicitly, we make every effort to obtain solutions of an acoustic optimization model of two aircraft during a simultaneous approach phasis.

The addressed issues are :

1. Mathematical development of the 3D flight dynamics model of two approaching aircraft.
2. Mathematical modeling of the optimal control of this system.
3. Introduction of fuel consumption by the aircraft as a differential equation with a specific consumption function which varies according to the aircraft dynamics.
4. Mathematical modeling of the instantaneous objective function representing the overall noise of the two approaching aircraft.
5. For solving the obtained optimal control problem, we used the modeling and programming language AMPL and the nonlinear programming solver KNITRO to calculate optimal local solutions.
6. On the one hand, these solutions are found by the sequential quadratic programming method with trust regions. This direct method solves the discrete problem by transforming an optimal control problem with instantaneous constraints in a nonlinear programming problem in finite dimensions. This transformation allows to apply the sequential quadratic programming technique by considering the Karush-Kuhn-Tucke optimality conditions.
7. On the other hand, we also used an indirect method by applying the Pontryagin maximum principle followed by a symplectic partitioned fourth order Runge Kutta scheme discretization.

8. Demonstration of commutation between direct approach and indirect approach using the Runge Kutta symplectic partitioned and the maximum principle of Pontryagin for solving the optimal control problem in the case of two approaching aircraft by minimizing the noise. The obtained results are in agreement with results obtained using classical Runge Kutta coefficients as indicated in the commutation.
9. The comparison between the results obtained with both approaches show that the optimal solution remains the same whatever the approach.
10. At the physical level, optimal continuous descent trajectories, reducing ground noise and fuel consumption are obtained.

The expected results will provide optimal trajectories reducing noise levels on the ground and the fuel consumption during the approach phase of the two aircraft. Noise gains are between 5% and 8% for maximum values according on observation positions when optimization is considered or not. An analysis of the two-aircraft separation was conducted. This research could be extended later to the air traffic management by considering conflict resolution for many types of aircraft on approach or takeoff.

Keywords : *Two-aircraft dynamic system, optimal control, Noise levels, direct and indirect method, SQP, SPRK4, AMPL, KNITRO.*

Table des matières

Introduction générale **1**

$I^{ère}$ Partie **9**

I Méthodes numériques en commande optimale d'un système dynamique **11**

1 Introduction 11

2 Méthodes directes 12

2.1 Méthode de Programmation Séquentielle Quadratique 12

2.1.1 Conditions d'optimalité du problème de contrôle optimal 13

2.1.2 Méthode de programmation Séquentielle Quadratique 15

2.1.3 Algorithme PQS 16

2.2 Algorithme PQS globalisé par Régions de Confiance 17

2.2.1 Modélisation mathématique du problème d'optimisation par la méthode des régions de confiance 17

2.2.2 Algorithme TRSQP et analyse de la convergence 19

2.3 Solveur SQPlab 21

3 Méthode indirecte 22

3.1 Problème de commande optimale 22

3.2 Cadre fini d'un problème de contrôle optimal 25

3.3 Problème de commande optimale et principe du maximum de Pontryaguine 26

3.3.1 Coût de la trajectoire associée 27

3.3.2 Application entrée-sortie, contrôlabilité 27

3.3.3 Existence de trajectoires optimales 29

3.3.4 Principe du maximum de Pontryagine 30
3.3.5 Commande optimale et équations d'Hamilton-Jacobi 32
4 Solveur KNITRO et méthode des points intérieurs 33
4.1 Algorithmes de KNITRO 33
4.2 Une application académique de KNITRO 34
5 Conclusion 36

II Modèle de commande optimale d'un avion minimisant le bruit perçu au sol 37
1 Introduction 37
2 Modèle aérodynamique d'un avion 39
3 Modélisation de la fonction-coût par l'avion 46
4 Modélisation des contraintes d'un avion en approche 47
5 Problème de commande optimale d'un avion 48

II^{ème}*Partie* **49**

III Optimisation acoustique de deux avions en approche 51
Two-Aircraft Acoustic Optimal Control Problem 53
1 Introduction 54
2 Modelization of the two-aircraft optimal control problem 55
2.1 General Formulation 55
2.2 The aircraft dynamic 56
2.3 The objective function 59
2.4 Constraints 61
2.5 The explicit formula of the two-aircraft optimal control problem 62
3 SQP methods and KKT-optimality conditions 63
3.1 The optimality conditions for the optimal control problem 63
3.2 SQP Method 64
3.3 SQP algorithm and added transfomations 65
3.4 The TRSQP algorithm and convergence analysis 67
3.5 Analysis of the algorithm and its convergence 69
4 Numerical experiments and results 69
5 Conclusion 75

IV Une méthode directe appliquée à un problème de contrôle optimal des avions en approche **81**

1 A direct method applied to aircraft optimal control problem on approach. RK4 scheme and KNITRO solver . . . 82
1.1 Introduction . . . 82
1.2 Mathematical description of the basic equations . . . 83
1.3 The numerical processing . . . 93
1.4 Numerics results . . . 94
1.4.1 Numerics results relative to the first cost function . . . 94
1.4.2 Numerics results relative to the second cost function . . . 100
1.5 Conclusion . . . 105
1.6 Appendix B : Explicit equations for the optimal dynamic system . . . 108
2 Two-Aircraft optimal control problem. The in-flight noise reduction . . . 113
2.1 Introduction . . . 113
2.2 Mathematical description of the basic equations . . . 114
2.2.1 Aircraft dynamic equations . . . 114
2.2.2 The objective function model . . . 116
2.2.3 Constraints . . . 117
2.2.4 The two-aircraft acoustic optimal control problem . . . 117
2.3 The numerical processing . . . 117
2.4 Numerics results . . . 118
2.5 Conclusion . . . 121

V Principe du Minimum de Pontryagine Appliqué au Contrôle Optimal Acoustique de deux Avions en Approche **123**

1 Introduction . . . 123
2 Schéma de résolution du problème de deux avions par le principe de minimun de pontryagine . . . 124
2.1 Algorithme de Runge-kutta partitionné symplectique . . . 127
2.2 Calcul des conditions d'ordre de l'algorithme SPRK . . . 130
3 Résultats . . . 131
3.1 Résultats numériques de l'Algorithme SPRK4 . . . 132
3.2 Résultats numériques de l'Algorithme RK4 aux coefficients de SPRK4 . . . 142
3.3 Validation la commutation des résultats approches directe et indirecte . . . 155
4 Comparaison des procédures optimales et standards . . . 156

VI Cas-tests **157**

1 Introduction 157

2 Résultats, N=200, Cas du point d'observation mobile 158

3 Résultats, N=300, Point d'observation mobile 166

4 Discussion des résultats des cas-tests 169

Conclusion générale et perspectives **171**

Annexe 1 : Méthode indirecte et équations de l'algorithme SPRK4 **173**

Annexe 2 : Publications internationales et Participation aux congrès **179**

Références bibliographiques **181**

Introduction générale

Cette thèse, financée par l'Agence Universitaire de la Francophonie, l'IFSTTAR, la région Rhône Alpes et le gouvernement du Burundi, s'inscrit dans le cadre d'un partenariat entre l'Université Claude Bernard de Lyon I, l'Institut Français des Sciences et Technologies des Transports, d'Aménagement et des Réseaux- Laboratoire Transports et Environnement (IFSTTAR-LTE), la région Rhône Alpes et l'Université du Burundi.

Le thème principal concerne le développement d'un modèle mathématique d'optimisation non-linéaire du bruit de plusieurs avions en approche sous contraintes physiques, opérationnelles et énergétique. Ce modèle sera développé principalement en considérant la dynamique, le bruit global et les contraintes instantanées sur létat et la commande de deux avions en approche. Le bruit de jet est considéré comme la grande source des nuisances sonores et des émissions polluantes des avions.

Problématique

Sélon Redonnet et Manoha [1], la réduction du bruit et des émissions polluantes des avions s'avère être un des problèmes plus difficiles à controler.

En effet, les diverses nuisances sonores et émissions polluantes que produit un avion au décollage, en croisière ou en approche font intervenir de nombreux mécanismes physiques et énergétiques complexes. C'est ce qui fait de ce problème un défi à la fois scientifique et technique ; la prédiction et la réduction des émissions acoustiques et polluantes pré-supposant une compréhension fine de tous les phénomènes impliqués.

C'est dans ce contexte actuel d'une problématique environnementale et sanitaire de lutte contre les bruits et les émissions polluantes par les avions commerciaux au voisinage des aéroports civils qu'un modèle d'optimisation acoustique des trajectoires et des procédures de vol réduisant le bruit au sol sera développé à travers cette thèse.

Impact environnemental des avions

Le transport aérien est en croissance continue [2, 3]. Des considérations économiques et environnementales liées à l'augmentation du coût du pétrôle et à la nécessité de préserver l'environnement imposent des contraintes de plus en plus sévères aux gestionnaires du trafic aérien et aux constructeurs des avions. En particulier, les objectifs environnementaux établis par le conseil consultatif ACARE (Advisory Council For Aeronautics Research in Europe) dans sa vision stratégique 2020 représentent un réel défi technique pour les aérodynamiciens (émissions de CO_2 et production acoustique réduites de moitié [4, 5]).

Les avions circulant à basse altitude sont à l'origine de plus de la moitié des émissions polluantes. La maîtrise de l'impact environnemental d'un aéronef concerne l'émission des gaz à effet de serre contribuant au réchauffement climatique, la production de bruit gênante pour le voisinage des aéroports, voire pour une part plus large de la population si le transport supersonique se développe ; et enfin la présence de sillages tourbillonnaires qui constitue un risque pour les avions suiveurs surtout dans la phase de décollage. Ainsi, la diminution de la consommation de carburant contribue à la réduction de l'émission des polluants tandis que les dispositifs de réduction du bruit peuvent être défavorables aux performances aérodynamiques de l'avion.

Positionnement scientifique

Dans le contexte actuel de la modélisation mathématique et du calcul scientifique, de nombreux travaux en rapport avec l'optimisation des systèmes dynamiques du transport aérien traitent la minimisation du bruit et la consommation du carburant par les avions commerciaux. Les équations 3D de la dynamique de vol des avions civils sont alors utilisées pour modéliser les trajecetoires de ces derniers en approche sous différentes contraintes physiques et opérationnelles [6]. Par ailleurs, plusieurs modèles peuvent être considérés pour simuler l'évolution dynamique

d'un avion commercial en approche. De plus, ces modèles dynamiques qui tiennent compte des niveaux de bruit générés par l'avion et de la consommation du carburant permettent d'estimer les paramètres de vol dans l'objectif de maîtriser l'impact sur l'environnement et que ceci soit pour un avion ou un ensemble d'avions.

Différents codes de calcul [7–11] ont été dévéloppés afin de simuler de tels phénomènes d'approche en domaine bidimensionnel. Certains d'entre eux utilisent des méthodes classiques pour la résolution des systèmes algébriques issus des équations différentielles, d'autres utilisent des techniques sophistiquées de méthodes indirectes et de programmation dynamique.

Dans ce travail, il s'agit de mettre en oeuvre un modèle d'optimisation permettant de générer des trajectoires optimales dans le sens où le critère à minimiser est le bruit émis en approche tout en tenant compte des contraintes imposées et en particulier la contrainte énergétique. C'est un modèle de type commande optimale non linéaire et non convexe régi par un système d'équations différentielles ordinaires (ODE).

Ce modèle tient compte des équations exactes de la dynamique des avions et de leur variation de masse due à la consommation du carburant. Ce modèle sera réalisé dans le cas de deux avions de même type attérissant sur une même piste. La dynamique de vol, la configuration des avions à l'attérissage [12], la sécurité des appareils, les contraintes physiques, les contraintes opérationnelles, la consommation énergétique forment un modèle qui peut être traité en utilisant les méthodes numériques applicables en optimisation non-linéaire [13] et en commande optimale. Les codes élaborés à ce propos portent sur les modèles 3D en considérant deux avions en approche sans conflit et attérissant de manière successive sur une seule piste.

Les méthodes exploitées dans cette thèse sont de deux types. La première partie se base sur une méthode directe « The Trust region séquential quadratic programming », du type point intérieur largement robuste et présente dans la littérature. Cette méthode est utilisée par le solveur KNITRO largement présent dans la résolution de ce genre de problème fortement non linéaire et non convexe. Dans la plupart des cas, une discrétisation de type Runge-Kutta d'odre 4 a été adoptée étant donné son ordre de convergence élèvé. La deuxième catégorie des méthodes dite indirecte basée sur le principe de minimum de Pontryaguine a été utilisée en considérant le caractère de discrétisation partitionné symplectique de la méthode de Runge-Kutta d'odre 4 ainsi que la discrétisation directe de ce dernier afin de prouver la commutation de l'approche directe et indirecte. Les coefficients obtenus dans cette approche indirecte sont utilisés dans la

méthode directe afin d'améliorer la précision des résultats et de démonter la commutation entre les deux méthodes.

Positionnement international de la thématique

En France, la sécurité étant la première priorité des services de la navigation aérienne, l'environnement en est la deuxième. A travers le monde, les deux objectifs clairs impliquant l'ensemble des intervenants du secteur aéronautique jusqu'à l'horizon 2020 sont

1. La réduction du bruit perçu de 10 dB par opération,
2. La contenance des nuisances sonores dans le périmètre aéroportuaire.

Une Initiative de Recherche pour l'Optimisation acoustiQUe Aéronautique (IROQUA) a été lancée en France en 2005-2006 en vue d'atteindre les deux objectifs. IROQUA en collaboration avec le CNRS et les constructeurs d'avions Airbus, Dassault Aviation, Eurocopter et Snecma se proposent de mener des recherches afin de réduire le bruit des aéronefs. Une cordination des programmes communs dans la recherche et l'industrie aéronautique se fait en France, dans un souci de cohérence et de complémentarité. IROQUA est donc au service des besoins industriels français pour mener à bien la réduction du bruit des aéronefs et atteindre les objectifs 2020 ACARE (Advisory Council For Aeronautics Research in Europe) pour lesquels le financement est supporté d'une part par la Fondation Nationale de Recherche pour l'Aéronautique et l'Espace « FNRAE ».

De manière technique, IROQUA est un projet visant un renforcement des capacités de recherche en soutien de futures applications industrielles par une action basée sur la Modélisation physique et outils numériques, les structures absorbantes, les technologies actives, les benchmarks expérimentaux et numériques et enfin sur l'intégration des techniques de réduction de bruit. IROQUA s'appuie sur des thématiques rassemblant pour chacun des domaines les meilleurs experts nationaux. Il s'en suit une veille scientifique et technologique, une synthèse de l'état de l'art, une identification des pôles d'excellence et une traduction des besoins industriels en objectifs scientifiques.

Au niveau européen, les objectifs des projets à l'horizon 2020 de l'ACARE « Advisory Council for Aeronautics Research in Europe » sont :

1. Qualité et service pour la réduction des charges pour les passagers, l'augmentation des choix des passagers, l'amélioration des conditions de transport du fret, la réduction du

temps de transport du fret de 50%.

2. Environnement pour la réduction du CO2 de 50 %, la réduction du NO_x de 80 %, la réduction du bruit extérieur perçu de 50 %.
3. Efficacité du système de transport aérien pour l'augmentation de la capacité, la réduction du temps d'attente dans l'aéroport de moins de 15 minutes pour les vols nationaux, 99 % des vols à l'heure.
4. Sureté et Sécurité pour la réduction des accidents de 80 %, la réduction de l'erreur humaine et ses conséquences.

Aux USA, il s'agit de la Vision NASA « NASA's Aircraft Noise Reduction Research ». Le NACA « National Advisory Committee on Aeronautics » annonce une augmentation du transport aérien de passagers et de fret et la faible introduction de technologies de réduction du bruit dans les flottes ce qui rend la qualité de l'environnement sonore toujours médiocre. L'impact du bruit d'avions dans le monde restera constant jusqu'à 2030 pour augmenter par la suite. L'objectif des programmes de la NASA est la réduction de 10 dB. L'accent est particulièrement mis sur les traitements acoustiques passifs des sources et l'amélioration des trajectoires d'approches minimisant les bruits. La NASA, la FAA « Federal Aviation Administration », les industries aéronautiques et les universités continuent de planifier de nouvelles initiatives Recherches et Développement pour la réduction du bruit.

Contributions de la thèse

Dans ce travail, notre contribution porte en grande partie sur l'optimisation et la modélisation mathématique des équations, la programmation algorithmique et enfin la mise en pratique. Plus explicitement, nous mettons tout en oeuvre pour obtenir des solutions d'un modèle d'optimisation acoustique multi-avions en approche simultanée sous contrainte énergétique. Les points abordés les plus importants sont les suivants :

1. Ecriture mathématique 3D du modèle exact de la dynamique de vol de deux avions en approche.
2. Modélisation mathématique de la commande optimale de ce système.
3. Modélisation mathématique de la fonction objectif du bruit global de deux avions.

4. Au niveau de la résolution du système posé, nous avons utilisé la méthode de programmation non-linéaire sous AMPL avec un couplage KNITRO pour l'éxtraction des solutions optimales locales. Ces solutions sont obtenues en utilisant la méthode de programmation séquentielle quadratique avec régions de confiance ou la méthode SPRK4 à base du principe de maximun de Pontryaguine. On choisit alors la solution optimale parmi les solutions admissibles obtenues.
5. Démonstration de la commutation entre l'approche directe et l'approche indirecte en utilsant l'algorithme de Runge Kutta partitionnée symplectique et le principe de maximum de Pontryaguine pour la résolution du système dynamique de deux avions en approche en minimisant le bruit.
6. Introduction de la consommation du carburant par les avions comme une équation différentielle avec une fonction consommation spécifique variable en fonction de l'évolution de la dynamique des avions.
7. Au niveau physique, des trajectoires optimales en descente continue, réduisant le bruit au sol ainsi que la consommation de carburant sont obtenues.
8. Au niveau pratique, validation des résultats et contribution à l'élaboration d'un code succeptible d'évoluer afin de servir comme un outil de prise de décision dans la gestion des attérissages, cas des petis aéropports à piste unique.

Les persepectives d'avenir concernent l'introduction dans le code des modèles de décolages et de gestion du trafic aérien.

Organisation de la thèse

Dans la continuité des recherches déjà menées à l'IFSTTAR-LTE au niveau de la thématique [14], cette thèse s'inscrit dans un cadre des recherches sur l'optimisation acoustique des trajectoires de vol de deux avions commerciaux en intégrant davantage de contraintes physiques, opérationnelles et energétique dans une procédure d'approche. Une contrainte liée à la consommation de kérosène sera nouvellement introduite pour satisfaire les demandes des acteurs du transport aérien relatives aux aspects économiques et des environnementalistes en ce qui concerne la réduction des polluants.

Le chapitre 1 introduit la modélisation mathématique d'un problème de commande optimale à l'aide d'une méthode directe de programmation séquentielle quadratique globalisée par la méthode des régions de confiance. Dans ce même chapitre, nous éxposons aussi la méthode

numérique indirecte en se basant sur la commande optimale et le principe de maximum de Pontryaguine.

Dans le chapitre 2, nous présentons la modélisation mathématique de la commande optimale d'un système dynamique de l'avion civil A300. Il s'agit d' introduire un modèle dynamique tridimensionnel exact d'un avion civil, le bruit de jet pour la fonction objectif et enfin les contraintes.

La modélisation mathématique de la commande optimale d'un système dynamique de deux avions civils A300 est nécéssaire. Cela est abordé dans le chapitre 3. Il s'agit toujours d'une modèlisation dynamique 3D de ce système de deux avions, la fonction objectif et les contraintes mixtes liées à l'état la commande des avions. Ces deux problèmes tel que posés décrits ci-haut sont résolus en utilisant une méthode de programmation séquentielle quadratique globalisée par les régions de confiance. Le critère à minimiser est le bruit émis par les deux avions en approche. Les résulats numériques trouvés sous la programmation AMPL [15, 16] et l'extraction des solutions optimales par KNITRO [17–20] sont présentés par la suite.

Le quatrième chapitre vise la résolution du problème de deux avions par une méthode d'optimisation directe de type Runge-Kutta d'odre 4 comme schéma numérique [21]. Cette méthode nous permettra plus tard d'etablir un lien entre la solution optimale par la méthode directe et la méthode indirecte comme le montre le chapitre 5. Les processus numériques montrent qu'il y a deux trajectoires optimales conduisant à une réduction des niveaux de bruit perçus au sol et fournissent des caractéristiques de vol optimales pour une grande partie du vol.

Le cinquième chapitre met l'accent sur la résolution numérique du problème de deux avions en utilisant l'approche d'optimisation indirecte où le principe de maximum de Pontryaguine est sollicité. Un schéma de discrétisation de type Runge-Kutta partitionné symplectique d'ordre 4 est utilisée pour la résolution des équations différentielles résultantes. Afin de valider nos méthodes numériques, nous avons utilisé les coefficients obtenus par l'approche indirecte sous un schéma numérique SPRK4 dans la méthode directe. Les résultats obtenus sont en très bon accord avec les résultats obtenus en utilisant des coefficients de Runge Kutta classique comme cela est indiqué dans la commutation.

Le dernier chapitre montre plusieurs cas-tests en variant la durée d'approche du deuxième avion, la discrétisation plus fine ainsi que le point d'observation considéré mobile sous trace. Une conclusion sera donnée à la fin.

De part la complexité du modèle multi-avions et après validation des résultats, ce travail réalisé dans le cadre d'un système dynamique de deux avions mérite une extension au cas de n avions. Cela complique davantage la modélisation mathématique du problème d'autant plus que d'autres enjeux apparaissent. Nous citerons la gestion du trafic, la résolution des conflits, la capacité aéroportuaire, la variation du type avion . Ce travail constitue donc une base dans la réalisation de tels modèles succeptibles de combiner la variation du type avion, le couplage attérissage/décolage, attérissage/attérissage, décolage/décolage, etc.

$I^{ère} Partie$

Cette partie contient deux chapitres centrés essentiellement sur un état de l'art des méthodes numériques et de la commande optimale d'un système dynamique principalement un avion.

Au premier chapitre, nous revenons sur la modélisation mathématique d'un problème de commande optimale à l'aide d'une méthode directe de programmation séquentielle quadratique globalisée par la méthode des régions de confiance. Nous éxposons aussi la méthode numérique dite indirecte en se basant sur la commande optimale et le principe de maximum de Pontryaguine.

Au deuxième chapitre, nous présentons la modélisation mathématique de la commande optimale d'un système dynamique, l'avion civil A300. Il s'agit de revenir sur le modèle dynamique tridimensionnelle d'un avion civil, ces performances opérationnelles et qualités de vol. La modélisation des efforts aérodynamiques, propulsifs et massiques d'un avion commercial constitue la base de la dynamique de vol de celui-ci.

Chapitre I

Méthodes numériques en commande optimale d'un système dynamique

1 Introduction

La plupart des problèmes rencontrés en ingéniérie et en calcul scientifique se présentent sous la forme des équations et des systèmes d'équations non-linéaires, convexes et non convexes [22–24]. Ces problèmes sont difficiles à résoudre sur le plan scientifique et technique. Dans ce chapitre, nous exploitons certaines méthodes directes et indirectes en commande optimale [7].

Le but principal de ce chapitre est d'avoir un aperçu général des méthodes numériques directes de programmation séquentielle quadratique globalisées par les régions de confiance en fonction des types de problèmes [24–27] et des méthodes indirectes basées sur le principe du maximum de Pontryaguine. Les techniques de résolution des problèmes mathématiques d'optimisation dépendent éventuellement de la nature de la fonction objectif et de l'ensemble des contraintes. Les méthodes dévéloppées sont donc les plus courantes et surtout les plus utilisées en commande optimale [28].

La modélisation générale d'un problème de commande optimale est la suivante [24, 27] :

$$\begin{cases} \min\limits_{\mathbf{u}\in\mathbb{U}} J(\mathbf{y}(.),\mathbf{u}(.)) \\ \dot{\mathbf{y}}(t) = f(\mathbf{u}(t),\mathbf{y}(t)) \\ g(\mathbf{y}(t),\mathbf{u}(t)) \leq 0 \\ h(\mathbf{y}(t),\mathbf{u}(t)) = 0 \end{cases} \tag{I.1}$$

où J, f, g, h sont typiquement non-linéaires. L'ensemble $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ est l'ensemble admissible du problème et un point de celui ci est admissible. L'ensemble $\mathbb{U}$ est l'ensemble des commandes. Dans le cas où l'ensemble $\{(\mathbf{y},\mathbf{u})|(\mathbf{y},\mathbf{u}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m\}$ n'est pas vide, on a un problème réalisable. La fonction J s'appelle *critère, fonction-coût ou fonction-objectif* du problème, $\dot{y}$ est

la dynamique du système alors que g et h sont respectivement les contraintes d'inégalité et d'égalité.

De prime à bord, il existe aussi un problème avec contraintes d'inégalité, un problème avec contraintes d'égalité et enfin tout simplement un problème sans contraintes. Certains problèmes industriels n'ayant pas la forme proposée doivent être transformés en forme standard comme le montre la formulation ci-dessous :

$$\max_{u\in\mathbb{U}} \tilde{J}(\mathbf{y}(.),\mathbf{u}(.)) \Longrightarrow J(\mathbf{y}(.),\mathbf{u}(.)) = -\tilde{J}(\mathbf{y}(.),\mathbf{u}(.)) \Longrightarrow \min_{u\in\mathbb{U}} J(\mathbf{y}(.),\mathbf{u}(.)) \tag{I.2}$$

Cette formulation sera utilisée dans le corps de ce travail, étant donné que le but principal de ce travail concerne la minimisation du bruit des avions commerciaux en approche, tenant compte des contraintes aérodynamiques, physiques et énergétiques. L'étude de cette catégorie de problème est très difficile à faire compte tenu du caractère non convexe des équations, la démonstration de l'existence et l'unicité de la solution n'étant pas garantie, ce qui nous amène à choisir certaines méthodes dans l'etablissement et la résolution des conditions d'optimalité en fonction de la structure du problème.

Le problème d'optimisation (I.1) étant défini, la suite consiste à étudier les conditions d'éxistence de la solution, et si elle existe, est-elle locale ou globale ? Toute solution globale est locale. Dans le cas qui nous concerne, on se contentera d'une solution locale à cause du caractère typiquement non-linéaire et non convexe du problème comme le montre le chapitre 2. Cette solution sera obtenue en utilisant les méthodes d'optimisation directe et indirecte.

2 Méthodes directes

Les méthodes directes considèrent une discrétisation en dimension finie du problème de commande optimale et s'attachent à résoudre le problème d'optimisation non linéaire obtenu après cette discrétisation. Le paragraphe suivant présente la méthode directe de programmation séquentielle quadratique.

2.1 Méthode de Programmation Séquentielle Quadratique

La méthode de Programmation Séquentille Quadratique « Sequential Quadratic Programming »en anglais est l'une des méthodes les plus efficaces de résolution de problèmes de programmation non-linéaire [29]. Elle est de ce fait très utilisée dans plusieurs travaux de commande optimale[30, 31].

Le principe SQP repose sur une reformulation itérative du problème de programmation non-linéaire en un problème de programmation quadratique à l'aide d'une approximation quadratique du lagrangien de la fonction objectif et d'une linéarisation des contraintes. La résolution du problème de programmation quadratique se fait alors pour chaque itération. La force de la méthode SQP provient de son caractère « chemin non-réalisable » où la convergence vers la solution optimale est effectuée en partant des points intermédiaires réalisables et non réalisables dans un voisinage du domaine des contraintes. La méthode SQP n'impose le respect des contraintes que pour la solution finale.

Associée à la technique Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno d'estimation de l'inverse de la matrice hessienne, la méthode SQP devient une méthode extrêmement rapide avec une convergence quadratique.

Pour la suite, considérons le problème de contrôle optimal suivant [32–34] :

$$\begin{cases} \min\limits_{\mathbf{u}\in\mathbb{U}} J(\mathbf{y}(.),\mathbf{u}(.)) = \int_{t0}^{t_f} g(t)dt \\ \dot{\mathbf{y}}(t) = f(\mathbf{u}(t),\mathbf{y}(t)), \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0, \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0 \\ \mathbf{k}_1(\mathbf{y}(t),\mathbf{u}(t)) \leq 0 \\ \mathbf{k}_2(\mathbf{y}(t),\mathbf{u}(t)) \geq 0, \forall t \in [t_0, t_f] \end{cases} \tag{I.3}$$

où J est la fonction objectif, $\dot{y}$ la dynamique du système, k_1, k_2 les contraintes et enfin u le contrôle du système. La théorie générale de résolution de ce système se base sur une méthode directe telle que décrite ci-dessous.

2.1.1 Conditions d'optimalité du problème de contrôle optimal

Le système (I.3) montre un problème de contrôle optimal avec des contraintes mixtes [35]. En posant $\mathbf{x} = (\mathbf{y}, \mathbf{u})$, le problème peut être transformé au système suivant :

$$\begin{cases} \min J(\mathbf{x}(.)) \\ \dot{\mathbf{y}} = f(\mathbf{x}) \\ n_j(\mathbf{x}) \leq 0, j \in \Xi \\ n_j(\mathbf{x}) \geq 0, j \in \Gamma \end{cases} \tag{I.4}$$

Les expréssions Ξ, Γ sont respectivement les ensembles des indices d'égalité et d'inégalité. Le Lagrangien du système (I.4) est défini par la fonction $L(\mathbf{x}, \lambda) = J(\mathbf{x}) + \lambda^T[b(\dot{\mathbf{y}}, \mathbf{x}) + n(\mathbf{x})]$ où le vecteur λ symbolise les multiplicateurs de Lagrange et $b(\dot{\mathbf{y}}, \mathbf{x}) = \dot{\mathbf{y}} - f(\mathbf{x}) = 0$.

1. Une contrainte d'inégalité n_j est active au point $\tilde{\mathbf{y}} = (\mathbf{y}^*, \mathbf{u}^*, t^*)$ si $n_j(\mathbf{y}^*, \mathbf{u}^*, t^*) = 0$.

$\Gamma(\mathbf{y}^*, \mathbf{u}^*, t^*) = \Gamma^*$ est l'ensemble des indices j correspondant aux contraintes actives dans l'ensemble $\tilde{\mathbf{y}}$,

$$\begin{aligned} \Gamma_*^+ &= \{j \in \Gamma_* | (\lambda_\Gamma^*)_j > 0\} \\ \Gamma_*^0 &= \{j \in \Gamma_* | (\lambda_\Gamma^*)_j = 0\} \end{aligned} \tag{I.5}$$

où l'ensemble des indices Γ_*^+ sont hautement actives et celles de Γ_*^0 faiblement actives.

2. Un élèment $\tilde{\mathbf{y}} \in \Gamma^*$ vérifie la condition de qualification pour les contraintes n si les gradients des contraintes actives $\nabla n_\Xi(\tilde{\mathbf{y}}), \nabla n_\Gamma(\tilde{\mathbf{y}})$ sont linéairement indépendants. Cela signifie que la matrice jacobienne des contraintes est pleine dans $\tilde{\mathbf{y}}$.

3. Un élèment $\tilde{\mathbf{y}} \in \Gamma^*$ satisfait la condition de qualification de Mangasarian-Fromowitz pour les contraintes $n \in \tilde{\mathbf{y}}$ si il existe une direction d telle que

$$\begin{aligned} &\nabla n_\Xi(\tilde{\mathbf{y}})^T d = 0 \\ &\nabla n_j(\tilde{\mathbf{y}})^T d < 0 \forall j \in \Gamma(\tilde{\mathbf{y}}) \end{aligned} \tag{I.6}$$

lorsque le gradient $\{\nabla n_\Xi(\tilde{\mathbf{y}})\}$ est linéairement indépendant.

Pour les conditions d'optimalité de Karush-Kuhn-Tucker, on considère que J et n sont fonctions de classe C^1 et $\tilde{\mathbf{y}}$ une solution du problème (I.6) satisfaisant une condition de qualification des contraintes. Ainsi, il existe λ^* tel que :

$$\begin{aligned} &\nabla_{\mathbf{x}} L(\tilde{\mathbf{y}}, \lambda^*) = 0 \\ &n_\Xi(\tilde{\mathbf{y}}) = 0 \\ &n_\Gamma(\tilde{\mathbf{y}}) \leq 0 \\ &\lambda_\Gamma^* \geq 0 \\ &\lambda_\Gamma^* n_\Gamma(\tilde{\mathbf{y}}) = 0 \end{aligned} \tag{I.7}$$

Les équations (I.7) sont appelées des conditions de Karush-Kuhn-Tucker(KKT). La première équation reflète la condition d'optimalité, la seconde et la troisième les conditions de réalisabilité. Les deux autres reflètent les conditions additionnelles et les multiplicateurs de Lagrange correspondant aux contraintes inactives $n_j(\tilde{\mathbf{y}})$ sont nulles. Le couple $(\tilde{\mathbf{y}}, \lambda^*)$ tel que les conditions (KKT) sont satisfaites est appelé la solution primale-duale de (I.4). Ainsi, $\tilde{\mathbf{y}}$ est appelé un point stationaire.

Pour les conditions d'optimalité nécéssaires du second ordre [36] : considérons $\tilde{\mathbf{y}}$ une solution locale de (I.6) et satisfaisant une condition de qualification, alors il existe des multiplicateurs

(λ^*) tel que les conditions KKT sont vérifiées . Ainsi, nous avons

$$d^T \nabla^2_{\mathbf{xx}} L(\tilde{y}, \lambda^*) d \geq 0, \forall d \in \mathbb{C}_*$$

où $\mathbb{C}_*$ est le cône critique défini par :

$$\mathbb{C}_* = \{d \in \mathbb{Y} \times \mathbb{U} : \nabla n_j(\tilde{y}).d = 0, \forall j \in \Xi \cup \Gamma^+_*, \nabla n_j(\tilde{y}).d \leq 0 \forall j \in \Gamma^0_*\}$$

Pour les conditions suffisantes d'optimalité du second ordre[36], on suppose qu'il en existe (λ^*) satisfaisant les conditions KKT tel que

$$d^T \nabla^2_{\mathbf{xx}} L(\tilde{\mathbf{y}}, \lambda^*) d > 0 \forall d \in \mathbb{C}_* \backslash \{0\}$$

Ainsi, $\tilde{\mathbf{y}}$ est un minimum local de (I.6).

2.1.2 Méthode de programmation Séquentielle Quadratique

Partant du problème (I.4), une méthode de Programmation séquentielle quadratique « PQS »en sigle résoud une succession de problèmes quadratiques suivants :

$$\begin{cases} \min \nabla J(\mathbf{x}_k, t_k)\mathbf{d}_k + \dfrac{1}{2}\mathbf{d}_k^T H_k \mathbf{d}_k \\ \nabla^T b(\dot{\mathbf{y}}_k, \mathbf{x}_k)\mathbf{d}_k + b(\dot{\mathbf{y}}_k, \mathbf{x}_k) = 0 \\ \nabla n_\Xi(\mathbf{x}_k, t_k)\mathbf{d}_k + n_\Xi(\mathbf{x}_k, t_k) \leq 0 \\ n_\Gamma(\mathbf{x}_k, t_k)\mathbf{d}_k + n_\Gamma(\mathbf{x}_k, t_k) \geq 0 \end{cases} \tag{I.8}$$

En résolvant le problème ci-dessus, on choisit un sous ensemble d'indices $\beta_k \in \Gamma, \Xi_k \in \Xi$. De ce fait, le système devient un système avec les contraintes d'égalité uniquement :

$$\begin{cases} \min \nabla J(\mathbf{x}_k, t_k)\mathbf{d}_k + \dfrac{1}{2}\mathbf{d}_k^T H_k \mathbf{d}_k \\ \nabla^T b(\dot{\mathbf{y}}_k, \mathbf{x}_k)\mathbf{d}_k + \mathbf{b}(\dot{\mathbf{y}}_k, \mathbf{x}_k) = 0 \\ \nabla n_{\Xi_k}(\mathbf{x}_k, t_k)\mathbf{d}_k + n_{\Xi_k}(\mathbf{x}_k, t_k) = 0 \\ \nabla n_{\beta_k}(\mathbf{x}_k, t_k)\mathbf{d}_k + n_{\beta_k}(\mathbf{x}_k, t_k) = 0 \end{cases} \tag{I.9}$$

où le vecteur $\mathbf{d_k}$ est un déplacement primal-dual et H_k la matrice Hessienne du Lagrangien dans cette méthode qui est d'approche Newtonienne [24].

2.1.3 Algorithme PQS

Réputé pour sa convergence quadratique, l'algorithme PQS se présente comme suit :

1. Choisir des conditions initiales éligibles pour la solution optimale du problème

2. Approximation du problème par un problème de programmation quadratique avec des contraintes linéaires au temps t_k

3. Résoudre le problème pour une direction de déscente éligible au temps t_k

4. Vérifier les conditions d'arrêt, si $(\mathbf{d}_k^T = 0)$, écrire la solution. Dans le cas contraire, proceder à l'évaluation de la matrice hessienne, les variables primales et duales, faire une recherche linéaire pour trouver la solution

5. Incrémenter le vecteur solution au temps t_{k+1} et retourner à l'étape 2

La figure suivante illustre le principe de l'algorithme PQS

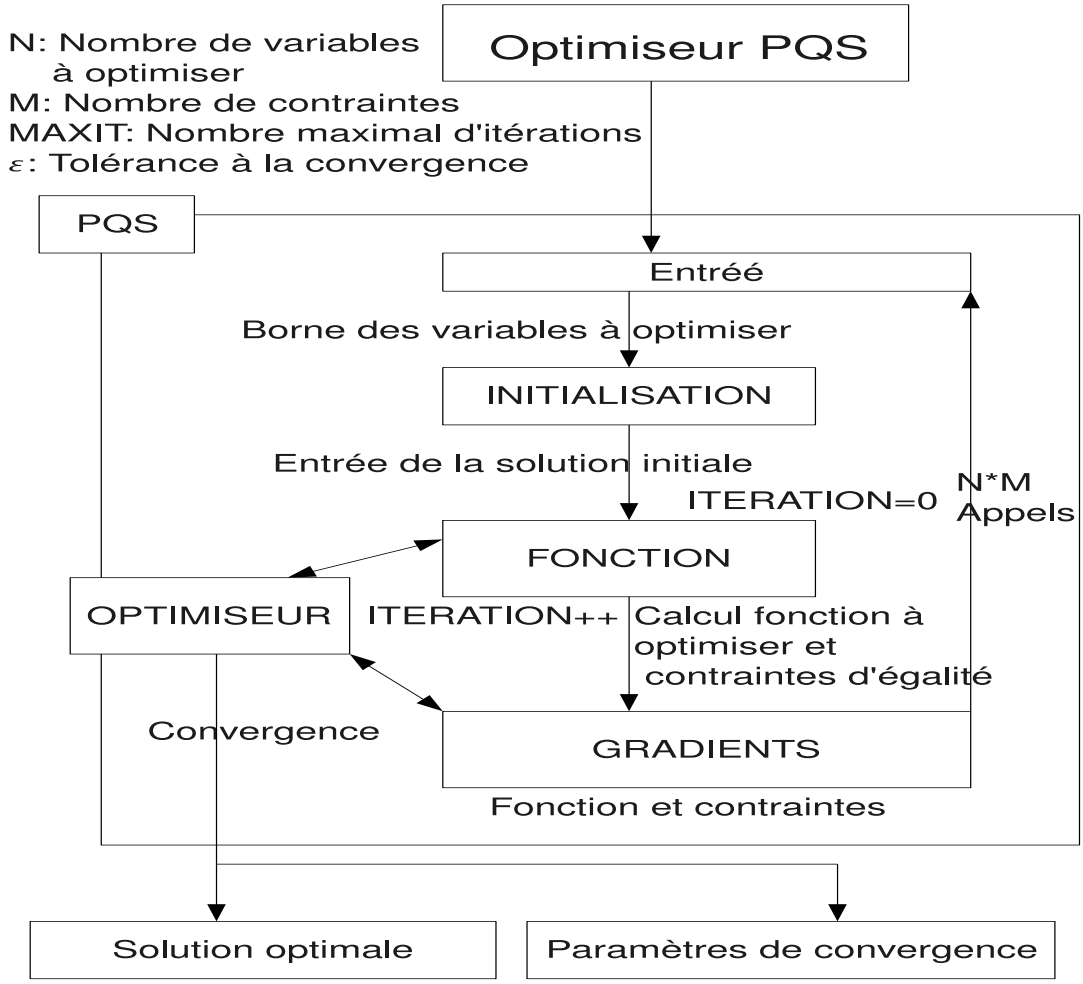


Figure I.1 – Le principe de l'optimisation PQS

Cet algorithme doit être transformé si le problème à résoudre s'avère non-convexe.

2.2 Algorithme PQS globalisé par Régions de Confiance

2.2.1 Modélisation mathématique du problème d'optimisation par la méthode des régions de confiance

Pour augmenter la robustesse et la convergence globale de l'algorithme PQS, il faut la combiner avec un rayon de confiance de cette forme :

$$||D\Delta\mathbf{x}_k||_p \leq \Delta, p \in [1, \infty] \tag{I.10}$$

où D est uniformément borné et $\mathbf{d}_k = \Delta\mathbf{x}_k$. Les relations (I.9) and (I.10) forment un programme quadratique lorsque $p = \infty$. Ains, la contrainte des rayons de confiance se restreint en $-\Delta e \leq Dx \leq \Delta e, e = (1, 1, 1, ..., 1)^T$. Si $p = 2$, on a une contrainte quadratique :

$$\Delta\mathbf{x}_k^T D^T D \Delta\mathbf{x}_k \leq \Delta^2$$

Dans la suite, on développe la théorie de convergence pour tout choix de p afin de montrer l'équivalence entre le normes $||.||_p$ et $||.||_2$. En combinant (I.8) et (I.10), toutes les composantes de chaque étape sont controlées par le rayon de confiance. Le problème prend la forme :

$$\begin{cases} \min\limits_{\Delta\mathbf{x}_k}[Q(\mathbf{x}_k)] = \nabla^T J(\mathbf{x}_k)\Delta\mathbf{x}_k + \dfrac{1}{2}(\Delta\mathbf{x}_k)^T H_k \Delta\mathbf{x}_k \\ \nabla^T \mathbf{b}(\dot{\mathbf{y}}_k, \mathbf{x}_k)\Delta\mathbf{x}_k + b(\dot{\mathbf{y}}_k, \mathbf{x}_k) = 0 \\ \nabla^T n_\Xi(\mathbf{x}_k)\Delta\mathbf{x}_k + n_\Xi(\mathbf{x}_k) \leq 0 \\ \nabla^T n_\Gamma(\mathbf{x}_k)\Delta\mathbf{x}_k + n_\Gamma(\mathbf{x}_k) \geq 0 \\ ||D\Delta\mathbf{x}_k||_p \leq \Delta, p \in [1, \infty] \end{cases} \tag{I.11}$$

Dans d'autres situations, toutes les composantes de cette étape sont contrôlées par le rayon de confiance sous quelques hypothèses sur D. Il en existe une autre alternative permettant de mettre en pratique l'algorithme PQS en utilisant une fonction de mérite ou une fonction de pénalité dans le choix de x.

Le problème ci-dessus peut être résolu par les solveurs KNITRO, SNOPT et autres méthodes [37]. On utilise un algorithme à réalisibilité PQS perturbé auquel toutes les iterées $\mathbf{x}_k$ sont réalisables et la fonction de mérite est la fonction coût. Considérant la perturbation $\Delta\tilde{\mathbf{x}}_k$ de $\Delta\mathbf{x}_k$ tel que :

1. la relation

$$\mathbf{x} + \Delta\tilde{\mathbf{x}}_k \in \mathbb{F} \tag{I.12}$$

   lorsque $\mathbb{F}$ est l'ensemble des points réalisables

2. La relation asymptotique

$$||\Delta\mathbf{x} - \Delta\tilde{\mathbf{x}}_k||_2 \leq \varphi(||\Delta\mathbf{x}_k||_2)||\Delta\mathbf{x}_k||_2 \tag{I.13}$$

   est satisfaite lorsque $\varphi : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ avec $\varphi(0) = 0$.

Les deux conditions sont utilisées pour promouvoir la convergence de l'algorithme et l'éfficacité de la méthode. Les avantages de cette méthode sont :

– La restriction du rayon de confiance (I.10) s'ajoute au problème PQS (I.9).

– La fonction objective J est seulement utilisée comme une fonction de mérite statuant sur le choix du pas.
– Pour la condition d'arrêt de l'algorithme, on utilise la dernière itération $\mathbf{x}_k$ comme un point sous optimal, ce qui est préférable dans la plus part des applications par rapport à l' optimum non réalisable.

2.2.2 Algorithme TRSQP et analyse de la convergence

Soit un pas PQS donné $\Delta\mathbf{x}_k$ et soit sa perturbation $\Delta\tilde{\mathbf{x}}_k$, le ratio de déscente est

$$r_k = \frac{J(\mathbf{x}_k) - J(\mathbf{x}_k + \Delta\tilde{\mathbf{x}}_k)}{-Q(\Delta\tilde{\mathbf{x}}_k)} \tag{I.14}$$

L'algorithme TRSQP du problème de contrôle optimal s'écrit :

1. Soient $\mathbf{x}_0(k=0)$ un point initial donné, $\overline{\Delta} \geq 1$ la borne supérieure du rayon de confiance, $\Delta_0 \in (0, \overline{\Delta})$ un rayon initial, $\epsilon \in [\epsilon_0, \epsilon_f)$ et $p \in [1, \infty]$

2. Calculer $\Delta\mathbf{x}_k$ en résolvant le système :

$$\begin{cases} \min\limits_{\Delta\mathbf{x}_k}[Q(\mathbf{x}_k)] = \nabla^T J(\mathbf{x}_k)\Delta\mathbf{x}_k + \dfrac{1}{2}(\Delta\mathbf{x}_k)^T H_k \Delta\mathbf{x}_k \\ \nabla^T bfb(\dot{\mathbf{y}}_k, \mathbf{x}_k)\Delta\mathbf{x}_k + \mathbf{b}(\dot{\mathbf{y}}_k, \mathbf{x}_k) = 0 \\ \nabla^T n_\Xi(\mathbf{x}_k)\Delta\mathbf{x}_k + n_\Xi(\mathbf{x}_k) \leq 0 \\ \nabla^T n_\Gamma(\mathbf{x}_k)\Delta\mathbf{x}_k + n_\Gamma(\mathbf{x}_k) \geq 0 \\ ||D\Delta\mathbf{x}_k||_p \leq \Delta, p \in [1, \infty] \end{cases}$$

   Chercher aussi $\Delta\tilde{\mathbf{x}}_k$ en utilisant le système :

$$\begin{aligned} &\mathbf{x} + \Delta\tilde{\mathbf{x}}_k \in \mathbb{F} \\ &||\Delta\mathbf{x} - \Delta\tilde{\mathbf{x}}_k||_2 \leq \varphi(||\Delta\mathbf{x}_k||_2)||\Delta\mathbf{x}_k||_2 \end{aligned}$$

   Cet algorithme consiste à trouver le zéro de la dérivée de la fonction-coût en utilisant une méthode de quasiNewton (Le hessien étant approximé par BFGS) comme une direction de Newton diminuant le coût et cherchant une direction par la méthode des régions de confiance dans le cas contraire. La fonction coût est un modèle local quadratique dans une région de confiance.

3. Si la perturbation $\tilde{\Delta\mathbf{x}_k}$ n'est pas trouvée, les affectations suivantes sont considérées :

$$\Delta\mathbf{x}_{k+1} \leftarrow (\frac{1}{2})||D_k\Delta\mathbf{x}_k||_p$$
$$\mathbf{x}_{k+1} \leftarrow \mathbf{x}_k; D_{k+1} \leftarrow D_k;$$

4. Sinon, calculer $r_k = \dfrac{J(\mathbf{x}_k) - J(\mathbf{x}_k + \tilde{\Delta\mathbf{x}_k})}{-Q(\tilde{\Delta\mathbf{x}_k})}$;
   Tant que $r_k \leq \epsilon_f, \Delta_{k+1} \leftarrow (\frac{1}{2})||D_k\Delta\mathbf{x}_k||_p$;
   et si $r_k > a_0 \times \epsilon_0$ et $||D_k\Delta\mathbf{x}_k||_p = \Delta_k$
   $\Delta_{k+1} \leftarrow min(2\Delta_k, \Delta)$;
   alors $\Delta_{k+1} \leftarrow \Delta_k$;

5. Si $r_k > \epsilon$ $\mathbf{x}_{k+1} \leftarrow \mathbf{x}_k + \tilde{\Delta\mathbf{x}_k}$; Choisir une nouvelle matrice D_{k+1} ;
   alors $\mathbf{x}_{k+1} \leftarrow \mathbf{x}_k; D_{k+1} \leftarrow D_k;$

6. fin

A chaque itération majeure, une approximation du Hessien du Lagrangien H défini positif par quasiNewton est calculée en utilisant la méthode BFGS, où $\lambda_i, i = 1, ..., m$, est un estimateur des multiplicateurs de Lagrange.

$$H_{k+1} = H_k + \frac{\mathbf{q}_k\mathbf{q}_k^T}{\mathbf{q}_k^T\mathbf{s}_k} - \frac{H_k^T\mathbf{s}_k^T\mathbf{s}_k H_k}{\mathbf{s}_k^T H_k\mathbf{s}_k}$$

où

$$\begin{aligned}\mathbf{s}_k &= \mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k \\ \mathbf{q}_k &= (\nabla J(\mathbf{x}_{k+1} + \textstyle\sum_{j=1}^{n} \lambda_j.\nabla n(\mathbf{x}_{k+1}) + b(\mathbf{x}_{k+1})) \\ &\quad -(\nabla J(\mathbf{x}_k + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j.\nabla n(\mathbf{x}_k) + b(\mathbf{x}_k))\end{aligned}$$

Un hessien défini positif est maintenu positif et fournit $\mathbf{q}_k^T\mathbf{s}_k$ à chaque mis à jour. La matrice hessienne H est initialisée avec une matrice définie positive.

En analysant la convergence de l'algorithme, définissons l'ensemble $\mathbb{F}_0$ comme suit :

$$\begin{aligned}\mathbb{F}_0 &= \{\mathbf{x}|\nabla^T\mathbf{b}(\dot{\mathbf{y}}, \mathbf{x})\Delta\mathbf{x} + \mathbf{b}(\dot{\mathbf{y}}, \mathbf{x}) = 0, \nabla^T n_\Xi(\mathbf{x})\Delta\mathbf{x} + n_\Xi(\mathbf{x}) = 0 \\ &\quad \nabla^T n_\Gamma(\mathbf{x})\Delta\mathbf{x} + n_\Gamma(\mathbf{x}) \geq 0, J(\mathbf{x}) \leq J(\mathbf{x}_0)\} \in \mathbb{F}\end{aligned}$$

Le rayon de confiance borné $||D\Delta\mathbf{x}_k||_p \leq \Delta, p \in [1, \infty]$ spécifie la proposition suivante :

1. Il existe une constante β telle que pour tous les points $\mathbf{x} \in \mathbb{F}_0$ et toutes les matrices D

utilisés dans l'algorithme, nous avons pour tout Δx satisfaisant les équations suivantes :

$$\nabla^T b(\dot{\mathbf{y}}, \mathbf{x})\Delta\mathbf{x} + \mathbf{b}(\dot{\mathbf{y}}, \mathbf{x}) = 0, \nabla^T n_\Xi(\mathbf{x})\Delta\mathbf{x} + n_\Xi(\mathbf{x}) = 0, \nabla^T n_\Gamma(\mathbf{x})\Delta\mathbf{x} + n_\Gamma(\mathbf{x}) \geq 0$$

que :

$$\beta^{-1}||\Delta\mathbf{x}||_2 \leq ||D\Delta\mathbf{x}||_p \leq \beta||\Delta\mathbf{x}||_2 \tag{I.15}$$

2. L'ensemble $\mathbb{F}_0$ est borné et les fonctions J, b, η sont deux fois continûment différentiables dans un voisinage ouvert $\mathbb{M}(\mathbb{F}_0)$ de cet ensemble.

Sous certaines propositions comme stipulées par Stephan [38], cette algorithme est bien défini. On montre aussi que l'algorithme a une convergence vers un point stationaire. En considérant que toutes les propositions sont satisfaites pour chaque point réalisable $\tilde{x}$ du problème, les conditions Mangasarian-Fromowitz sont satisfaites pour les contraintes. Après tout, les conditions d'optimalité KKT sont spécifiées et montrent qu'il en existe à la longue une convergence locale. Stephan montre aussi d'autres conditions qui aboutissent à la convergence globale de l'algorithme.

2.3 Solveur SQPlab

SQPlab « Sequential Quadratic Programming laboratory »est un solveur matlab pour la résolution des problèmes d'optimisation non-linéaires et des problèmes de contrôle optimal [39]. Il est centré sur la programmation séquentielle quadratique pour la résolution d'un problème de la forme

$$\begin{aligned} &\min_{x\in\mathbb{R}^n} f(x) \\ &a \leq (x, c_I(x)) \leq b \\ &c_E(x) = 0 \\ &c_S(x) = 0 \end{aligned} \tag{I.16}$$

avec $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, c_I : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{m_I}, c_E : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{m_E}$ sont des fonctions lisses non-linéaires et non-convexes. L'algorithme PQS décompose le problème (I.16) dans une séquence de sous-problèmes quadratiques. Un tel sous-problème est appelé un des problèmes osculateurs quadratiques (PQO et PQ). Le lagrangien du problème étant défini par $L = f(x) + \lambda^T c(x)$ où λ est multiplicateur de Lagrange, on écrit les conditions d'optimalité KKT :

$$\begin{aligned} &\nabla_x L(x, \lambda) = 0 \\ &a \leq (x, c_I(x)) \leq b, c_E(x) = 0, c_S(x) = 0 \\ &\forall i \in B \cup I : \lambda_i^-(L_i - c_i(x)) = \lambda_i^+(c_i(x) - b_i) = 0 \end{aligned} \tag{I.17}$$

Pour une itétation $(x, \lambda) \in \mathbb{R}^n \times \in \mathbb{R}^m$, on a le problème quadratique :

$$\begin{aligned} &\min_{d\in\mathbb{R}^n} g^T d + \frac{1}{2} d^T M d \\ &\tilde{a} \leq (d, A_I d) \leq \tilde{b} \\ &c_{E\cup S} + A_{E\cup S} d = 0 \\ &c_S(x) = 0 \end{aligned} \tag{I.18}$$

où $g = \nabla f(x), M = \nabla^2_{xx} L(x, \lambda), A_I := c'_I(x), A_{E\cup S} := c'_{E\cup S}, \tilde{a} = a - c_{B\cup S}(x), \tilde{b} := b - c_{B\cup S}(x)$. Il est d'usage d'imposer la sémi-définie positivité de M, même si L ne possède pas cette propriété, afin d'éviter un PQO qui, autrement, serait NP-difficile. L'osculateur PQO est donc convexe. Les méthodes Newtoniennes et quasi-Newtoniennes sont utilisées dans l'approximmation du hessien. Pour assurer la convergence des points initiaux, SQPlab combine une fonction de mérite et une recherche linéaire. La globalisation peut être désactivée en utilisant la commande *options.algo-globalization = 'unit stepsize'.*

3 Méthode indirecte

Le but principal de ce chapitre concerne une formulation générale de la méthode numérique dite indirecte en se basant sur le principe de maximum de Pontryaguine [40]. Eventuellement, il faut statuer sur son éfficacité lorsqu'elle est appliquée à la résolution d'un problème de commande optimale [41].

En commande optimale, nous considérons une formulation générale avec des contraintes mixtes [7, 24, 42]. La théorie de problème de contrôle optimal est vaste [43]. Les techniques de résolution des problèmes mathématiques d'optimisation dépendent éventuellement de la nature de la fonction objectif et de l'ensemble des contraintes. La méthode dévéloppée est donc la plus courante et surtout la plus utilisée en commande optimale [28].

3.1 Problème de commande optimale

Considérons le problème de commande optimale sans contraintes [7, 13, 28, 44, 45] :

$$\begin{cases} \min \varphi(y(t)) \\ \dot{y}(t) = f(u(t), y(t)), t \in [0, T] \\ y(0) = y_0(CI) \end{cases} \tag{I.19}$$

Définissons $H(u,y,p) = pf(u,y)$ le pseudo-Hamiltonien du problème original (I.19). Les applications $f : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ sont supposées C^∞, ce qui donne la condition d'optimalité :

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = f(u(t), y(t)), t \in [0,T] \\ \dot{p}(t) = -H_y(u(t), y(t), p(t)) \\ 0 = H_u(u(t), y(t), p(t)) \\ P(T) = \varphi'(y(T)), y(0) = y_0 \end{cases} \tag{I.20}$$

La méthode indirecte vise à résoudre ces conditions d'optimalité. Le vecteur $(\overline{u}, \overline{y}, \overline{p})$ satisfaisant (I.20) est extrêmal pour $\overline{u}$ continue. Si

$$u \longrightarrow H_{uu}(u,y,p) \tag{I.21}$$

inversible le long d'une trajectoire, par le théorème des fonctions implicites dans un petit voisinage L^∞ de cette trajectoire : $H_u(u(t), y(t), p(t)) = 0$ ssi $u = \varphi(y(t), p(t)), \varphi \in C^\infty$. Soit

$$\mathcal{H}(y,p) = H(\varphi(y,p), y, p)$$

Considérant l'équation $H_u(\varphi(y(t), p(t)), y(t), p(t)) = 0$ on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_y(y,p) &= H_y(\varphi(y,p), y, p) \\ \mathcal{H}_p(y,p) &= H_p(\varphi(y,p), y, p) \end{aligned} \tag{I.22}$$

De (I.21), le système (I.20) est localement équivalent au hamiltonien du système réduit :

$$\begin{aligned} &\dot{y}(t) = \mathcal{H}_p(y(t), p(t)), -\dot{p}(t) = \mathcal{H}_y(y(t), p(t)) \\ &p(T) = \Phi'(y(T)), y(0) = y_0, t \in [0,t] \end{aligned} \tag{I.23}$$

Dans une approche directe, la discrétisation Runge-Kutta du problème (I.19) donne :

$$\begin{cases} \min \varphi(y_N) \\ y_{k+1} = y_k + h_k \sum_{i=1}^s b f(u_{ki}, y_{ki}) \\ y_{ki} = y_k + h_k \sum_{i=1}^s a_{ij} f(u_{kj}, y_{kj}) \\ y(0) = y_0, k = 0, ..., N-1; i = 1, ..., s, h_k > 0 \end{cases} \tag{I.24}$$

où (a,b) sont les coefficients de Runge Kutta. En choisissant u_{kj} associé à y_{kj}, on a :

$$\begin{cases} \min \varphi(y_N) \\ 0 = h_k \sum_{i=1}^{s} b f(u_{ki}, y_{ki}) + y_k - y_{k+1} \\ 0 = f(u_{ki}, y_k) + \sum_{j=1}^{s} a_{ij} K_{kj}) - K_{ki} \\ 0 = y_0 - y(o), k = 0, ..., N-1; i = 1, ..., s \end{cases} \tag{I.25}$$

En contractant $y_k + h_k \sum_{j=1}^{s} a_{ij} K_{kj}$ en y_{ki}, le système (I.25) est équivalent au système :

$$\begin{aligned} &\min \varphi(y_N) + p^o(y(0) - y_0) + \sum_{k=0}^{N-1} \{p_{k+1}.(h_k \sum_{i=1}^{s} b K_{ki} + y_k - y_{k+1}) \\ &+ \sum_{i=1}^{s} \chi_{ki}.(f(u_{ki}, y_{ki}) - K_{ki})\} \end{aligned} \tag{I.26}$$

p_{k+1}, χ_{ki}, p^0 sont des multiplicateurs de Lagrange associés aux contraintes de (I.25). p_k est la formulation continue de la discrétisation du co-état. Les conditions d'optimalité :

$$\begin{aligned} &p_N = \varphi'(y_N), p_1 = p^0 \\ &p_k - p_{k+1} = \sum_{i=1}^{s} f_y(u_{ki}, y_{ki})^T \chi_{ki} \\ &0 = h_k b_i p_{k+1} + h_k \sum_{j=1}^{s} a_{ji} f_y(u_{kj}, y_{kj})^T \chi_{kj} - \chi_{ki}, \\ &0 = f_u(u_{ki}, y_{kj})^T \chi_{ki}, k = 0....N-1, i = 1.....s \end{aligned} \tag{I.27}$$

Si $b \neq 0, p_{ki} = \chi_{ki}/(h_k b), k = 0....N-1, i = 1...s$, l'élimination des $\chi_{ki} s$ implique :

$$\begin{cases} y_{k+1} = y_k + h_k \sum_{i=1}^{s} b_i f(u_{ki}, y_{ki}) \\ y_{ki} = y_k + h_k \sum_{j=1}^{s} a_{ij} f(u_{kj}, y_{kj}) \\ p_{k+1} = p_k - h_k \sum_{i=1}^{s} \hat{b}_i H_y(u_{ki}, y_{ki}, p_{ki}) \\ p_{ki} = p_k - h_k \sum_{j=1}^{s} \hat{a_{ij}} H_y(u_{kj}, y_{kj}, p_{kj}) \\ 0 = H_u(u_{ki}, y_{ki}, p_{ki}), y_0 = y^0, p_N = \varphi'(y_N) \\ \hat{b}_i = b_i, \hat{a_{ij}} = b_j - \frac{b_j}{b_i} a_{ji}, i = 1...., s, j = 1, ..., s \end{cases} \tag{I.28}$$

La relation $0 = H_u(u_{ki}, y_{ki}, p_{ki})$ est localement équivalente à $u_{ki} = \varphi(y_{ki}, p_{ki})$ ce qui implique que les conditions d'optimalités discrètes (I.28) sont équivalentes au schéma de la partition de Runge-Kutta de (I.23). Le schéma PRK est symplectique si le flux correspondant est symplectique [46].

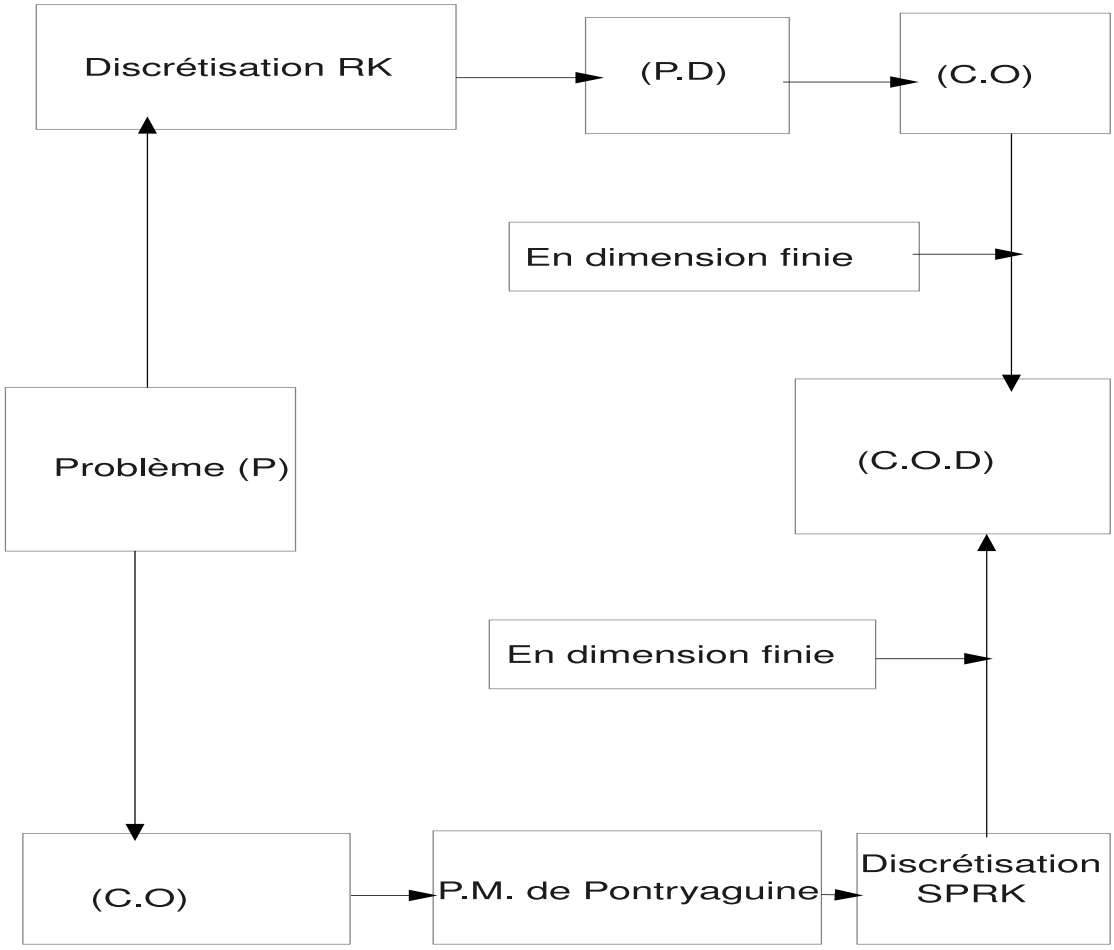


Figure I.2 – Le diagramme de commutation de l'approche directe et indirecte de (P)

Ce diagramme de commutation s'avère correcte lorsque les mêmes coefficients sont considérés dans les deux approches.

3.2 Cadre fini d'un problème de contrôle optimal

Considérons les ensembles $\mathcal{U}_p[0,T] = \{u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n\}$ tel que u est intégrable sur $[0,T]$, $\mathcal{U}_p = \cup_{T>0}\mathcal{U}_p[0,T]$; C'est l'ensemble des contrôles.
$\forall t \geq 0$, l'ensemble cible $\mathcal{T} \in \mathbb{R}^n$ est fermé. De façon générale, $\mathcal{T} = \{0\}$.

L'etat du système $x : [0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}^n$ est tel que :

$$(EDO) \begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t), u(t)) \ sur \ ]0, +\infty[\\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{I.29}$$

Où f vérifie le théorème de Cauchy-Lipschitz [existence et unicité d'une solution optimale $x[u, x_0](.)$] sous la régularité minimale, c'est à dire la continuité de la fonction et son caractère localement lipschitzien par rapport à la deuxième variable [47].

Ce problème de contrôle optimal se caractérise donc par une classe de contrôle admissible $\mathcal{U}_{ad} \in \mathcal{U}_p$, une équation différentielle ordinaire (état du système) et une famille des ensembles cibles.

Considérons $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Si on peut trouver $u \in \mathcal{U}_{ad}$ et $t_1 > 0$ tel que $x[u, x_0](t_1) \in \mathcal{T}(t_1)$, on dit que u envoie x_0 à la cible ; x_0 est dit contrôlable [45]. Cela donne une caractérisation d'un problème de contrôlabilité, d'un contrôle feedback et tout simplement d'un problème de contrôle optimal.

3.3 Problème de commande optimale et principe du maximum de Pontryaguine

Tout problème de contrôle optimal se formulant sur une variété M, le développement sur ce point sera centré sur un point de vue local où nous considérons un ouvert $\mathbb{V} \subset \mathbb{R}^n$. Soit le système :

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t), u(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{I.30}$$

où f est une application C^1 de $\mathbb{I} \times \mathbb{V} \times \mathbb{U} \longrightarrow \mathbb{R}^n, \mathbb{I} \subset \mathbb{R}, \mathbb{V} \subset \mathbb{R}^n, (t_0, x_0) \in \mathbb{I} \times \mathbb{V}$. Les contrôles $u(.) \in \mathbb{U} \subset L^\infty_{loc}(I, \mathbb{R}^n)$.

Prenons alors qu'avec toutes ces hypothèses, $\forall u(t)$, il existe une et une seule solution maximale $x_u(t), \forall t \in \mathbb{J} \subset \mathbb{I}$ du problème de Cauchy ci-haut.

Notation : $\forall u \in L^\infty_{loc}$, la trajectoire associée $x_u(.)$ définie sur $[0, t_e(u)], t_e(u) \in \mathbb{R}^+ + \{+\infty\}$. Si $t_e(u) < +\infty$, cela implique que la trajectoire explose en $t_e(u)$. Pour tout $T > 0, T \in I$, on note $\mathbb{U}_T$ l'ensemble des contrôles admissibles sur $[0, T]$, c'est à dire la trajectoire associée est bien définie sur $[0, T] \Longleftrightarrow T < t_e(u)$.

3.3.1 Coût de la trajectoire associée

Prenons f^o de classe C^1 sur $\mathbb{I} \times \mathbb{V} \times \mathbb{U}$ et g une fonction continue sur $\mathbb{V}$. Pour tout $u \in \mathbb{U}_T$, la fonction coût de la trajectoire associée x_u sur $[0, T]$:

$$C(T, u) = \int_0^T f^0(t, x_u(t), u(t))dt + g(T, x_u(T)) \tag{I.31}$$

Soient $\mathbb{M}_0 \subset \mathbb{V}, \mathbb{M}_1 \subset \mathbb{V}$, résoudre le problème suivant :

$$\begin{cases} \min C(T, u) \\ \dot{x}_u(t) = f(t, x_u(t), u(t)) \\ x_u(0) \in \mathbb{M}_0, x_u(T) \in \mathbb{M}_1 \end{cases} \tag{I.32}$$

Si le temps final T est libre, le problème de contrôle optimal est à temps final non fixé, sinon il est fixé.

3.3.2 Application entrée-sortie, contrôlabilité

Soit le système (I.30) et soit $x_1 \in \mathbb{R}^n$. Il faut trouver T et un contrôle u sur $[0, T]$ tel que la trajectoire x_u associée à u soit solution de (I.30) tel que $x_u(0) = x_0, x_u(T) = x_1$. Soit $T > 0$, l'application entrée-sortie en T de (I.30) initialisée à x_0 est :

$$\begin{aligned} E_T : \mathbb{U} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ u &\longrightarrow x_u(T), \end{aligned} \tag{I.33}$$

où $\mathbb{U}$ est l'ensemble des contrôles admissibles, ce qui veut dire que la trajectoire associée est bien définie sur $[O, T]$.

Proposition 1 *Soit le système (I.30) où f est $C^p, p \geq 1$ et soit $\mathbb{U} \subset L^\infty([0, T], \mathbb{R}^m)$ le domaine de définition de E_T c-à-d l'ensemble des contrôles dont la trajectoire associée est bien définie sur $[0, T]$. Alors, $\mathbb{U}$ est un ouvert de $L^\infty([0, T], \mathbb{R}^m)$, et E_T est C^p au sens L^∞. De plus, la différentielle au sens de Frechet de E_T en un point $u \in \mathbb{U}$ est donnée par le système linéarisé en u de la manière suivante. Posons*

$$\begin{aligned} A(t) &= \frac{\partial f}{\partial x}(t, x_u(t), u(t)) \\ B(t) &= \frac{\partial f}{\partial u}(t, x_u(t), u(t)), \forall t \in [0, T] \end{aligned} \tag{I.34}$$

Le système de contrôle linéaire

$$\begin{cases} \dot{y}_v(t) = A(t)y_v(t) + B(t)v(t) \\ y_v(0) = 0 \end{cases} \tag{I.35}$$

est appelé système linéarisé, le long de la trajectoire $x_u(.)$. La différentielle de Frechet de E_T en u est dE_T tel que $v \in L^\infty([0,T],\mathbb{R}^m), dE_T(u).v = y_v(T) = M(T)\int_0^T M^{-1}(s)B(s)v(s)ds, \dot{M} = AM, M(0) = Id$ où M est la résolvante du sysème linéairisé [43].

Nous considérons l'ensemble accessible $Acc(x_0,T)$ en temps T pour (I.30) l'image de l'application entrée-sortie en temps T. En prenant $Acc(x_0,T)$ compact et continue en t sur $[0,T]$, le système (I.30) est dit contrôlable depuis x_0 si $\mathbb{R}^n = \cup_{T\geq 0} Acc(x_0,T)$. Il est dit contrôlable en T si $\mathbb{R}^n = Acc(x_0,T)$.

Proposition 2 *Soit le système (I.30) où $f(x_0,u_0) = 0$. Notons $A = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,u_0)$ et $B = \dfrac{\partial f}{\partial u}(x_0,u_0)$. Prenant $rg(B|AB|.....|A^{n-1}B|) = n$, alors le système est localement contrôlable en x_0.*

Si la différentielle de Frechet $dE_T(u)$ de l'application entrée-sortie en u n'est pas surjective, le contrôle u (ou la trajectoire x_u) est dit singulier sur $[0,T]$. Sinon, il est régulier. En fixant x_0 et T pour un contrôle régulier, alors E_T est ouverte dans un voisinage de u. Cela implique que si u est un contrôle régulier sur [0,T], le système est localement contrôlable le long de la trajectoire. Soit

$$\dot{x} = f(t,x(t),u(t)) \tag{I.36}$$

Le Hamiltonien de ce système est

$$\begin{aligned} &H : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times(\mathbb{R}^n\backslash\{0\})\times\mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R} \\ &(t,x,p,u) \longrightarrow H(t,x,p,u) = < p, f(t,x,u) > \end{aligned} \tag{I.37}$$

où $<,>$ est le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$. Cela implique que p est un vecteur ligne ce qui fait que $H(t,x,p,u) = pf(t,x,u)$. L'expression p s'appelle etat-adjoint.

Proposition 3 *Soit u singulier sur $[o,T]$ pour le système (I.36), et soit $x(.)$ la trajectroire singulière associée. Alors, il existe une application absolument continue $p : [o,T] \longrightarrow \mathbb{R}^n$,*

appelé vecteur adjoint tel que $\forall t \in [0,T]$

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \frac{\partial H}{\partial p}(t,x(t),p(t),u(t)) \\ \dot{p}(t) &= -\frac{\partial H}{\partial x}(t,x(t),p(t),u(t)) \\ \frac{\partial H}{\partial u}(t,x(t),p(t),u(t)) &= 0 \end{aligned} \tag{I.38}$$

où H *est le Hamiltonien du système. La dernière équation de ce système ci-haut est l'équation des contraintes.*

Démonstration 1 *Par définition, le couple* (x,u) *est singulier sur* $[0,T]$ *car* $dE_T(u)$ *n'est pas surjective. Donc, il existe* $\psi \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ *tel que* $\forall u \in L^\infty$*, on ait :*
$\psi.dE_T(u)v = \psi \int_0^T M(T)M^{-1}(s)B(s)v(s)ds = 0$ *Par conséquent,* $\psi M(T)M^{-1}(s)B(s) = 0$ *p.p sur* $[0,T]$*. Posons* $p(t) = \psi M(T)M^{-1}(t) \forall t \in [0,T]$*, c'est un vecteur ligne de* $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}, p(T) = \psi$*. On a :*

$$\begin{aligned} &\dot{p}(t) = -p(t)\frac{\partial f}{\partial x}(t,x(t),p(t),u(t)) \\ &-p(t)\frac{\partial f}{\partial x}(t,x(t),u(t)) = -\frac{\partial H}{\partial x}(t,x(t),p(t),u(t)) \\ &p(t)B(t) = 0, B(t) = \frac{\partial f}{\partial u}(t,x(t),u(t)). \end{aligned} \tag{I.39}$$

■

3.3.3 Existence de trajectoires optimales

Considérant le système (I.30), parmi toutes les solutions possibles, il faut trouver une trajectoire qui minimise le coût $C(t,u)$. Une telle trajectoire si elle existe, elle est dite optimale. Son existence dépend de la régularité du système.

Théorème 1 *Considérons le système de contrôle* $\dot{x} = f(t,x(t),u(t)), f \in C^1$ *de* $\mathbb{R}^{1+n+m}$ *dans* $\mathbb{R}^n$*, les contrôles* u *sont à valeurs dans un compact* $\Omega \subset \mathbb{R}^m$*, et où on a :*
$C_1(X) \geq 0, ..., C_r(x) \geq 0, C_1, ..., C_r$ *continues sur* $\mathbb{R}^n$*. Soient* $\mathbb{M}_0 \subset \mathbb{R}^n, \mathbb{M}_1 \subset \mathbb{R}^n$ *et compact,* $\mathbb{M}_1$ *accessible depuis* $\mathbb{M}_0$*. Soit* $\mathbb{U}$ *l'ensemble des contrôles à valeurs dans* Ω *joignant* $\mathbb{M}_0$ *à* $\mathbb{M}_1$*. Soit* f^0 *une fonction* C^1 *sur* $\mathbb{R}^{1+n+m}$ *et* g *une fonction continue sur* $\mathbb{R}^n$*. Considérons le coût :*

$$C(u) = \int_0^{t(u)} f^0(t,x(t),u(t))dt + g(t(u),x(t(u))), t(u) \geq 0, x(t(u)) \in \mathbb{M}_1 \tag{I.40}$$

On suppose que :

1. *Il existe* b *réel positif tel que toute trajectoire associée à un contrôle* $u \in \mathbb{U}$ *est uniformement bornée par* b *sur* $[0,t(u)]$*, c-à-d* $\forall b > 0 | \forall u \in \mathbb{U}, \forall t \in [0,t(u)], ||x_u(t)|| \leq b$*.*

2. *Pour tout* $(t,x) \in \mathbb{R}^{1+n}$*, l'ensemble des vecteurs vitesses augmentés :*

$$\tilde{V}(t,x) = \{(f^0(t,x,u), f(t,x,u)) | u \in \Omega\} \tag{I.41}$$

est convexe. Alors il existe un contrôle optimal u *sur* $[0, t(u)]$ *tel que la trajectoire associée joint* $\mathbb{M}_0$ *à* $\mathbb{M}_1$ *en temps* $t(u)$ *et en coût minimal [43].*

3.3.4 Principe du maximum de Pontryagine

Le principe du maximum de Pontryagine est le résultat central de la théorie du contrôle optimal. Dans un demi-siècle depuis son apparition, le sous-jacent théorème a été généralisé, renforcé, étendu, rédémontré et interprété de plusieurs manières. Nous passons en revue dans ce paragraphe l'une des principales approches de l'obtention du principe du maximum dans un contexte puissant et unifié, en se concentrant sur les résultats récents que représentent l'aboutissement de plusieurs années de progrès en utilisant la méthodologie de l'analyse et la commande optimale.

Théorème 2 *[43] : Considérons le système de contrôle dans* $\mathbb{R}^n$

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \tag{I.42}$$

avec $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *est de classe* C^1*. Les contrôles sont des applications mesurables et bornées définies sur un intervalle* $[0, t_e(u)[$ *de* $\mathbb{R}^+$ *et à valeurs dans* $\Omega \subset \mathbb{R}^m$*. Soient* $\mathbb{M}_0, \mathbb{M}_1$ *deux sous ensembles de* $\mathbb{R}^n$ *et* $\mathbb{U}$ *l'ensemble des contrôles admissibles* u *dont les trajectoires associées relient un point initial de* $\mathbb{M}_0$ *à un point final de* $\mathbb{M}_1$ *en temps* $t(u) < t_e(u)$*. Définissons aussi le coût d'un contrôle* u *sur [0,t] :*

$$C(t,u) = \int_0^t f^0(s, x(s), u(s))ds + g(t, x(t)) \tag{I.43}$$

avec $f^0 : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}, g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *sont* C^1*, et x(.) la trajectoire solution de (I.42) associée au contrôle* u*. Le problème de contrôle optimal est le suivant : déterminer une trajectoire reliant* $\mathbb{M}_0$ *à* $\mathbb{M}_1$ *tout en minimisant la fonction coût. Le temps peut être fixé ou non.*

Si le contrôle $u \in \mathbb{U}$ *associé à la trajectoire x(.) est optimal sur* $[0, T]$*, alors il existe une application* $p(.) : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *absolument continue appelé vecteur adjoint , et un réel* $p^0 \leq 0$

tel que le couple $(p(.), p^0)$ *est non trivial, et tels que pour presque tout* $t \in [0, T]$ *:*

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \frac{\partial H}{\partial p}(t, x(t), p(t), p^0, u(t)) \\ \dot{p}(t) &= -\frac{\partial H}{\partial x}(t, x(t), p(t), p^0, u(t)) \\ H(t, x, p, p^0, u) &=< p, f(t, x, u) > +p^0 f^0(t, x, u) \end{aligned} \tag{I.44}$$

où H *est le hamiltonien du système, et on a la condition de maximisation presque partout sur* $[0, T]$ *:*

$$H(t, x(t), p(t), p^0, v) = \max_{v \in \Omega} H(t, x(t), p(t), p^0, v) \tag{I.45}$$

Si de plus le temps final pour joindre la cible $\mathbb{M}_1$ *n'est pas fixé, on a au temps* T *final :*

$$\max_{v \in \Omega} H(T, x(T), p(T), p^0, v) = -p^0 \frac{\partial g}{\partial t}(T, x(T)) \tag{I.46}$$

Si de plus, $\mathbb{M}_0$ *et* $\mathbb{M}_1$ *sont des variétés de* $\mathbb{R}^n$ *ayant des éspaces tangents en* $x(0) \in \mathbb{M}_0$ *et* $x(T) \in \mathbb{M}_1$*, alors le vecteur adjoint peut être construit de manière à vérifier les conditions de transversalités aux deux extrémités :*

$$\begin{aligned} &p(0) \perp T_{x(0)} \mathbb{M}_0 \\ &p(t) - p^0 \frac{\partial g}{\partial x}(T, x(T)) \perp T_{x(0)} \mathbb{M}_1 \end{aligned} \tag{I.47}$$

Si u est continue en T, (I.45) devient :

$$H(T, x(T), p(T), p^0, v) = -p^0 \frac{\partial g}{\partial t}(T, x(T)) \tag{I.48}$$

Si $\mathbb{M}_1 = \{x_1 \in \mathbb{R}^n | F_1(x) = F_2(x) = ... = F_p(x) = 0\}; F \in C^1(\mathbb{R}^n)$, la deuxième équation de (I.47) devient :

$$\exists \lambda_1, ...\lambda_p \in \mathbb{R} | p(T) = \sum_{i=1}^{p} \lambda \nabla F(x(T)) + p^0 \frac{\partial g}{\partial x}(T, x(T)) \tag{I.49}$$

Dans lec conditions du théorème, $\forall t \in [0, T]$ on a une condition supplémentaire :

$$\frac{d}{dt} H(t, x(t), p(t), p^0, u(t)) = \frac{\partial H}{\partial t}(t, x(t), p(t), p^0, u(t)) \tag{I.50}$$

Le quadruplet $(x(.), p(.), p^0, u(.))$ est une extrêmale solution de (I.44) et (I.45). On dit que l'extrêmale est dite anormale si $p = 0$, sinon on dit qu'il est normale.

Les conditions (I.47) sont appelées "conditions de transversalité sur le vecteur adjoint et la condition (I.46) la condition de transveralité sur le hamiltonien. Le problème du temps minimal important correspond à $f^0 = 1, g = 0$ sinon $f^0 = 0$ et $g = t$. Signalons que dans ce cas , les conditions de transversalité restent les mêmes.

Conditions de transversalité

1. Sur le vecteur adjoint : En considérant le cas du problème de Lagrange où la fonction côut $C(t,u) = \int_0^t f^0(s, x(s)u(s))ds, g = 0$, les conditions de transveralité (I.47) sur le vecteur adjoint s'écrivent :
$$p(0) \perp T_{x(0)}\mathbb{M}_0, p(T) \perp T_{x(T)}\mathbb{M}_1 \tag{I.51}$$
Dans le cas du problème de Mayer, le coût s'écrit $C(t,u) = g(t, x(t))$, c-à-d $f^0 = 0$, les conditions de transversalités (I.47) ne se simplifient pas.

2. Sur le Hamiltonien : Dans le cas de (I.46), lorsque la fonction g ne depend pas du temps (Problème de Lagrange) :
$$\max_{v \in \Omega} H(T, x(T), p(T), p^0, v) = 0 \tag{I.52}$$
et si u est continue en temps, le hamiltonien ne s'annule qu'au temps final T
$$H(T, x(T), p(T), p^0, u(T)) = 0$$

3.3.5 Commande optimale et équations d'Hamilton-Jacobi

Pour tout $t \in]0, T], T > 0$ fixé et $x \in \mathbb{R}^n, \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^m$ un ensemble compact non nul. Le problème de commande optimal :
$$\dot{x}_u(s) = f(x_u(s), u(s)), u(s) \in \mathbb{U}, xu(t) = x \tag{I.53}$$
minimise le coût :
$$C(t,u) = \int_0^t f^0(x_u(s), u(s))ds + g(x_u(0)) \tag{I.54}$$
avec x(0) libre et t final fixé. Pour $x \in \mathbb{R}^n$, définissons la fonction valeur S sur $[0,T] \times \mathbb{R}^n : S(t,x) = \inf\{C(t,u)|x_u(.)\}$ avec x_u solution de (I.53). En prenant tout $t \in]0,T]$ et

tout $x \in \mathbb{R}^n$, il existe une trajectoire optimale $x_u(.)$ solution du (I.53) et (I.54). On a :

$$S(t,x) = S(t,x_u(t)) = C(t,u) = \int_0^t f^0(x_u(s),u(s))ds + g(x_u(0)) \tag{I.55}$$

De l'équation ci-haut, nous avons :

$$\frac{\partial S}{\partial t}(t,x_u(t)) + \frac{\partial S}{\partial x}(t,x_u(t))f(x_u(t),u(t)) - f^0(x_u(t),u(t)) = 0 \tag{I.56}$$

En Considérant $H(x(t),p(t),p^0,u(t)) =< p, f(x,u) > +p^0 f^0(x,u)$, le contrôle u est tel que $H(x(t),p(t),p^0,u(t)) = \max_{v\in\mathbb{U}} H(x(t),p(t),p^0,v)$ soit :

$$-p^0\frac{\partial S}{\partial t}(t,x) + \max_{v\in\mathbb{U}} H(x(t), -p^0\frac{\partial S}{\partial x}(t,x), p^0, v) = 0 \tag{I.57}$$

où l'équation (I.57) est dite **équation générale d'Hamilton-Jacobi** en commande optimale.

4 Solveur KNITRO et méthode des points intérieurs

4.1 Algorithmes de KNITRO

Le solveur KNITRO « Nonlinear Interior point Trust Region Optimization »a été créé principalement par Nocedal et al [19, 20]. KNITRO est principalement conçu pour trouver des solutions locales à grande échelle des problèmes non linéaires continues. Il est surtout efficace dans la résolution des classes de problèmes d'optimisation sous forme de systèmes d'équations non linéaires et des problèmes de programmation quadratique (QP) convexes et non convexes. KNITRO offre les fonctionnalités d'une solution efficace et robuste des problèmes petits ou grands à travers les méthodes de points intérieurs à la fois barrière et ensemble actif [48]. Il présente alors trois algorithmes :

1. Algorithme direct de type point intérieur : Les méthodes de points intérieurs connues sous le nom des méthodes de barrière transforment le problème de programmation non linéaire en une série de sous-problèmes barrière contrôlée par un paramêtre-barrière. Les régions de confiance et la fonction de mérite sont utilisées pour promouvoir la convergence. Les méthodes des points intérieurs effectuent une ou plusieurs étapes de minimisation sur chaque sous-problème barrière, diminuent le paramètre-barrière et répètent le processus jusqu'à la résolution du problème original avec une précision qu'on souhaite. Cette méthode calcule les nouvelles itérées en résolvant les matrices de KKT primales-duales. Elle

présente aussi une possibilité de passer temporairement à l'algorithme Intérieur/CG si elle rencontre des difficultés notoires.

2. Algorithme GC/Intérieur : Cette méthode est similaire à l'algorithme précédent sauf que le système primal-dual KKT est résolu en utilisant une itération gradient conjugué projeté dégradé. Cette approche diffère de la plupart de méthodes de points intérieurs proposées dans la littérature. Une matrice projetée est factorisée et le gradient conjugué appliqué minimise un modèle quadratique du problème de barrière. L'utilisation de gradient conjugué sur plusieurs problèmes permet à KNITRO d'utiliser des dérivées secondes exactes sans former la matrice hessienne.

3. Algorithme des ensembles actifs : Cette méthode résoud une séquence de sous-problèmes quadratiques à base du modèle du problème initial. En contraste avec les méthodes de points intérieurs, l'algorithme cherche les inégalités actives et suit une trajectoire plus extérieure à la solution.
   KNITRO implémente un algorithme de programmation séquentielle linéaire-quadratique « PSLQ », de nature similaire à une méthode de programmation séquentielle quadratique mais en utilisant la programmation linéaire de sous-problèmes pour estimer l'ensemble actif.
   Cette méthode s'avère préférable que les algorithmes de points intérieurs quand une bonne initialisation est fournie. KNITRO a une possibilité de combinaison une méthode de points intérieurs et une méthode des ensembles actifs en guise d'une très grande précision et sensibilité.

4.2 Une application académique de KNITRO

On montre que KNITRO résout des problèmes du type [19, 20] :

$$\begin{aligned} &\min_x f(x) \\ &c^L \leq c(x) \leq c^U \\ &b^L \leq x \leq b^U \end{aligned} \tag{I.58}$$

où x est une variable continue, f et c sont des fonctions lisses. Cela admet alors plusieurs formes de contraintes. En vue d'identifier une solution optimale locale de ce problème, on pose

les conditions du premier ordre :

$$\begin{aligned}
&\nabla_x \mathcal{L}(x,\lambda) = \nabla f(x) + \textstyle\sum_{i=1...m} \lambda_i^c \nabla c_i(x) + \sum_{j=1...n} \lambda_j^b = 0 \\
&\lambda_i^c \min[(c_i(x) - c_i^L), (c_i^U - c_i(x))] = 0, i = 1...m \\
&\lambda_j^b \min[(x_j - b_j^L), b_j^U - x_j)] = 0, j = 1...n \\
&c_i^L \leq c_i(x) \leq c_i^U, i = 1...m \\
&b_j^L \leq x_j \leq b_j^U, j = 1...n \\
&\lambda_i^c \geq 0, i \in \mathcal{I}, c_i^L = -\infty, c_i^U fini \\
&\lambda_i^c \leq 0, i \in \mathcal{I}, c_i^U = \infty, c_i^L fini \\
&\lambda_j^b \geq 0, j \in \mathcal{B}, b_j^L = -\infty, b_j^U fini \\
&\lambda_j^b \leq 0, j \in \mathcal{B}, b_j^U = \infty, b_j^L fini
\end{aligned} \tag{I.59}$$

où $\mathcal{L}$ est le lagrangien, les ensembles d'indices $\mathcal{I}$ et $\mathcal{B}$ representent respectivement les contraintes d'inégalité et les contraintes aux bords des variables non fixes. Les λ_i^c sont les multiplicateurs de Lagrange correspondant aux contraintes $c_i(x$, alors que les multiplicateurs de Lagrange λ_j^c correspondent aux bornes sur x_j. On définit l'erreur de faisabilité au point x par

$$FeasE = \max_{i=1...m, j=1...n} (0, (c_i^L - c_i(x^k)), (c_i(x^k) - c_i^U), (b_j^L - x_j^k), (x_j^k - b_j^U)), \tag{I.60}$$

alors que l'erreur d'optimalité est

$$OptE = \max_{i=1...m, j=1...n} (||\nabla_x \mathcal{L}(x^k, \lambda^k)||_\infty, \lambda_i^c \min[(c_i(x) - c_i^L), (c_i^U - c_i(x))], \lambda_j^b \min[(x_j - b_j^L), (b_j^U - x_j)]) \tag{I.61}$$

Afin de prendre en compte la scalarisation du problème, on définit les facteurs de scalarisation :

$$\begin{aligned}
&\mathcal{T}_1 = \max(1, (c_i^L - c_i(x^0)), (c_i(x^0) - c_i^U), (b_j^L - x_j^0), (x_j^0, b_j^U))), \\
&\mathcal{T}_2 = \max(1, ||\nabla f(x^k)||_\infty),
\end{aligned} \tag{I.62}$$

avec x^0 un point initial. Pour les problèmes sans contraintes, $\mathcal{T}_2$ n'est pas effective lorsque $||\nabla f(x^k)||_\infty \to 0$ en tant que solution approchée. Dans ce cas , on utilise

$$\mathcal{T}_2 = \max(1, \min(|f(x^k)|, ||\nabla f(x^0)||_\infty)). \tag{I.63}$$

KNITRO s'arrête et déclare qu'une solution optimale locale est trouvée lorsque les conditions d'arrêt suivantes sont satisfaites :

$$\begin{aligned} FeasE &\leq \max(\mathcal{T}_1 * feastol, feastolabs) \\ OptE &\leq \max(\mathcal{T}_2 * opttol, opttolabs) \end{aligned} \tag{I.64}$$

avec feastol, feastolabs, opttol et opttolabs des options définies par le programmeur.

Avant de finir ce chapitre, on signale le couplage de KNITRO avec le langage AMPL, un langage de modélisation mathématique pour l'optimisation permettant aux utilisateurs de représenter leurs problèmes d'optimisation dans un style convivial, lisible et au format intuitif. Cela rend plus simple la formulation et la modélisation d'un problème.

5 Conclusion

Danc ce chapitre, on a montré que les techniques de résolution des problèmes mathématiques d'optimimisation dépendent de la nature de la fonction objectif et de l'ensemble des contraintes.

Nous nous sommes plus focalisé sur la technique de la programmation non linéaire, la programmation séquentielle quadratique à travers une méthode basée sur des régions de confiance. Les fonctions deux fois dérivables des problèmes sans contraintes sont résolues en trouvant un cas où le gradient de la fonction est nulle et en utilisant la matrice hessienne pour classer le type de point. Si le hessien est défini positif, le point est un minimum local sinon, il est défini négatif ce qui donne un maximum local. En considérant les fonctions convexes sur l'ensemble des solutions admissibles, tout minimum local est aussi un minimum global. La théorie du Lagrangien transforme un problème avec contraintes en un problème sans contraintes. KNITRO et SQPlab permettent la globalisation de la solution par diverses options comme *« multistart »*. Dans ce chapitre, on montre aussi un cadre d'application du principe de maximum de Pontryaguine en commande optimale des systèmes dynamiques. Cette méthode de la catégorie des méthodes indirectes montre comment résoudre les conditions d'optimalités de pontryaguine dans un cadre précis de résolution d'un problème de commande optimale.

Le chapitre suivant montre la commande optimale d'un avion.

Chapitre II

Modèle de commande optimale d'un avion minimisant le bruit perçu au sol

1 Introduction

La conception d'un avion est un modèle d'optimisation non-linéaire par excellence. De la conception jusqu'au pilotage, plusieurs disciplines y sont présentes. Nous citons l'aérodynamique, la propulsion, la mécanique des structures, calcul des performances, l'énergétique, l'acoustique, et bien d'autres. Un avion en mouvement est donc un système dynamique complexe, difficile à étudier dans toute sa généralité. La figure suivante illustre les parties principales d'un avion commercial Airbus A300, un avion moderne long courier équipé de deux moteurs.

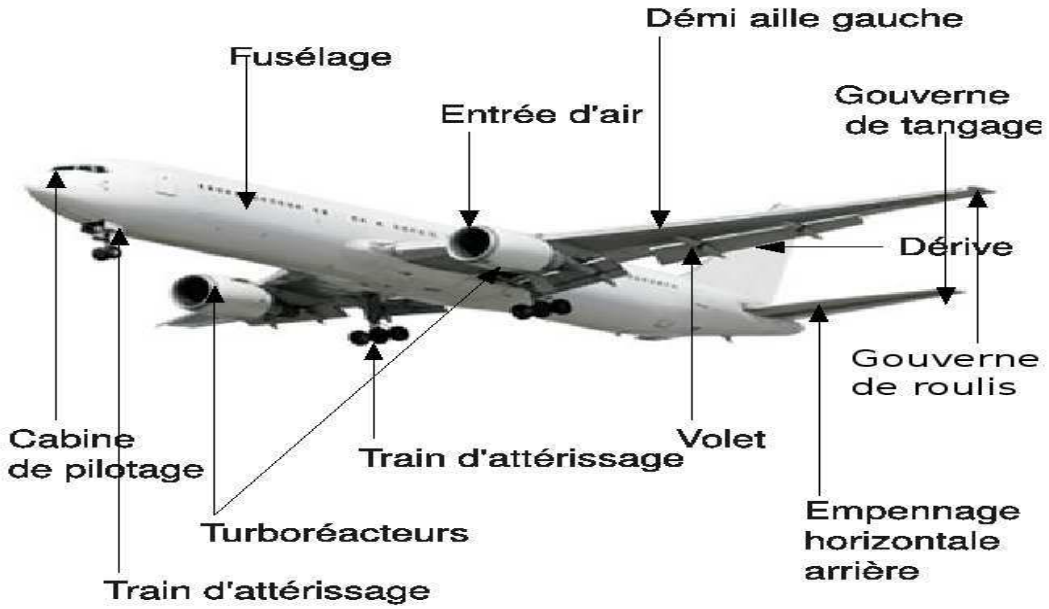


Figure II.1 – Structure d'un avion.

Le grand nombre de discipline intervenant aussi bien dans la conception que le fonctionnement de l'avion en fait un processus complexe. Les différents paramètres intervenant dans ce processus sont soit gérés par une seule discipline, soit partagés. Ainsi, plusieurs interactions entre ces disciplines traduisent un couplage dont les résultats de l'une peuvent servir aux paramètres des autres. Malheureusement, les objectifs de chacune des disciplines sont souvent contradictoires. Il faut alors développer des techniques d'optimisation permettant d'intégrer efficacement les méthodes développées par chacune des disciplines impliquées afin de rechercher un optimun global. Dans cette section, nous revenons sur la commande optimale d'un avion commercial tout en gardant les performances aérodynamiques.

2 Modèle aérodynamique d'un avion

La dynamique de vol d'un avion commercial est un sujet trés compliqué lorsqu'il est combiné à l'analyse et l'optimisation du comportement de l'avion [49]. Dans ce paragraphe, il s'agit de revenir sur le modèle dynamique tridimensionnelle d'un avion civil, l'analyse de ces performances opérationnelles et qualités de vol. La modélisation des efforts aérodynamiques, propulsifs et massiques d'un avion commercial constituent la base de la dynamique de vol de celui-ci. L'analyse de ces processus se focalise essentiellement sur les sciences de contrôle mécanique et automatique. La figure suivante illustre l'organisation fonctionnelle de la dynamique de vol [50, 51] :

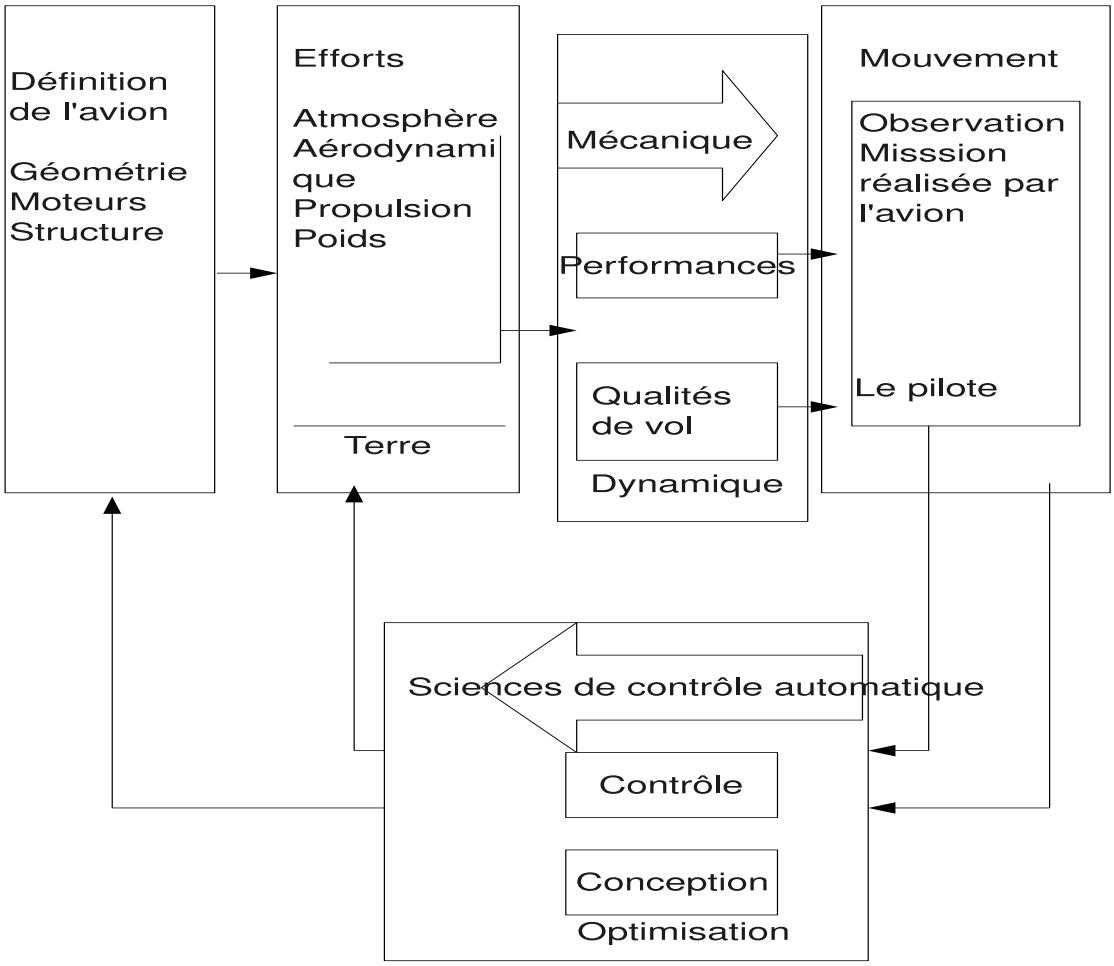


Figure II.2 – Organisation fonctionnelle de la dynamique de vol

L'avion est un solide massif de centre de gravité fixe, modélisé avec une masse variable lorsqu'il est en mouvement avec une matrice d'inertie symétrique. Le mouvement 3D d'un avion civil A300 est analysé avec 3 repères de travail à savoir le repère terrestre (G, X_0, Y_0, Z_0), le repère avion (G, X_b, Y_b, Z_b) et le repère aérodynamique (G, X_a, Y_a, Z_a)[52]. La transition entre ces trois repères se fait facilement à l'aide de trois rotations successives [50, 53] comme le montre la figure suivante :

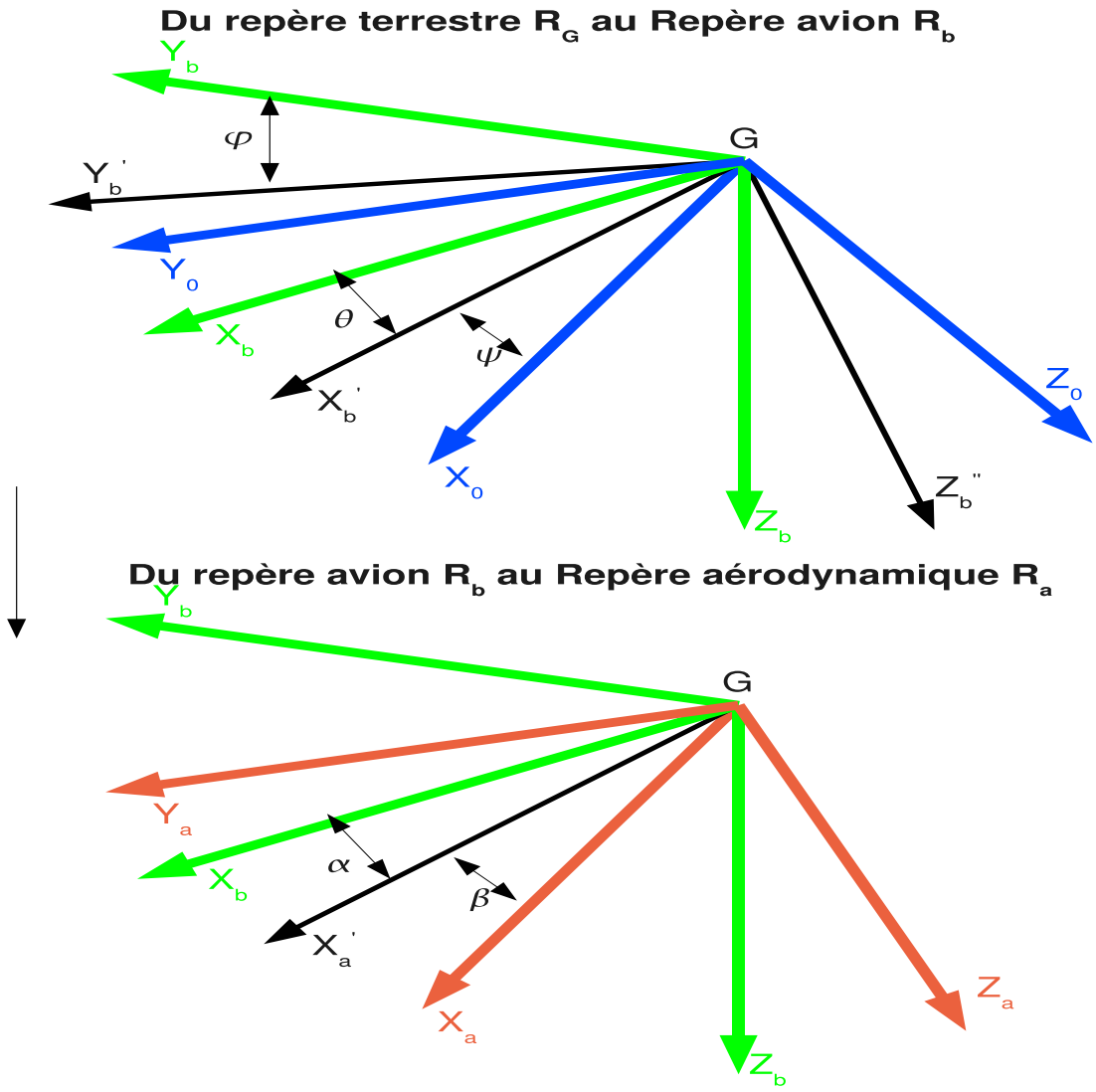


Figure II.3 – Définition des repères de travail R_O, R_a, R_b

La première partie de cette figure montre le passage du repère terrestre au repère avion alors que la deuxième montre le passage du repère avion au repère aérodynamique. Toutes ces transfomations se résument par la figure suivante :

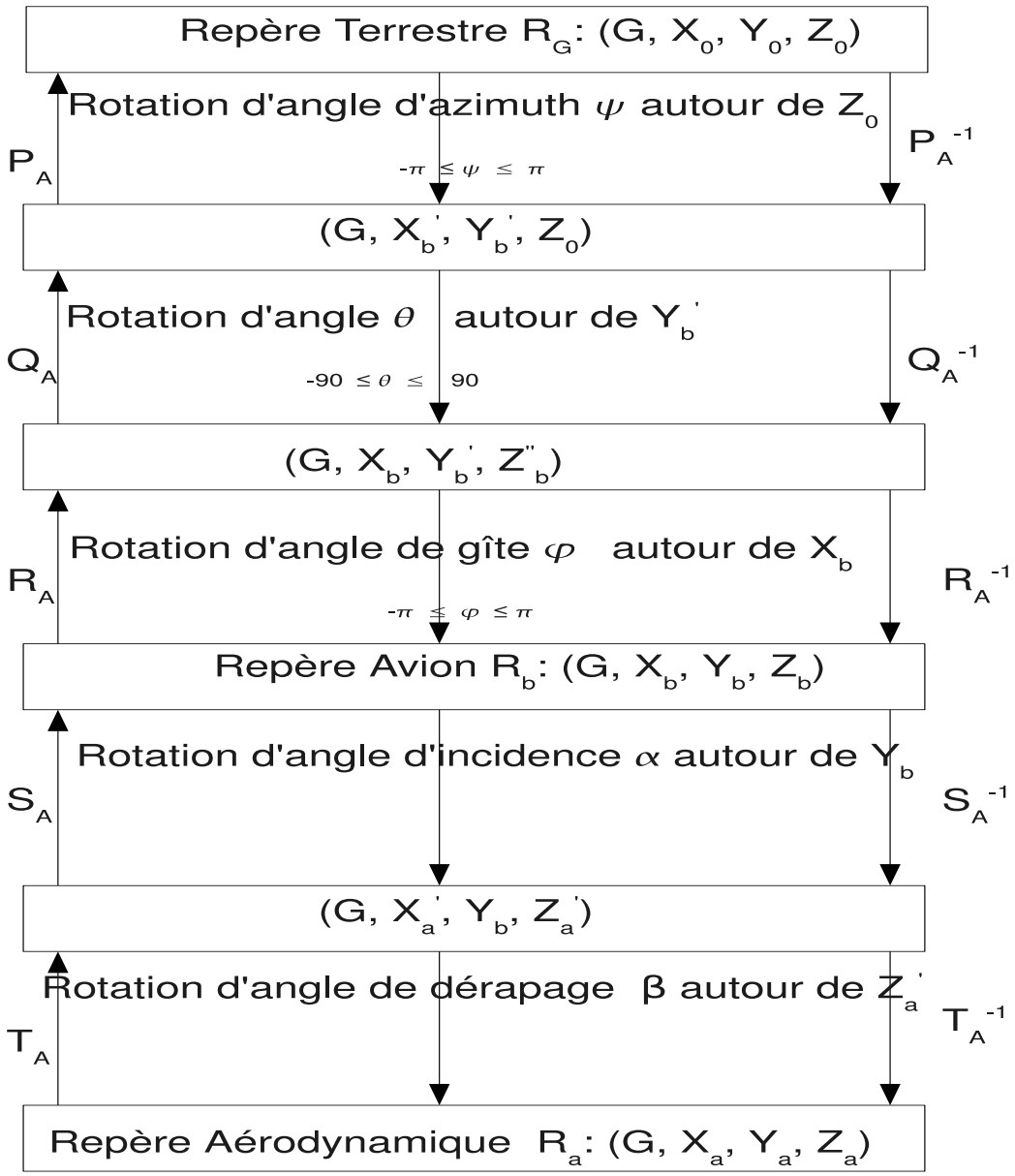


Figure II.4 – La structure relationnelle entre les repères R_O, R_a, R_b

Les matrices P_A, Q_A, R_A, S_A, T_A sont des matrices de passage données par les relations suivantes. Le passage du repère terrestre au repère avion est donné par :

$$P_A^{-1}Q_A^{-1}R_A^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\psi\cos\theta & \sin\psi\cos\theta & -\sin\theta \\ R_1 & R_3 & \cos\theta\sin\varphi \\ R_2 & R_4 & \cos\theta\cos\varphi \end{bmatrix} \tag{II.1}$$

où $R_1 = -\sin\psi\cos\varphi + \cos\psi\sin\theta\sin\varphi$, $R_2 = \sin\psi\sin\varphi + \cos\psi\sin\theta\cos\varphi$, $R_3 = -\cos\psi\cos\varphi + \sin\psi\sin\theta\sin\varphi$, $R_4 = -\cos\psi\sin\varphi + \sin\psi\sin\theta\cos\varphi$, alors que le passage du repère aéodynamique au repère avion est donné par :

$$T_A S_A = \begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\beta & -\cos\alpha\sin\beta & -\sin\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta & 0 \\ \sin\alpha\cos\beta & -\sin\alpha\sin\beta & \cos\alpha \end{bmatrix} \tag{II.2}$$

Signalons que la matrice $[T_A S_A]^{-1} = [T_A S_A]^T$ et que la matrice $[P_A^{-1}Q_A^{-1}R_A^{-1}]^T = R_A Q_A P_A$. Le passage direct du repère terrestre au repère aérodynamique se fait de la même manière à l'aide de trois rotations successives d'angle χ, γ, μ, ce qui donne la formulation suivante :

$$\begin{bmatrix} X_a \\ Y_a \\ Z_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix} \tag{II.3}$$

$$\begin{bmatrix} X_a \\ Y_a \\ Z_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\chi\cos\gamma & \sin\chi\cos\gamma & -\sin\gamma \\ R'_1 & R'_3 & \cos\gamma\sin\mu \\ R'_2 & R'_4 & \cos\gamma\cos\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix} \tag{II.4}$$

où $R'_1 = -\sin\chi\cos\mu + \cos\chi\sin\gamma\sin\mu$, $R'_2 = \sin\chi\sin\mu + \cos\chi\sin\gamma\cos\mu$, $R'_3 = -\cos\chi\cos\mu + \sin\chi\sin\gamma\sin\mu$, $R'_4 = -\cos\chi\sin\mu + \sin\chi\sin\gamma\cos\mu$ et la matrice $[R']^{-1} = [R']^T$.

Les équations du mouvement 3D d'avion sont résumées dans deux relations fondamentales

de la mécanique :

$$\begin{aligned} \sum \mathbf{F}_{ext} - \frac{dm}{dt}\mathbf{V}_a &= \frac{m d\mathbf{V}_a}{dt} \\ \sum \mathbf{M}_{ext_G} &= J(G,A)\frac{d\mathbf{\Omega}}{dt} \end{aligned} \tag{II.5}$$

Dans le système ci-dessus, $\mathbf{F}_{ext}$ représente les forces extérieures agissant sur l'avion, $m(t)$ la masse de l'avion, $\mathbf{V}_a$ la vitesse aérodynamique de l'avion, $\mathbf{M}_{ext_G}$ le moment des forces extérieures agissant à l'avion, $J(G,A)$ la matrice d'inertie et enfin $\mathbf{\Omega}$ la rotation angulaire. Les forces externes agissant sur un avion en vol sont : La poussée $\mathbf{F} = P_0\delta_x\frac{rho}{\rho_0}(1 - M + \frac{M^2}{2})$, le poids $\mathbf{W} = mg\mathbf{Z}_1$, la portance $\mathbf{F}_p = -\frac{1}{2}\rho S C_z V_a^2 \mathbf{Z}_a$, la traînée $\mathbf{F}_t = -\frac{1}{2}\rho S C_x V_a^2 \mathbf{X}_a$ et les forces latérales $\mathbf{F}_l = \frac{1}{2}\rho S V_a^2 C_y \mathbf{Y}_a$. Dans ces expressions décrites ci-dessus, S est la surface de référence, C_x le coefficient de traînée, C_y le coefficient de force latérale, C_z le coefficient de portance et ρ la densité de l'air.

La dérivation par rapport au temps se fait en considérant un observateur attaché au repère R_O et les équations sont écrites dans le repère R_a. L'accélération est obtenue avec deux dérivations par rapport au temps de la position. La relation entre les dérivées dans les deux repères est l'équation bien connue à savoir la relation fondamentale de la cinématique :

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt}|_{R_O} = \frac{d\mathbf{X}}{dt}|_{R_a} + \mathbf{\Omega}_{R_a/R_O} \times \mathbf{X} \tag{II.6}$$

où $\frac{d\mathbf{X}}{dt}|_{R_O}$ est la dérivée par rapport au temps du vecteur $\mathbf{X}$ dans le repère R_O, $\frac{d\mathbf{X}}{dt}|_{R_a}$ est la dérivée par rapport au temps du vecteur $\mathbf{X}$ dans le repère aérodynamique R_a, $\mathbf{\Omega}$ est la vitesse angulaire de l'avion et $\mathbf{\Omega}_{R_a/R_O}$ est la vitesse angulaire R_1 par rapport à R_0 [54].

Après des transformations et des simplifications adéquates, nous avons alors un système dynamique de 13 équations différentielles.

Plus explicitement, on a le système suivant :

$$
\begin{aligned}
\dot{m} &= -C_{SR}P_0\delta_x\frac{\rho}{\rho_0}(1-M+\frac{M^2}{2}) \\
\dot{V_a} &= \frac{1}{m}[-mgsin\gamma_a-\frac{1}{2}\rho SV_a^2C_D+(cos\alpha_acos\beta_a+sin\beta_a+sin\alpha_acos\beta_a)F_x \\
&\quad +C_{SR}P_0\delta_{xi}\frac{\rho}{\rho_0}(1-M+\frac{M^2}{2})u-m\Delta A_u^i] \\
\dot{\beta_a} &= \frac{1}{mV_a}[mgcos\gamma_asin\mu_a+\frac{1}{2}\rho SV_a^2C_y+[-cos\alpha_asin\beta_a+cos\beta_a-sin\alpha_asin\beta_a]F_y \\
&\quad +C_{SR}P_0\delta_x\frac{\rho}{\rho_0}(1-M+\frac{M^2}{2})v_i-m\Delta A_v] \\
\dot{\alpha_a} &= \frac{[mgcos\gamma_acos\mu_a-\frac{1}{2}\rho SV_a^2C_L+[-sin\alpha_a+cos\alpha_a]F_z]}{mV_acos\beta_a} \\
&\quad +\frac{[C_{SR}P_0\delta_{xi}\frac{\rho}{\rho_0}(1-M+\frac{M^2}{2})w-m\Delta A_w]}{mV_acos\beta_a} \\
\dot{p} &= \frac{C[rq(B-C)-Epq+\frac{1}{2}\rho SlV_a^2C_l+MF_x^b]}{AC-E^2} \\
&\quad +\frac{E[pq(A-B)-Erq+\frac{1}{2}\rho SlV_a^2C_n+MF_z^b]}{AC-E^2} \\
\dot{q} &= \frac{1}{B}\{-rp(A-C)-E(p^2-r^2)+\frac{1}{2}\rho SlV_a^2C_m+MF_y^b\} \\
\dot{r} &= \frac{E}{AC-E^2}\{rq(B-C)+Epq+\frac{1}{2}\rho SlV_a^2C_l+MF_x^b\} \\
&\quad +\frac{A}{AC-E^2}\{pq(A-B)-Erq+\frac{1}{2}\rho SlV_a^2C_n+MF_z^b\} \\
\dot{X}_G &= V_acos\gamma_acos\chi_a+u_w \\
\dot{Y}_G &= V_acos\gamma_asin\chi_a+v_w \\
\dot{Z}_G &= -V_asin\gamma_a+w_w \\
\dot{\varphi} &= p+qsin\varphi tan\theta+rcos\varphi tan\theta \\
\dot{\theta} &= qcos\varphi-rsin\varphi \\
\dot{\psi} &= \frac{sin\varphi}{cos\theta}q+\frac{cos\varphi}{cos\theta}r
\end{aligned}
\tag{II.7}
$$

où les expressions $A=I_{xx}, B=I_{yy}, C=I_{zz}, E=I_{xz}$ sont les moments d'inertie de l'avion, ρ est la densité de l'air, S la surface de référence de l'avion, l la longueur de référence de l'avion, g la gravité, $C_D=C_{D0}+kC_L^2$ est le coefficient de traînée, $C_y=C_{y\beta}\beta+C_{yp}\frac{pl}{V}+C_{yr}\frac{rl}{V}+C_{Y\delta_l}\delta_l+C_{Y\delta_n}\delta_n$ est le coefficient de forces latérales, $C_L=C_{L\alpha}(\alpha_a-\alpha_{a0})+C_{L\delta_m}\delta_m+C_{LM}M+C_{Lq}\frac{q_a^bl}{V}$ est le coefficient de portance, $C_l=C_{l\beta}\beta+C_{lp}\frac{pl}{V}+C_{lr}\frac{rl}{V}+C_{l\delta_l}\delta_l+C_{l\delta_n}\delta_n$ est le coefficient de moment de roulis, $C_m=C_{m0}+C_{m\alpha}(\alpha-\alpha_0)+C_{m\delta_m}\delta_m$ est le coefficient de moment de tangage,

$C_n = C_{n\beta}\beta + C_{np}\frac{pl}{V} + C_{nr}\frac{rl}{V} + C_{n\delta_l}\delta_l + C_{n\delta_n}\delta_n$ est le coefficient de moment de lacet, $(x^b_{Mj}, x^b_{Mj}, x^b_{Mj})$ est la position du moteur dans le repère avion, P_0 est la poussée, ρ_0 est la densité atmosphèrique au sol, $F = (F_x, F_y, F_z)$ est la force propulsive, $V_a = (u, v, w)$ est la vitesse aérodynamique, $(\Delta A_u, \Delta A_v, \Delta A_w)$ est l'accélération complémentaire, (u_w, v_w, w_w) est la vitesse de vent. Le moment de propulsion MF^b est donné par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} MF^b_x &= \sum_{j=1}^{2} F_j[y^b_{Mj} cos\beta_{mj} sin\alpha_{mj} - z^b_{Mj} sin\beta_{mj}] \\ MF^b_y &= \sum_{j=1}^{2} F_j[z^b_{Mj} cos\beta_{mj} cos\alpha_{mj} - x^b_{Mj} cos\beta_{mj} sin\alpha_{mj}] \\ MF^b_z &= \sum_{j=1}^{2} F_j[x^b_{Mj} sin\beta_{mj} - y^b_{Mj} cos\beta_{mj} cos\alpha_{mj}] \end{aligned}$$

où β_{mj} est le réglage lacet du moteur et α_{mj} est le réglage tangage du moteur. La variation de masse se reflète dans la consommation de carburant de l'avion tels que décrite par Torenbeek [55, 56] où C_{SR} est la consommation spécifique.

Les expréssions $\alpha_a(t), \beta_a(t), \theta(t), \psi(t), \varphi(t), V_a(t), X_G(t), Y_G(t), Z_G(t), p(t), q(t), r(t), m(t)$ sont respectivement l'angle d'attaque, l'angle de dérapage aérodynamique, l'angle d'inclinaison, le cup, l'angle de roulis, la vitesse, le vecteur position, la vitesse de roulis de l'avion par rapport à la terre, la vitesse longitudinale de l'avion par rapport à la terre , la vitesse de lacet de l'avion par rapport à la terre et la masse de l'avion.
Les angles $\gamma_{a_i}(t), \chi_{a_i}(t), \mu_{a_i}(t)$ correspondant respectivement à l'angle de pente aérodynamique, l'azimut aérodynamique et l'angle de gîte aérodynamique ne sont pas sous forme d'état dans ce modèle.

Le systeme (II.7) peut être écrit en forme simplifiée :

$$\begin{aligned} &\frac{d\mathbf{y}(t)}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{y}(t), \mathbf{u}(t)) \\ &\mathbf{y}(t) = (\alpha_a(t), \beta_a(t), \theta_a(t), \psi_a(t), \varphi(t), V_a(t), X_G(t), Y_G(t), Z_G(t), p(t), q(t), r(t), m(t)) \\ &\mathbf{u}(t) = (\delta_l(t), \delta_{m(t)}, \delta_n(t), \delta_x(t)) \end{aligned} \tag{II.8}$$

Dorénavant, $\mathbf{y}$ est appelée fonction d'état et les expréssions $\delta_l(t), \delta_{m(t)}, \delta_n(t), \delta_x(t)$ sont respectivement la commande de roulis, la commande de tangage, la commande de de lacet et la commande de poussée de l'avion. La dynamique de vol de l'avion prend la forme suivante :

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{y}, \mathbf{u}, t), \forall t \in [0, T], y(0) = y_{i0}$$

3 Modélisation de la fonction-coût par l'avion

Une forte croissance se remarque actuellement au niveau du transport aérien [2, 3]. Le coût du kérosène augmente éxponentiellement et la nécessité de préserver l'environnement impose des contraintes de plus en plus sévères pour la conception des prochaines générations d'avions. Ces contraintes sont établies en fonction des objectifs de l'ACARE qui suggère une réduction de 50% du bruit perçu à l'horizon 2020 [4]. Atteindre cet objectif représente un réel défi technique et scientifique tant du côté aérodynamique que du côté de l'optimisation acoustique et de la modélisation mathématique. Le paragraphe montre la modélisation mathématique de la fonction-objectif soit sous forme de bruit, soit sous forme de consommation du fuel par l'avion. Dans la littérature, il en existe un modèle de minimisation du bruit d'un avion commercial sous contraintes physiques et aérodynamiques [7, 57]. D'autres traitent de l'optimisation des procédures opérationnelles réduisant le bruit, la détection stochastique des conflits pour le traffic aérien et la représentation et l'optimisation de la circulation des avions sur une plate forme aéroportuaire [10, 12, 52, 57].

Dans ce travail, nous construisons la fonction objectif en considérant le « Sound Exposure Level »(SEL) [58] :

$$SEL = 10log\left[\frac{1}{t_o}\int_{t_{10}}^{t_{1f}} 10^{0.1L_{A1,dt}(t)}dt\right], t \in [t_{10}, t_{1f}] \tag{II.9}$$

où t est la durée de l'événement et $t_o = 1\ s$ un temps de référence. L'expression $L_{A1}(t)$ est le bruit du jet de l'avion donné par la formule [7, 59] :

$L_{A1}(t) = 141 + 10\log\left(\frac{\rho_1}{\rho}\right)^w + 10\log\left(\frac{V_e}{c}\right)^{7.5} + 10\log s_1 + 3\log\left(\frac{2s_1}{\pi d_1^2} + 0.5\right) + 5\log\frac{\tau_1}{\tau_2} + 10\log\left[\left(1-\frac{v_2}{v_1}\right)^{me} + 1.2\frac{\left(1+\frac{s_2v_2^2}{s_1v_1^2}\right)^4}{\left(1+\frac{s_2}{s_1}\right)^3}\right] - 20\log R + \Delta V + 10\log\left[\left(\frac{\rho}{\rho_{ISA}}\right)^2\left(\frac{c}{c_{ISA}}\right)^4\right]$, où v_1 est la vitesse de jet à l'entrée de la tuyère, v_2 la vitesse de jet à la sortie de la tuyère, τ_1 la température à l'entrée de la tuyère, τ_2 la température à la sortie de la tuyère, ρ la masse volumique de l'air, ρ_1 la masse volumique atmosphérique à l'entrée de la tuyère, ρ_{ISA} la masse volumique atmosphérique au sol, s_1 la surface d'entrée de la tuyère hydraulique du moteur, s_2 la surface de sortie de la tuyère hydraulique du moteur, d_1 le diamètre d'entrée de la tuyère hydraulique du moteur, $V_e = v_1[1-(V/v_1)\cos(\alpha_p)]^{2/3}$ la vitesse effective, α_p est l'angle entre l'axe du moteur et l'axe de l'avion, R est la distance source-observateur, $w = \frac{3(V_e/c)^{3.5}}{0.6+(V_e/c)^{3.5}} - 1$ est la variable exposant,

c est la vitesse du son (m/s), me est la variable exposante, dépendant du type d'avion, $me = 1.1\sqrt{\frac{s_2}{s_1}}$; $\frac{s_2}{s_1} < 29.7$, $me = 6.0$; $\frac{s_2}{s_1} \geq 29.7$, $\Delta V = -15log(C_D(M_c, \theta)) - 10log(1 - Mcos\theta)$ est la convection Doppler où $C_D(M_c, \theta) = [(1 + M_c cos\theta)^2 + 0.04M_c^2]$, M le nombre de Mac de l'avion, $M_c = 0.62(v_1 - Vcos(\alpha_p))/c$ le nombre de Mac de convection, θ est l'angle d'émission.

Cela étant, cette fonction-coût n'est pas la seule modélisation possible. Certains auteurs préfèrent utiliser d'autres indices acoustiques ou la fonction de consommation. Il en existe même une technique de couplage de deux en fonction des objectifs poursuivis. Cette dernière donne de l'optimisation multi-objectif ce qui n'est pas le cas dans cette étude.

4 Modélisation des contraintes d'un avion en approche

La liste des contraintes concerne les contraintes sur la sécurité de l'avion et des passagers, la vitesse, l'altitude, l'angle d'attaque, l'angle de roulis, l'angle de lacet, la position des quatres commandes, la contrainte énergétique. Ces dernières se traduisent par les conditions aux limites.

1. La position verticale de l'avion est donnée par $Z_0 \geq Z_G \geq Z_f$ où Z_0, Z_f sont respectivement l'altitude maximale et l'altitude minimale.
2. La position horizontale de l'avion est donnée par $X_0 \leq X_G \leq X_f$ où X_0, X_f sont respectivement la position horizontale initiale et la position horizontale finale [60–62].
3. La position longitudinale de l'avion est donnée par $Y_0 \leq Y_G \leq Y_f$ où Y_0, Y_f sont respectivement la position longitudinale initiale et la position longitudinale finale [60–62].
4. La vitesse de l'avion V_a doit être bornée comme suit $1.3V_s \leq V_a \leq V_{af}$ where V_s est la vitesse de décrochage, V_{af} la vitesse maximale et $V_{a0} = 1.3V_s$ la vitesse minimale de l'avion [55, 63].
5. Les contraintes sur la vitesse de roulis de l'avion relative à la terre $p \in [p_0, p_f]$, la vitesse de tangage de l'avion relative à la terre $q \in [q_0, q_f]$ et la vitesse de lacet de l'avion relative à la terre $r \in [r_0, r_f]$ sont également considérées.
6. A l'approche, les normes de l'OACI et les avionneurs recommandent l'évolution de l'angle de vol comme suit : angle d'attaque $\alpha_a \in [\alpha_0, \alpha_f]$, l'angle d'inclinaison $\theta \in [\theta_0, \theta_f]$ et l'angle de roulis $\varphi \in [\varphi_0, \varphi_f]$.
7. Le contrôle de l'avion $\mathbf{u}(t) = (\delta_l(t), \delta_{m(t)}, \delta_n(t), \delta_x(t))$ doit rester entre les positions δ_{l0} et δ_{lf} pour le contrôle de roulis, δ_{m0} et δ_{mf} pour le contrôle de tangage, δ_{n0} et δ_{nf} pour le contrôle de lacet et enfin δ_{x0} and δ_{xf} pour la manette des gaz.

8. La masse m de l'avion est variable : $m_0 \leq m \leq m_f$. Cette contrainte résulte dans la consommation du fuel par l'avion [51, 64].

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_1 &: \mathbf{R^{12}} \times \mathbf{R^4} \longrightarrow \mathbf{R^{16}}, \mathbf{k}_1(y(t), u(t)) \leq 0 \\ \mathbf{k}_2 &: \mathbf{R^{12}} \times \mathbf{R^4} \longrightarrow \mathbf{R^{16}}, \mathbf{k}_2(y(t), u(t)) \geq 0 \end{aligned} \tag{II.10}$$

où

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_1(\mathbf{y}(t), \mathbf{u}(t)) = \; & (\alpha(t) - \alpha_f, \theta(t) - \theta_f, \psi(t) - \psi_f, \varphi(t) - \varphi_f, V_a(t) - V_{af}, X_G^o(t) - X_{Gf}^o, \\ & Y_G^o(t) - Y_{Gf}^o, Z_G^o(t) - Z_{Gf}^o, p(t) - p_f, q(t) - q_f, r(t) - r_f, \delta_l(t) - \delta_{lf}, \\ & \delta_m(t) - \delta_{mf}, \delta_n(t) - \delta_{nf}, \delta_x(t) - \delta_{xf}, m(t) - m_f) \\ \mathbf{k}_2(\mathbf{y}(t), \mathbf{u}(t)) = \; & (\alpha(t) - \alpha_0, \theta(t) - \theta_0, \psi(t) - \psi_0, \varphi(t) - \varphi_0, V_a(t) - V_{a0}, X_G^o(t) - X_{G0}^o, \\ & Y_G^o(t) - Y_{G0}^o, Z_G^o(t) - Z_{G0}^o, p(t) - p_0, q(t) - q_0, r(t) - r_0, \delta_l(t) - \delta_{l0}, \\ & \delta_m(t) - \delta_{m0}, \delta_n(t) - \delta_{n0}, \delta_x(t) - \delta_{x0}, m(t) - m_0) \end{aligned} \tag{II.11}$$

5 Problème de commande optimale d'un avion

La combinaison des équations (II.8), (II.9), (II.10), (II.11) donne un problème de commande optimale d'un avion sous la formulation mathématique suivante :

$$\begin{cases} \min\limits_{\mathbf{u} \in \mathbf{U}} SEL(\mathbf{y}(.), \mathbf{u}(.)) = 10log\left[\dfrac{1}{t_o}\displaystyle\int_{t_{10}}^{t_{1f}} 10^{0.1L_{A1,dt}(t)}dt\right] \\ \dot{\mathbf{y}}(t) = f(\mathbf{u}(t), \mathbf{y}(t)), \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0, \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0 \\ \mathbf{k}_1(\mathbf{y}(t), \mathbf{u}(t)) \leq 0 \\ \mathbf{k}_2(\mathbf{y}(t), \mathbf{u}(t)) \geq 0, \forall t \in [t_{10}, t_{1f}] \end{cases} \tag{II.12}$$

Ce modèle posé dans un cadre mono-avion ne sera pas résolu ici. Une transformation s'impose afin de modéliser mathématiquement la commande optimale d'un système dynamique de deux avions en approche. Des modifications profondes seront formulées au niveau de la dynamique du système, de la fonction objectif et des contraintes comme le montre le chapitre suivant.

$II^{ème}$ *Partie*

Cette partie contient la modélisation mathématique du problème de contrôle optimal de deux avions en approche, sa résolution numérique ainsi que les résultats obtenus.

Au troisième chapitre, nous présentons la modélisation mathématique de la commande optimale d'un système dynamique de deux avions civils A300. Il s'agit de revenir sur le modèle dynamique tridimensionnelle de ce système, l'analyse de ces performances opérationnelles et qualités de vol. La modélisation des efforts aérodynamiques, propulsifs et massiques d'un avion commercial constitue la base de la dynamique de vol de celui-ci. Ce problème sera résolu en utilisant une méthode de programmation séquentielle quadratique globalisée par régions de confiance. Le critère à minimiser est le bruit global émis par les deux avions en approche. Les résultats numériques trouvés sous la programmation AMPL et l'extraction des solutions par KNITRO présentent des caracteristiques optimales.

Le chapitre 4 vise la réduction des niveaux de bruit émis par deux avions attérisant successivement sur une piste. Les Contraintes liées à la sécurité, à la stabilité et aux performances de vol sont prises en compte. Ce problème type contrôle optimal non convexe est régi par des équations différentielles ordinaires non linéaires [65, 66]. Une méthode directe sous un schéma de discrétisation de Runge-Kutta d'odre 4 est utilisée dans la résolution de ce problème. Les processus numériques montrent qu'il y a deux trajectoires optimales conduisant à une réduction des niveaux de bruit perçus au sol et fournissent des caractéristiques de vol optimales pour une grande partie du vol.

Le chapitre 5 concerne la résolution numérique du problème de deux avions en utilisant

l'approche indirecte où on applique le principe de maximum de Pontryaguine sous un schéma de discrétisation de type Runge-Kutta partitionné symplectique d'ordre 4. Cela démontre une bonne résolution du problème d'autant plus que les résultats obtenus confirment la commutation avec l'approche directe lorsque les mêmes coefficients sont appliqués.

Au dernier chapitre, on montre les résultats pour plusieurs cas-tests. Ici nous varions la durée d'approche du deuxième avion pour une séparation temporelle des avions, la discrétisation plus fine ainsi que la position d'observation mobile sous trace. Les résultats obtenus prouvent une pertinente convergence de l'algorithme dans la recherche d'une solution optimale locale.

Chapitre III

Optimisation acoustique de deux avions en approche

Ce chapitre est subdvisé en trois parties principales et vise à développer un modèle mathématique d'optimisation acoustique des trajectoires de vol de deux avions en approche et sans conflit, en minimisant le bruit perçu au sol. La contrainte énergétique est nouvellement introduite.

La première partie traite la modélisation mathématique du problème de contrôle optimal de deux avions et montre le concept général exact des équations 3D de la dynamique de vol de ces deux avions. Ces équations de type différentielles non-linéaires et non-convexes sont associées avec une fonction-objectif de bruit émis par les deux avions et perçu au sol. L'indice acoustique choisi est le SEL et se base uniquement sur le bruit de jet de deux avions de même type (A300). Etant donné que la dynamique de vol des avions doivent être considérées dans des conditions et des domaines de vol réalisables, des contraintes de vol instantanées sont considérées. La dynamique de vol associée au coût génère un problème de contrôle optimal régi par des équations différentielles ordinaires non-linéaires.

La deuxième partie traite la méthode PQS et les conditions d'optimalités de Karush Khun Tucker. Ici, des transformations se font au niveau du problème de commande optimale afin d'appliquer un schema de discrétisation directe. Pour résoudre ce problème, la théorie des conditions nécessaires d'optimalité pour des problèmes de commande optimale avec contraintes instantanées est bien développée. Ceci se caractérise par une solution optimale locale lorsque l'approche newtonienne est utilisée en tenant compte des conditions d'optimalité de Karush-Kuhn-Tucker et la programmation quadratique séquentielle globalisée par région de confiance.

III. Optimisation Acoustique de deux Avions en Approche

La troisième partie traite les expérimentations numériques et les résultats obtenus lorsqu'un solveur KNITRO est appelé sous une programmation AMPL. Ces résultats prouvent plusieurs solutions admissibles parmi lesquelles il est retenu une trajectoire optimale menant à une réduction du niveau de bruit au sol.

Ces résutats font objet d'une validation dans un cadre de collaboration scientifique Nord/Sud via le journal ARIMA « Revue Africaine de la Recherche en Informatique et Mathématiques Appliquées » édité par l'INRIA France et labelisé par MathSciNet ISSN 1638-5713 comme le montre la partie suivante du chapitre.

Two-Aircraft Acoustic Optimal Control Problem : SQP algorithms

F.Nahayo[1,2]- S.Khardi[1] - J.Ndimubandi[2] - M.Haddou[3] - M.Hamadiche[4]

[1] The French Institute of Science and Technology for Transport, Development and Networks-Laboratory of Transports and Environment, Lyon-France
[2] Mathematics Department, Faculty of Science, University of Burundi
[3] Mathematics and Applications, Mathematics-Physics of Orleans, University of Orleans
[4] Laboratory of Fluids Mechanics and Acoustics, University Claude Bernard of Lyon 1

RESUME. Cette contribution vise à développer un modèle mathématique d'optimisation acoustique des trajectoires de vol de deux avions en approche et sans conflit, en minimisant le bruit perçu au sol. Toutes les contraintes de vol des deux avions sont considérées. La dynamique de vol associée au coût génère un problème de contrôle optimal régis par des équations différentielles ordinaires non-linéaires. Pour résoudre ce problème, la théorie des conditions nécessaires d'optimalité pour des problèmes de commande optimale avec contraintes instanées est bien développée. Ceci se caractérise par une solution optimale locale lorsque l'approche newtonienne est utilisée en tenant compte des conditions d'optimalité de Karush-Kuhn-Tucker et la programmation quadratique séquentielle globalisée par région de confiance. Les méthodes SQP sont proposées comme option par KNITRO sous le langage de programmation AMPL. Parmi plusieurs solutions admissibles, il est retenu une trajectoire optimale menant à une réduction du niveau de bruit au sol.

ABSTRACT. This contribution aims to develop an acoustic optimization model of flight paths minimizing two-aircraft perceived noise on the ground. It is about minimizing the noise taking into account all the constraints of flight without conflict. The flight dynamics associated with a cost function generate a non-linear optimal control problem governed by ordinary non-linear differential equations. To solve this problem, the theory of necessary conditions for optimal control problems with instantaneous constraints is well used. This characterizes the optimal solution as a local one when the newtonian approach has been used alongside the optimality conditions of Karush-Kuhn-Tucker and the trust region sequential quadratic programming. The SQP methods are suggested as an option by commercial KNITRO solver under AMPL programming language. Among several possible solution, it was shown that there is an optimal

trajectory (for each aircraft) leading to a reduction of noise levels on the ground.

MOTS-CLES : Commande Optimale, Bruit, avions commerciaux, trajectoire, Algorithmes SQP et TRSQP, Programmation non-linéaire

KEYWORDS : Optimal control problem, Commercial aircraft, noise levels, SQP and TRSQP algorithms, Non-linear programming

1 Introduction

Considering the current trend in the field of air transport, economic and environmental considerations related to the rising cost of oil and the need to preserve the environment, impose more severe constraints on the next generation of aircraft [1]. One wants to reach one of the 2020 ACARE objectives [2]. In order to reduce the environmental pollution and noise impact, ACARE requires a 50% reduction of perceived noise for 2020. This goal represents a difficult scientific and engineering challenge as this requires aerodynamic models and mathematical optimization [3, 4]. Some work addressing this problem has been carried out. The majority of this work addresses the problem of minimization of aircraft noise around the airport by considering a single plane [5, 6]. The other work concerns the stochastic conflict detection for airtraffic management [7], the dynamics of flight [8] and the comprehensive analysis of transport aircraft flight performance [1].

Our aim in this work is the development of a theoretical model of noise optimization while maintening a reliable evolution of the flight procedures of two commercial aircraft on approach. These aircraft are supposed to land successively on the same runway. It is all about the evolution of flight dynamics and minimization of noise for two similar commercial aircraft to the landing taking into account the energy constraint. This model is a non-linear and non-convex optimal control. It is governed by a system of ordinary non-linear differential equations.

For solving this problem, the theory of necessary conditions for optimal control problems with instantaneous constraints on the control and the state is well developped. That characterises the optimal solution as a local solution when the newtonian approach and the sequential quadratic programming are used. The direct optimization methods have proved to be powerful tools for solving optimal control [9, 10]. The basic idea of direct optimization methods is discretizing the control problem and applying non-linear programming techniques to the resulting finite-dimensional optimization problem. The adopted methods use only control and state vari-

ables as optimization variables. The numerical algorithms are usually developped on the basis of first-order necessary optimality conditions. Meanwhile, the second-order sufficient conditions must be checked to ensure the optimality of solutions. Numerically, the second-order sufficient conditions for continuous control problems are very difficult to verify. The alternative solution is to do this for the discretized control problem when using a well-known algebra technique for the optimization problem. It is also important to know the role of the second-order sufficient conditions for sensitivity analysis of the optimal control problem. The control problems are usually subject to disturbances in the data system. Mathematically, the perturbations are described by some parameters in the dynamics, the boundary conditions or in the mixed constraints. The behavior of the optimal solution with the respected perturbations parameters must be analyzed for the stability of the solution.

The new main contribution of this work is the considering of two-arcraft flight dynamics when others autors focuse on one aircraft flight dynamic [5, 6]. One trajectory of a group of two-aircraft is proposed with flight optimal characteristics. Details of the two-aircraft flight dynamic, the noise levels, the constraints, the mathematical model of the two-aircraft acoustic optimal control problem, the sequential quadratic and the trust region sequential quadratic programming method processing are presented in section 2 and 3 while the numerical experiments are presented in the last section.

2 Modelization of the two-aircraft optimal control problem

2.1 General Formulation

The minimization of the noise generated by the two planes is an optimal control problem. Let the mathematical general formulation be the following [11, 12] :

$$\begin{cases} \min\limits_{\mathbf{u}\in\mathbb{U}} J(\mathbf{u}(.),\mathbf{y}(.)) \\ \dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{u}(t),\mathbf{y}(t)), \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0, \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, \\ \mathbf{k1}(\mathbf{u}(t),\mathbf{y}(t)) \leq 0, \\ \mathbf{k2}(\mathbf{u}(t),\mathbf{y}(t)) \geq 0, \forall t \in [0,T] \end{cases} \tag{III.1}$$

where $J(\mathbf{u}(.),\mathbf{y}(.)) = \int_0^T g(\mathbf{u}(t),\mathbf{y}(t))dt + \varphi(\mathbf{y}(T))$ is the cost function,
$\mathbf{y}(t) = (\mathbf{y}_1(t),\mathbf{y}_2(t))^T$ is the state of the system, $\mathbf{u}(t) = (\mathbf{u}_1(t),\mathbf{u}_2(t))^T$ the control and $J(\mathbf{u}(.),\mathbf{y}(.)$

the cost function (noise of the aircraft). $\mathbf{k1}(\mathbf{u}(t), \mathbf{y}(t)) \leq 0, \mathbf{k2}(\mathbf{u}(t), \mathbf{y}(t)) \geq 0$ show the mixed constraints. This formulation is general. In the following, we will establish the explicit and realistic form of all the equations cited above.

2.2 The aircraft dynamic

By the way, the two aircraft motion equations have been established and here are some considered assumptions [13]. The plane is a solid steel block center of fixed gravity, modeled with a variable mass and its inertia matrix is symmetric. This model presupposes that there is no possible conflict between the two A300 aircraft (The threshold is $5NM$ on the horizontal position and 2e+3fts on the vertical one. The landing separation time varies from $45s$ to 9e+1s). The landing law is First Come First Served (FCFS) [14]. The motion of each plane $A_i, i := 1, 2$ is three dimensional analyzed with 3 frames : the landmark (O, X_1, Y_1, Z_1), the plane frame $(G_i, X_{bi}, Y_{bi}, Z_{bi})$ and the aerodynamic one $(G_i, X_{ai}, Y_{ai}, Z_{ai})$ [7]. The transition between these three frames is shown easily with three successive rotations [8, 15]. In general, the equations of motion of each aircraft are summarized in two basic relations of mechanics and the fundamental relationship of kinematics :

$$\begin{aligned} \sum \mathbf{F}_{ext_i} - \frac{dm_i}{dt}\mathbf{V}_{ai} &= \frac{m_i d\mathbf{V}_{ai}}{dt} \\ \sum \mathbf{M}_{ext_{G_i}} &= J(G_i, A_i)\frac{d\mathbf{\Omega}_i}{dt} \end{aligned} \tag{III.2}$$

The index i = 1,2 reflects the first and second plane. In the system above, $\mathbf{F}_{ext_i}$ represent the external forces acting on the aircraft, $m_i(t)$ the mass of the aircraft, $\mathbf{V}_{ai}$ the airspeed of aircraft, $\mathbf{M}_{ext_{G_i}}$ the outside moments of each aircraft, $J(G_i, A_i)$ the inertia matrix and $\mathbf{\Omega}_i$ the angular rotation. The external forces acting on an airplane in flight are : The thrust $\mathbf{F}_i = P_0\delta_{xi}\frac{\rho}{\rho_0}(1 - M_i + \frac{M_i^2}{2})$, the weight $\mathbf{W}_i = m_i g\mathbf{Z_1}$, the lift $\mathbf{F}_{pi} = -\frac{1}{2}\rho_i S_i C_{Zi} V_{ai}^2 \mathbf{Z}_{ai}$, the drag $\mathbf{F}_{ti} = -\frac{1}{2}\rho_i S_i C_{xi} V_{ai}^2 \mathbf{X}_{ai}$ and the lateral forces $\mathbf{F}_{li} = \frac{1}{2}\rho_i S_i C_{yi} V_{ai}^2 \mathbf{Y}_{ai}$. In these expressions described above, S_i is the reference area, C_{xi} the coefficient of drag, V_{ai} the speed, C_{yi} the coefficient of lateral force, C_{zi} the coefficient of lift and ρ_i the density of air. The time derivation is for an observator attached to frame R_O and the equations are written in R_a. The acceleration is obtained with two time derivations of the position. The relations between the derivatives in the two frames are connected by the well known equation

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt}|_{R_O} = \frac{d\mathbf{X}}{dt}|_{R_a} + \mathbf{\Omega}_{R_a/R_O} \times \mathbf{X}$$

where $\frac{d\mathbf{X}}{dt}|_{R_O}$ is the derivative with respect to time of the vector $\mathbf{X}$ in the vehicle-carried normal Earth frame R_O, $\frac{d\mathbf{X}}{dt}|_{R_a}$ is the derivative with respect to time of the vector $\mathbf{X}$ in the frame R_a, $\mathbf{\Omega}_i$ is the angular velocity of the aircraft and $\mathbf{\Omega}_{R_a/R_O}$ is the angular velocity of the frame R_1 relative to the frame R_0. After transformations and simplifications, the system takes the following explicit form :

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\dot{V_{a_i}} = \frac{1}{m_i}[-m_i g sin\gamma_{a_i} - \frac{1}{2}\rho S_i V_{a_i}^2 C_D + (cos\alpha_{a_i} + sin\alpha_{a_i})F_{x_i} - \dot{m}_i u_i], \\
\dot{\alpha_{a_i}} = \frac{1}{m_i V_{a_i} cos\beta_{a_i}}[m_i g cos\gamma_{a_i} cos\mu_{a_i} - \frac{1}{2}\rho S_i V_{a_i}^2 C_{L_i} + [cos\alpha_{a_i} - sin\alpha_{a_i}]F_{z_i} \\
-\dot{m}_i w_i], \ \dot{p}_i = \frac{C}{AC - E^2}\{r_i q_i (B - C) - E p_i q_i + \frac{1}{2}\rho S_i l V_{a_i}^2 C_{l_i}\} \\
+\frac{E}{AC - E^2}\{p_i q_i (A - B) - E r_i q_i + \frac{1}{2}\rho S_i l V_{a_i}^2 C_{ni}\}, \\
\dot{q}_i = \frac{1}{B}\{-r_i p_i (A - C) - E(p_i^2 - r_i^2) + \frac{1}{2}\rho S_i l V_{a_i}^2 C_{mi}\}, \\
\dot{r}_i = \frac{E}{AC - E^2}\{r_i q_i (B - C) + E p_i q_i + \frac{1}{2}\rho S_i l V_{a_i}^2 C_{l_i} + \frac{A}{AC - E^2}\{p_i q_i (A - B) \\
-E r_i q_i + \frac{1}{2}\rho S_i l V_{a_i}^2 C_{ni}\}, \ \dot{X}_{G_i}^o = V_{a_i} cos\gamma_{a_i} cos\chi_{a_i}, \ \dot{Y}_{G_i}^o = V_{a_i} cos\gamma_{a_i} sin\chi_{a_i}, \\
\dot{Z}_{G_i}^o = -V_{a_i} sin\gamma_{a_i}, \ \dot{\varphi}_i = p_i + q_i sin\varphi_i tan\theta_i + r_i cos\varphi_i tan\theta_i, \\
\dot{\theta}_i = q_i cos\varphi_i - r_i sin\varphi_i, \ \dot{\psi}_i = \frac{sin\varphi_i}{cos\theta_i} q_i + \frac{cos\varphi_i}{cos\theta_i} r_i, \\
\dot{m}_i = -2.01 \times 10^{-5} \frac{(\Phi - \mu - \frac{K}{\eta_c})\sqrt{\Theta}}{\sqrt{5\eta_n(1 + \eta_{tf}\lambda)}\sqrt{G + 0.2 M_i^2 \frac{\eta_d}{\eta_{tf}}\lambda} - (1 - \lambda) M_i} F_i,
\end{array}
\right. \tag{III.3}
$$

where the expressions $A = I_{xx}, B = I_{yy}, C = I_{zz}, E = I_{xz}$ are the inertia moments of the aircraft, l is the aircraft reference length, g is the acceleration due to gravity, $C_D = C_{D0} + kC_{Li}^2$ is the drag coefficient, $C_{yi} = C_{y\beta}\beta + C_{yp}\frac{pl}{V} + C_{yr}\frac{rl}{V} + C_{Y\delta_l}\delta_{li} + C_{Y\delta_n}\delta_{ni}$ is the lateral forces coefficient, $C_{Li} = C_{L\alpha}(\alpha_a - \alpha_{a0}) + C_{L\delta_m}\delta_{mi} + C_{LM}M_i + C_{Lq}\frac{q_a^b l}{V}$ is the lift coefficient, $C_{li} = C_{l\beta}\beta + C_{lp}\frac{pl}{V} + C_{lr}\frac{rl}{V} + C_{l\delta_l}\delta_{li} + C_{l\delta_n}\delta_{ni}$ is the rolling moment coefficient, $C_{mi} = C_{m0} + C_{m\alpha}(\alpha - \alpha_0) + C_{m\delta_m}\delta_{mi}$ is the pitching moment coefficient, $C_{ni} = C_{n\beta}\beta + C_{np}\frac{pl}{V} + C_{nr}\frac{rl}{V} + C_{n\delta_l}\delta_{li} + C_{n\delta_n}\delta_{ni}$ is the yawing moment coefficient, P_0 is the full thrust, ρ_0 is the atmospheric density at the ground, $F_i = (F_{xi}, F_{yi}, F_{zi})$ is the propulsive force, $V_{ai} = (u_i, v_i, w_i)$ is the aerodynamic speed, (X_i, Y_i, Z_i) are coordinates of the center of gravity of the aircraft i, α_{ai} is the attack angle , θ_i is the inclination angle , ψ_i is the cup, φ_i is the roll angle, (p_i, q_i, r_i) are the aircraft velocity relative to the earth and m_i the mass. The angles $\gamma_{a_i}, \chi_{a_i}, \mu_{a_i}$ correspond respectively to the aerodynamic

climb angle, the aerodynamic azimuth and the aerodynamic bank angle. The mass change is reflected in the aircraft fuel consumption as described by E. Torenbeek [16] where the specific consumption is

$$C_{SR} = 2.01 \times 10^{-5} \frac{(\Phi - \mu - \frac{K}{\eta_c})\sqrt{\Theta}}{\sqrt{5\eta_n(1+\eta_{tf}\lambda)}\sqrt{G + 0.2M_i^2\frac{\eta_d}{\eta_{tf}}\lambda} - (1-\lambda)M_i}$$

with the generator function G :

$$\begin{aligned} G &= (\Phi - \tfrac{K}{\eta_c})(1 - \frac{1.01}{\eta_i^{\frac{\nu-1}{\nu}}(K+\mu)(1-\frac{K}{\Phi\eta_c\eta_t})}), \\ K &= \mu(\epsilon_c^{\frac{\nu-1}{\nu}} - 1), \mu = 1 + \tfrac{\nu-1}{2}M_i^2 \end{aligned}$$

The Nomenclature of engine performance variables are given by G the gas generator power function, G0 the gas generator power function (static, sea level), K the temperature function of compression process, M_i the flight Mach number, T4 the turbine Entry total Temperature, T0 the ambient temperature at sea level, T the flight temperature, while the nomenclature of engines yields is $\eta_c = 0.85$ the isentropic compressor efficiency, $\eta_d = 1 - 1.3(\frac{0.05}{Re^{\frac{1}{5}}})^2(\frac{0.5}{M_i})^2\frac{L}{D}$, the isentropic fan intake duct efficiency, L the duct length, D the inlet diameter, Re the Reynolds number at the entrance of the nozzle, $\eta_f = 0.86 - 3.13 \times 10^{-2}M_i$ the isentropic fan efficiency, $\eta_i = \frac{1+\eta_d\frac{\gamma-1}{2}M_i^2}{1+\frac{\gamma-1}{2}M_i^2}$ the gas Generator intake stagnation pressure ratio, $\eta_n = 0.97$ the isentropic efficiency of expansion process in nozzle, $\eta_t = 0.88$ the isentropic turbine efficiency $\eta_{tf} = \eta_t\eta_f$, ϵ_c the overall pressure ratio (compressor), ν the ratio of specific heats $\nu = 1.4$, λ the bypass ratio, μ the ratio of stagnation to static temperature of ambient air, Φ the nondimensional turbine entry temperature $\Phi = \frac{T_4}{T}$ and Θ the relative ambient temperature $\Theta = \frac{T}{T_0}$. For now, let us return to the second equation of (1). Considering the aircraft dynamic, one transforms the system described above according to state :$\frac{dy_i(t)}{dt} = f_i(y_i(t), u_i(t)), i = 1, 2$ when

$$\begin{aligned} &\mathbf{y}_i : [t_0, t_f] \longrightarrow \mathbb{R}^{12}, \\ &\mathbf{y}_i(t) = (\alpha_{ai}(t), \theta_i(t), \psi_i(t), \varphi_i(t), V_{a_i}(t), X_{G_i}(t), Y_{G_i}(t), Z_{G_i}(t), \\ &\qquad p_i(t), q_i(t), r_i(t), m_i(t)) \end{aligned} \tag{III.4}$$

is the state vector where the expressions $\alpha_{ai}(t), \theta_i(t), \psi_i(t), \varphi_i(t), V_{a_i}(t), X_{G_i}(t), Y_{G_i}(t)$, $Z_{G_i}(t), p_i(t), q_i(t), r_i(t), m_i(t)$ are respectively the attack angle, the inclination angle, the cup,

the roll angle, the airspeed, the position vectors, the roll velocity of the aircraft relative to the earth, the pitch velocity of the aircraft relative to the earth, the yaw velocity of the aircraft relative to the earth and the aircraft mass. The control vector is

$$\begin{aligned} &\mathbf{u}_i : [t_0, t_f] \longrightarrow \mathbb{R}^4, \\ &\mathbf{u}_i(t) = (\delta_{l_i}(t), \delta_{m_{i(t)}}, \delta_{n_i}(t), \delta_{x_i}(t)) \end{aligned} \tag{III.5}$$

where the expressions $\delta_{l_i}(t), \delta_{m_{i(t)}}, \delta_{n_i}(t), \delta_{x_i}(t)$ are respectively the roll control, the pitch control, the yaw control and the thrust one. The second equation in (III.1) is then written by :

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{y}}_1(t) \\ \dot{\mathbf{y}}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1(\mathbf{u}_1(t), \mathbf{y}_1(t)) \\ \mathbf{f}_2(\mathbf{u}_2(t), \mathbf{y}_2(t)) \end{pmatrix}, \forall t \in [0, T], \mathbf{y}_1(0) = \mathbf{y}_{10}, \mathbf{y}_2(0) = \mathbf{y}_{20} \tag{III.6}$$

As the explicit dynamics equation is known, it must be associated with the two aircraft noise as a cost function for the optimal control problem. In the following, the explicit formula of the objective function is shown.

2.3 The objective function

The calculation of SEL is described by : $SEL = 10 \log \frac{1}{t_o} \int_{t_1}^{t_2} 10^{0.1 L_{A,dt}(t)} dt$ where t_o is the time reference taken equal to $1s$ and $[t_1, t_2]$ the noise event interval. If $[t_{10}, t_{1f}]$ and $[t_{20}, t_{2f}]$ are the respective intervals in which the noise of the first and second plane arises, we have :

$$\begin{aligned} [t_{10}, t_{20}] : SEL_1 &= 10log \left[\frac{1}{t_o} \int_{t_{10}}^{t_{20}} 10^{0.1 L_{A1,dt}(t)} dt \right] \\ [t_{20}, t_{1f}] : SEL_{12} &= SEL_{11} + SEL_{21} \\ &= 10 \log \left[\frac{1}{t_o} \int_{t_{10}}^{t_{1f}} 10^{0.1 L_{A1,dt}(t)} dt + \frac{1}{t_o} \int_{t_{20}}^{t_{1f}} 10^{0.1 L_{A2,dt}(t)} dt \right] \\ [t_{1f}, t_{2f}] : SEL_2 &= 10 \log \left[\frac{1}{t_o} \int_{t_{20}}^{t_{2f}} 10^{0.1 L_{A2,dt}(t)} dt \right] \\ [t_{10}, t_{2f}] : SEL_G &= \frac{(t_{20} - t_{10}) \, SEL_1 \oplus (t_{1f} - t_{20}) \, SEL_{12} \oplus (t_{2f} - t_{1f}) \, SEL_2}{t_{2f} - t_{10}} \\ &= 10 \log \{ \frac{1}{t_{2f} - t_{10}} [(t_{20} - t_{10}) \int_{t_{10}}^{t_{20}} 10^{0.1 L_{A1}(t)} dt \\ &+ (t_{1f} - t_{20}) \int_{t_{20}}^{t_{1f}} 10^{0.1 L_{A1}(t)} dt + (t_{1f} - t_{20}) \int_{t_{20}}^{t_{1f}} 10^{0.1 L_{A2}(t)} dt \\ &+ (t_{2f} - t_{1f}) \int_{t_{1f}}^{t_{2f}} 10^{0.1 L_{A2}(t)} dt] \} \end{aligned} \tag{III.7}$$

where SEL_G is the two-aircraft noise and $\oplus$ means the sound adding. In fact, $L_{A1}(t)$ is the A_1 Aircraft jet noise given by the formula [5] :

$$\begin{aligned} L_{A1}(t) &= 141 + 10\log\left(\frac{\rho_1}{\rho}\right)^w + 10\log\left(\frac{V_e}{c}\right)^{7.5} + 10\log s_1 + 3\log\left(\frac{2s_1}{\pi d_1^2} + 0.5\right) \\ &+5\log\frac{\tau_1}{\tau_2} + 10\log\left[\left(1-\frac{v_2}{v_1}\right)^{me} + 1.2\frac{\left(1+\frac{s_2 v_2^2}{s_1 v_1^2}\right)^4}{\left(1+\frac{s_2}{s_1}\right)^3}\right] - 20\log R + \Delta V \\ &+10\log\left[\left(\frac{\rho}{\rho_{ISA}}\right)^2\left(\frac{c}{c_{ISA}}\right)^4\right]; \end{aligned} \tag{III.8}$$

Where one has : v_1 is the jet speed at the entrance of the nozzle, v_2 the speed jet at the nozzle exit, τ_1 the inlet temperature of the nozzle, τ_2 the temperature at the nozzle exit, ρ the density of air, ρ_1 the atmospheric density at the entrance of the nozzle, ρ_{ISA} the atmospheric density at ground, s_1 the fully expanded primary (inner) jet area, s_2 the fully expanded secondary (outer) area jet, d_1 the inlet diameter of the nozzle hydraulic engine, $V_e = v_1[1-(V/v_1)\cos(\alpha_p)]^{2/3}$ the effective speed (α_p is the angle between the axis of the motor and the axis of the aircraft),R the source observer distance, w the exponent variable defined by : $w = \dfrac{3(V_e/c)^{3.5}}{0.6+(V_e/c)^{3.5}} - 1$, c the sound velocity (m / s), m the exhibiting variable depending on the type of aircraft : $me = 1.1\sqrt{\frac{s_2}{s_1}}$; $\frac{s_2}{s_1} < 29.7$, $me = 6.0$; $\frac{s_2}{s_1} \geq 29.7$, the term $\Delta V = -15log(C_D(M_c,\theta)) - 10log(1-Mcos\theta)$, means the Doppler convection when $C_D(M_c,\theta) = [(1+M_c cos\theta)^2 + 0.04M_c^2]$, M the Mac Number aircraft M_c the convection Mac Number : $M_c = 0.62(v_1 - V cos(\alpha_p))/c$, θ is the Beam angle.

The expression $L_{A2}(t)$ is the noise of the aircraft A_2 and it is written as above. By injecting the equation (III.8) into (III.7), we have the objective function
$J_{G12}(\mathbf{y}(.),\mathbf{u}(.)) = SEL_G = \int_{t'} g(\mathbf{y}(t),\mathbf{u}(t),t)dt$. SEL_G means the two-aircraft noise. The first relation of equation (III.1) is then written :

$$\min_{\mathbf{u}\in\mathbb{U}} J_{G12}(\mathbf{y}(.),\mathbf{u}(.)) = \int_{t'} g(\mathbf{y}(t),\mathbf{u}(t))dt + \varphi(\mathbf{y}(T)),$$

when the functional $g = SEL_G$. If $\varphi(\mathbf{y}(T)) = 0$, the cost function becomes

$$\begin{aligned} J_{G12}(\mathbf{y}(.),\mathbf{u}(.)) &= \int_{t10}^{t_{1f}} g_1(\mathbf{y}_1(t),\mathbf{u}_1(t),t)dt \\ &+ \int_{t20}^{t_{1f}} g_{12}(\mathbf{y}_1(t),\mathbf{u}_1(t),\mathbf{y}_2(t),\mathbf{u}_2(t),t)dt \\ &+ \int_{t20}^{t_{2f}} g_2(\mathbf{y}_2(t),\mathbf{u}_2(t),t)dt. \end{aligned}$$

The function $g_{12}(t)$ above reflects the coupling between the two-planes noise levels. Returning to the third equation of system (III.1), one has the constraints. In the following section, the exact formulation of this equation will be shown.

2.4 Constraints

The considered constraints concern aircraft flight speeds and altitudes, flight angles and control positions, energy constraint, aircraft separation, flight velocities of aircraft relative to the earth and the aircraft mass. Some constraints are shared for the two aircraft, others are not.

1. The vertical separation given by $Z^o_{G_{12}} = Z^o_{G_2} - Z^o_{G_1}$ where $Z^o_{G_1}, Z^o_{G_2}$ are respectively the altitude of the first and the second aircraft and $Z^o_{G_{12}}$ the altitude separation.

2. The horizontal separation $X^o_{G_{12}} = X^o_{G_1} - X^o_{G_2}$ [17, 18, 19] where $X^o_{G_1}, X^o_{G_2}$ are horizontal positions of the first and the second aircraft and their separation distance.

3. The aircraft speed V_{a_i} must be bounded as follows $1.3V_s \leq V_{a_i} \leq V_{if}$ where V_s is the stall speed,V_{if} is the maximum speed and $V_{io} = 1.3V_s$ the minimum speed of the aircraft A_i [16, 20]. The roll velocity of the aircraft relative to the earth $p_i \in [p_{i0}, p_{if}]$, the pitch velocity of the aircraft relative to the earth $q_i \in [q_{i0}, q_{if}]$ and the yaw velocity of the aircraft relative to the earth $r_i \in [r_{i0}, r_{if}]$ are also considered .

4. On the approach, the ICAO standards and aircraft manufacturers require flight angle evolution as follows : attack angle $\alpha_{a_i} \in [\alpha_{io}, \alpha_{if}]$, the inclination angle $\theta_i \in [\theta_{i0}, \theta_{if}]$ and the roll angle $\varphi_i \in [\varphi_{io}, \varphi_{if}]$.

5. The aircraft control $\mathbf{u}(t) = (\delta_{l_i}(t), \delta_{m_i(t)}, \delta_{n_i}(t), \delta_{x_i}(t))$ keeps still between the position δ_{li0} and δ_{lif} for the roll control, δ_{mi0} and δ_{mif} for the pitch control, δ_{ni0} and δ_{nif} for the yaw control and δ_{xi0} and δ_{xif} for the thrust.

6. The mass m_i of the aircraft A_i is variable : $m_{i0} < m_i < m_{if}$. This constraint results in energy consumption of the aircraft [13, 21].

On the whole, the constraints come together under the relationship :

$$\begin{array}{l}\mathbf{k}_{1i} : \mathbb{R}^{12} \times \mathbb{R}^{4} \longrightarrow \mathbb{R}^{16}, \mathbf{k}_{1i}(y_i(t), u_i(t)) \leq 0, \\ \mathbf{k}_{2i} : \mathbb{R}^{12} \times \mathbb{R}^{4} \longrightarrow \mathbb{R}^{16}, \mathbf{k}_{2i}(y_i(t), u_i(t)) \geq 0\end{array} \tag{III.9}$$

where

$$\begin{array}{l}\mathbf{k}_{1i}(\mathbf{y}_i(t), \mathbf{u}_i(t)) = (\alpha_i(t) - \alpha_{if}, \theta_i(t) - \theta_{if}, \psi_i(t) - \psi_{if}, \varphi_i(t) - \varphi_{if}, V_{a_i}(t) - V_{aif}, \\ X^o_{G_i}(t) - X^o_{Gif}, Y^o_{G_i}(t) - Y^o_{Gif}, Z^o_{G_i}(t) - Z^o_{Gif}, p_i(t) - p_{if}, q_i(t) - q_{if}, \\ r_i(t) - r_{if}, \delta_{l_i}(t) - \delta_{l_if}, \delta_{m_i}(t) - \delta_{mif}, \delta_{n_i}(t) - \delta_{nif}, \delta_{x_i}(t) - \delta_{xif}, m_i(t) - m_{if}) \\ \mathbf{k}_{2i}(\mathbf{y}_i(t), \mathbf{u}_i(t)) = (\alpha_i(t) - \alpha_{i0}, \theta_i(t) - \theta_{i0}, \psi_i(t) - \psi_{i0}, \varphi_i(t) - \varphi_{i0}, V_{a_i}(t) - V_{ai0}, \\ X^o_{G_i}(t) - X^o_{Gi0}, Y^o_{G_i}(t) - Y^o_{Gi0}, Z^o_{G_i}(t) - Z^o_{Gi0}, p_i(t) - p_{i0}, q_i(t) - q_{i0}, \\ r_i(t) - r_{i0}, \delta_{l_i}(t) - \delta_{l_i0}, \delta_{m_i}(t) - \delta_{mi0}, \delta_{n_i}(t) - \delta_{ni0}, \delta_{x_i}(t) - \delta_{xi0}, m_i(t) - m_{i0}).\end{array} \tag{III.10}$$

The digital applications considered for the two-aircraft [5, 8, 13, 16] are confined in Table 1 in appendix.

2.5 The explicit formula of the two-aircraft optimal control problem

In this section, by combining relations (III.3), (III.6), (III.7) and (III.10), the problem (III.1) takes the following form

$$\left\{\begin{array}{l}\min\limits_{\mathbf{u}\in\mathbf{U}} J_{G12}(\mathbf{y}(.), \mathbf{u}(.)) = \int_{t10}^{t_{1f}} g_1 dt + \int_{t20}^{t_{1f}} g_{12} dt + \int_{t20}^{t_{2f}} g_2 dt, \\ \dot{\mathbf{y}}(t) = f(\mathbf{u}(t), \mathbf{y}(t)), \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0, \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, \\ \mathbf{k}_{1i}(\mathbf{y}_i(t), \mathbf{u}_i(t)) \leq 0, \\ \mathbf{k}_{2i}(\mathbf{y}_i(t), \mathbf{u}_i(t)) \geq 0, \forall t \in [t_{10}, t_{2f}],\end{array}\right. \tag{III.11}$$

where

$$\begin{array}{ll} g_1(\mathbf{y}_1(t), \mathbf{u}_1(t)) & = (t_{2f} - t_{10})^{-1}(t_{20} - t_{10})10^{0.1L_{A1}(t)}, \\ g_{12}(\mathbf{y}(t), \mathbf{u}(t)) & = (t_{2f} - t_{10})^{-1}(t_{1f} - t_{20})10^{0.1(L_{A1}(t)+L_{A2}(t))} \\ g_2(\mathbf{y}_2(t), \mathbf{u}_2(t)) & = (t_{2f} - t_{10})^{-1}(t_{2f} - t_{1f})10^{0.1L_{A1}(t)}. \end{array}$$

For the two-aircraft optimal control problem as posited in relation (III.11), several possibilities exist for its resolution. In the literature, we find firstly a theory based on direct methods and non-linear programming, secondly a theory based on indirect methods. In this paper, one tests the first theory based on the newton method approach and SQP methods. The main advantage of Newton's method is its quadratic convergence and as for all other recurring methods, just

one starting point is needed to initialize the whole iterative process [22].

3 SQP methods and KKT-optimality conditions

3.1 The optimality conditions for the optimal control problem

In System (III.11), one has a problem of optimal control with mixed constraints. By putting $\mathbf{x} = (\mathbf{y}, \mathbf{u})$, the problem can be transformed in the following system :

$$\begin{cases} \min J_{G12}(\mathbf{x}(.)) \\ \dot{\mathbf{y}} = f(\mathbf{x}) \\ n_j(\mathbf{x}) \leq 0, j \in \Xi \\ n_j(\mathbf{x}) \geq 0, j \in \Gamma \end{cases} \tag{III.12}$$

The expressions Ξ, Γ are the sets of equality and inequality indices. The Lagrangian of the system (III.12) is defined by the function $L(\mathbf{x}, \lambda) = J_{GP12}(\mathbf{x}) + \lambda^T[b(\dot{\mathbf{y}}, \mathbf{x}) + n(\mathbf{x})]$ where the vector λ is the Lagrange multiplier and $b(\dot{\mathbf{y}}, \mathbf{x}) = \dot{\mathbf{y}} - f(\mathbf{x}) = 0$.

- *An inequality constraint n_j is active at point $\tilde{\mathbf{y}} = (\mathbf{y}^*, \mathbf{u}^*, t^*)$ if $n_j(\mathbf{y}^*, \mathbf{u}^*, t^*) = 0$. $\Gamma(\mathbf{y}^*, \mathbf{u}^*, t^*) = \Gamma^*$ is the set of indices j corresponding to active constraints in $\tilde{\mathbf{y}}$,*

$$\begin{aligned} \Gamma_*^+ &= \{j \in \Gamma_* | (\lambda_\Gamma^*)_j > 0\} \\ \Gamma_*^0 &= \{j \in \Gamma_* | (\lambda_\Gamma^*)_j = 0\} \end{aligned} \tag{III.13}$$

  where the constraints of index Γ_*^+ are highly active and those of Γ_*^0 weakly active.
- *An element $\tilde{\mathbf{y}} \in \Gamma^*$ verify the condition of qualifying for the constraints n if the gradients of active constraint $\nabla n_\Xi(\tilde{\mathbf{y}}), \nabla n_\Gamma(\tilde{\mathbf{y}})$ are linearly independent. This means that the Jacobian matrix of active constraints in $\tilde{\mathbf{y}}$ is full.*
- *An element $\tilde{\mathbf{y}} \in \Gamma^*$ satisfies the qualification condition of Mangasarian-Fromowitz for constraints n in $\tilde{\mathbf{y}}$ if there exists a direction d such that*

$$\begin{aligned} &\nabla n_\Xi(\tilde{\mathbf{y}})^T d = 0 \\ &\nabla n_j(\tilde{\mathbf{y}})^T d < 0 \forall j \in \Gamma(\tilde{\mathbf{y}}) \end{aligned} \tag{III.14}$$

  where the gradient $\{\nabla n_\Xi(\tilde{\mathbf{y}})\}$ are linearly independent.

The Karush-Kuhn-Tucker optimality conditions : Consider that J_{G12}, n functions of C^1 class and $\tilde{\mathbf{y}}$ a solution of the problem (III.14) which satisfies a constraints qualification condition.

So,there exists λ^* such that :

$$\begin{aligned} &\nabla_{\mathbf{x}} L(\tilde{\mathbf{y}}, \lambda^*) = 0 \\ &n_{\Xi}(\tilde{\mathbf{y}}) = 0 \\ &n_{\Gamma}(\tilde{\mathbf{y}}) \leq 0 \\ &\lambda^*_{\Gamma} \geq 0 \\ &\lambda^*_{\Gamma} n_{\Gamma}(\tilde{\mathbf{y}}) = 0. \end{aligned} \tag{III.15}$$

The (III.15) equations are called the conditions of Karush-Kuhn-Tucker(KKT). The first equation reflects the optimality, the second and third the feasability conditions . The other two reflect the additional conditions and Lagrange multipliers corresponding to inactive constraints $nj(\tilde{\mathbf{y}})$ are zero. The couple $(\tilde{\mathbf{y}}, \lambda^*)$ such that the KKT conditions are satisfied is called primal-dual solution of (III.12). So, $\tilde{\mathbf{y}}$ is called a stationary point.

The necessary optimality conditions of second order [23] : Taking $\tilde{\mathbf{y}}$ a local solution of (III.13) and satisfying a qualification condition, then there exist multipliers (λ^*) such that the KKT conditions are verified . So we have $\nabla^2_{\mathbf{xx}} L(\tilde{y}, \lambda^*) d.d > 0 \forall h \in \mathbf{C}_*$ where $\mathbf{C}_*$ is a critical cone.

The sufficient optimality conditions of second order [23] : Suppose that there exits (λ^*) which satisfy the KKT conditions and such that $\nabla^2_{\mathbf{xx}} L(\tilde{\mathbf{y}}, \lambda^*) d.d > 0 \forall h \in \mathbf{C}_* \backslash \{0\}$. So $\tilde{\mathbf{y}}$ is a local minimum of (III.13).

3.2 SQP Method

The system (III.11) results in the following equations :

$$\begin{cases} \min J_{G12}(\mathbf{x}(.)) \\ \dot{\mathbf{y}} = f(\mathbf{x}) \\ n_j(\mathbf{x}) \leq 0, j \in \Xi \\ n_j(\mathbf{x}) \geq 0, j \in \Gamma \end{cases} \tag{III.16}$$

The expressions Ξ, Γ are the sets of indices of equality and inequality. An SQP method solves a succession of quadratic problems :

$$\begin{cases} \min \nabla J(\mathbf{x}_k, t_k)\mathbf{d}_k + \dfrac{1}{2}\mathbf{d}_k^T H_k \mathbf{d}_k \\ \nabla^T b(\dot{\mathbf{y}}_k, \mathbf{x}_k)\mathbf{d}_k + b(\dot{\mathbf{y}}_k, \mathbf{x}_k) = 0 \\ \nabla n_{\Xi}(\mathbf{x}_k, t_k)\mathbf{d}_k + n_{\Xi}(\mathbf{x}_k, t_k) \leq 0, \\ n_{\Gamma}(\mathbf{x}_k, t_k)\mathbf{d}_k + n_{\Gamma}(\mathbf{x}_k, t_k) \geq 0. \end{cases} \tag{III.17}$$

To solve this problem listed above, choose some subsets of indices $\beta_k \in \Gamma, \Xi_k \in \Xi$. So, the system becomes only system with equality constraints :

$$\begin{cases} \min \nabla J(\mathbf{x}_k, t_k)\mathbf{d}_k + \frac{1}{2}\mathbf{d}_k^T H_k \mathbf{d}_k \\ \nabla^T b(\dot{\mathbf{y}}_k, \mathbf{x}_k)\mathbf{d}_k + \mathbf{b}(\dot{\mathbf{y}}_k, \mathbf{x}_k) = 0 \\ \nabla n_{\Xi_k}(\mathbf{x}_k, t_k)\mathbf{d}_k + n_{\Xi_k}(\mathbf{x}_k, t_k) = 0, \\ \nabla n_{\beta_k}(\mathbf{x}_k, t_k)\mathbf{d}_k + n_{\beta_k}(\mathbf{x}_k, t_k) = 0. \end{cases} \tag{III.18}$$

The vector $\mathbf{d_k}$ is a primal-dual displacement and H_k the Hessian matrix of the Lagrangian. We used a method of Newtonian approach [24].

3.3 SQP algorithm and added transfomations

1. Choose the eligible initial conditions for the optimal solution of the problem
2. Problem approximation with a quadratic programming problem with linear constraints at time t_k.
3. Solve the problem for an eligible descent direction at time t_k
4. Verify the arrest conditions, if $(\mathbf{d}_k^T = 0)$, write the solution. Otherwise, proceed to the evaluation of the Hessian matrix, the primal and dual variables, do a linear search to find it.
5. Increment the solution vector at time t_{k+1} and return to Step 2.

This algorithm above must be transformed because the two-Aircraft problem is non-convex. For improving the robustness and global convergence behavior of this SQP algorithm, it must be added with the trust radius of this form :

$$||D\Delta\mathbf{x}_k||_p \leq \Delta, p \in [1, \infty] \tag{III.19}$$

where D is uniformly bounded and $\mathbf{d}_k = \Delta\mathbf{x}_k$. The relations (III.18) and (III.19) form a quadratic program when $p = \infty$.
So, the trust-region constraint is restated as $-\Delta e \leq Dx \leq \Delta e, e = (1, 1, 1, ..., 1)^T$.
If $p = 2$, one has the quadratic constraint $\Delta\mathbf{x}_k^T D^T D\Delta\mathbf{x}_k \leq \Delta^2$. In the following, we develop the convergence theory for any choice of p just to show the equivalence between the $||.||_p$ and $||.||_2$.
By the combination of some relation of (III.17) and the relation (III.19), all the components of

the step are controlled by the trust region. The two-aircraft problem takes the following form

$$\begin{cases} \min\limits_{\Delta \mathbf{x}_k}[Q_{G12}(\mathbf{x}_k)] = \nabla^T J_{G12}(\mathbf{x}_k)\Delta \mathbf{x}_k + \dfrac{1}{2}(\Delta \mathbf{x}_k)^T H_k \Delta \mathbf{x}_k \\ \nabla^T \mathbf{b}(\dot{\mathbf{y}}_k, \mathbf{x}_k)\Delta \mathbf{x}_k + b(\dot{\mathbf{y}}_k, \mathbf{x}_k) = 0 \\ \nabla^T n_\Xi(\mathbf{x}_k)\Delta \mathbf{x}_k + n_\Xi(\mathbf{x}_k) \leq 0 \\ \nabla^T n_\Gamma(\mathbf{x}_k)\Delta \mathbf{x}_k + n_\Gamma(\mathbf{x}_k) \geq 0 \\ ||D\Delta \mathbf{x}_k||_p \leq \Delta, p \in [1, \infty] \end{cases} \tag{III.20}$$

In some situations, all of the components of the step are not controlled by the trust region because of some hypotheses on D. There is an other alternative which allows the practical SQP methods by using the merit function or the penalty function to measure the worth of each point x.

Several approaches like Byrd-Omojokun and Vardi approaches exist to solve the system (III.12) [25]. It can also be solved with the KNITRO, the SNOPT and other methods [26]. In the latter case, we have an ordinary differential system of non-linear and non-convex equations. The uniqueness of the solution of the quadratic sub-problem is not guaranteed. It therefore combines the algorithm with a merit function for judging the quality of the displacement. The merit function can therefore offer a way to measure all progress of iterations to the optimum while weighing the importance of constraints on the objective function. It is chosen in l_2 norm particularly the increased Lagrangian L_I because of its smooth character. So, in the equation above, one replaces L by L_I. Thus, this transforms the SQP algorithm in sequential quadratic programming with trust region globalization 'TRSQP'. Its principle is that each new iteration must decrease the merit function of the problem for an eligible trust radius. Otherwise, we reduce the trust radius $\Delta \mathbf{x}_K$ for computing the new displacement. A descent direction is acceptable if its reduction is emotionally positive. The advantages of the method are that the merit function will circumvent the non-convexity of the problem. This approach shows that only one point is sufficient to start the whole iterative process [24, 27, 28].

Meanwhile, we use an algorithm called feasibility perturbed SQP in which all iterates $\mathbf{x}_k$ are feasible and the merit function is the cost function. Let us consider the perturbation $\Delta\tilde{\mathbf{x}}_k$ of the step $\Delta \mathbf{x}_k$ such that

1. The relation

$$\mathbf{x} + \Delta\tilde{\mathbf{x}}_k \in \mathbf{F} \tag{III.21}$$

where $\mathbf{F}$ is the set of feasible points for (III.12),

2. The asymptotic exactness relation

$$||\Delta\mathbf{x} - \Delta\tilde{\mathbf{x}}_k||_2 \leq \varphi(||\Delta\mathbf{x}_k||_2)||\Delta\mathbf{x}_k||_2 \tag{III.22}$$

is satisfied where $\varphi : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ with $\varphi(0) = 0$.

These two conditions are used to prove the convergence of the algorithm and the effectiveness of this method. The advantages gained by maintaining feasible iterates for this method are :

- The trust region restriction (III.19) is added to the SQP problem (III.18) without concern that it will yield an infeasible subproblem.
- The objective function J_{G12} is itself used as a merit function in deciding whether to take a step.
- If the algorithm is terminated early, we will be able to use the latest iterate $\mathbf{x}_k$ as a feasible suboptimal point, which in many applications is far preferable to an infeasible suboptimum.

3.4 The TRSQP algorithm and convergence analysis

Assume that for a given SQP step $\Delta\mathbf{x}_k$ and its perturbation $\Delta\tilde{\mathbf{x}}_k$, the ratio to predict decrease is

$$r_k = \frac{J_{G12}(\mathbf{x}_k) - J_{G12}(\mathbf{x}_k + \Delta\tilde{\mathbf{x}}_k)}{-Q_{G12}(\Delta\tilde{\mathbf{x}}_k)} \tag{III.23}$$

The two-aircraft acoustic optimal control TRSQP algorithm is written as :

1. Let $\mathbf{x}_0(k = 0)$ a given starting point, $\overline{\Delta} \geq 1$ the trust region upper bound, $\Delta_0 \in (0, \overline{\Delta})$ an initial radius, $\epsilon \in [\epsilon_0, \epsilon_f)$ and $p \in [1, \infty]$

2. Calculate $\Delta\mathbf{x}_k$ by solving the system

$$\begin{cases} \min\limits_{\Delta\mathbf{x}_k}[Q_{G12}(\mathbf{x}_k)] = \nabla^T J_{G12}(\mathbf{x}_k)\Delta\mathbf{x}_k + \dfrac{1}{2}(\Delta\mathbf{x}_k)^T H_k \Delta\mathbf{x}_k \\ \nabla^T bfb(\dot{\mathbf{y}}_k, \mathbf{x}_k)\Delta\mathbf{x}_k + \mathbf{b}(\dot{\mathbf{y}}_k, \mathbf{x}_k) = 0 \\ \nabla^T n_\Xi(\mathbf{x}_k)\Delta\mathbf{x}_k + n_\Xi(\mathbf{x}_k) \leq 0 \\ \nabla^T n_\Gamma(\mathbf{x}_k)\Delta\mathbf{x}_k + n_\Gamma(\mathbf{x}_k) \geq 0 \\ ||D\Delta\mathbf{x}_k||_p \leq \Delta, p \in [1, \infty] \end{cases}$$

Seek also $\tilde{\Delta \mathbf{x}_k}$ by using the system

$$\mathbf{x} + \tilde{\Delta \mathbf{x}_k} \in \mathbb{F}$$
$$||\Delta \mathbf{x} - \tilde{\Delta \mathbf{x}_k}||_2 \leq \varphi(||\Delta \mathbf{x}_k||_2)||\Delta \mathbf{x}_k||_2$$

This algorithm consists to find the zero of the derivative of a cost function using Newton's method (the hessian is approximated by BFGS) as the direction of Newton brought down the cost and seek a direction by the trust region method otherwise. The cost function is a local quadratic model in a trust region.

3. If no such for the perturbed counterpart $\tilde{\Delta \mathbf{x}_k}$ is found, the following affectations are considered.
$$\Delta \mathbf{x}_{k+1} \leftarrow (\frac{1}{2})||D_k \Delta \mathbf{x}_k||_p$$
$$\mathbf{x}_{k+1} \leftarrow \mathbf{x}_k; D_{k+1} \leftarrow D_k;$$

4. Otherwise, calculate $r_k = \dfrac{J_{G12}(\mathbf{x}_k) - J_{G12}(\mathbf{x}_k + \tilde{\Delta \mathbf{x}_k})}{-Q_{G12}(\tilde{\Delta \mathbf{x}_k})}$;
if $r_k \leq \epsilon_f, \Delta_{k+1} \leftarrow (\frac{1}{2})||D_k \Delta \mathbf{x}_k||_p$;
else if $r_k > a_0 \times \epsilon_0$ and $||D_k \Delta \mathbf{x}_k||_p = \Delta_k$
$\Delta_{k+1} \leftarrow min(2\Delta_k, \Delta)$;
else $\Delta_{k+1} \leftarrow \Delta_k$;

5. If $r_k > \epsilon$ $\mathbf{x}_{k+1} \leftarrow \mathbf{x}_k + \tilde{\Delta \mathbf{x}_k}$; Choose the new matrix D_{k+1};
else $\mathbf{x}_{k+1} \leftarrow \mathbf{x}_k; D_{k+1} \leftarrow D_k$;

6. end.

At each major iteration a positive definite quasi-Newton approximation of the Hessian of the Lagrangian function, H, is calculated using the BFGS method, where $\lambda_i, i = 1, ..., m$, is an estimate of the Lagrange multipliers.

$$H_{k+1} = H_k + \frac{\mathbf{q}_k \mathbf{q}_k^T}{\mathbf{q}_k^T \mathbf{s}_k} - \frac{H_k^T \mathbf{s}_k^T \mathbf{s}_k H_k}{\mathbf{s}_k^T H_k \mathbf{s}_k}$$

where

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_k &= \mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k, \\ \mathbf{q}_k &= (\nabla J_{G12}(\mathbf{x}_{k+1} + \textstyle\sum_{j=1}^{n} \lambda_j . \nabla n(\mathbf{x}_{k+1}) + b(\mathbf{x}_{k+1})) \\ &\quad -(\nabla J_{G12}(\mathbf{x}_k + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j . \nabla n(\mathbf{x}_k) + b(\mathbf{x}_k)) \end{aligned}$$

A positive definite Hessian is maintained providing $\mathbf{q}_k^T \mathbf{s}_k$ is positive at each update and that H is initialized with a positive definite matrix. This algorithm is implemented by AMPL language programming and the KNITRO solver [29, 30].

3.5 Analysis of the algorithm and its convergence

Let us define the set $\mathbb{F}_0$ as follows :

$$\begin{aligned}\mathbb{F}_0 \quad &= \{\mathbf{x} | \nabla^T \mathbf{b}(\dot{\mathbf{y}}, \mathbf{x}) \Delta \mathbf{x} + \mathbf{b}(\dot{\mathbf{y}}, \mathbf{x}) = 0, \nabla^T n_\Xi(\mathbf{x}) \Delta \mathbf{x} + n_\Xi(\mathbf{x}) = 0, \\ &\nabla^T n_\Gamma(\mathbf{x}) \Delta \mathbf{x} + n_\Gamma(\mathbf{x}) \geq 0, J_{G12}(\mathbf{x}) \leq J_{G12}(\mathbf{x}_0)\} \in \mathbb{F}\end{aligned}$$

The trust-region bound $||D\Delta \mathbf{x}_k||_p \leq \Delta, p \in [1, \infty]$ specifies the following assumption.

1. There exists a constant β such that for all points $\mathbf{x} \in \mathbb{F}_0$ and all matrix D used in the algorithm, we have for any Δx satisfying the following equations

$$\nabla^T b(\dot{\mathbf{y}}, \mathbf{x}) \Delta \mathbf{x} + \mathbf{b}(\dot{\mathbf{y}}, \mathbf{x}) = 0, \nabla^T n_\Xi(\mathbf{x}) \Delta \mathbf{x} + n_\Xi(\mathbf{x}) = 0, \nabla^T n_\Gamma(\mathbf{x}) \Delta \mathbf{x} + n_\Gamma(\mathbf{x}) \geq 0$$

   that

$$\beta^{-1} ||\Delta \mathbf{x}||_2 \leq ||D\Delta \mathbf{x}||_p \leq \beta ||\Delta \mathbf{x}||_2 \tag{III.24}$$

2. The level set $\mathbb{F}_0$ is bounded and the functions J_{G12}, b, η are twice continuously differentiable in an open neighborhood $\mathbb{M}(\mathbb{F}_0)$ of this set.

Under certain assumptions as shown in [31], this algorithm is well defined.

In this paragraph, one wants to prove that the algorithm has a convergence to stationary point of (III.13). If we consider that all assumptions hold for each feasible point $\tilde{x}$ for (III.12), the Mangasarian-Fromowitz are satisfied for constraints. After all, the KKT optimality conditions are specified and that shows that there is at least a local convergence. With other added conditions as shown in [38], the global convergence is held.

4 Numerical experiments and results

The following result are obtained with AMPL (A Mathematical Programming Modeling Language) and KNITRO as a solver. Matlab is requested as the graphic visualization programming language.

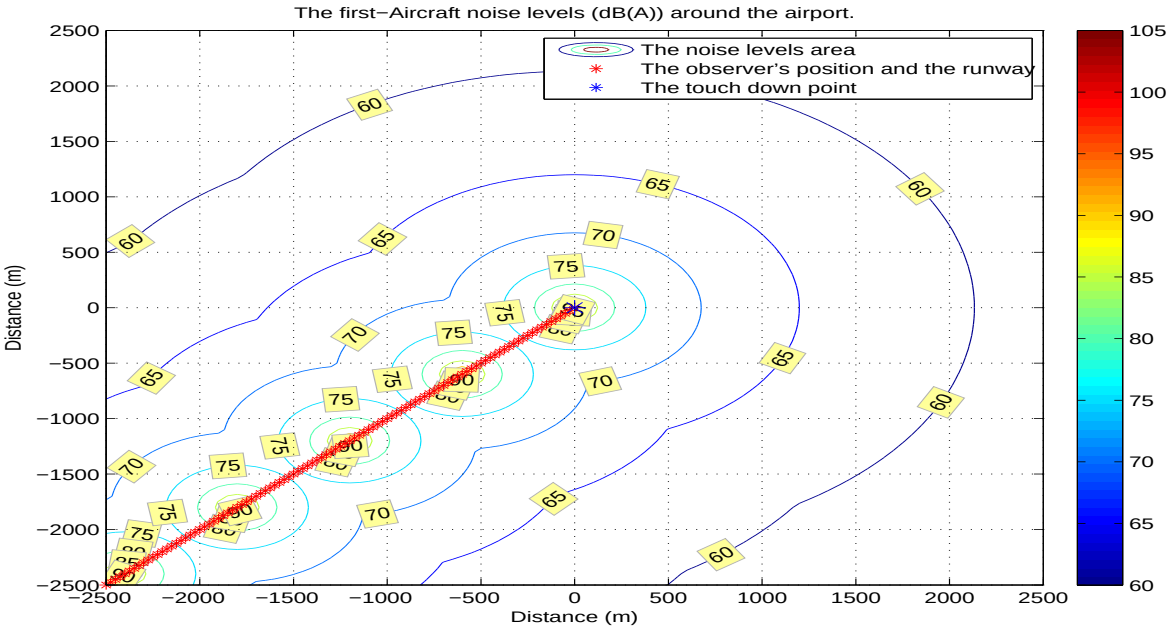


Figure III.1 – A1 aircraft noise levels

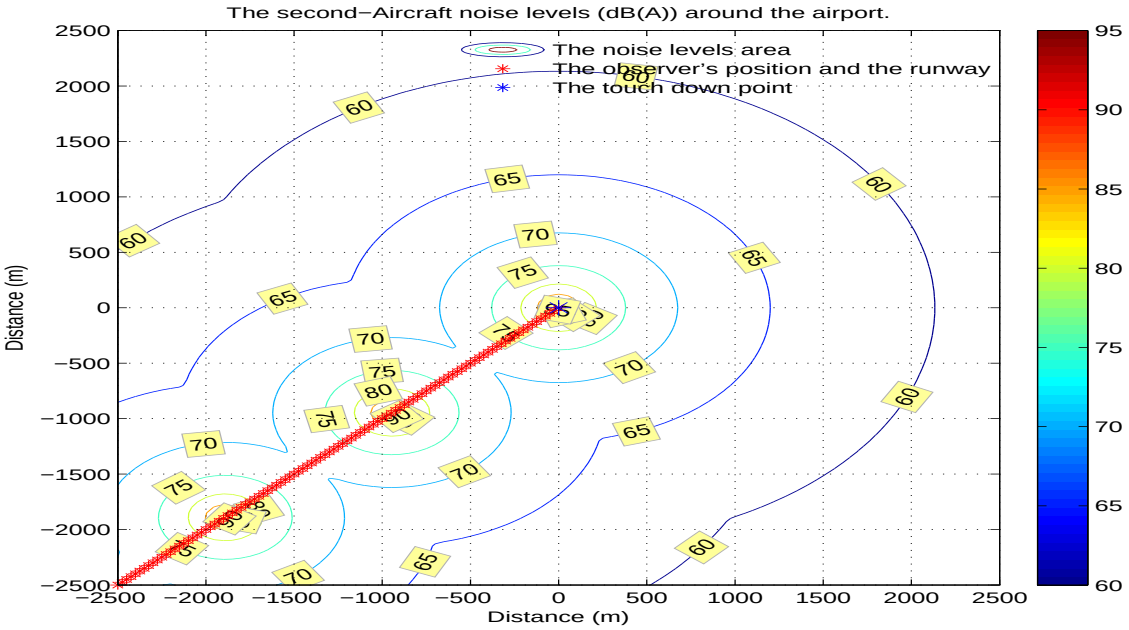


Figure III.2 – A2 aircraft noise levels

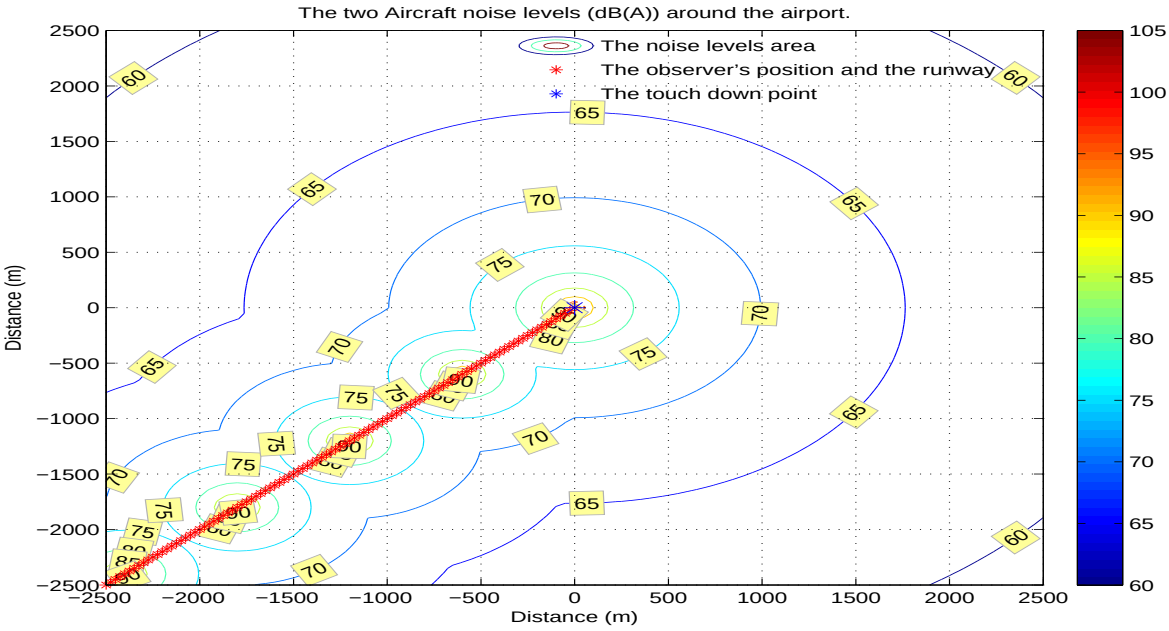


Figure III.3 – Two-aircraft global noise levels

Figures III.1, III.2 and III.3 are plotted without considering optimization. These show noise levels around the airport inside to explain why our model is very important and which gain is carried when compared with the actual situation. One considers the following zone : $x = -2500 : 250 : 2500, y = -2500 : 250 : 2500, h = 0$. As the meshing step is 250m, we have For each meshing point, a vector of N values on noise level as the discretization shows. For each observation point, one has a vector of N noise level values as the discretization shows. It is better to take the maximum value among the N values of noise level matched with the shortest distance between the observer and each plane. On the runway, the touch down position (m) is $(0, 0, 0)$. The difference between these noise leves on floor for the first aircraft and the second is that when the first plane hit the ground, the second is still at six hundred meters of altitude as shown by the sepation constraints.

The optimal solution is found with the following KNITRO output optimality conditions :

Multistart stopping, found local optimal solution.
MULTISTART : Best locally optimal point is returned.
EXIT : Locally optimal solution found.

Final objective value = 5.07801676962590e+01
Final feasibility error (abs / rel) = 1.95e-07 / 5.11e-09
Final optimality error (abs / rel) = 6.52e-07 / 6.52e-07
Number of iterations = 56
Number of CG iterations = 114
Number of function evaluations = 61
Numberof gradient evaluations = 57
Number of Hessian evaluations = 56
Total program time (secs) = 150.33360 (150.289 CPU time)
Time spent in evaluations (secs) = 125.97791

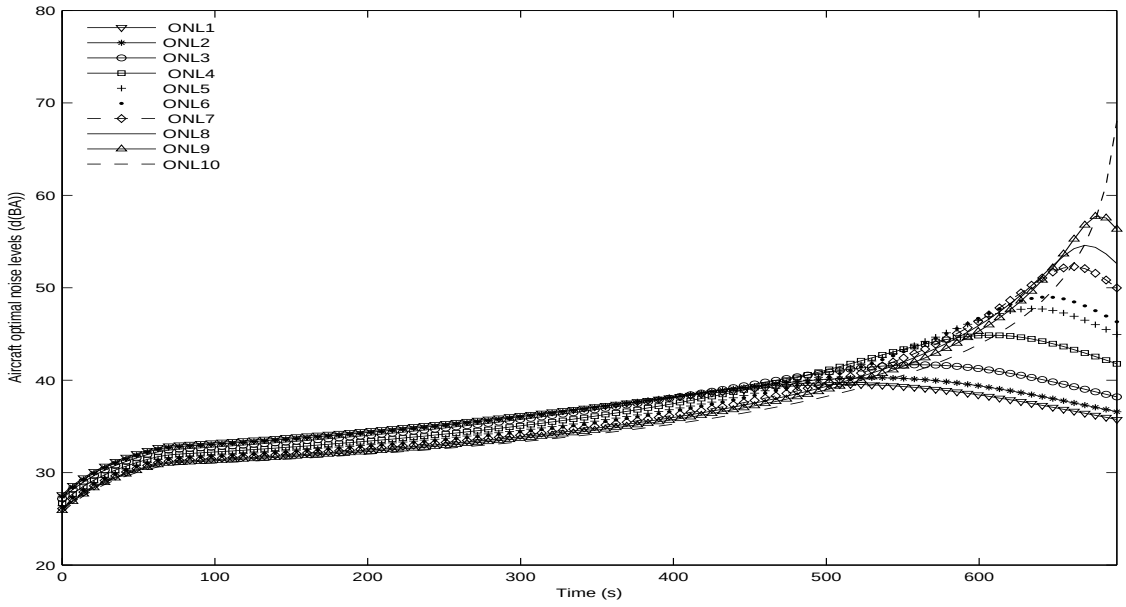


Figure III.4 – Aircraft optimal noise levels

Figure III.4 shows the noise levels when the optimization is applied and the solutions obtained. The observation positions are $(-20000\ m, -20000\ m, 0\ m)$ for ONL_1, $(-19800\ m, -19800\ m, 0\ m)$ for ONL_2, ..., $(-200\ m, -200\ m, 0\ m)$ for ONL_{10}. In this figure, the legend ONL means optimal noise level. As specified, noise level increases and is maximum when the observation point lies below the aircraft. Noise levels decrease gradually as the air-

craft moves away from the observation point. This is confirmed by Khardi analysis [32]. By comparison, this result is also close to standard values of jet noise on approach as shown by Harvey [6, 33]. To conclude, numerical calculations carried out in this paper are efficient and fitted with experimental and theoretical researches related to acoustical developments.

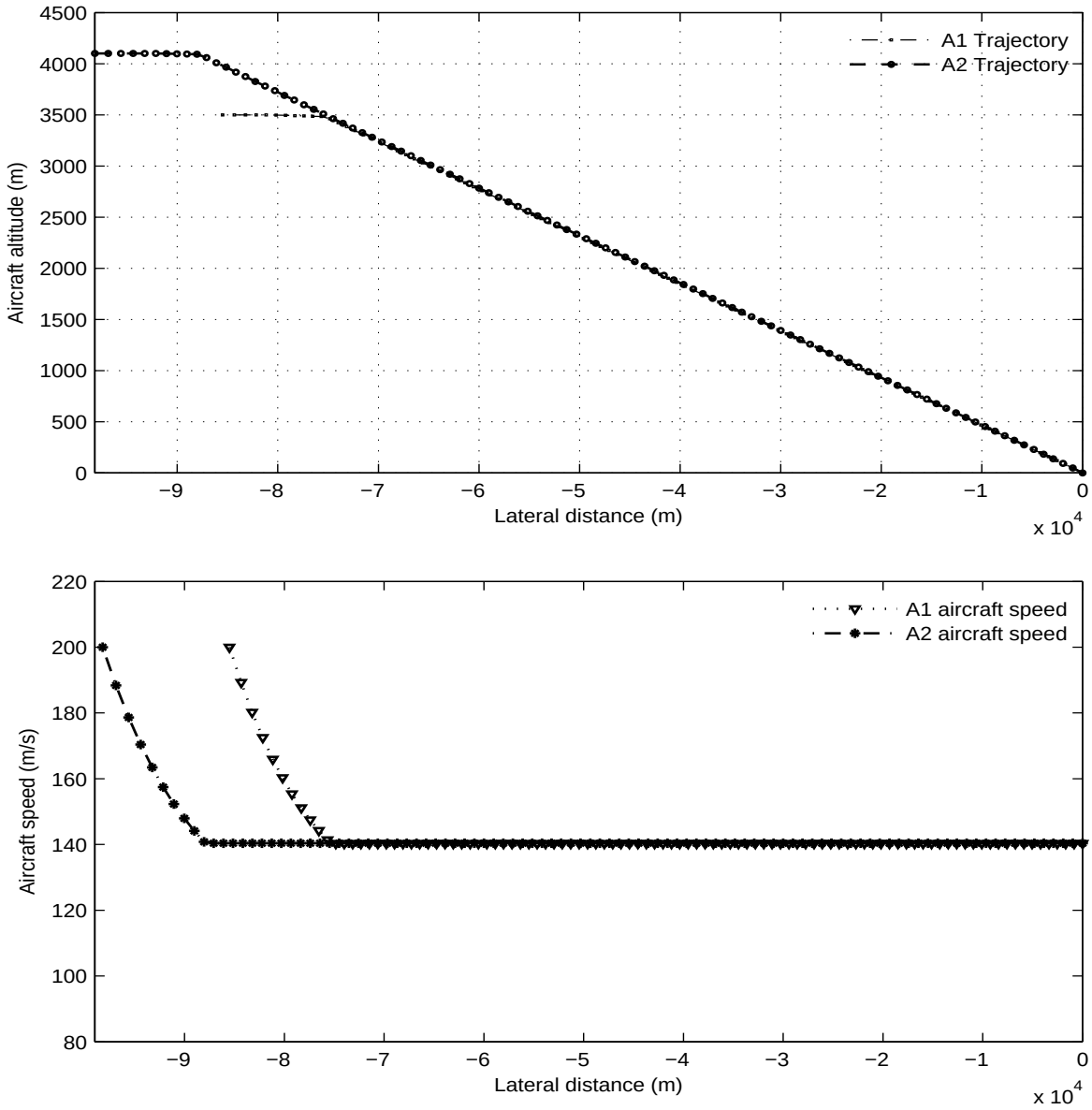


Figure III.5 – Aircraft optimal flight paths and speeds

Figure III.5 shows the trajectories which reflect a path in one level flight followed by a continuous descent till the aircraft touch point. The aircrafts' landing procedures are sufficiently

separated. It is obvious that each aircraft follows its optimal trajectory when considering the separation distance. Constraints on speeds described in the previous table are considered, allowing a subsequent landing on the same track. Thus, as recommended by ICAO, the security conditions are met and flight procedures are good as shown by the presented results. The maximum altitudes considered are 3500 m and 4100 m for the first and the second aircraft. The duration approach is 600 s for the first aircraft and 690 s for the second. This figure shows that after some time, we have obtained the same optimal trajectory for the two-aircraft even the procedures are different. This shows the aircraft trajectory resulting from the two trajectories combination. This figure also shows aircraft speed evolution during landing. For the first, the aircraft speed decreases from 200 m/s to 140 m/s and keeps a constant position till the end of the aircraft landing. This evolution remains the same for the speed of the second aircraft.

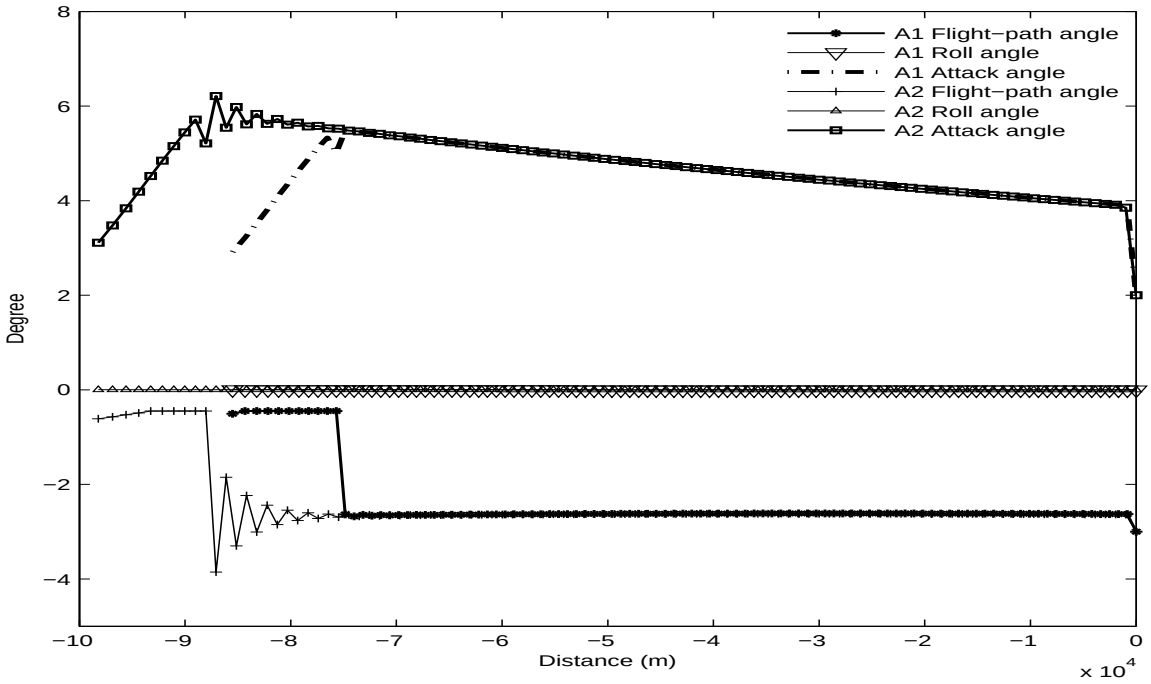


Figure III.6 – Aircraft flight angles

Figure III.6 shows the aircraft flight angles as recommended by ICAO during aircraft landing. As specified by this figure, the aircraft roll angles oscillate around zero, the flight-path angles are negative and keep the recommended position for aircraft landing procedures. This is the same for the attack angles. Angular variations confirmed the aircraft aerodynamic stability

and the flight safety.

Processing calculation provided that the aircraft throttle position is kept constant (0.6) during the landing procedures. The two-aircraft roll velocity $p_1,\ p_2$, pitch velocity $q_1,\ q_2$ and yaw velocity $r_1,\ r_2$, both related to earth frame, are obtained and they have a constant behavior. The behavior of the finesse also confirms the stability of the aircraft flight and reflects the flight procedures characteristic as shown by figures 5 and 6.

5 Conclusion

We have developed a numerical computation of two aircraft optimal control issue. An algorithm for solving the optimal control model has been developed. The algorithm minimizes a sequence of merit function using a sub-problem of the quadratic problem at each step for all active constraints to generate a search trust direction for all primal and dual variables. An optimal solution to the discretized problem is found through a local convergence. This solution show a noise reduction during the approach by considering the configuration of several observers. The results obtained present more interesting and acoustically efficient trajectory characteristics and performances.

Further research is needed to generalize the model by combining the perceived noise levels and the fuel consumption by aircraft as objective function using the goal programming technique. This work can also be extended to the case when the second aircraft is delayed 90 s while the two-aircraft flight paths arise the same.

References

[1] A. Filippone. *Comprehensive analysis of transport aircraft flight performance*, ScinceDirect article, Manchester M60 1QD, vol. 44, pp 192-236, April 2008.

[2] M. Ventre. *Les challenges environnementaux pour le transport aérien*, SAFRAN, Un leader technologique international, Septembre 2009

[3] O-I. Zapolozhets and V-I. Tokarev. *Predicted Flight Procedures for Minimum Noise Impact*, Vol 55, Numéro 2, pp129-149, Elsevier Science Ltd(Great Britain), Ukraine, 1998

[4] J-P. Jung, N. Barriety. *La voie de la science, Des outils pour optimiser la conception des avions en phase d'approche*, horizon Onera Midi-Pyrenees, Toulouse December 2008

[5] L. Abdallah, *Minimisation des bruits des avions commerciaux sous contraintes physiques et*

aérodynamiques. Thèse de Mathématiques Appliquées de l'UCBL I, Septembre 2007

[6] L. Abdallah M. Haddou S. Khardi. *Optimization of operational aircraft parameters reducing noise emission*, Applied Mathematical Sciences, Vol. 4, no 11, 515-535, 2010.

[7] K. Blin. *Stochastic conflict detection for air traffic management*, Eurocontrol Experimental centre Publications Office, France, April 2000

[8] J-L. Boiffier. *The Dynamics of Flight, The Equations*, SUPAÉRO (Ecole Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace) et ONERA-CERT, Toulouse 25 Janvier 1999

[9] B. Christof, M. Helmut. *SQP-methods for solving optimal control problems with control and state constraints : adjoint variables, sensitivity analysis and real-time control*, Elsivier Science, Journal of Computational and Applied Mathematics, Germany, August 2000, vol. 120, pp85-108

[10] A. Barclay, P-E. Gill, J-B. Rosen. *SQP methods and their application to numerical optimal control problem*, Report NA 97-3, Department of Mathematics, UNiversity of California, San Diego, USA, 1997

[11] E. Trélat. *Commande optimale*, University of Orléans, France, 2008

[12] J-C. Culioli. *Introduction à l'optimisation* Ellipses, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris 1994

[13] J-L Boiffier. *Dynamique de vol de l'avion*, SupAéro, Départements des Aéronefs Toulouse-Novembre 2001

[14] C. Stoica. *Analyse, représentation et optimisation de la circulation des avions sur une plate-forme aéroportuaire*, Thèse de l'Institut national polytechnique de Toulouse-CNRS, Mai, 2005

[15] R. Ruppli. *Algèbre linéaire, idées et méthodes*, I.U.T de Dijon, Ellipses, 2002

[16] E. Roux. *Pour une approche analytique de la dynamique du vol*, Thèse, SUPAERO-ONERA, Novembre 2005

[17] DGAC. *Mémento à l'usage des utilisateurs des procédures d'approche et de départ aux instruments*, Rapport de la DGAC, 5ême édition, Août 1995

[18] H. Sors. *Séparation et contrôle aérien*, International Virtual Aviation Organization [en ligne]disponible sur http ://academy.ivao.aero/, 15 octobre 2008

[19] DGAC. *Méthodes et minimums de séparations des aéronefs aux procédures*, Rapport de la DGAC, Fevrier 2009

[20] O. Dominique. *Cisaillement de vent ou Windshear*, http ://www.aviation-fr.info, 2008

[21] Ifrance. *Fiches techniques, historiques et photos d'avions A300-600, A300-600R* [en ligne] disponible sur http ://www.ifrance.com, Ifrance

[22] M. La Porte , J. Vignes. *Algorithmes numériques, analyse et mise en oeuvre 2, Equations*

non linéaires, Institut français du pétrole, TECHNIP,[on line] availlable on http ://books.google.com/, Paris, 1980,

[23] M. Bergounioux. *Optimisation et Controle des systèmes linéaires*, Cours et exercices corrigés Dunod, 2002

[24] J-C Gilbert. *Eléments d'optimisation différentiable - Théorie et Algorithmes*, INRIA Rocquencourt, France, 6 juin 2009

[25] M. Xavier-Jonsson. *Méthodes des points intérieurs et de régions de confiance en optimisation non-linéaire et application à la conception des verres ophtalmiques progressifs*, Thèse de l'Université Paris IV, 2002

[26] M. Ouriemchi. *Résolution de problèmes non-linéaires par les méthods des points intérieurs. Théorie et algorithmes*. Thèse de l'Université de Havre, 2005

[27] F. Nahayo and S. Khardi. *Les méthodes numériques appliquées en optimisation non-linéaire et en commande optimale*, Rapport LTE $N°$: 0911, Novembre 2009

[28] S. Khardi. *Mathematical Model for Advanced CDA and Takeoff Procedures Minimizing Aircraft Environmental Impact*, International mathematical Forum, 5, no 36, 1747 - 1774, 2010

[29] R-H. Byrd, J. Nocedal, R-A. Waltz. *KNITRO : An integrated Package for nonlinear optimization*, University of Colorado[en ligne]disponible sur http ://www.ziena.com, http ://www.ampl.com,February, 2006

[30] R-A. Waltz, T-D. Plantenga. *KNITRO user's Manual, Version 5.2*, University of Colorado [en ligne] disponible sur http ://www.ziena.com, February, 2008

[31] J. Stephen Wright, J. Tenny Mathew. *A feasible trust-region sequential quadratic programming algorithm*. Optimization technical report, University of Wisconsin, 2002

[32] S.Khardi. *Reduction of commercial aircraft noise emission around airports. A new environmental challenge*. Eur. Transp. Res. Rev., (2009) Vol1, pp175-184

[33] H. Harvey Hubbard. *Aeroacoustics of flight vehicles. Theory and Practices*. Volume 1 : Noise sources and Volume 2 : Noise Control, NASA Langley Research Center, Hampton, Virginia 1994

Appendix A : Explicit aircraft dynamic équations

In this appendix, we present the technical elements, but useful for understanding the paper. We report here the complete equations to describe the two-aircraft dynamics. All the coefficients in these equations are already defined in this paper.

The first aircraft dynamics equations are :

$$f_1 = \begin{cases} \dot{V_{a_1}} = \frac{1}{m_1}[-m_1 g sin\gamma_{a_1} - \frac{1}{2}\rho S_i V_{a_1}^2 C_D + (cos\alpha_{a_1} + sin\alpha_{a_1})F_{x_1} - \dot{m}_1 u_1] \\ \dot{\alpha_{a_1}} = \frac{1}{m_1 V_{a_1} cos\beta_{a_1}}[m_1 g cos\gamma_{a_1} cos\mu_{a_1} - \frac{1}{2}\rho S_1 V_{a_1}^2 C_{L_1} + [cos\alpha_{a_1} - sin\alpha_{a_1}]F_{z_1} \\ -\dot{m}_1 w_1],\ \dot{p}_1 = \frac{C}{AC - E^2}\{r_1 q_1 (B - C) - E p_1 q_1 + \frac{1}{2}\rho S_1 l V_{a_1}^2 C_{l_1}\} \\ + \frac{E}{AC - E^2}\{p_1 q_1 (A - B) - E r_1 q_1 + \frac{1}{2}\rho S_1 l V_{a_1}^2 C_{n1}\} \\ \dot{q}_1 = \frac{1}{B}\{-r_1 p_1 (A - C) - E(p_1^2 - r_1^2) + \frac{1}{2}\rho S_1 l V_{a_1}^2 C_{m1}\} \\ \dot{r}_1 = \frac{E}{AC - E^2}\{r_1 q_1 (B - C) + E p_1 q_1 + \frac{1}{2}\rho S_1 l V_{a_1}^2 C_{l_1} + \frac{A}{AC - E^2}\{p_1 q_1 (A - B) \\ -E r_1 q_i + \frac{1}{2}\rho S_1 l V_{a_1}^2 C_{n1}\},\ \dot{X}_{G_1}^o = V_{a_1} cos\gamma_{a_1} cos\chi_{a_1},\ \dot{Y}_{G_1}^o = V_{a_1} cos\gamma_{a_1} sin\chi_{a_1} \\ \dot{Z}_{G_1}^o = -V_{a_1} sin\gamma_{a_1},\ \dot{\varphi}_1 = p_1 + q_1 sin\varphi_1 tan\theta_1 + r_1 cos\varphi_1 tan\theta_1 \\ \dot{\theta}_1 = q_1 cos\varphi_1 - r_1 sin\varphi_1,\ \dot{\psi}_1 = \frac{sin\varphi_1}{cos\theta_1} q_1 + \frac{cos\varphi_1}{cos\theta_1} r_1 \\ \dot{m}_1 = -2.01 \times 10^{-5} \frac{(\Phi - \mu - \frac{K}{\eta_c})\sqrt{\Theta}}{\sqrt{5\eta_n(1 + \eta_{tf}\lambda)}\sqrt{G + 0.2M_1^2 \frac{\eta_d}{\eta_{tf}}\lambda} - (1 - \lambda)M_1} F_i \end{cases} \tag{III.25}$$

The second aircraft dynamics equations are

$$f_2 = \begin{cases} \dot{V_{a_2}} = \frac{1}{m_2}[-m_2 g sin\gamma_{a_2} - \frac{1}{2}\rho S_2 V_{a_2}^2 C_D + (cos\alpha_{a_2} + sin\alpha_{a_2})F_{x_2} - \dot{m}_2 u_2] \\ \dot{\alpha_{a_2}} = \frac{1}{m_2 V_{a_2} cos\beta_{a_2}}[m_2 g cos\gamma_{a_2} cos\mu_{a_2} - \frac{1}{2}\rho S_i V_{a_2}^2 C_{L_2} + [cos\alpha_{a_2} - sin\alpha_{a_2}]F_{z_2} \\ -\dot{m}_2 w_2],\ \dot{p}_2 = \frac{C}{AC - E^2}\{r_2 q_2 (B - C) - E p_2 q_2 + \frac{1}{2}\rho S_2 l V_{a_2}^2 C_{l_2}\} \\ + \frac{E}{AC - E^2}\{p_2 q_2 (A - B) - E r_2 q_2 + \frac{1}{2}\rho S_2 l V_{a_2}^2 C_{n2}\} \\ \dot{q}_2 = \frac{1}{B}\{-r_2 p_2 (A - C) - E(p_2^2 - r_2^2) + \frac{1}{2}\rho S_2 l V_{a_2}^2 C_{m2}\} \\ \dot{r}_2 = \frac{E}{AC - E^2}\{r_2 q_2 (B - C) + E p_2 q_2 + \frac{1}{2}\rho S_2 l V_{a_2}^2 C_{l_2} + \frac{A}{AC - E^2}\{p_2 q_2 (A - B) \\ -E r_2 q_2 + \frac{1}{2}\rho S_2 l V_{a_2}^2 C_{n2}\},\ \dot{X}_{G_2}^o = V_{a_2} cos\gamma_{a_2} cos\chi_{a_2},\ \dot{Y}_{G_2}^o = V_{a_2} cos\gamma_{a_2} sin\chi_{a_2} \\ \dot{Z}_{G_2}^o = -V_{a_2} sin\gamma_{a_2},\ \dot{\varphi}_2 = p_2 + q_2 sin\varphi_2 tan\theta_2 + r_2 cos\varphi_2 tan\theta_2 \\ \dot{\theta}_2 = q_2 cos\varphi_2 - r_2 sin\varphi_2,\ \dot{\psi}_2 = \frac{sin\varphi_2}{cos\theta_2} q_2 + \frac{cos\varphi_2}{cos\theta_2} r_2 \\ \dot{m}_2 = -2.01 \times 10^{-5} \frac{(\Phi - \mu - \frac{K}{\eta_c})\sqrt{\Theta}}{\sqrt{5\eta_n(1 + \eta_{tf}\lambda)}\sqrt{G + 0.2M_2^2 \frac{\eta_d}{\eta_{tf}}\lambda} - (1 - \lambda)M_2} F_2 \end{cases} \tag{III.26}$$

The limit numerical values for the two-aircraft flight dynamics are confined in the following table :

Maximum value	Minimum value
$V_{a1f} = V_{a2f} = 200\ m/s$	$V_{a10} = V_{a20} = 73.45\ m/s$
$Z^o_{G1f} = 35 \times 10^2\ m$	$Z^o_{G10} = 0\ m$
$Z^o_{G2f} = 41 \times 10^2\ m$	$Z^o_{G20} = 0\ m$
$\delta_{l1f} = \delta_{l2f} = 0.0174$	$\delta_{l10} = \delta_{l20} = -0.0174$
$\delta_{m1f} = \delta_{m2f} = 0.087$	$\delta_{m10} = \delta_{m20} = 0$
$\delta_{n1f} = \delta_{n2f} = 0.314$	$\delta_{n10} = \delta_{n20} = -0.035$
$\delta_{x1f} = \delta_{x2f} = 0.6$	$\delta_{x10} = \delta_{x20} = 0.2$
$\alpha_{a1f} = \alpha_{a2f} = 12^\circ$	$\alpha_{a10} = \alpha_{a20} = 2^\circ$
$\theta_{a1f} = \theta_{a2f} = 7^\circ$	$\theta_{a10} = \theta_{a20} = -7^\circ$
$\gamma_{a1f} = \gamma_{a2f} = 0^\circ$	$\gamma_{a10} = \gamma_{a20} = -5^\circ$
$\mu_{a1f} = \mu_{a2f} = 3^\circ$	$\mu_{a10} = \mu_{a20} = -2^\circ$
$\chi_{a1f} = \chi_{a2f} = 5^\circ$	$\chi_{a10} = \chi_{a20} = -5^\circ$
$\varphi_{a1f} = \varphi_{a2f} = 1^\circ$	$\varphi_{a10} = \varphi_{a20} = -1^\circ$
$\psi_{a1f} = \psi_{a2f} = 3^\circ$	$\psi_{a10} = \psi_{a20} = -3^\circ$
$t_{1f} = 600\ s$,$t_{2f} = 645\ s$	$t_{10} = 0\ s$, $t_{20} = 45\ s$
$m_{10} \simeq 1.1 \times 10^5\ kg$,	$m_{1f} \simeq 1.09055 \times 10^5\ kg$,
$m_{20} \simeq 1.10071 \times 10^5\ kg$	$m_{2f} \simeq 1.09126 \times 10^5\ kg$
$A = 5.555 \times 10^6\ kg\ m^2$	$B = 9.72 \times 10^6\ kg\ m^2$
$C = 14.51 \times 10^6\ kg\ m^2$	$E = -3.3 \times 10^4\ kg\ m^2$
$p_{1f} = p_{2f} = 1^\circ s^{-1}$	$p_{10} = p_{20} = -1^\circ s^{-1}$
$q_{1f} = q_{2f} = 3.6^\circ s^{-1}$	$q_{10} = q_{20} = 3^\circ s^{-1}$
$r_{1f} = r_{2f} = 12^\circ s^{-1}$	$r_{10} = r_{20} = -12^\circ s^{-1}$.
$Z_{12f} \geq 2 \times 10^3\ ft \simeq 6 \times 10^2\ m$	$Z_{120} = 2 \times 10^3\ ft \simeq 6 \times 10^2\ m$
$X_{G_{12f}} \geq 5\ NM \simeq 9 \times 10^3\ m$	$X_{G_{120}} = 5\ NM \simeq 9 \times 10^3\ m$

Table1. *Limit digital values for the two-aircraft flight dynamic*

Chapitre IV

Une méthode directe appliquée à un problème de contrôle optimal des avions en approche

Ce chapitre concerne la réduction des niveaux de bruit de deux avions en approche soumis à un atterrissage successif sur une seule piste. Ce chapitre comprend trois parties principales.

La première partie traite biensûr la modélisation mathématique des équations du problème de contrôle optimal de deux avions. Ici, quelque chose de nouveau apparaît car d'une part, on considère un cas général de la dynamique des avions et d'une autre part un cas où le deuxième avion doit attérir avec retard par rapport au premier avion lorsque les conditions de départ restent les mêmes. Ce cas se modélise par une fonction- objectif différente de la première. Les contraintes liées à la sécurité et la stabilité des avions, aux performances des avions et aux contraintes énegétiques liées à consommation du fuel sont prises en compte. Ce problème type contrôle optimal non convexe est régi par des équations différentielles ordinaires non-linéaires.

La deuxième partie traite les processus numériques appliqués où une méthode directe et un schéma de discrétisation de Runge-Kutta d'odre 4 sont utilisées. La programmation AMPL est maintenu et la solution sera extraite à base du solveur KNITRO.

La troisième partie fournit les résultats des traitements numériques et montre qu'il y a deux trajectoires optimales conduisant à une réduction des niveaux de bruit des avions à l'approche et qui donnent des caractéristiques de vol optimales pour une grande partie du vol. Ces trajectoires coincident pour la dernière partie d'attérissage étant donné qu'une seule piste reste privillégiée.

Ces résultats font objet d'une soumission en cours au journal « Control and Cybernetics » edité depuis 1972 par l'Institut des Systèmes de Recherche de l'Académie Polonaise des Sciences, comme le montre la partie suivante du chapitre.

1 A direct method applied to aircraft optimal control problem on approach. RK4 scheme and KNITRO solver

F. Nahayo[†,ᵀ] M. Haddou[⊣] M. Hamadiche[∓] S. Khardi[ᵀ]

[†] University Claude Bernard of Lyon 1, France
[ᵀ] IFSTTAR-LTE, Lyon - France
[⊣] University of Orléans. CNRS-MAPMO, France
[∓] University Claude Bernard of Lyon 1, LMFA, France

Abstract *: This paper aims to reduce noise levels on the ground of two-aircraft landing successively on approach. Constraints related to stability, performance and flight safety are taken into account. This problem is a non-convex optimal control that is governed by ordinary non-linear differential equations. To solve this problem, a direct method and a Runge-Kutta 'RK4' discretization scheme are used. The Nonlinear Interior point Trust Region Optimization solver 'KNITRO' is applied. Numerical processing showed that there were two optimal trajectories leading to a reduction of noise levels on approach and which provided optimal flight characteristics for a large section of the flight.*

Keywords *: Runge-Kutta algorithm, optimal control problem, aircraft noise levels, AMPL programming, KNITRO*

1.1 Introduction

Aircraft noise levels have been studied in several papers [1, 2]. In this work, a theoretical model of noise optimization is developped while maintaining a reliable evolution of the flight procedures of two commercial aircraft on approach. In particular, this work is focused on aircraft coupling noise levels and energetic consumption. These two-aircraft are supposed to land successively on one runway without conflict [3]. It is all about the evolution of flight dynamics and minimization of noise for two similar commercial landing aircraft taking into account the flight constraints. The model considered here is non-convex and non-linear optimal

control problem leading to a system of non-linear ordinary differential equations [4]. In this model, the displacement of the two planes is described by a three dimensional set of non-linear ordinary differential equations subjected to state and control constraints. The functional to be minimized is an integral which describes the overall levels of noise collected on the ground, emitted by the two mentioned aircraft. The formulation of the problem takes into account several kinds of constraints such as aircraft stability, performance and flight safety.

A fourth Runge-Kutta method is used to transform the obtained set of non-linear ordinary differential equations to a set of non-linear algebric ones [5]. A commercial code namely The Nonlinear Interior point Trust Region Optimization solver 'KNITRO' [6] is used to solve the obtained algebric non-linear system of equation implemented by A Modeling Language for Mathematical Programming 'AMPL'[7, 8].

The two-aircraft flight dynamic, the noise levels, the constraints, the mathematical basic equations of the two-aircraft acoustic optimal control problem and the fourth order Runge-Kutta discretization scheme are presented in sections 2 and 3 while the numerical experiments are presented in the last section.

1.2 Mathematical description of the basic equations

The three dimensional motion of each aircraft $A_i, i \in \{1, 2\}$ where i stands for the first and second aircraft respectively , is described in three frames, namely landmark $R_O(O, \overrightarrow{X}_1, \overrightarrow{Y}_1, \overrightarrow{Z}_1)$, aircraft frame $R_b(G_i, \overrightarrow{X}_{Gi}, \overrightarrow{Y}_{Gi}, \overrightarrow{Z}_{Gi})$ and aerodynamic frame $R_a(G_i, \overrightarrow{X}_{ai}, \overrightarrow{Y}_{ai}, \overrightarrow{Z}_{ai})$ [9]. The transfer matrices connecting these frames are given in [10]. The equations of motion of each aircraft read :

$$\begin{array}{ll} \sum \overrightarrow{F}_{ext_i} - \frac{dm_i}{dt}\overrightarrow{V_{a_i}} & = \frac{m_i d\overrightarrow{V}_{a_i}}{dt} \\ \sum \overrightarrow{M}_{ext_{G_i}} & = \frac{d}{dt}[I_{G_i}\overrightarrow{\Omega}_i] \end{array} \qquad \text{(IV.1)}$$

The index i = 1, 2 stands for the first and second aircraft. In the above system, $\overrightarrow{F}_{ext_i}$ represents the external forces acting on the aircraft, $m_i(t)$ the mass of the aircraft, V_{ai} the airspeed of aircraft, $\overrightarrow{M}_{ext_{G_i}}$ the external moments of each aircraft, $I(G_i, A_i)$ the inertia matrix. The time derivation is for an observator attached to frame R_O and the equations are written in R_a. The acceleration is obtained with two time derivations of the position. The relations between the derivatives in the two frames are connected by the well known equation

$$\frac{d\overrightarrow{X}}{dt}|_{R_O} = \frac{d\overrightarrow{X}}{dt}_{R_a} + \overrightarrow{\Omega}_{R_a/R_O} \times \overrightarrow{X}$$

where $\frac{d\vec{X}}{dt}|_{R_O}$ is the derivative with respect to time of the vector $\overrightarrow{X}$ in the vehicle-carried normal Earth frame R_O, $\frac{d\vec{X}}{dt}|_{R_a}$ is the derivative with respect to time of the vector $\overrightarrow{X}$ in the frame R_a , Ω_i is the angular velocity of the aircraft and $\overrightarrow{\Omega}_{R_a/R_O}$ is the angular velocity of the frame R_1 relative to the frame R_0. After transformations and simplifications, the system takes the following explicit form :

$$
\left\{\begin{array}{ll}
\dot{m}_i & = -2.01\times10^{-5}\frac{(\Phi-\mu_i-\frac{K_i}{\eta_c})\sqrt{\Theta}}{\sqrt{5\eta_n(1+\eta_{tf_i}\lambda)}\sqrt{G_i+0.2M_i^2\frac{\eta_{d_i}}{\eta_{tf_i}}\lambda-(1-\lambda)M_i}}P_0\delta_{xi}\frac{\rho_i}{\rho_0}(1-M_i+\frac{M_i^2}{2}) \\
\dot{V_{a_i}} & = \frac{1}{m_i}[-m_igsin\gamma_{a_i}-\frac{1}{2}\rho_iSV_{a_i}^2C_{D_i}+(cos\alpha_{a_i}cos\beta_{a_i}+sin\beta_{a_i}+sin\alpha_{a_i}cos\beta_{a_i})F_{x_i} \\
 & +C_{SRi}P_0\delta_{xi}\frac{\rho_i}{\rho_0}(1-M_i+\frac{M_i^2}{2})u_i-m_i\Delta A_u^i] \\
\dot{\beta_{a_i}} & = \frac{1}{m_iV_{a_i}}[m_igcos\gamma_{a_i}sin\mu_{a_i}+\frac{1}{2}\rho_iSV_{a_i}^2C_{y_i}+[-cos\alpha_{a_i}sin\beta_{a_i}+cos\beta_{a_i}-sin\alpha_{a_i}sin\beta_{a_i}]F_{y_i} \\
 & +C_{SRi}P_0\delta_{xi}\frac{\rho_i}{\rho_0}(1-M_i+\frac{M_i^2}{2})v_i-m_i\Delta A_v^i] \\
\dot{\alpha_{a_i}} & = \frac{1}{m_iV_{a_i}cos\beta_{a_i}}[m_igcos\gamma_{a_i}cos\mu_{a_i}-\frac{1}{2}\rho_iSV_{a_i}^2C_{L_i}+[-sin\alpha_{a_i}+cos\alpha_{a_i}]F_{z_i} \\
 & +C_{SRi}P_0\delta_{xi}\frac{\rho_i}{\rho_0}(1-M_i+\frac{M_i^2}{2})w_i-m_i\Delta A_w^i] \\
\dot{p_i} & = \frac{C[r_iq_i(B-C)-Ep_iq_i+\frac{1}{2}\rho_iSlV_{ai}^2C_{li}+MF_x^b]}{AC-E^2} \\
 & +\frac{E[p_iq_i(A-B)-Er_iq_i+\frac{1}{2}\rho_iSlV_{ai}^2C_{ni}+MF_z^b]}{AC-E^2} \\
\dot{q_i} & = \frac{1}{B}\{-r_ip_i(A-C)-E(p^2-r_i^2)+\frac{1}{2}\rho_iSlV_{ai}^2C_{mi}+MF_y^b\} \\
\dot{r_i} & = \frac{E}{AC-E^2}\{r_iq_i(B-C)+Ep_iq_i+\frac{1}{2}\rho_iSlV_{ai}^2C_{li}+MF_x^b\} \\
 & +\frac{A}{AC-E^2}\{p_iq_i(A-B)-Er_iq_i+\frac{1}{2}\rho_iSlV_{ai}^2C_{ni}+MF_z^b\} \\
\dot{X}_{G_i} & = V_{a_i}cos\gamma_{a_i}cos\chi_{a_i}+u_w \\
\dot{Y}_{G_i} & = V_{a_i}cos\gamma_{a_i}sin\chi_{a_i}+v_w \\
\dot{Z}_{G_i} & = -V_{a_i}sin\gamma_{a_i}+w_w \\
\dot{\varphi}_i & = p_i+q_isin\varphi_itan\theta_i+r_icos\varphi_itan\theta_i \\
\dot{\theta}_i & = q_icos\varphi_i-r_isin\varphi_i \\
\dot{\psi}_i & = \frac{sin\varphi_i}{cos\theta_i}q_i+\frac{cos\varphi_i}{cos\theta_i}r_i
\end{array}\right. \tag{IV.2}
$$

where $j \in \{1,2\}$ stands for the first and second engine of each aircraft i, the expressions $A = I_{xx}, B = I_{yy}, C = I_{zz}, E = I_{xz}$ are the inertia moments of the aircraft, ρ_i is the air density, S is the aircraft reference area, l is the aircraft reference length, g is the acceleration due to

gravity,

$$C_{D_i} = C_{D0} + kC_{Li}^2$$

is the drag coefficient,

$$C_{yi} = C_{y\beta}\beta + C_{yp}\frac{pl}{V} + C_{yr}\frac{rl}{V} + C_{Y\delta_l}\delta_{li} + C_{Y\delta_n}\delta_{ni}$$

is the lateral forces coefficient,

$$C_{Li} = C_{L\alpha}(\alpha_a - \alpha_{a0}) + C_{L\delta_m}\delta_{mi} + C_{LM}M_i + C_{Lq}\frac{q_a^b l}{V}$$

is the lift coefficient,

$$C_{li} = C_{l\beta}\beta + C_{lp}\frac{pl}{V} + C_{lr}\frac{rl}{V} + C_{l\delta_l}\delta_{li} + C_{l\delta_n}\delta_{ni}$$

is the rolling moment coefficient,

$$C_{mi} = C_{m0} + C_{m\alpha}(\alpha - \alpha_0) + C_{m\delta_m}\delta_{mi}$$

is the pitching moment coefficient,

$$C_{ni} = C_{n\beta}\beta + C_{np}\frac{pl}{V} + C_{nr}\frac{rl}{V} + C_{n\delta_l}\delta_{li} + C_{n\delta_n}\delta_{ni}$$

is the yawing moment coefficient, $(x_{Mij}^b, x_{Mij}^b, x_{Mij}^b)$ is the position of the engine in the body frame, P_0 is the full thrust, ρ_0 is the atmospheric density at the ground, $F = (F_{xi}, F_{yi}, F_{zi})$ is the propulsive force, $V_{ai} = (u_i, v_i, w_i)$ is the aerodynamic speed, $(\Delta A_u^i, \Delta A_v^i, \Delta A_w^i)$ is the complementary acceleration, (u_w, v_w, w_w) is the wind velocity, The propulsion moment MF^b is given e by the following expressions :

$$\begin{aligned}
MF_x^b &= \sum_{j=1}^{2} F_j[y_{Mj}^b cos\beta_{mj} sin\alpha_{mj} - z_{Mj}^b sin\beta_{mj}] \\
MF_y^b &= \sum_{j=1}^{2} F_j[z_{Mj}^b cos\beta_{mj} cos\alpha_{mj} - x_{Mj}^b cos\beta_{mj} sin\alpha_{mj}] \\
MF_z^b &= \sum_{j=1}^{2} F_j[x_{Mj}^b sin\beta_{mj} - y_{Mj}^b cos\beta_{mj} cos\alpha_{mj}]
\end{aligned}$$

where β_{mij} is the yaw setting of the engine and α_{mij} is the pitch setting of the engine. The mass change is reflected in the aircraft fuel consumption as described by E. Torenbeek [11] where the specific consumption is

$$C_{SR_i} = 2.01 \times 10^{-5} \frac{(\Phi - \mu_i - \frac{K_i}{\eta_c})\sqrt{\Theta}}{\sqrt{5\eta_n(1+\eta_{tf_i}\lambda)}\sqrt{G_i + 0.2M_i^2\frac{\eta_{d_i}}{\eta_{tf_i}}\lambda - (1-\lambda)M_i}}$$

with the generating function G_i :

$$\begin{aligned} G &= (\Phi - \tfrac{K_i}{\eta_c})(1 - \frac{1.01}{\eta_i^{\frac{\nu-1}{\nu}}(K_i+\mu_i)(1-\frac{K_i}{\Phi\eta_c\eta_t})}) \\ K_i &= \mu_i(\epsilon_c^{\frac{\nu-1}{\nu}} - 1) \\ \mu_i &= 1 + \tfrac{\nu-1}{2}M_i^2 \end{aligned}$$

The nomenclature of engine performance variables are given by G_i the gas generator power function, G0 the gas generator power function (static, sea level), K the temperature function of compression process, M_i the flight Mach number, T4 the turbine Entry total Temperature, T0 the ambient temperature at sea level, T the flight temperature, while the nomenclature of engines yields is $\eta_c = 0.85$ the isentropic compressor efficiency,

$$\eta_{d_i} = 1 - 1.3(\frac{0.05}{Re^{\frac{1}{5}}})^2(\frac{0.5}{M_i})^2\frac{L}{D}$$

, the isentropic fan intake duct efficiency, L the duct length, D the inlet diameter, Re the Reynolds number at the entrance of the nozzle,

$$\eta_{f_i} = 0.86 - 3.13 \times 10^{-2}M_i$$

the isentropic fan efficiency,

$$\eta_i = \frac{1 + \eta_{d_i}\frac{\gamma-1}{2}M_i^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2}M_i^2}$$

the gas generator intake stagnation pressure ratio, $\eta_n = 0.97$ the isentropic efficiency of expansion process in nozzle, $\eta_t = 0.88$ the isentropic turbine efficiency $\eta_{tf_i} = \eta_t\eta_{f_i}$, ϵ_c the overall pressure ratio (compressor), ν the ratio of specific heats $\nu = 1.4$, λ the bypass ratio, μ_i the ratio of stagnation to static temperature of ambient air, Φ the nondimensional turbine entry temperature $\Phi = \frac{T_4}{T}$ and Θ the relative ambient temperature $\Theta = \frac{T}{T_0}$. The expressions $\alpha_{ai}(t), \beta_{ai}(t), \theta_i(t), \psi_i(t), \varphi_i(t), V_{a_i}(t), X_{G_i}(t), Y_{G_i}(t), Z_{G_i}(t), p_i(t), q_i(t), r_i(t), m_i(t)$ are respectively

the attack angle, the aerodynamic sideslip angle, the inclination angle, the cup, the roll angle, the airspeed, the position vectors, the roll velocity of the aircraft relative to the earth, the pitch velocity of the aircraft relative to the earth, the yaw velocity of the aircraft relative to the earth and the aircraft mass.

The system (IV.2) could be written in a simplified form

$$\frac{d\mathbf{y}_i(t)}{dt} = \mathbf{f}_i(\mathbf{y}_i(t), \mathbf{u}_i(t)) \tag{IV.3}$$

henceforth $\mathbf{y}_i$ is called a state function :

$$\begin{aligned} &\mathbf{y}_i : [t_0, t_f] \longrightarrow \mathbb{R}^{13} \\ &\mathbf{y}_i(t) = (\alpha_{ai}(t), \beta_{ai}(t), \theta_{ai}(t), \psi_{ai}(t), \varphi_i(t), V_{a_i}(t), X_{G_i}(t), Y_{G_i}(t), Z_{G_i}(t), p_i(t), q_i(t), r_i(t), m_i(t)) \end{aligned} \tag{IV.4}$$

The control vector is

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_i : [t_0, t_f] &\longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ t &\longrightarrow \mathbf{u}_i(t) = (\delta_{l_i}(t), \delta_{m_i(t)}, \delta_{n_i}(t), \delta_{x_i}(t)) \end{aligned} \tag{IV.5}$$

where the expressions $\delta_{l_i}(t), \delta_{m_i(t)}, \delta_{n_i}(t), \delta_{x_i}(t)$ are respectively the roll control, the pitch control, the yaw control and the thrust control. The dynamics relationship can be written as :

$$\dot{\mathbf{y}}_i(t) = \mathbf{f}_i(\mathbf{y}_i, \mathbf{u}_i, t), \forall t \in [0, T], y_i(0) = y_{i0} \tag{IV.6}$$

The angles $\gamma_{a_i}(t), \chi_{a_i}(t), \mu_{a_i}(t)$ corresponding respectively to the aerodynamic climb angle (air-path inclination angle), the aerodynamic azimuth (air-path track angle) and the air-path bank angle (aerodynamic bank angle) are not taken as state in this model.

To simplify the model, the atmosphere standards conditions are considered. The engine angles, the complementary acceleration and the aerodynamic sideslip angle are neglected because the wind is constant and there is no engine failure. With some complex mathematical transformations, the dynamic system (IV.2) becomes :

$$\begin{cases}
\dot{m}_i &= -2.01\times10^{-5}\dfrac{(\Phi-\mu_i-\frac{K_i}{\eta_c})\sqrt{\Theta}}{\sqrt{5\eta_n(1+\eta_{tf_i}\lambda)}\sqrt{G_i+0.2M_i^2\frac{\eta_{d_i}}{\eta_{tf_i}}\lambda-(1-\lambda)M_i}}P_0\delta_{xi}\frac{\rho_i}{\rho_0}(1-M_i+\frac{M_i^2}{2}) \\
\dot{V_{a_i}} &= \frac{1}{m_i}[-m_igsin\gamma_{a_i}-\frac{1}{2}\rho_iSV_{a_i}^2C_{D_i}+(cos\alpha_{a_i}+sin\alpha_{a_i})F_{x_i} \\
&\quad +C_{SRi}P_0\delta_x\frac{\rho_i}{\rho_0}(1-M_i+\frac{M_i^2}{2})u_i] \\
\dot{\alpha_{a_i}} &= \frac{1}{m_iV_{a_i}cos\beta_{a_i}}[m_igcos\gamma_{a_i}cos\mu_{a_i}-\frac{1}{2}\rho_iSV_{a_i}^2C_{L_i}+[cos\alpha_{a_i}-sin\alpha_{a_i}]F_{z_i} \\
&\quad +C_{SR_i}P_0\delta_x\frac{\rho_i}{\rho_0}(1-M_i+\frac{M_i^2}{2})w_i] \\
\dot{p}_i &= \frac{C}{AC-E^2}\{r_iq_i(B-C)-Ep_iq_i+\frac{1}{2}\rho_iSlV_{a_i}^2C_{l_i}\} \\
&\quad +\frac{E}{AC-E^2}\{p_iq_i(A-B)-Er_iq_i+\frac{1}{2}\rho SlV_{a_i}^2C_{ni} \\
\dot{q}_i &= \frac{1}{B}\{-r_ip_i(A-C)-E(p_i^2-r_i^2)+\frac{1}{2}\rho_iSlV_{a_i}^2C_{mi}\} \\
\dot{r}_i &= \frac{E}{AC-E^2}\{r_iq_i(B-C)+Ep_iq_i+\frac{1}{2}\rho_iSlV_{a_i}^2C_{l_i} \\
&\quad +\frac{A}{AC-E^2}\{p_iq_i(A-B)-Er_iq_i+\frac{1}{2}\rho_iSlV_{a_i}^2C_{ni}\} \\
\dot{X}_{G_i} &= V_{a_i}cos\gamma_{a_i}cos\chi_{a_i} \\
\dot{Y}_{G_i} &= V_{a_i}cos\gamma_{a_i}sin\chi_{a_i} \\
\dot{Z}_{G_i} &= -V_{a_i}sin\gamma_{a_i} \\
\dot{\varphi}_i &= p_i+q_isin\varphi_itan\theta_i+r_icos\varphi_itan\theta_i \\
\dot{\theta}_i &= q_icos\varphi_i-r_isin\varphi_i \\
\dot{\psi}_i &= \frac{sin\varphi_i}{cos\theta_i}q_i+\frac{cos\varphi_i}{cos\theta_i}r_i
\end{cases} \tag{IV.7}$$

By the combination of this system with the aircraft control, one has the two-aircraft dynamic flight model as shown in (IV.6). So, the state vector becomes :

$$\begin{aligned}
&\mathbf{y}_i : [t_0, t_f] \longrightarrow \mathbb{R}^{12} \\
&\mathbf{y}_i = (\alpha_{ai}(t), \theta_{ai}(t), \psi_{ai}(t), \varphi_{ai}(t), V_{a_i}(t), X_{G_i}(t), Y_{G_i}(t), Z_{G_i}(t), p_i(t), q_i(t), r_i(t), m_i(t))
\end{aligned} \tag{IV.8}$$

The previous state function together with the cost function and the set of constraints form the basic equations of the optimal control problem which shall be shown in the following paragraphs.

The objective function model.

In this work, two different cost functions are considered. In order to build the first cost function, let us define the quantity named The Sound Exposure Level 'SEL'[12, 13, 14] :

$$SEL = 10log\left[\int_{t'} 10^{0.1L_{A1,dt}(t)}dt\right] \tag{IV.9}$$

where t' is the noise event interval. $[t_{10}, t_{1f}]$ and $[t_{20}, t_{2f}]$ are the respective approach intervals for the first and second aircraft, the objective function is calculated as :

$$\begin{aligned} SEL_1 &= 10log\left[\tfrac{1}{t_o}\int_{t_{10}}^{t_{20}} 10^{0.1L_{A1,dt}(t)}dt\right], t \in [t_{10}, t_{20}] \\ SEL_{12} &= SEL_{11} \oplus SEL_{21} = 10\log[\tfrac{1}{t_o}\int_{t_{20}}^{t_{1f}} 10^{0.1L_{A1,dt}(t)}dt + \tfrac{1}{t_o}\int_{t_{20}}^{t_{1f}} 10^{0.1L_{A2,dt}(t)}dt], t \in [t_{20}, t_{1f}] \\ SEL_2 &= 10\log\left[\tfrac{1}{t_o}\int_{t_{1f}}^{t_{2f}} 10^{0.1L_{A2,dt}(t)}dt\right], t \in [t_{1f}, t_{2f}] \end{aligned}$$

and finally, the first cost function reads

$$\begin{aligned} SEL_G &= \tfrac{(t_{20}-t_{10})SEL_1 \oplus (t_{1f}-t_{20})SEL_{12} \oplus (t_{2f}-t_{1f})SEL_2}{t_{2f}-t_{10}} \\ &= 10\log\{\tfrac{1}{t_{2f}-t_{10}}[(t_{20}-t_{10})\int_{t_{10}}^{t_{20}} 10^{0.1L_{A1}(t)}dt + (t_{1f}-t_{20})\int_{t_{20}}^{t_{1f}} 10^{0.1L_{A1}(t)}dt \\ &+(t_{1f}-t_{20})\int_{t_{20}}^{t_{1f}} 10^{0.1L_{A2}(t)}dt + (t_{2f}-t_{1f})\int_{t_{1f}}^{t_{2f}} 10^{0.1L_{A2}(t)}dt,]\}, t \in [t_{10}, t_{2f}] \end{aligned} \quad \text{(IV.10)}$$

where SEL_G is the cumulated two-aircraft noise and the operator $\oplus$ means the acoustic adding. Expressions $L_{A1}(t), L_{A2}(t)$ are equivalent and reflect the aircraft jet noise given by the formula [12, 15] :

$$L_{A1}(t) = 141 + 10\log\left(\frac{\rho_1}{\rho_i}\right)^w + 10\log\left(\frac{V_e}{c}\right)^{7.5} + 10\log s_1 + 3\log\left(\frac{2s_1}{\pi d_1^2} + 0.5\right) + 5\log\frac{\tau_1}{\tau_2}$$
$$+10\log\left[\left(1-\frac{v_2}{v_1}\right)^{me} + 1.2\frac{\left(1+\frac{s_2 v_2^2}{s_1 v_1^2}\right)^4}{\left(1+\frac{s_2}{s_1}\right)^3}\right] - 20\log R + \Delta V + 10\log\left[\left(\frac{\rho_i}{\rho_{ISA}}\right)^2\left(\frac{c}{c_{ISA}}\right)^4\right]$$

where v_1 is the jet speed at the entrance of the nozzle, v_2 the jet speed at the nozzle exit, τ_1 the inlet temperature of the nozzle, τ_2 the temperature at the nozzle exit, ρ_i the density of air, ρ_1 the atmospheric density at the entrance of the nozzle, ρ_{ISA} the atmospheric density at ground, s_1 the entrance area of the nozzle hydraulic engine, s_2 the emitting surface of the nozzle hydraulic engine, d_1 the inlet diameter of the nozzle hydraulic engine,

$$V_e = v_1[1 - (V/v_1)\cos(\alpha_p)]^{2/3}$$

the effective speed (α_p is the angle between the axis of the motor and the axis of the aircraft), R the source observer distance, w the exponent variable defined by :

$$w = \frac{3(V_e/c)^{3.5}}{0.6 + (V_e/c)^{3.5}} - 1$$

c the sound velocity (m/s), me the exhibiting variable depending on the type of aircraft :

$$me = 1.1\sqrt{\frac{s_2}{s_1}}, \quad \frac{s_2}{s_1} < 29.7; me = 6.0, \quad \frac{s_2}{s_1} \geq 29.7$$

the term

$$\Delta V = -15log(C_D(M_c, \theta)) - 10log(1 - Mcos\theta)$$

means the Doppler convection when

$$C_D(M_c, \theta) = [(1 + M_c cos\theta)^2 + 0.04M_c^2]$$

M the aircraft Mach Number, M_c the convection Mach Number :

$$M_c = 0.62(v_1 - Vcos(\alpha_p))/c$$

θ is the Beam angle.

The objective formula above could be written in the following simplified form

$$J_{G12}(\mathbf{y}(.), \mathbf{u}(.)) = \int_{t'} g(\mathbf{y}(t), \mathbf{u}(t))dt$$

In the second case where the second plane is delayed δ_t from the first one, the flight procedures remain the same for the two-aircraft and the cost function is :

$$\begin{array}{ll} J(\mathbf{y}(.), \mathbf{u}(.)) & = \int_{t_0}^{t_0+\delta_t} 10^{0.1L_{A1}(t)}dt, t \in [t_0, t_0 + \delta_t] \\ J(\mathbf{y}(.), \mathbf{u}(.)) & = \int_{t_0+\delta_t}^{t_f} [10^{0.1L_{A1}(t)} + 10^{0.1L_{A2}(t-\delta_t)}]dt, t \in [t_0 + \delta_t, t_f] \\ J(\mathbf{y}(.), \mathbf{u}(.)) & = \int_{t_f}^{t_f+\delta_t} 10^{0.1L_{A2}(t-\delta_t)}dt, t \in [t_f, t_f + \delta_t] \end{array} \quad \text{(IV.11)}$$

where $L_{A2}(t) = L_{A1}(t)$.

Constraints. The considered constraints concern aircraft flight speeds and altitudes, flight angles and control positions, energy constraint, aircraft separation, flight velocities of aircraft relative to the earth and the aircraft mass :

1. The vertical separaticette on given by $Z_{G_{12}} = Z_{G_2} - Z_{G_1}$ where Z_{G_1}, Z_{G_2} are respectively the altitude of the first and second aircraft and $Z_{G_{12}}$ the altitude separation.
2. The horizontal separation $X_{G_{12}} = X_{G_1} - X_{G_2}$ [16, 17, 18] where X_{G_1}, X_{G_2} are horizontal positions of the first and second aircraft and their separation distance.
3. The aircraft speed V_{a_i} must be bounded as follows $1.3V_s \leq V_{a_i} \leq V_{if}$ where V_s is the

stall speed,V_{if} is the maximum speed and $V_{io} = 1.3V_s$ the minimum speed of the aircraft A_i [11, 19], the roll velocity of the aircraft relative to the earth $p_i \in [p_{i0}, p_{if}]$, the pitch velocity of the aircraft relative to the earth $q_i \in [q_{i0}, q_{if}]$ and the yaw velocity of the aircraft relative to the earth $r_i \in [r_{i0}, r_{if}]$.

4. On the approach, the ICAO standards and aircraft manufacturers require flight angle evolution as follows : attack angle $\alpha_{a_i} \in [\alpha_{io}, \alpha_{if}]$, the inclination angle $\theta_i \in [\theta_{i0}, \theta_{if}]$ and the roll angle $\varphi_i \in [\varphi_{io}, \varphi_{if}]$.

5. The aircraft control $\delta(t) = (\delta_{l_i}(t), \delta_{m_i(t)}, \delta_{n_i}(t), \delta_{x_i}(t))$ is maintained between the position δ_{li0} and δ_{lif} for the roll control, δ_{mi0} and δ_{mif} for the pitch control, δ_{ni0} and δ_{nif} for the yaw control and δ_{xi0} and δ_{xif} for the thrust.

6. The mass m_i of the aircraft A_i is variable : $m_{i0} < m_i < m_{if}, i = 1, 2$. This constraint results in energy consumption of the aircraft [20, 21].

On the whole, the constraints come together under the relationship :

$$\begin{aligned} k_{1i}(\mathbf{y}_i, \mathbf{u}_i) &\leq 0 \\ k_{2i}(\mathbf{y}_i, \mathbf{u}_i) &\geq 0 \end{aligned} \tag{IV.12}$$

where

$$\begin{aligned} k(t) &: \mathbb{R}^{12} \times \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^{16}, (\mathbf{y}_i, \mathbf{u}_i) \longrightarrow k_i(\mathbf{y}_i, \mathbf{u}_i) \\ k_{1i}(\mathbf{y}_i, \mathbf{u}_i) &= (\alpha_i(t) - \alpha_{if}, \theta_i(t) - \theta_{if}, \psi_i(t) - \psi_{if}, \varphi_i(t) - \varphi_{if}, V_{a_i}(t) - V_{aif}, X_{G_i}(t) - X_{Gif}, \\ &\quad Y_{G_i}(t) - Y_{Gif}, Z_{G_i}(t) - Z_{Gif}, p_i(t) - p_{if}, q_i(t) - q_{if}, r_i(t) - r_{if}, \delta_{l_i}(t) - \delta_{l_if}, \\ &\quad \delta_{m_i}(t) - \delta_{mif}, \delta_{n_i}(t) - \delta_{nif}, \delta_{x_i}(t) - \delta_{xif}, m_i(t) - m_{if}) \\ k_{2i}(\mathbf{y}_i, \mathbf{u}_i) &= (\alpha_i(t) - \alpha_{i0}, \theta_i(t) - \theta_{i0}, \psi_i(t) - \psi_{i0}, \varphi_i(t) - \varphi_{i0}, V_{a_i}(t) - V_{ai0}, X_{G_i}(t) - X_{Gi0}, \\ &\quad Y_{G_i}(t) - Y_{Gi0}, Z_{G_i}(t) - Z_{Gi0}, p_i(t) - p_{i0}, q_i(t) - q_{i0}, r_i(t) - r_{i0}, \delta_{l_i}(t) - \delta_{l_i0}, \\ &\quad \delta_{m_i}(t) - \delta_{mi0}, \delta_{n_i}(t) - \delta_{ni0}, \delta_{x_i}(t) - \delta_{xi0}, m_i(t) - m_{i0}) \end{aligned}$$

The following values reflect the digital applications considered for the two-aircraft [10, 11, 12, 20].

Table : Limit values for the two-aircraft in approach		
Constraint denomination	maximum value	minimum value
Aircraft speed	$V_{a1f} = V_{a2f} = 200\ m/s$	$V_{a10} = V_{a20} = 73.45\ m/s$
A1 Aircraft altitude	$Z_{G1f} = 35 \times 10^2\ m$	$Z_{G10} = 0\ m$
A2 Aircraft altitude	$Z_{G2f} = 41 \times 10^2\ m$	$Z_{G20} = 0\ m$
Aircraft roll control	$\delta_{l1f} = \delta_{l2f} = 0.0174$	$\delta_{l10} = \delta_{l20} = -0.0174$
Pitch control	$\delta_{m1f} = \delta_{m2f} = 0.087$	$\delta_{m10} = \delta_{m20} = 0$
Yaw control	$\delta_{n1f} = \delta_{n2f} = 0.314$	$\delta_{n10} = \delta_{n20} = -0.035$
Thrust control	$\delta_{x1f} = \delta_{x2f} = 0.6$	$\delta_{x10} = \delta_{x20} = 0.2$
Attack angle	$\alpha_{a1f} = \alpha_{a2f} = 20°$	$\alpha_{a10} = \alpha_{a20} = 2°$
Inclination angle	$\theta_{a1f} = \theta_{a2f} = 7°$	$\theta_{a10} = \theta_{a20} = -7°$
Air-path inclination angle	$\gamma_{a1f} = \gamma_{a2f} = 0°$	$\gamma_{a10} = \gamma_{a20} = -5°$
Aerodynamic bank angle	$\mu_{a1f} = \mu_{a2f} = 3°$	$\mu_{a10} = \mu_{a20} = -2°$
Air-path azimuth angle	$\chi_{a1f} = \chi_{a2f} = 5°$	$\chi_{a10} = \chi_{a20} = -5°$
Roll angle	$\varphi_{a1f} = \varphi_{a2f} = 1°$	$\varphi_{a10} = \varphi_{a20} = -1°$
Cup	$\psi_{a1f} = \psi_{a2f} = 3°$	$\psi_{a10} = \psi_{a20} = -3°$
Limits of time	$t_{1f} = 300\ s$,$t_{2f} = 390\ s$	$t_{10} = 0\ s$, $t_{20} = 90\ s$
Mass of the A1 Aircraft	$m_{10} \simeq 1.1 \times 10^5\ kg$,	$m_{1f} \simeq 1.09055 \times 10^5\ kg$,
Mass of the A2 Aircraft	$m_{20} \simeq 1.10071 \times 10^5\ kg$	$m_{2f} \simeq 1.09126 \times 10^5\ kg$
The A300 inertia moments [20]	$A = 5.555 \times 10^6\ kg\ m^2$	$B = 9.72 \times 10^6\ kg\ m^2$
	$C = 14.51 \times 10^6\ kg\ m^2$	$E = -3.3 \times 10^4\ kg\ m^2$
Aircraft vertical separation	$Z_{12} = 2 \times 10^3\ ft \simeq 6 \times 10^2\ m$	
Aircraft longitudinal separation	$X_{G_{12}} = 5\ NM \simeq 9 \times 10^3\ m$	
Aircraft roll velocity relative to earth	$p_{1f} = p_{2f} = 1°s^{-1}$	$p_{10} = p_{20} = -1°s^{-1}$
Aircraft pitch velocity relative to earth	$q_{1f} = q_{2f} = 3.6°s^{-1}$	$q_{10} = q_{20} = 3°s^{-1}$
Aircraft yaw velocity relative to earth	$r_{1f} = r_{2f} = 12°s^{-1}$	$r_{10} = r_{20} = -12°s^{-1}$

The two-aircraft acoustic optimal control problem. The combination of the aircraft dynamic equation (IV.3) and (IV.7), the aircraft objective function from equations (IV.10) and the aircraft flight constraints (IV.12), the two-aircraft acoustic optimal control problem is given

as follows :

$$\begin{cases} \min\limits_{u\in\mathbb{U}} J_{G12}(\mathbf{y}(.),\mathbf{u}(.)) = \int_{t10}^{t_{1f}} g_1(\mathbf{y}_1(t),\mathbf{u}_1(t),t)dt + \int_{t20}^{t_{1f}} g_{12}(\mathbf{y}_1(t),\mathbf{u}_1(t),\mathbf{y}_2(t),\mathbf{u}_2(t),t)dt \\ + \int_{t20}^{t_{2f}} g_2(\mathbf{y}_2(t),\mathbf{u}_2(t),t)dt + \varphi(y(t_f)) \\ \dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{u}(t),\mathbf{y}(t)), \mathbf{u}(t) = (\mathbf{u}_1(t),\mathbf{u}_2(t)), \mathbf{y}(t) = (\mathbf{y}_1(t),\mathbf{y}_2(t)) \\ \forall t \in [t_{10}, t_{2f}], t_{10} = 0, y(0) = y_0, u(0) = u_0 \\ \mathbf{k}_{1i}(\mathbf{y}_i,\mathbf{u}_i) \leq 0 \\ \mathbf{k}_{2i}(\mathbf{y}_i,\mathbf{u}_i) \geq 0 \end{cases} \tag{IV.13}$$

where g_{12} shows the aircraft coupling noise function and J_{G12} is the SEL of the two A300-aircraft.

1.3 The numerical processing

The problem as defined in the relation (IV.13) is an optimal control problem [22, 23, 24] with instantaneous constraints.

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{u}\in\mathbb{U}} J_{12}(\mathbf{y}(.),\mathbf{u}(.)) = \int_{t0}^{t_f} g(\mathbf{y}(t),\mathbf{u}(t))dt \\ \dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{y}(t),\mathbf{u}(t)) \\ \mathbf{k}_1(\mathbf{y},\mathbf{u},t) \leq 0 \\ \mathbf{k}_2(\mathbf{y},\mathbf{u},t) \geq 0 \end{cases} \tag{IV.14}$$

where

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_1(\mathbf{y},\mathbf{u},t) = \; & (\gamma_1 - \gamma_{max}, \chi_1 - \chi_{imax}, V_1 - V_{1max}, x_1 - x_{1max}, y_1 - y_{1max}, h_1 - h_{1max}, \alpha_1 - \alpha_{1max}, \\ & \delta_{x1} - \delta_{x1max}, \mu_1 - \mu_{1max}, m_1 - m_{1max}) \\ \mathbf{k}_2(\mathbf{y},\mathbf{u},t) = \; & (\gamma_1 - \gamma_{min}, \chi_1 - \chi_{imin}, V_1 - V_{1min}, x_1 - x_{1min}, y_1 - y_{1min}, h_1 - h_{1min}, \alpha_1 - \alpha_{1min}, \\ & \delta_{x1} - \delta_{x1min}, \mu_1 - \mu_{1min}, m_1 - m_{1min}) \end{aligned} \tag{IV.15}$$

The fourth order Runge-Kutta method is used to solve the differential system [5]. This method is chosen because of its higher order while avoiding the disavantages of Taylor methods requiring the evaluation of partial derivatives of f.

Algorithm 1 :

1. Let us subdivide the time interval $[t_0, t_f]$ as $h = t_{n+1} - t_n = \frac{t_f - t_0}{N}$, where N is the number of samples in numerical schema.

2. For $0 \leq n \leq N$,

$$\begin{aligned}
&\min_{u\in\mathbb{U}} J_{12}(y_n, u_n)\\
&l1 = hf(t_n, y_n, u_n)\\
&l_2 = hf(t_n + \tfrac{h}{2}, y_n + \tfrac{l_1}{2}, u_n)\\
&l_3 = hf(t_n + \tfrac{h}{2}, y_n + \tfrac{l_2}{2}, u_n)\\
&l_4 = hf(t_n + h, y_n + l_3, u_n), t_{n+1} = t_n + h\\
&y_{n+1} = y_n + \tfrac{1}{6}(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4)\\
&\mu_1 k_1(y(t_n), u(t_n), t_n) = 0,\ \mu_2 k_2(y(t_n), u(t_n), t_n) = 0,\ \mu_1 \leq 0,\ \mu_2 \geq 0\\
&Write\ t_{n+1} = t_n + h, y_{n+1}.
\end{aligned} \tag{IV.16}$$

3. Stop.

Explicit form of equations (IV.16) are given in appendix B. This algorithm is implemented by A Modeling Language for Mathematical Programing "AMPL". The Nonlinear Interior point Trust Optimization solver "KNITRO" is called on to extract the optimal dynamic solution of the two-aircraft optimal control problem. The numerical results and the optimality convergence characteristics are presented in the following section.

1.4 Numerics results

1.4.1 Numerics results relative to the first cost function

The KNITRO output optimality characteristics are such that final optimality absolute and relative errors are $1.25e-14$ and $1.25e-14$. The final absolute and relative feasibility errors are $1.53e-7$ and $4.73e-07$. It is worthy to note that the CPU time is 2629.756 (2645.24414 s).

The observation points are taken on the ground under the flight path and are independent from each other. The observation positions are :
$(-20000\ m, -20000\ m, 0\ m)$, $(-19800\ m, -19800\ m, 0\ m)$, ..., $(0\ m, 0\ m, 0\ m)$, for a space step of 200 m for x and y. The touch point on the ground is $(0\ m, 0\ m, 0\ m)$ while the temporal separation of aircraft is 90 s. At each point, it is a vector of N noise levels as shown in the discretization process. It is very important to consider the maximum value among the N values, which value corresponds to the shortest distance between the noise source and the observation point.

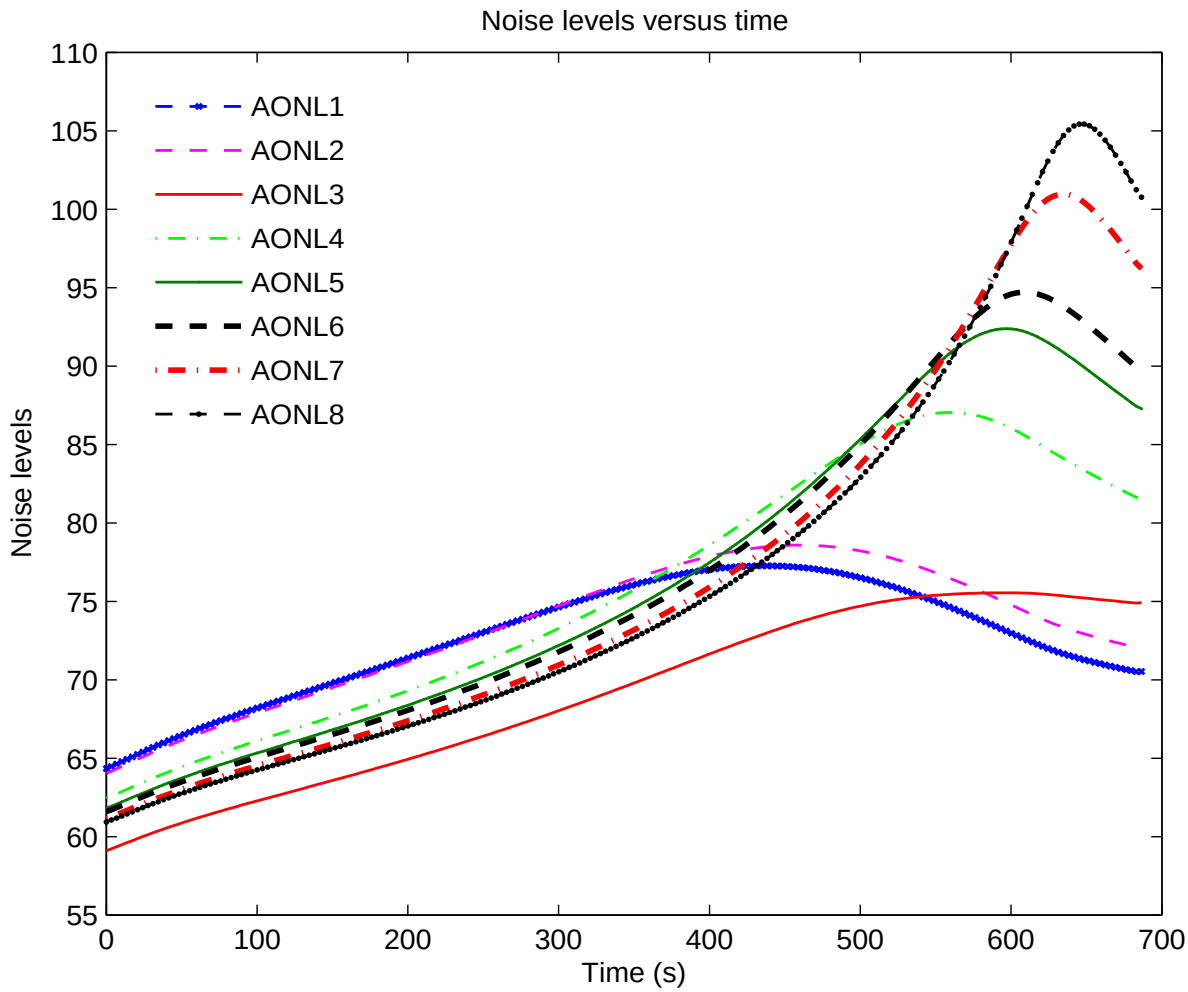


Figure IV.1 – Aircraft noise at the indicated reception point

Figure IV.1 shows the noise levels when the optimization is applied and the solutions obtained. The observation positions are $(-20000m, -20000m, 0m)$ for $AONL_1$, $(-19800m, -19800m, 0m)$ for $AONL_1$, ..., $(-3200\ m, -3200\ m, 0\ m)$ for $AONL_8$. In this figure, $AONL$ means Aircraft Optimal Noise Level. As specified, noise levels increase (till 300 sec) and is maximum when the observation point lies below the aircraft. Noise levels decrease gradually as the aircraft moves away from the observation point. This is in good agreement with [2,25]. By comparison, this result is also close to standard values of jet noise on approach as shown by Harvey [26, 27]. To conclude, numerical calculations carried out in this paper are efficient and fitted with experimental and theoretical research related to acoustical developments.

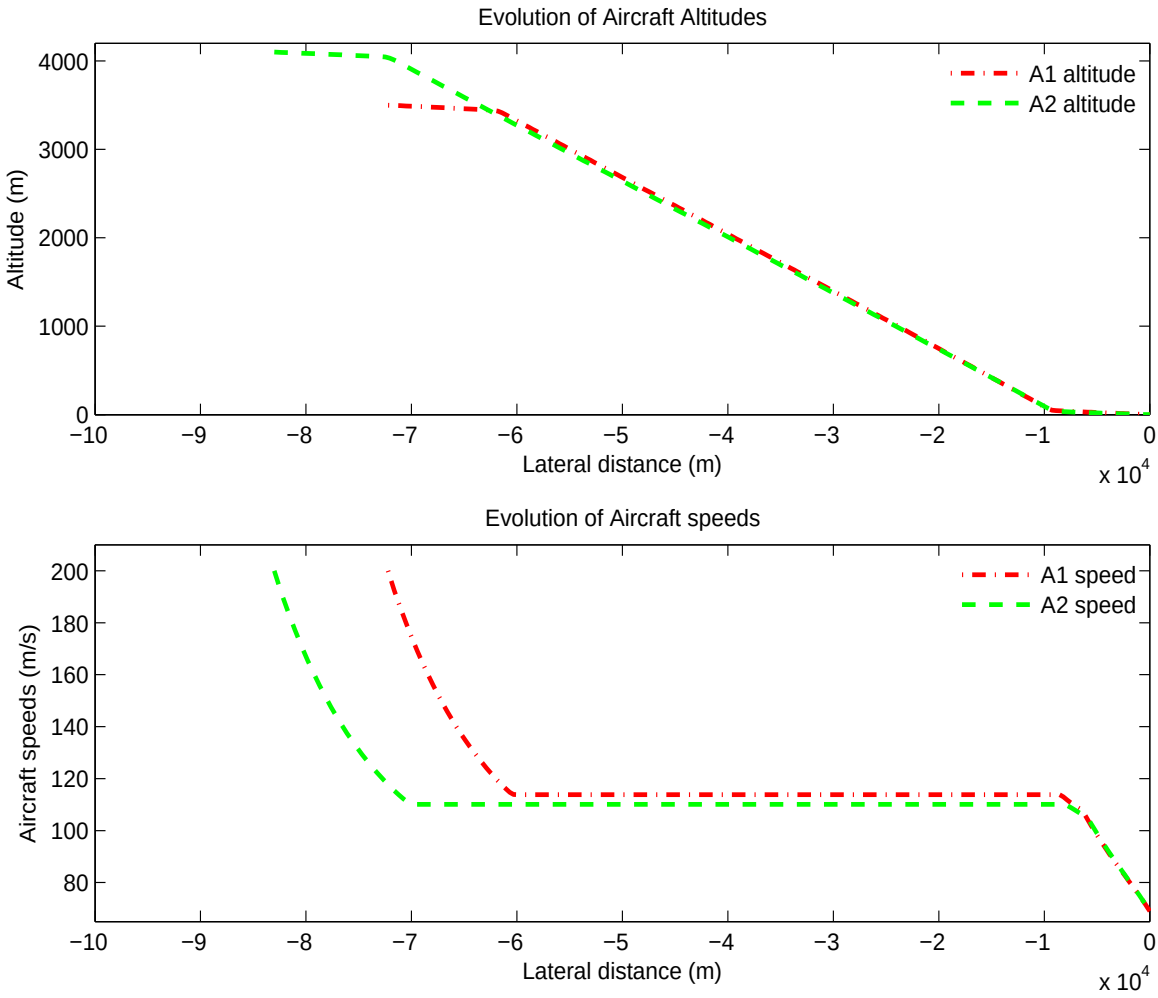


Figure IV.2 – Aircraft optimal flight paths and speeds

Figure IV.2 shows the trajectories characterized by a part of constant flight level followed by a continuous descent till the aircraft touch point. The aircraft's landing procedures are sufficiently separated. It is obvious that each aircraft follows its optimal trajectory when considering the separation distance. Constraints on speeds described in the previous table are considered, allowing a subsequent landing on the same runway. Thus, as recommended by ICAO, the security conditions are met and flight procedures are good as shown by the presented results. The maximum altitudes considered are 3500 m and 4100 m for the first and second aircraft. The approach duration is 600 s for the first aircraft and 690 s for the second. This figure shows that after some time, the same optimal trajectory have been obtained for the two-aircraft even though the procedures are different. This shows the aircraft trajectory resulting from the two

trajectories combination. This figure also shows aircraft speed evolution during landing. For the first, the aircraft speed decreases from 200 m/s to 69 m/s. This evolution remains the same for the speed of the second aircraft.

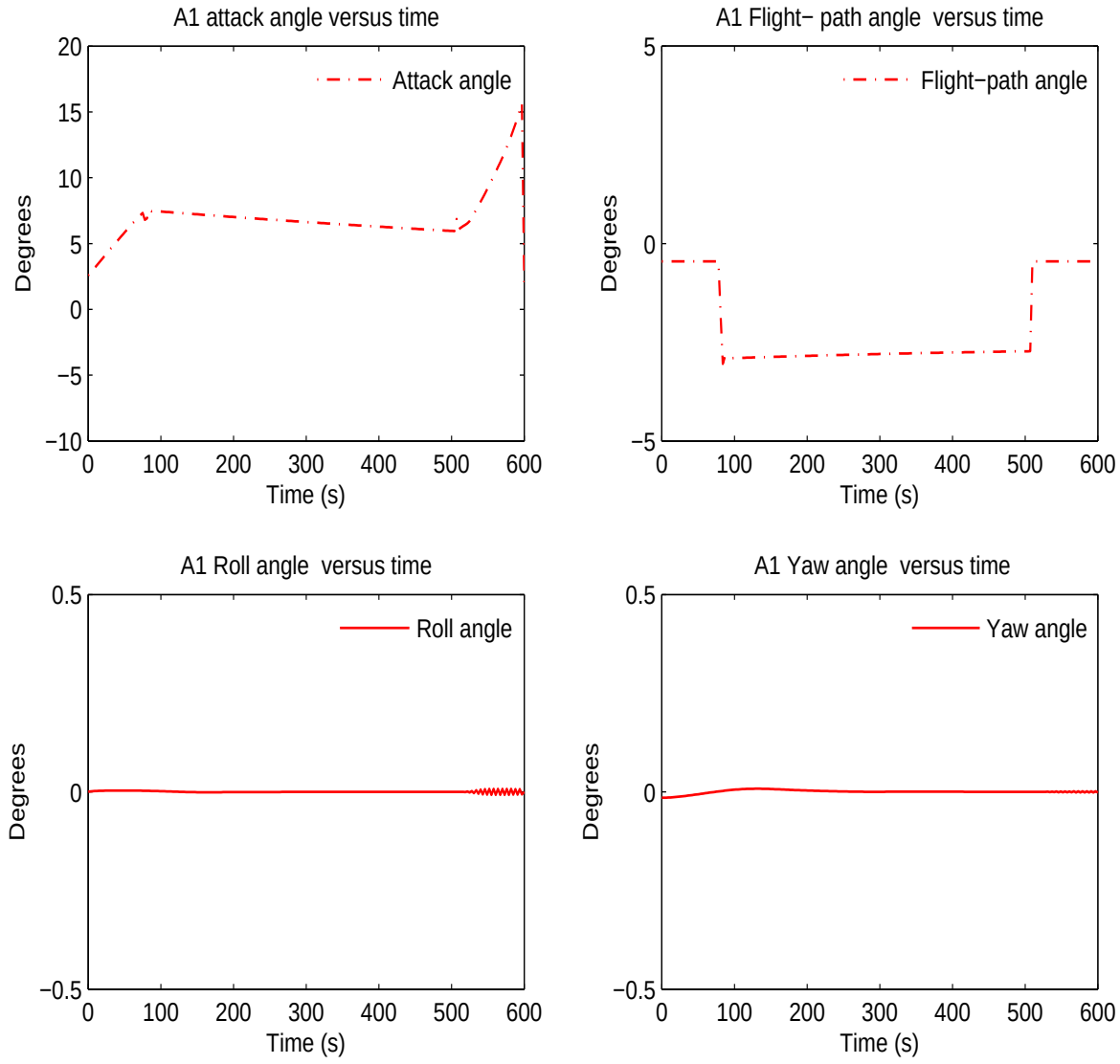


Figure IV.3 – Aircraft flight-path angles

Figure IV.3 shows the first aircraft angles versus time as recommended by ICAO during aircraft landing. As specified in this figure, the aircraft roll angle oscillates around zero. The flight-path angle is negative and bang-bang . It keeps the recommended position for aircraft

landing procedures. The attack angle stands between 2° and 20°. Since the trajectory of the aircraft is aligned with the runway, the yaw angle is small as shown in Figure 3. These angular variations show the aircraft aerodynamic stability and the flight safety.

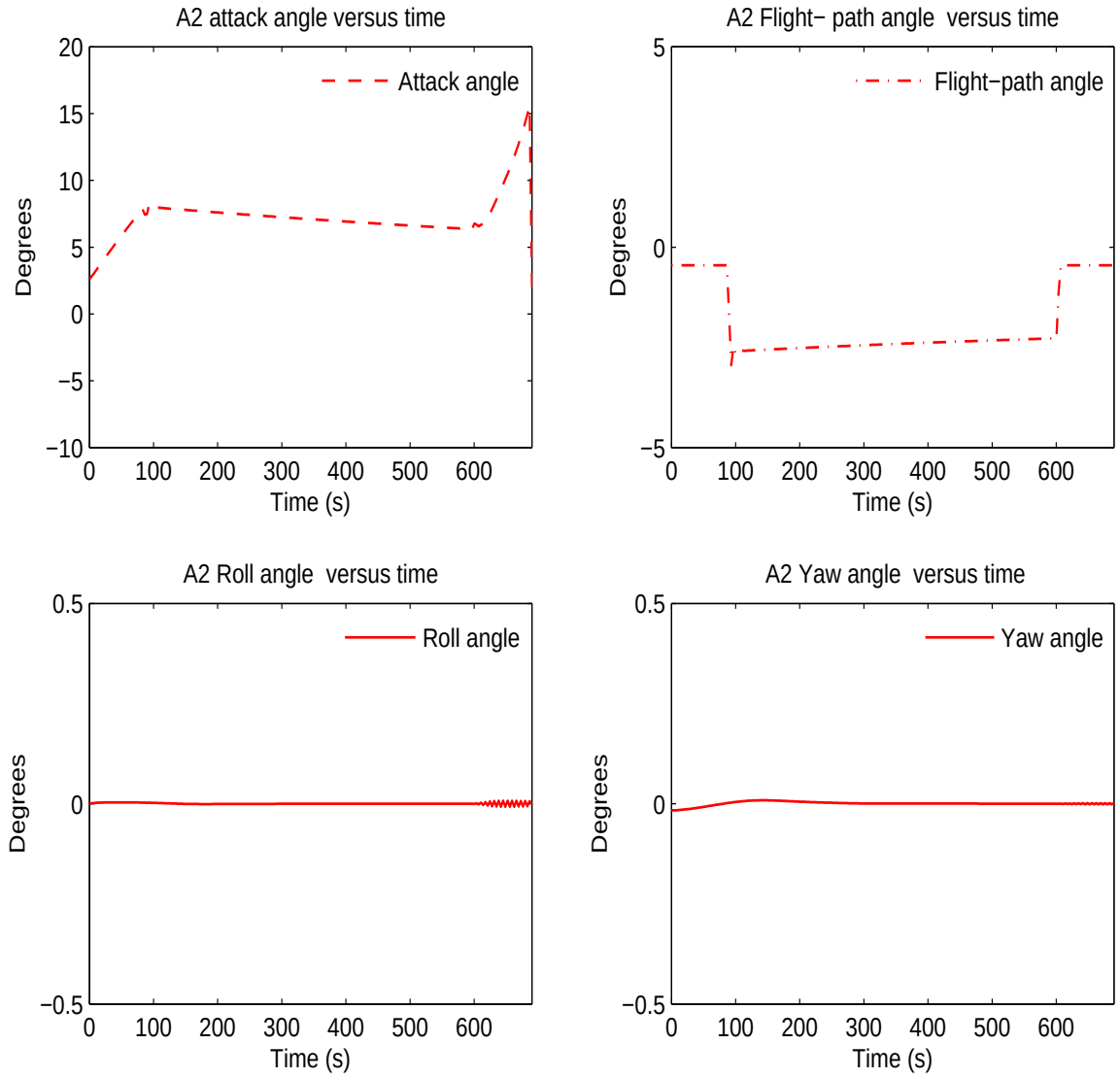


Figure IV.4 – Aircraft flight-path angles

Figure IV.4 shows the second aircraft angles versus time as recommended by ICAO during aircraft landing. As specified in this figure, the aircraft roll angle oscillates around zero. The flight-path angle is negative and bang-bang. It keeps also the recommended position for aircraft

landing procedures. The attack angle stands between 2° and 20°. Since the trajectory of the aircraft is aligned with the runway, the yaw angle is small as shown in figure 4. These angular variations confirms the aircraft aerodynamic stability and the flight safety.

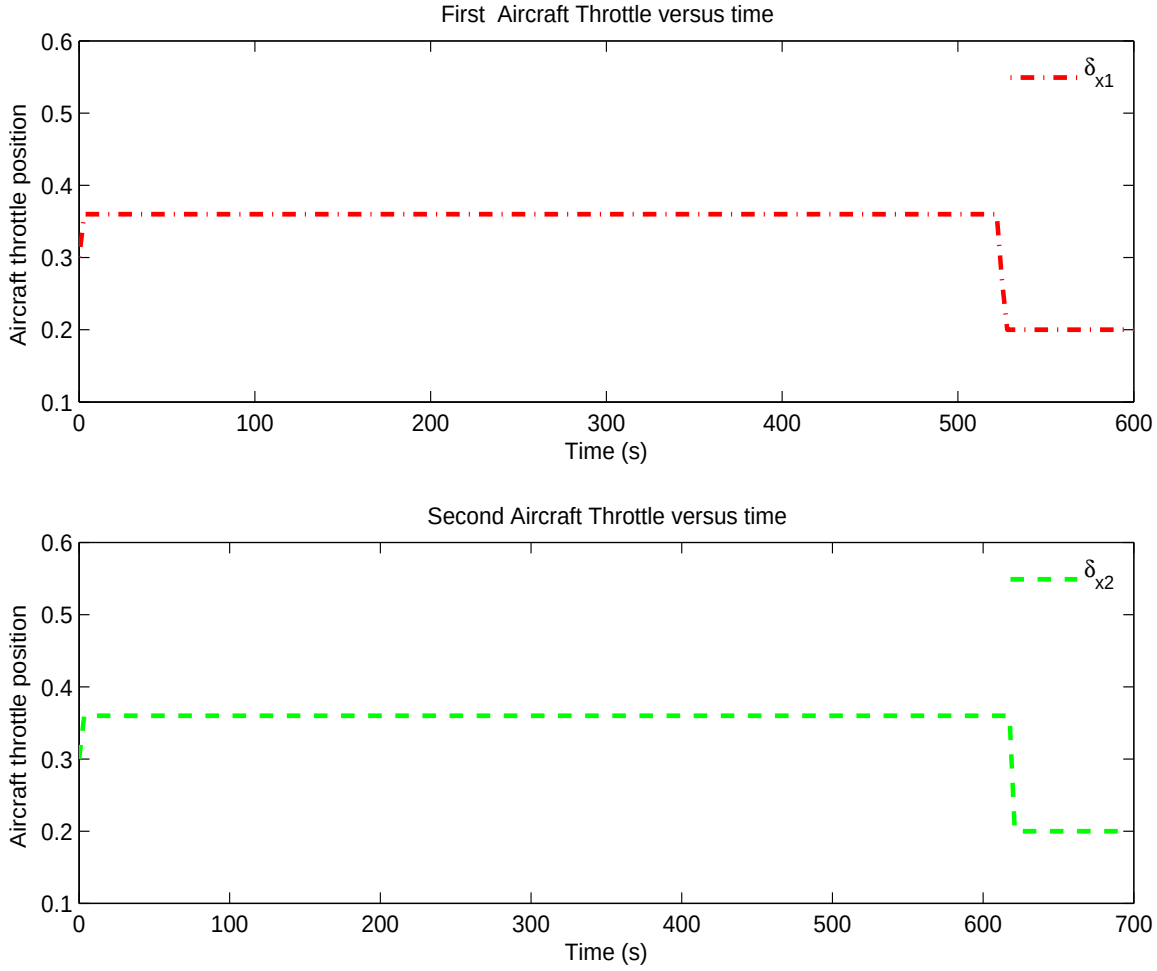


Figure IV.5 – Aircraft throttles

Figure IV.5 shows the aircraft throttle positions during all the approach. They oscillate between 0.2 and 0.6 during the landing procedures.

The two-aircraft roll velocity relative to the earth p_1, p_2, the two-aircraft pitch velocity relative to the earth q_1, q_2, the two-aircraft yaw velocity relative to the earth r_1, r_2, the aircraft mass, the roll control, pitch and yaw control reflect the limiters conditions as shown in table 1.

1.4.2 Numerics results relative to the second cost function

The numerical results shown in this paragraph concern an academic experiment when the second aircraft is supposed to land on the same runway with a delay of $90s$. The numerical optimal output characteristics are such that final optimality absolute and relative error are $4.98e-07/4.98e-07$ and absolute and relative feasibility error are $1.20e-07/2.19e-09$. It is worthy to note that total program time (secs) is 663.61902 (663.049 CPU time).

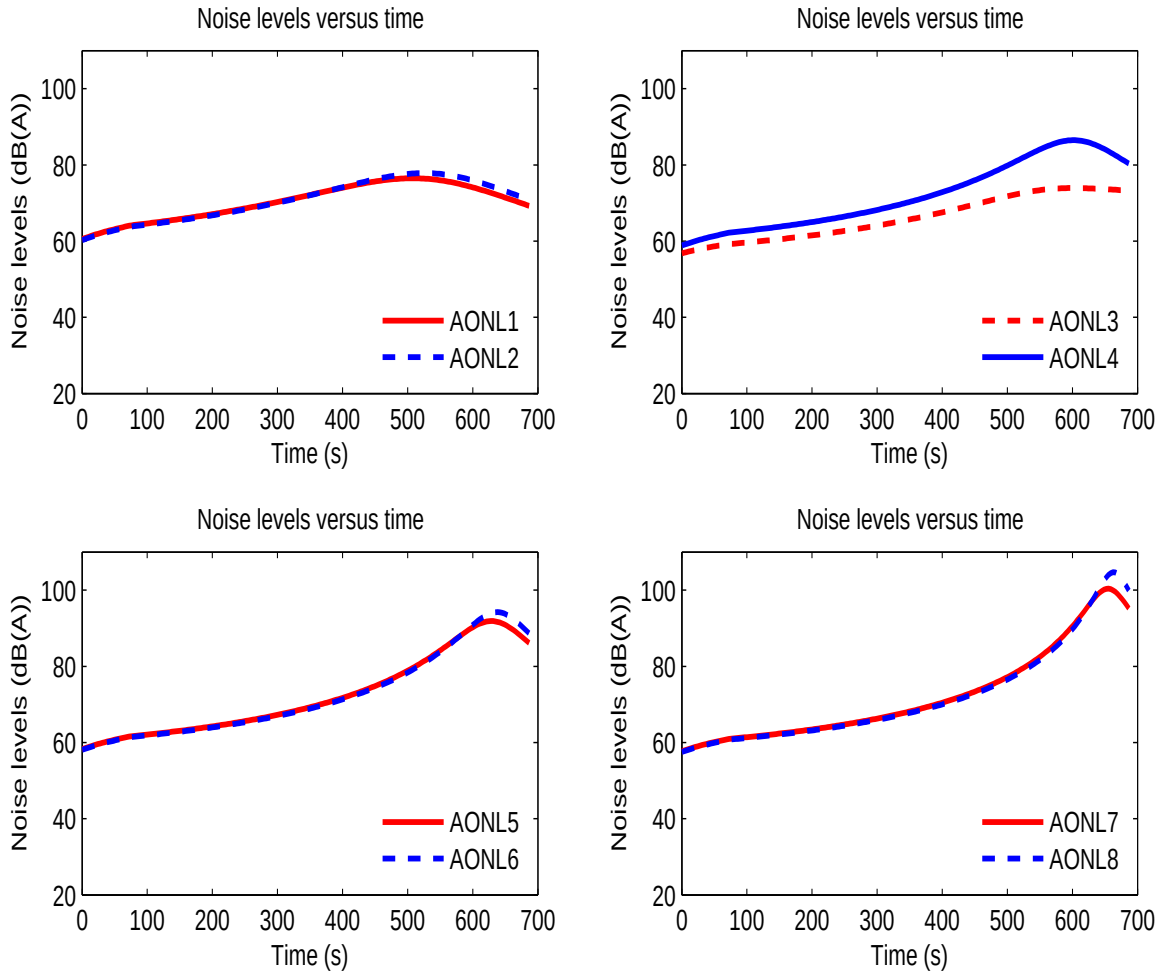


Figure IV.6 – Aircraft noise levels with delay

2 Figure IV.6 shows the optimized noise levels. The observation positions are $(-20000\,m, -20000\,m, 0\,m$ for $AONL_1$, $(-19800\,m, -19800\,m, 0\,m)$ for $AONL_1$,..., $(-3200\,m, -3200\,m, 0\,m)$ for $AONL_8$. In this figure, $AONL$ means Aircraft Optimal Noise Level. As specified, noise level increases and

is maximum when the observation point lies below the aircraft. Noise levels decrease gradually as the aircraft moves away from the observation point. By comparison with the results shown in figure 1, the results shown in figure 6 indicate an important noise level because the aircraft altitude is relatively small. $2500m$ is considered as the maximum altitude for both aircraft. This numerical experiment is an academic one because usually the aircraft are not allowed to fly at the same altitude, nevertheless, the results show what happened when the second aircraft is delayed of $90s$.

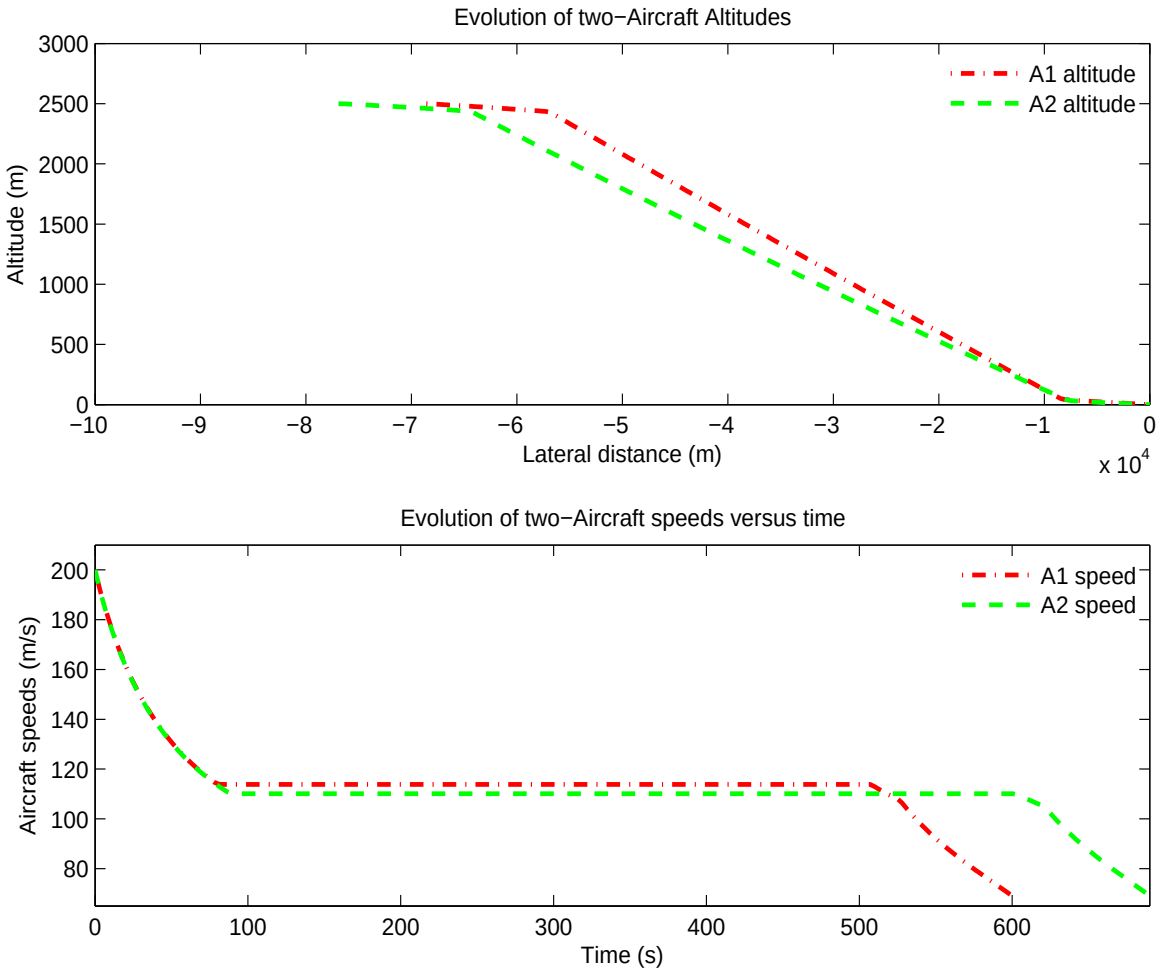


Figure IV.7 – Aircraft flight paths and speeds with delay

Figure IV.7 shows the aircraft flight paths and speeds when a delay of $90s$ is considered for the second aircraft while the planes are at the same altitude. The two-aircraft trajectories are characterized by a constant flight altitude followed by straight continuous descent trajectory. It

is obvious that each aircraft follows its optimal trajectory. Constraints on speeds described in the previous table are considered the same, allowing a subsequent landing on the same runway. The maximum altitudes considered are 2500 m for the first and the second aircraft. The duration approach is 600 s for the first aircraft and 690 s for the second. This figure shows that the touch-down point is the same for both aircraft. This figure also shows aircraft speed evolution during landing. For the first, the aircraft speed decreases from 200 m/s to 113.809 m/s and keeps a constant position. For the last 90s before aircraft touch down, the speed decreases from 113.809 m/s to 69 m/s. This evolution remains the same for the speed of the second aircraft.

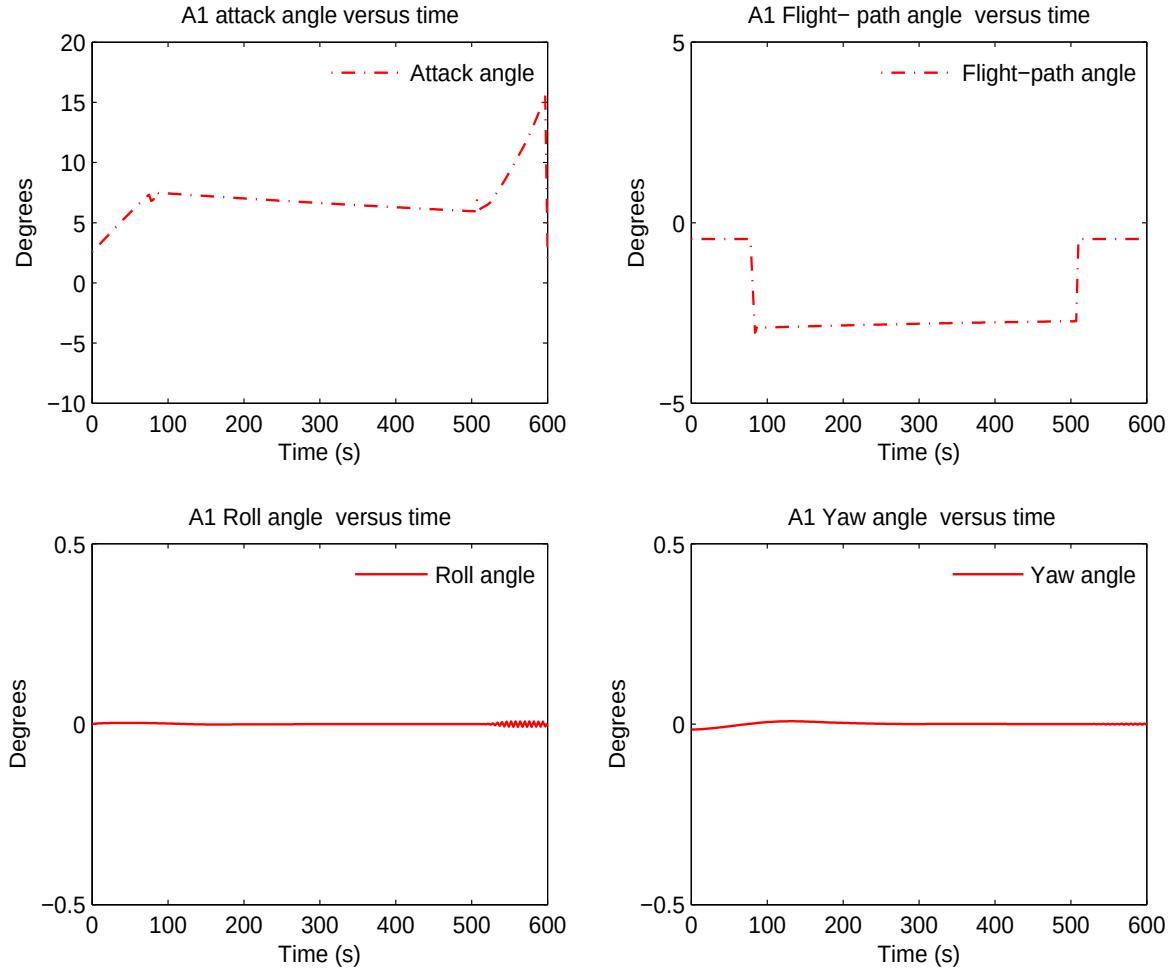


Figure IV.8 – First Aircraft angles with delay

Figure IV.8 shows the first aircraft angles versus time as recommended by ICAO during aircraft landing. As specified by this figure, the aircraft roll angle oscillates around zero, the

flight-path angle is negative and in the range of the recommended interval for aircraft landing procedures. This is the same for the attack and the yaw angles. Angular variations confirmed the aircraft aerodynamic stability and the flight safety for the obtained optimal solution.

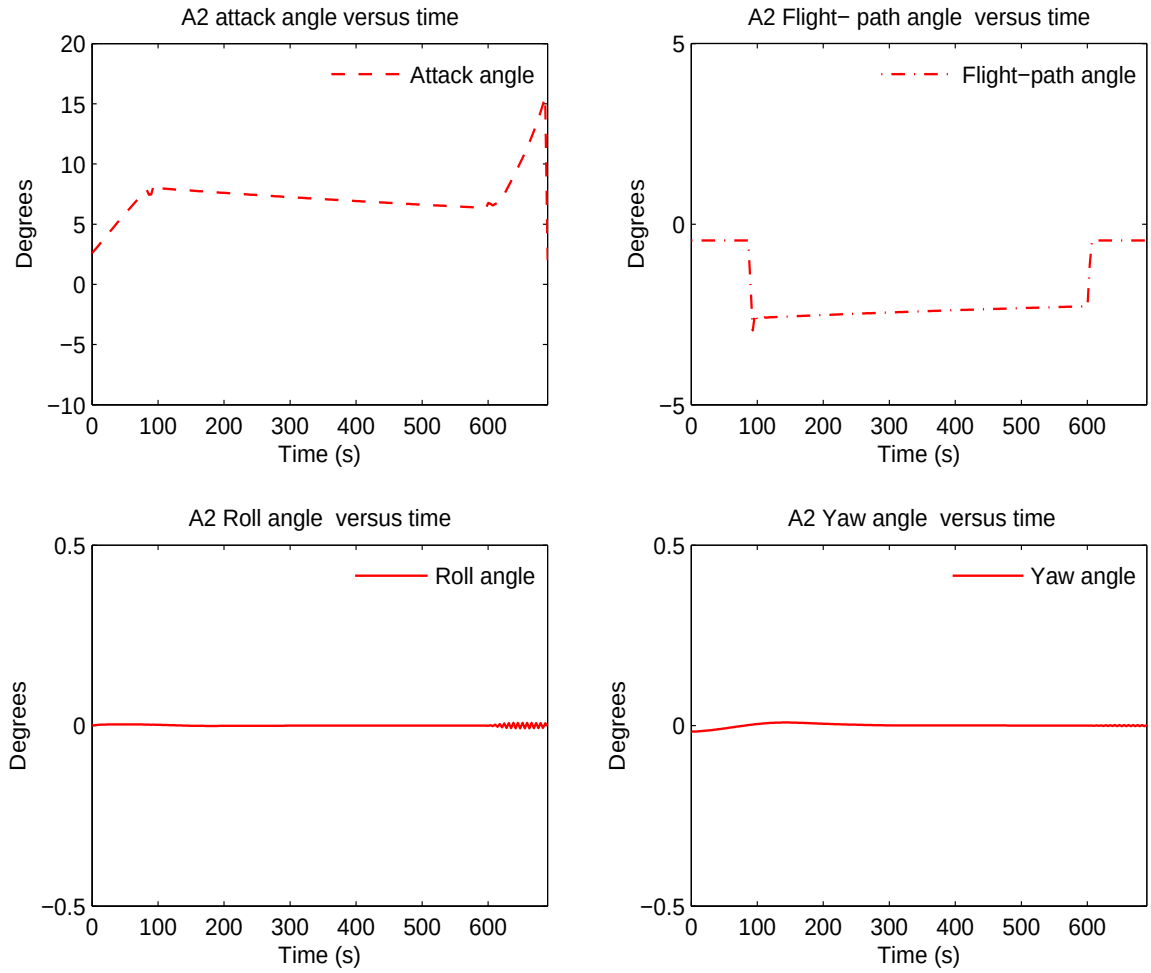


Figure IV.9 – Second Aircraft angles with delay

Figure IV.9 shows the second aircraft angles versus time as recommended by ICAO during aircraft landing. As specified by this figure, the aircraft roll angle oscillates around zero, the flight-path angle is negative and keeps the recommended position for aircraft landing procedures. This is the same for the attack and the yaw angles. Angular variations confirmed the aircraft aerodynamic stability and the flight safety.

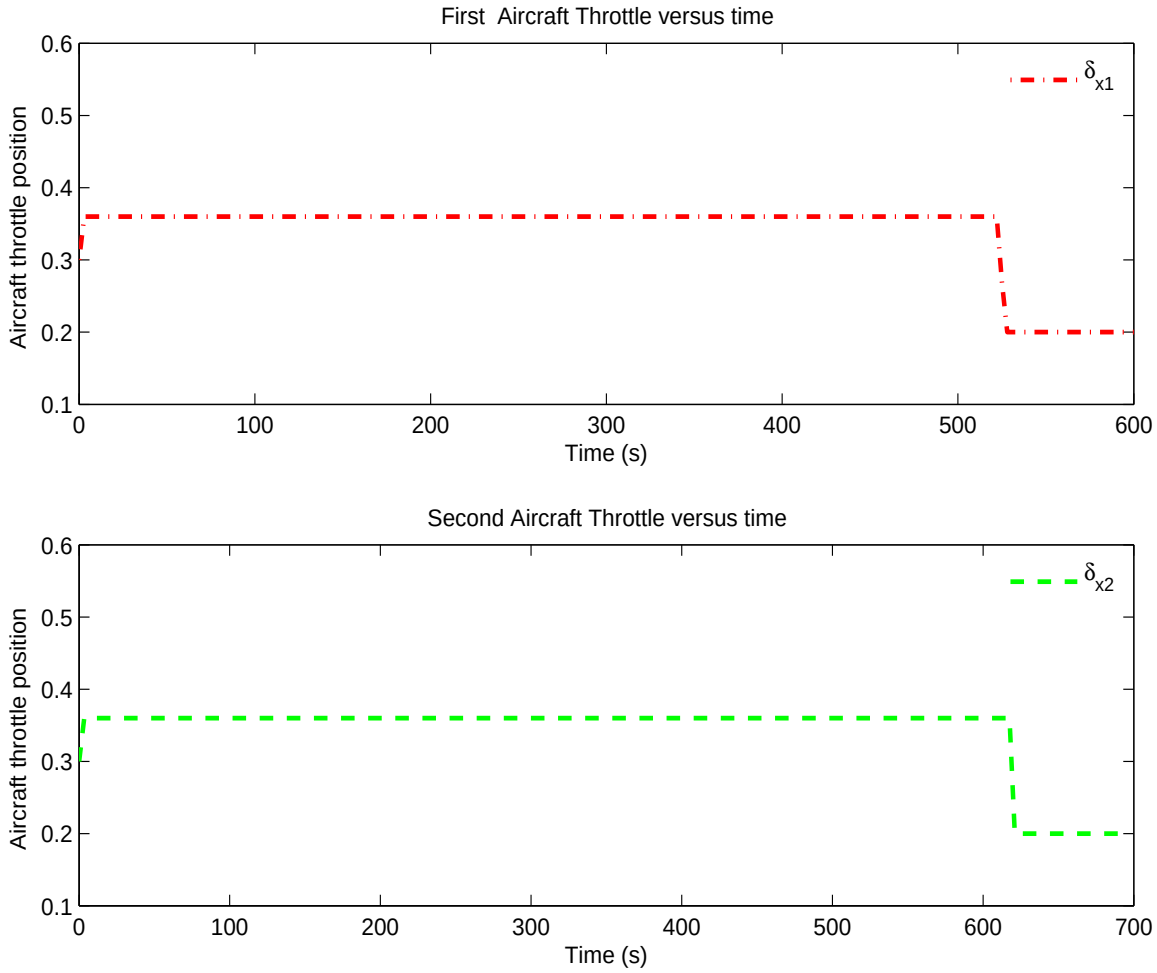


Figure IV.10 – Aircraft throttles with delay

Figure IV.10 shows the throttle for the two aircraft. The aircraft throttle remains between the position 0.2 and 0.6 as recommanded by ICAO for aircraft landing procedures. This confirms the landing procedures as shown by figures 6, 7, 8 and 9. The behavior of the throttle confirms the stability of the aircraft flight.

The two-aircraft roll velocity relative to the earth p_1, p_2, the two-aircraft pitch velocity relative to the earth q_1, q_2, the two-aircraft yaw velocity relative to the earth r_1, r_2, the aircraft mass, the roll control, pitch and yaw control reflect the limiters conditions as shown in table 1.

1.5 Conclusion

In this paper, a mathematical model have been developped for noise reduction in the case of two approaching aircraft landing in succession on the same runway. An algorithm for solving the optimal control problem has been developed. Theoretical considerations and practices of a direct method and the Runge-Kutta discretization scheme are used. This discretization schema is chosen because it is of sufficiently high order and it does not require computation of the partial derivatives of f. KNITRO is applied to perform a number of numerical experiments. An optimal local solution to the discretized problem is found through a global convergence. The results show a reduction of noise at reception points during the approach of the two-aircraft. The obtained trajectories exhibit optimal characteristics and are effective where noise reduction is concerned. The aircraft optimal trajectories which are found coincide for a large portion of the flight when the first cost function is used.

Acknowledgments. This work is supported by the Agence Universitaire de la Francophonie-Région Afrique Centrale. This is also supported by the French Institute of Science and Technology for Transport, Development and Networks - Transport and Environment Laboratory "IFSTTAR-LTE", Lyon - France. Authors would like to thank La Région Rhônes-Alpes for the support given in Cluster de Recherche : Transport, Territoire et Société framework.

References

[1] M. Houacine and S.Khardi. *Gauss Pseudospectral Method for Less Noise and Fuel Consumption from Aircraft operations*, Journal of Aircraft, Vol.47, No.6, pp.2152-2158, 2010, ISSN 0021-8669

[2] S.Khardi L. Abdallah O. Konovalova and M. Houacine. *Optimal Approach Minimizing Aircraft Noise and Fuel Consumption*, ACTA ACOUSTICA united with ACUSTICA, The journal of Europian Acoustics Association (EIAA). International Journal on Acoustics, 2009, ISSN 1610-1928

[3] E. Roux. *Modèle de longueur de piste au décollage-atterrissage, Avions de transport civil*, SUPAERO-ONERA, p 345, 2006

[4] I. Chryssoverghi, J. Colestos and B. Kokkinis. *Classical and relaxed optimization methods for optimal control problems*, International Mathematical Forum, 2-2007 N° 30, pp 1477-1498.

[5] A. Fortin. *Analyse numérique pour ingénieurs*. Troisième edition, Presses internationales

polytechnique, 2008, ISBN 978-2-553-01427-7

[6] R-A. Waltz, T-D. Plantenga. *KNITRO user's Manual, Version 5.2*, University of Colorado [en ligne] disponible sur http ://www.ziena.com, February, 2008

[7] R. Fourer, D-M. Gay and B-W. Kernigham. *A modelling Language for Mathematical Programming*, Second edition, Thomson Brooks[en ligne]disponible sur http ://www.ampl.com, 2003.

[8] B. Laboratories. AMPL : *A modelling Language for Mathematical Programming*, http ://www.ampl.com, 2003.

[9] K. Blin. *Stochastic conflict detection for air traffic management*, Eurocontrol Experimental centre Publications Office, France, April 2000

[10] J-L. Boiffier. *The Dynamics of Flight, The Equations*, SUPAÉRO (Ecole Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace) et ONERA-CERT, Toulouse 25 Janvier 1999

[11] E. Roux. *Pour une approche analytique de la dynamique du vol*, Thèse, SUPAERO-ONERA, Novembre 2005

[12] L. Abdallah. *Minimisation des bruits des avions commerciaux sous contraintes physiques et aérodynamiques*. Thèse de Mathématiques Appliquées de l'UCBL I, Septembre 2007

[13] M-M. Harris and E. Mary. *How do we Describe Aircraft Noise ?* NASA TM - 82712, FICAN, [en ligne] disponible sur www.fican.org

[14] D. Martin. *Noise monitoring in the vicnity of airports*, DSNA-DTI,[electronic] availlable on http ://www.dsna-dti.aviation-civile.gouv.fr, May 2000

[15] R. James Stone, D.E. Groesbeck, C.L. Zola. *An improved prediction method for noise generated by conventional profile coaxial jets*, NASA TM - 82712, AIAA-81-1991, 1991

[16] DGAC. *Mémento à l'usage des utilisateurs des procédures d'approche et de départ aux instruments*, Rapport de la DGAC, 5ême édition, Août 1995

[17] H. Sors. *Séparation et contrôle aérien*, International Virtual Aviation Organization [en ligne]disponible sur http ://academy.ivao.aero/, 15 octobre 2008

[18] DGAC. *Méthodes et minimums de séparations des aéronefs aux procédures*, Rapport de la DGAC, Fevrier 2009

[19] O. Dominique. *Cisaillement de vent ou Windshear*, http ://www.aviation-fr.info, 2008

[20] J-L Boiffier. *Dynamique de vol de l'avion*, SupAéro, Départements des Aéronefs Toulouse- Novembre 2001

[21] Ifrance. *Fiches techniques, historiques et photos d'avions A300-600, A300-600R* [en ligne] disponible sur http ://www.ifrance.com, Ifrance

[22] P. Destunder. *Méthodes numériques pour ingénieurs*, Hermes sciences publications, 12-8-2010.

[23] P. Faurer. *Analyse numérique, notes d'optimisation*, Ellipses Marketing, 1998.

[24] P. Borne. *Commande et Optimisation des processus*. Technip, 17-04-2003

[25] S.Khardi F. Nahayo and M. Haddou. *The Trust Region Sequential Quadratic Programming Method Applied to two-Aircraft Acoustic Optimal Control Problem*, Applied Mathematical Sciences, Vol.5, No.40, pp.1953-1976, 2011, ISSN 1312-885X.

[26] H. Harvey Hubbard. *Aeroacoustics of flight vehicles. Theory and Practices*. Volume 1 : Noise sources and Volume 2 : Noise Control, NASA Langley Research Center, Hampton, Virginia 1994

[27] L. Abdallah M. Haddou S. Khardi. *Optimization of operational aircraft parameters reducing noise emission*, Applied Mathematical Sciences, Vol. 4, no 11, 515-535, 2010.

1.6 Appendix B : Explicit equations for the optimal dynamic system

Algorithm 1 :

1. Let subdivide the time interval $[t_0, t_f]$ as $h = t_{n+1} - t_n = \frac{t_f - t_0}{N}$, where N is the maximum number of iteration.

2. For $0 \leq n \leq N$,

$$\begin{aligned}
&\min_{u \in \mathbb{U}} J_{12}(y_n, u_n) \\
&l1 = hf(y_n, u_n, t_n) \\
&l_2 = hf(t_n + \tfrac{h}{2}, y_n + \tfrac{l_1}{2}, u_n) \\
&l_3 = hf(t_n + \tfrac{h}{2}, y_n + \tfrac{l_2}{2}, u_n) \\
&l_4 = hf(t_n + h, y_n + l_3, u_n), t_{n+1} = t_n + h \\
&y_{n+1} = y_n + \tfrac{1}{6}(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4) \\
&\mu_1 k_1(y(t_n), u(t_n), t_n) = 0, \mu_1 \leq 0 \\
&\mu_2 k_2(y(t_n), u(t_n), t_n) = 0, \mu_2 \geq 0 \\
&Write\ t_{n+1} = t_n + h, y_{n+1}.
\end{aligned} \tag{IV.17}$$

3. Stop.

The equation $l1 = hf$ in (IV.17) shows the following system :

$$\left\{\begin{array}{ll}
m_{i,l1} & = -2.01 \times 10^{-5} h \frac{(\Phi - \mu_i - \frac{K_i}{\eta_c})\sqrt{\Theta}}{\sqrt{5\eta_n(1+\eta_{tf_i}\lambda)}\sqrt{G_i + 0.2M_i^2 \frac{\eta_{d_i}}{\eta_{tf_i}}\lambda - (1-\lambda)M_i}} P_0 \delta_{xi} \frac{\rho_i}{\rho_0}(1 - M_i + \frac{M_i^2}{2}) \\
V_{a_i,l1} & = \frac{h}{m_i}[-m_i g sin\gamma_{a_i} - \frac{1}{2}\rho_i S V_{a_i}^2 C_{D_i} + (cos\alpha_{a_i} + sin\alpha_{a_i})F_{x_i} - m_{i,l1} u_i] \\
\alpha_{a_i,l1} & = \frac{h}{m_i V_{a_i} cos\beta_{a_i}}[m_i g cos\gamma_{a_i} cos\mu_{a_i} - \frac{1}{2}\rho_i S V_{a_i}^2 C_{L_i} + [cos\alpha_{a_i} - sin\alpha_{a_i}]F_{z_i} - m_{i,l1} w_i] \\
p_{i,l1} & = h[\frac{C}{AC-E^2}\{r_i q_i (B - C) - E p_i q_i + \frac{1}{2}\rho_i S l V_{a_i}^2 C_{l_i}\} \\
 & + \frac{E}{AC-E^2}\{p_i q_i (A - B) - E r_i q_i + \frac{1}{2}\rho_i S l V_{a_i}^2 C_{ni}] \\
q_{i,l1} & = \frac{h}{B}\{-r_i p_i (A - C) - E(p_i^2 - r_i^2) + \frac{1}{2}\rho_i S l V_{a_i}^2 C_{mi}\}, \\
r_{i,l1} & = h[\frac{E}{AC-E^2}\{r_i q_i (B - C) + E p_i q_i + \frac{1}{2}\rho_i S l V_{a_i}^2 C_{l_i} \\
 & + \frac{A}{AC-E^2}\{p_i q_i (A - B) - E r_i q_i + \frac{1}{2}\rho_i S l V_{a_i}^2 C_{ni}\}] \\
X_{G_i,l1} & = h V_{a_i} cos\gamma_{a_i} cos\chi_{a_i} \\
Y_{G_i,l1} & = h V_{a_i} cos\gamma_{a_i} sin\chi_{a_i} \\
Z_{G_i,l1} & = -h V_{a_i} sin\gamma_{a_i} \\
\varphi_{i,l1} & = h[p_i + q_i sin\varphi_i tan\theta_i + r_i cos\varphi_i tan\theta_i] \\
\theta_{i,l1} & = h[q_i cos\varphi_i - r_i sin\varphi_i] \\
\psi_{i,l1} & = h[\frac{sin\varphi_i}{cos\theta_i} q_i + \frac{cos\varphi_i}{cos\theta_i} r_i]
\end{array}\right. \tag{IV.18}$$

The equation $l_2 = hf(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{l_1}{2}, u_n)$ in (IV.17) shows also the following iterative system :

$$
\left\{
\begin{array}{ll}
m_{i,l2} & = -2.01 \times 10^{-5} h \\
 & \frac{(\Phi-(\mu_i+\frac{1}{2}\mu_{i,l1})-\frac{(K_i+\frac{1}{2}K_{i,l1})}{\eta_c})\sqrt{\Theta}}{\sqrt{5(\eta_n(1+(\eta_{tf_i}+\frac{1}{2}\eta_{tf_i,l1})\lambda)}\sqrt{(G_i+\frac{1}{2}G_{i,l1})+0.2(M_i+\frac{1}{2}M_{i,l1})^2\frac{(\eta_{d_i}+\frac{1}{2}\eta_{d_i,l1})}{(\eta_{tf_i}+\frac{1}{2}\eta_{tf_i,l1})}\lambda-(1-\lambda)(M_i+\frac{1}{2}M_{i,l1})}} \\
 & P_0\delta_{xi}\frac{(\rho_i+\frac{1}{2}\rho_{i,l1})}{\rho_0}(1-(M_i+\frac{1}{2}M_{i,l1})+\frac{(M_i+\frac{1}{2}M_{i,l1})^2}{2}) \\
V_{a_i,l2} & = \frac{h}{m_i+\frac{1}{2}m_{i,l1}}[-(m_i+\frac{1}{2}m_{i,l1})gsin\gamma_{a_i}-\frac{1}{2}(\rho_i+\frac{1}{2}\rho_{i,l1})S(V_{a_i}+\frac{1}{2}V_{a_i,l1})^2(C_{D_i}+\frac{1}{2}C_{D_i,l1}) \\
 & +(cos(\alpha_{a_i}+\frac{1}{2}\alpha_{a_i,l1})+sin(\alpha_{a_i}+\frac{1}{2}\alpha_{a_i,l1}))(F_{x_i}+\frac{1}{2}F_{x_i,l1})-m_{i,l2}u_i] \\
\alpha_{a_i,l2} & = \frac{h}{(m_i+\frac{1}{2}m_{i,l1})(V_{a_i}+\frac{1}{2}V_{a_i,l1})cos\beta_{a_i}}[(m_i+\frac{1}{2}m_{i,l1})gcos\gamma_{a_i}cos\mu_{a_i} \\
 & -\frac{1}{2}(\rho_i+\frac{1}{2}\rho_{i,l1})S(V_{a_i}+\frac{1}{2}V_{a_i,l1})^2(C_{Li}+\frac{1}{2}C_{Li,l1}) \\
 & +[cos(\alpha_{a_i}+\frac{1}{2}\alpha_{a_i,l1})-sin(\alpha_{a_i}+\frac{1}{2}\alpha_{a_i,l1})](F_{z_i}+\frac{1}{2}F_{z_i,l1})-m_{i,l2}w_i] \\
p_{i,l2} & = h[\frac{C}{AC-E^2}\{(r_i+\frac{1}{2}r_{i,l1})(q_i+\frac{1}{2}q_{i,l1})(B-C)-E(p_i+\frac{1}{2}p_{i,l1})(q_i+\frac{1}{2}q_{i,l1}) \\
 & +\frac{1}{2}(\rho_i+\frac{1}{2}\rho_{i,l1})Sl(V_{a_i}+\frac{1}{2}V_{a_i,l1})^2(C_{l_i}+\frac{1}{2}C_{l_i,l1})\} \\
 & +\frac{E}{AC-E^2}\{(p_i+\frac{1}{2}p_{i,l1})(q_i+\frac{1}{2}q_{i,l1})(A-B) \\
 & -E(r_i+\frac{1}{2}r_{i,l1})(q_i+\frac{1}{2}q_{i,l1})+\frac{1}{2}(\rho_i+\frac{1}{2}\rho_{i,l1})Sl(V_{a_i}+\frac{1}{2}V_{a_i,l1})^2(C_{ni}+\frac{1}{2}C_{ni,l1})] \\
q_{i,l2} & = \frac{h}{B}\{-(r_i+\frac{1}{2}r_{i,l1})(p_i+\frac{1}{2}p_{i,l1})(A-C)-E((p_i+\frac{1}{2}p_{i,l1})^2-(r_i+\frac{1}{2}r_{i,l1})^2) \\
 & +\frac{1}{2}(\rho_i+\frac{1}{2}\rho_{i,l1})Sl(V_{a_i}+\frac{1}{2}V_{a_i,l1})^2(C_{mi}+\frac{1}{2}C_{mi,l1})\}, \\
r_{i,l2} & = h[\frac{E}{AC-E^2}\{(r_i+\frac{1}{2}r_{i,l1})(q_i+\frac{1}{2}q_{i,l1})(B-C)+E(p_i+\frac{1}{2}p_{i,l1})(q_i+\frac{1}{2}q_{i,l1}) \\
 & +\frac{1}{2}(\rho_i+\frac{1}{2}\rho_{i,l1})Sl(V_{a_i}+\frac{1}{2}V_{a_i,l1})^2(C_{l_i}+\frac{1}{2}C_{l_i,l1}) \\
 & +\frac{A}{AC-E^2}\{(p_i+\frac{1}{2}p_{i,l1})(q_i+\frac{1}{2}q_{i,l1})(A-B) \\
 & -E(r_i+\frac{1}{2}r_{i,l1})(q_i+\frac{1}{2}q_{i,l1})+\frac{1}{2}(\rho_i+\frac{1}{2}\rho_{i,l1})Sl(V_{a_i}+\frac{1}{2}V_{a_i,l1})^2(C_{ni}+\frac{1}{2}C_{ni,l1})\}] \\
X_{G_i,l2} & = h(V_{a_i}+\frac{1}{2}V_{a_i,l1})cos\gamma_{a_i}cos\chi_{a_i} \\
Y_{G_i,l2} & = h(V_{a_i}+\frac{1}{2}V_{a_i,l1})cos\gamma_{a_i}sin\chi_{a_i} \\
Z_{G_i,l2} & = -h(V_{a_i}+\frac{1}{2}V_{a_i,l1})sin\gamma_{a_i} \\
\varphi_{i,l2} & = h[(p_i+\frac{1}{2}p_{i,l1})+(q_i+\frac{1}{2}q_{i,l1})sin(\varphi_i+\frac{1}{2}\varphi_{i,l1})tan(\theta_i+\frac{1}{2}\theta_{i,l1}) \\
 & +(r_i+\frac{1}{2}r_{i,l1})cos(\varphi_i+\frac{1}{2}\varphi_{i,l1})tan(\theta_i+\frac{1}{2}\theta_{i,l1})] \\
\theta_{i,l2} & = h[(q_i+\frac{1}{2}q_{i,l1})cos(\varphi_i+\frac{1}{2}\varphi_{i,l1})-(r_i+\frac{1}{2}r_{i,l1})sin(\varphi_i+\frac{1}{2}\varphi_{i,l1})] \\
\psi_{i,l2} & = h[\frac{sin(\varphi_i+\frac{1}{2}\varphi_{i,l1})}{cos(\theta_i+\frac{1}{2}\theta_{i,l1})}(q_i+\frac{1}{2}q_{i,l1})+\frac{cos(\varphi_i+\frac{1}{2}\varphi_{i,l1})}{cos(\theta_i+\frac{1}{2}\theta_{i,l1})}(r_i+\frac{1}{2}r_{i,l1})]
\end{array}
\right. \tag{IV.19}
$$

The equation $l_3 = hf(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{l_2}{2}, u_n)$ in (IV.17) shows the explicit following system :

$$
\left\{
\begin{array}{ll}
m_{i,l3} & = -2.01 \times 10^{-5} h \\
 & \frac{(\Phi - (\mu_i + \frac{1}{2}\mu_{i,l2}) - \frac{(K_i + \frac{1}{2}K_{i,l2})}{\eta_c})\sqrt{\Theta}}{\sqrt{5(\eta_n(1+(\eta_{tf_i}+\frac{1}{2}\eta_{tf_i,l2})\lambda)}\sqrt{(G_i+\frac{1}{2}G_{i,l2})+0.2(M_i+\frac{1}{2}M_{i,l2})^2\frac{(\eta_{d_i}+\frac{1}{2}\eta_{d_i,l2})}{(\eta_{tf_i}+\frac{1}{2}\eta_{tf_i,l2})}\lambda-(1-\lambda)(M_i+\frac{1}{2}M_{i,l2})}} \\
 & P_0\delta_{xi}\frac{(\rho_i+\frac{1}{2}\rho_{i,l2})}{\rho_0}(1-(M_i+\frac{1}{2}M_{i,l2})+\frac{(M_i+\frac{1}{2}M_{i,l2})^2}{2}) \\
V_{a_i,l3} & = \frac{h}{m_i+\frac{1}{2}m_{i,l2}}[-(m_i+\frac{1}{2}m_{i,l2})gsin\gamma_{a_i} - \frac{1}{2}(\rho_i+\frac{1}{2}\rho_{i,l2})S(V_{a_i}+\frac{1}{2}V_{a_i,l2})^2(C_{D_i}+\frac{1}{2}C_{D_i,l2}) \\
 & +(cos(\alpha_{a_i}+\frac{1}{2}\alpha_{a_i,l2})+sin(\alpha_{a_i}+\frac{1}{2}\alpha_{a_i,l2}))(F_{x_i}+\frac{1}{2}F_{x_i,l2}) - m_{i,l3}u_i] \\
\alpha_{a_i,l3} & = \frac{h}{(m_i+\frac{1}{2}m_{i,l2})(V_{a_i}+\frac{1}{2}V_{a_i,l2})cos\beta_{a_i}}[(m_i+\frac{1}{2}m_{i,l2})gcos\gamma_{a_i}cos\mu_{a_i} \\
 & -\frac{1}{2}(\rho_i+\frac{1}{2}\rho_{i,l2})S(V_{a_i}+\frac{1}{2}V_{a_i,l2})^2(C_{Li}+\frac{1}{2}C_{Li,l2}) \\
 & +[cos(\alpha_{a_i}+\frac{1}{2}\alpha_{a_i,l2})-sin(\alpha_{a_i}+\frac{1}{2}\alpha_{a_i,l2})](F_{z_i}+\frac{1}{2}F_{z_i,l2}) - m_{i,l3}w_i] \\
p_{i,l3} & = h[\frac{C}{AC-E^2}\{(r_i+\frac{1}{2}r_{i,l2})(q_i+\frac{1}{2}q_{i,l2})(B-C) - E(p_i+\frac{1}{2}p_{i,l2})(q_i+\frac{1}{2}q_{i,l2}) \\
 & +\frac{1}{2}(\rho_i+\frac{1}{2}\rho_{i,l2})Sl(V_{a_i}+\frac{1}{2}V_{a_i,l2})^2(C_{l_i}+\frac{1}{2}C_{l_i,l2})\} \\
 & +\frac{E}{AC-E^2}\{(p_i+\frac{1}{2}p_{i,l2})(q_i+\frac{1}{2}q_{i,l2})(A-B) \\
 & -E(r_i+\frac{1}{2}r_{i,l2})(q_i+\frac{1}{2}q_{i,l2}) + \frac{1}{2}(\rho_i+\frac{1}{2}\rho_{i,l2})Sl(V_{a_i}+\frac{1}{2}V_{a_i,l2})^2(C_{ni}+\frac{1}{2}C_{ni,l2})] \\
q_{i,l3} & = \frac{h}{B}\{-(r_i+\frac{1}{2}r_{i,l2})(p_i+\frac{1}{2}p_{i,l2})(A-C) - E((p_i+\frac{1}{2}p_{i,l2})^2 - (r_i+\frac{1}{2}r_{i,l2})^2) \\
 & +\frac{1}{2}(\rho_i+\frac{1}{2}\rho_{i,l2})Sl(V_{a_i}+\frac{1}{2}V_{a_i,l2})^2(C_{mi}+\frac{1}{2}C_{mi,l2})\}, \\
r_{i,l3} & = h[\frac{E}{AC-E^2}\{(r_i+\frac{1}{2}r_{i,l2})(q_i+\frac{1}{2}q_{i,l2})(B-C) + E(p_i+\frac{1}{2}p_{i,l2})(q_i+\frac{1}{2}q_{i,l2}) \\
 & +\frac{1}{2}(\rho_i+\frac{1}{2}\rho_{i,l2})Sl(V_{a_i}+\frac{1}{2}V_{a_i,l2})^2(C_{l_i}+\frac{1}{2}C_{l_i,l2}) \\
 & +\frac{A}{AC-E^2}\{(p_i+\frac{1}{2}p_{i,l2})(q_i+\frac{1}{2}q_{i,l2})(A-B) \\
 & -E(r_i+\frac{1}{2}r_{i,l2})(q_i+\frac{1}{2}q_{i,l2}) + \frac{1}{2}(\rho_i+\frac{1}{2}\rho_{i,l2})Sl(V_{a_i}+\frac{1}{2}V_{a_i,l2})^2(C_{ni}+\frac{1}{2}C_{ni,l2})\}] \\
X_{G_i,l3} & = h(V_{a_i}+\frac{1}{2}V_{a_i,l2})cos\gamma_{a_i}cos\chi_{a_i} \\
Y_{G_i,l3} & = h(V_{a_i}+\frac{1}{2}V_{a_i,l2})cos\gamma_{a_i}sin\chi_{a_i} \\
Z_{G_i,l3} & = -h(V_{a_i}+\frac{1}{2}V_{a_i,l2})sin\gamma_{a_i} \\
\varphi_{i,l3} & = h[(p_i+\frac{1}{2}p_{i,l2}) + (q_i+\frac{1}{2}q_{i,l2})sin(\varphi_i+\frac{1}{2}\varphi_{i,l2})tan(\theta_i+\frac{1}{2}\theta_{i,l2}) \\
 & +(r_i+\frac{1}{2}r_{i,l2})cos(\varphi_i+\frac{1}{2}\varphi_{i,l2})tan(\theta_i+\frac{1}{2}\theta_{i,l2})] \\
\theta_{i,l3} & = h[(q_i+\frac{1}{2}q_{i,l2})cos(\varphi_i+\frac{1}{2}\varphi_{i,l2}) - (r_i+\frac{1}{2}r_{i,l2})sin(\varphi_i+\frac{1}{2}\varphi_{i,l2})] \\
\psi_{i,l3} & = h[\frac{sin(\varphi_i+\frac{1}{2}\varphi_{i,l2})}{cos(\theta_i+\frac{1}{2}\theta_{i,l2})}(q_i+\frac{1}{2}q_{i,l2}) + \frac{cos(\varphi_i+\frac{1}{2}\varphi_{i,l2})}{cos(\theta_i+\frac{1}{2}\theta_{i,l2})}(r_i+\frac{1}{2}r_{i,l2})]
\end{array}
\right. \tag{IV.20}
$$

The equation $l_4 = hf(t_n + h, y_n + l_3, u_n)$ in (IV.17) shows the following explicit system :

$$
\begin{cases}
m_{i,l4} & = -2.01 \times 10^{-5} h \\
 & \frac{(\Phi - (\mu_i + \mu_{i,l3}) - \frac{(K_i + K_{i,l3})}{\eta_c})\sqrt{\Theta}}{\sqrt{5(\eta_n(1+(\eta_{tf_i}+\eta_{tf_i,l3})\lambda)}\sqrt{(G_i+G_{i,l3})+0.2(M_i+M_{i,l3})^2\frac{(\eta_{d_i}+\eta_{d_i,l3})}{(\eta_{tf_i}+\eta_{tf_i,l3})}\lambda-(1-\lambda)(M_i+M_{i,l3})}} \\
 & P_0 \delta_{xi} \frac{(\rho_i+\rho_{i,l3})}{\rho_0}(1 - (M_i + M_{i,l3}) + \frac{(M_i+M_{i,l3})^2}{2}) \\
V_{a_i,l4} & = \frac{h}{m_i+m_{i,l3}}[-(m_i + m_{i,l3})gsin\gamma_{a_i} - \frac{1}{2}(\rho_i + \rho_{i,l3})S(V_{a_i} + V_{a_i,l3})^2(C_{D_i} + C_{D_i,l3}) \\
 & +(cos(\alpha_{a_i} + \alpha_{a_i,l3}) + sin(\alpha_{a_i} + \alpha_{a_i,l3}))(F_{x_i} + F_{x_i,l3}) - m_{i,l4}u_i] \\
\alpha_{a_i,l4} & = \frac{h}{(m_i+m_{i,l3})(V_{a_i}+V_{a_i,l3})cos\beta_{a_i}}[(m_i + m_{i,l3})gcos\gamma_{a_i}cos\mu_{a_i} \\
 & -\frac{1}{2}(\rho_i + \rho_{i,l3})S(V_{a_i} + V_{a_i,l3})^2(C_{Li} + C_{Li,l3}) \\
 & +[cos(\alpha_{a_i} + \alpha_{a_i,l3}) - sin(\alpha_{a_i} + \alpha_{a_i,l3})](F_{z_i} + F_{z_i,l3}) - m_{i,l4}w_i] \\
p_{i,l4} & = h[\frac{C}{AC-E^2}\{(r_i + r_{i,l3})(q_i + q_{i,l3})(B - C) - E(p_i + p_{i,l3})(q_i + q_{i,l3}) \\
 & +\frac{1}{2}(\rho_i + \rho_{i,l3})Sl(V_{a_i} + V_{a_i,l3})^2(C_{l_i} + C_{l_i,l3})\} + \frac{E}{AC-E^2}\{(p_i + p_{i,l3})(q_i + q_{i,l3})(A - B) \\
 & -E(r_i + r_{i,l3})(q_i + q_{i,l3}) + \frac{1}{2}(\rho_i + \rho_{i,l3})Sl(V_{a_i} + V_{a_i,l3})^2(C_{ni} + C_{ni,l3})] \\
q_{i,l4} & = \frac{h}{B}\{-(r_i + r_{i,l3})(p_i + p_{i,l3})(A - C) - E((p_i + p_{i,l3})^2 - (r_i + r_{i,l3})^2) \\
 & +\frac{1}{2}(\rho_i + \rho_{i,l3})Sl(V_{a_i} + V_{a_i,l3})^2(C_{mi} + C_{mi,l3})\}, \\
r_{i,l4} & = h[\frac{E}{AC-E^2}\{(r_i + r_{i,l3})(q_i + q_{i,l3})(B - C) + E(p_i + p_{i,l3})(q_i + q_{i,l3}) \\
 & +\frac{1}{2}(\rho_i + \rho_{i,l3})Sl(V_{a_i} + V_{a_i,l3})^2(C_{l_i} + C_{l_i,l3}) + \frac{A}{AC-E^2}\{(p_i + p_{i,l3})(q_i + q_{i,l3})(A - B) \\
 & -E(r_i + r_{i,l3})(q_i + q_{i,l3}) + \frac{1}{2}(\rho_i + \rho_{i,l3})Sl(V_{a_i} + V_{a_i,l3})^2(C_{ni} + C_{ni,l3})\}] \\
X_{G_i,l4} & = h(V_{a_i} + V_{a_i,l3})cos\gamma_{a_i}cos\chi_{a_i} \\
Y_{G_i,l4} & = h(V_{a_i} + V_{a_i,l3})cos\gamma_{a_i}sin\chi_{a_i} \\
Z_{G_i,l4} & = -h(V_{a_i} + V_{a_i,l3})sin\gamma_{a_i} \\
\varphi_{i,l4} & = h[(p_i + p_{i,l3}) + (q_i + q_{i,l3})sin(\varphi_i + \varphi_{i,l3})tan(\theta_i + \theta_{i,l3}) \\
 & +(r_i + r_{i,l3})cos(\varphi_i + \varphi_{i,l3})tan(\theta_i + \theta_{i,l3})] \\
\theta_{i,l4} & = h[(q_i + q_{i,l3})cos(\varphi_i + \varphi_{i,l3}) - (r_i + r_{i,l3})sin(\varphi_i + \varphi_{i,l3})] \\
\psi_{i,l4} & = h[\frac{sin(\varphi_i+\varphi_{i,l3})}{cos(\theta_i+\theta_{i,l3})}(q_i + q_{i,l3}) + \frac{cos(\varphi_i+\varphi_{i,l3})}{cos(\theta_i+\theta_{i,l3})}(r_i + r_{i,l3})]
\end{cases}
\tag{IV.21}
$$

By combining (IV.18), (IV.19), (IV.20), (IV.21), one has : $y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4)$ as

shows by the following explicit system :

$$\begin{cases} m_{i,n+1} &= m_{i,n} + \frac{1}{6}(m_{i,l1} + 2m_{i,l2} + 2m_{i,l3} + m_{i,l4}) \\ V_{i,n+1} &= V_{i,n} + \frac{1}{6}(V_{i,l1} + 2V_{i,l2} + 2V_{i,l3} + V_{i,l4}) \\ \alpha_{a_i,n+1} &= \alpha_{a_i,n} + \frac{1}{6}(\alpha_{a_i,l1} + 2\alpha_{a_i,l2} + 2\alpha_{a_i,l3} + \alpha_{a_i,l4}) \\ p_{i,n+1} &= p_{i,n} + \frac{1}{6}(p_{i,l1} + 2p_{i,l2} + 2p_{i,l3} + p_{i,l4}) \\ q_{i,n+1} &= q_{i,n} + \frac{1}{6}(q_{i,l1} + 2q_{i,l2} + 2q_{i,l3} + q_{i,l4}) \\ r_{i,n+1} &= p_{i,n} + \frac{1}{6}(r_{i,l1} + 2r_{i,l2} + 2r_{i,l3} + r_{i,l4}) \\ X_{G_i,n+1} &= X_{G_i,n} + \frac{1}{6}(X_{G_i,l1} + 2X_{G_i,l2} + 2X_{G_i,l3} + X_{G_i,l4}) \\ Y_{G_i,n+1} &= Y_{G_i,n} + \frac{1}{6}(Y_{G_i,l1} + 2Y_{G_i,l2} + 2Y_{G_i,l3} + Y_{G_i,l4}) \\ Z_{G_i,n+1} &= Z_{G_i,n} + \frac{1}{6}(Z_{G_i,l1} + 2Z_{G_i,l2} + 2Z_{G_i,l3} + Z_{G_i,l4}) \\ \varphi_{i,n+1} &= \varphi_{i,n} + \frac{1}{6}(\varphi_{i,l1} + 2\varphi_{i,l2} + 2\varphi_{i,l3} + \varphi_{i,l4}) \\ \theta_{i,n+1} &= \theta_{i,n} + \frac{1}{6}(\theta_{i,l1} + 2\theta_{i,l2} + 2\theta_{i,l3} + \theta_{i,l4}) \\ \psi_{i,n+1} &= \psi_{i,n} + \frac{1}{6}(\psi_{i,l1} + 2\psi_{i,l2} + 2\psi_{i,l3} + \psi_{i,l4}) \end{cases} \tag{IV.22}$$

European Series in Applied and Industrial Mathematics : Proceedings, March 2012, Vol. 35, p. 269-274 Fédération Denis Poisson (Orléans-Tours) et E. Trélat (UPMC), Editors

2 Two-Aircraft optimal control problem. The in-flight noise reduction

F. Nahayo[1] M. Haddou[2] S. Khardi[3] M. Hamadiche[4] J.Ndimubandi[5]

[1] Infomaths, University Claude Bernard of Lyon 1 - LTE-IFSTTAR - University of Burundi
[2] INSA-IRMAR, UMR-CNRS 6625, Rennes - France
[3] LTE-IFSTTAR, Lyon - France
[4] LMFA,University Claude Bernard of Lyon 1, France
[5] Mathematics departement, University of Burundi, Bujumbura - Burundi

Abstract. The aim of this paper is to present and solve a mathematical model of a two-aircraft optimal control problem reducing the noise on the ground during the approach. The mathematical modelization of this problem is a non-convex optimal control governed by ordinary non-linear differential equations. To solve this problem, A direct method and a Runge-Kutta 'RK4' discretization schema are used. This discretization schema is chosed because it is a sufficiently high order and it does-not require computation of the partial derivatives of the aircraft dynamic. The Nonlinear Interior point Trust Region Optimization solver 'KNITRO' is applied. A large set of numerical experiments is presented. The obtained results give feasible trajectories with a significant noise reduction.

2.1 Introduction

In this work, a theoretical model of noise optimization is developped while maintaining a reliable evolution of the flight procedures of two commercial aircraft on approach. In particular, this work is focused on aircraft coupling noise levels and energetic consumption. These two-aircraft are supposed to land successively on one runway without conflict [20]. The model considered here is non-convex and non-linear optimal control problem leading to a system of non-linear ordinary differential equations [6]. The aircraft dynamic is described by a three dimensional set of non-linear ordinary differential equations subjected to state and control constraints. The functional to be minimized describes the overall levels of noise collected on the ground, emitted by the two mentioned aircraft. The formulation of the problem takes into account several kinds of constraints such as aircraft stability, performance and flight safety. The Nonlinear Interior point Trust Region Optimization solver 'KNITRO' [21] is used to solve the obtained

© EDP Sciences, SMAI 2012

European Series in Applied and Industrial Mathematics : Proceedings, March 2012, Vol. 35, p. 269-274 Fédération Denis Poisson (Orléans-Tours) et E. Trélat (UPMC), Editors

algebric non-linear system of equation implemented by A Modeling Language for Mathematical Programming 'AMPL' [9, 17]. The two-aircraft flight dynamic, the noise levels, the constraints, the mathematical basic equations of the two-aircraft acoustic optimal control problem and the discretization scheme are presented in sections 2 and 3 while the numerical experiments are presented in the last section.

2.2 Mathematical description of the basic equations

2.2.1 Aircraft dynamic equations

The equations of 3D-motion of each aircraft $A_i, i \in \{1,2\}$ read [3, 4] :

$$
\left\{
\begin{array}{ll}
\dot{m}_i & = -2.01\times 10^{-5}\frac{(\Phi-\mu_i-\frac{K_i}{\eta_c})\sqrt{\Theta}}{\sqrt{5\eta_n(1+\eta_{tf_i}\lambda)}\sqrt{G_i+0.2M_i^2\frac{\eta_{d_i}}{\eta_{tf_i}}\lambda-(1-\lambda)M_i}}P_0\delta_{xi}\frac{\rho_i}{\rho_0}(1-M_i+\frac{M_i^2}{2}),\\
\dot{V_{a_i}} & = \frac{1}{m_i}[-m_i g sin\gamma_{a_i}-\frac{1}{2}\rho_i S V_{a_i}^2 C_{D_i}+(cos\alpha_{a_i}cos\beta_{a_i}+sin\beta_{a_i}+sin\alpha_{a_i}cos\beta_{a_i})F_{x_i}\\
& +C_{SR_i}P_0\delta_{xi}\frac{\rho_i}{\rho_0}(1-M_i+\frac{M_i^2}{2})u_i-m_i\Delta A_u^i],\\
\dot{\beta_{a_i}} & = \frac{1}{m_i V_{a_i}}[m_i g cos\gamma_{a_i}sin\mu_{a_i}+\frac{1}{2}\rho_i S V_{a_i}^2 C_{y_i}+[-cos\alpha_{a_i}sin\beta_{a_i}+cos\beta_{a_i}-sin\alpha_{a_i}sin\beta_{a_i}]F_{y_i},\\
& +C_{SR_i}P_0\delta_{xi}\frac{\rho_i}{\rho_0}(1-M_i+\frac{M_i^2}{2})v_i-m_i\Delta A_v^i],\\
\dot{\alpha_{a_i}} & = \frac{1}{m_i V_{a_i}cos\beta_{a_i}}[m_i g cos\gamma_{a_i}cos\mu_{a_i}-\frac{1}{2}\rho_i S V_{a_i}^2 C_{L_i}+[-sin\alpha_{a_i}+cos\alpha_{a_i}]F_{z_i}\\
& +C_{SR_i}P_0\delta_{xi}\frac{\rho_i}{\rho_0}(1-M_i+\frac{M_i^2}{2})w_i-m_i\Delta A_w^i],\\
\dot{p}_i & = \frac{C}{AC-E^2}\{r_i q_i(B-C)-Ep_i q_i+\frac{1}{2}\rho_i S l V_{a_i}^2 C_{l_i}\\
& +\sum_{j=1}^2 F_j[y_{M_ij}^b cos\beta_{m_ij}sin\alpha_{m_ij}-z_{M_ij}^b sin\beta_{m_ij}]\}\\
& +\frac{E}{AC-E^2}\{p_i q_i(A-B)-Er_i q_i+\frac{1}{2}\rho_i S l V_{a_i}^2 C_{ni}\\
& +\sum_{j=1}^2 F_j[x_{M_ij}^b sin\beta_{m_ij}-y_{M_ij}^b cos\beta_{m_ij}cos\alpha_{m_ij}]\},\\
\dot{q}_i & = \frac{1}{B}\{-r_i p_i(A-C)-E(p_i^2-r_i^2)+\frac{1}{2}\rho_i S l V_{a_i}^2 C_{mi}\\
& +\sum_{j=1}^2 F_j[z_{M_ij}^b cos\beta_{m_ij}cos\alpha_{m_ij}-x_{M_ij}^b cos\beta_{m_ij}sin\alpha_{m_ij}]\},\\
\dot{r}_i & = \frac{E}{AC-E^2}\{r_i q_i(B-C)+Ep_i q_i+\frac{1}{2}\rho_i S l V_{a_i}^2 C_{l_i}\\
& +\sum_{j=1}^2 F_j[y_{M_ij}^b cos\beta_{m_ij}sin\alpha_{m_ij}-z_{M_ij}^b sin\beta_{m_ij}]\}\\
& +\frac{A}{AC-E^2}\{p_i q_i(A-B)-Er_i q_i+\frac{1}{2}\rho_i S l V_{a_i}^2 C_{ni}\\
& +\sum_{j=1}^2 F_j[x_{M_ij}^b sin\beta_{m_ij}-y_{M_ij}^b cos\beta_{m_ij}cos\alpha_{m_ij}]\},\\
\dot{X}_{G_i} & = V_{a_i}cos\gamma_{a_i}cos\chi_{a_i}+u_w, \dot{Y}_{G_i}=V_{a_i}cos\gamma_{a_i}sin\chi_{a_i}+v_w, \dot{Z}_{G_i}=-V_{a_i}sin\gamma_{a_i}+w_w,\\
\dot{\varphi}_i & = p_i+q_i sin\varphi_i tan\theta_i+r_i cos\varphi_i tan\theta_i, \dot{\theta}_i=q_i cos\varphi_i-r_i sin\varphi_i, \dot{\psi}_i=\frac{sin\varphi_i}{cos\theta_i}q_i+\frac{cos\varphi_i}{cos\theta_i}r_i,
\end{array}
\right. \tag{IV.23}
$$

where $j \in \{1,2\}$ stands for the first and second engine of each aircraft i, the expressions $A = I_{xx}, B = I_{yy}, C = I_{zz}, E = I_{xz}$ are the inertia moments of the aircraft, ρ_i is the air density, S is the aircraft reference area, l is the aircraft reference length, g is the acceleration due to

 © EDP Sciences, SMAI 2012

European Series in Applied and Industrial Mathematics : Proceedings, March 2012, Vol. 35, p. 269-274 Fédération Denis Poisson (Orléans-Tours) et E. Trélat (UPMC), Editors

gravity, $C_{D_i} = C_{D0} + kC_{Li}^2$ is the drag coefficient, $C_{yi} = C_{y\beta}\beta + C_{yp}\frac{pl}{V} + C_{yr}\frac{rl}{V} + C_{Y\delta_l}\delta_{li} + C_{Y\delta_n}\delta_{ni}$ is the lateral forces coefficient, $C_{Li} = C_{L\alpha}(\alpha_a - \alpha_{a0}) + C_{L\delta_m}\delta_{mi} + C_{LM}M_i + C_{Lq}\frac{q_a^b l}{V}$ is the lift coefficient, $C_{li} = C_{l\beta}\beta + C_{lp}\frac{pl}{V} + C_{lr}\frac{rl}{V} + C_{l\delta_l}\delta_{li} + C_{l\delta_n}\delta_{ni}$ is the rolling moment coefficient, $C_{mi} = C_{m0} + C_{m\alpha}(\alpha - \alpha_0) + C_{m\delta_m}\delta_{mi}$ is the pitching moment coefficient, $C_{ni} = C_{n\beta}\beta + C_{np}\frac{pl}{V} + C_{nr}\frac{rl}{V} + C_{n\delta_l}\delta_{li} + C_{n\delta_n}\delta_{ni}$ is the yawing moment coefficient, $(x_{Mij}^b, x_{Mij}^b, x_{Mij}^b)$ is the position of the engine in the body frame, P_0 is the full thrust, ρ_0 is the atmospheric density at the ground, $F = (F_{xi}, F_{yi}, F_{zi})$ is the propulsive force, $V_{ai} = (u_i, v_i, w_i)$ is the aerodynamic speed, $(\Delta A_u^i, \Delta A_v^i, \Delta A_w^i)$ is the complementary acceleration, (u_w, v_w, w_w) is the wind velocity, β_{mij} is the yaw setting of the engine and α_{mij} is the pitch setting of the engine. The mass change is reflected in the aircraft fuel consumption as described by E. Torenbeek [19] where the specific consumption is $C_{SR_i} = 2.01 \times 10^{-5} \frac{(\Phi - \mu_i - \frac{K_i}{\eta_c})\sqrt{\Theta}}{\sqrt{5\eta_n(1+\eta_{tf_i}\lambda)}\sqrt{G_i + 0.2M_i^2\frac{\eta_{d_i}}{\eta_{tf_i}}\lambda - (1-\lambda)M_i}}$ with the generating function $G_i = (\Phi - \frac{K_i}{\eta_c})(1 - \frac{1.01}{\eta_i^{\frac{\nu-1}{\nu}}(K_i+\mu_i)(1-\frac{K_i}{\Phi\eta_c\eta_t})})$, $K_i = \mu_i(\epsilon_c^{\frac{\nu-1}{\nu}} - 1)$, $\mu_i = 1 + \frac{\nu-1}{2}M_i^2$. The nomenclature of engine performance variables are given by G_i the gas generator power function, G0 the gas generator power function (static, sea level), K the temperature function of compression process, M_i the flight Mach number, T4 the turbine Entry total Temperature, T0 the ambient temperature at sea level, T the flight temperature, while the nomenclature of engines yields is $\eta_c = 0.85$ the isentropic compressor efficiency, $\eta_{d_i} = 1 - 1.3(\frac{0.05}{Re^{\frac{1}{5}}})^2(\frac{0.5}{M_i})^2\frac{L}{D}$, the isentropic fan intake duct efficiency, L the duct length, D the inlet diameter, Re the Reynolds number at the entrance of the nozzle, $\eta_{f_i} = 0.86 - 3.13 \times 10^{-2}M_i$ the isentropic fan efficiency, $\eta_i = \frac{1+\eta_{d_i}\frac{\gamma-1}{2}M_i^2}{1+\frac{\gamma-1}{2}M_i^2}$ the gas generator intake stagnation pressure ratio, $\eta_n = 0.97$ the isentropic efficiency of expansion process in nozzle, $\eta_t = 0.88$ the isentropic turbine efficiency $\eta_{tf_i} = \eta_t\eta_{f_i}$, ϵ_c the overall pressure ratio (compressor), ν the ratio of specific heats $\nu = 1.4$, λ the bypass ratio, μ_i the ratio of stagnation to static temperature of ambient air, Φ the nondimensional turbine entry temperature $\Phi = \frac{T_4}{T}$ and Θ the relative ambient temperature $\Theta = \frac{T}{T_0}$. The expressions $\alpha_{ai}(t), \beta_{ai}(t), \theta_i(t), \psi_i(t), \varphi_i(t), V_{a_i}(t), X_{G_i}(t), Y_{G_i}(t), Z_{G_i}(t), p_i(t), q_i(t), r_i(t), m_i(t)$ are respectively the attack angle, the aerodynamic sideslip angle, the inclination angle, the cup, the roll angle, the airspeed, the position vectors, the roll velocity of the aircraft relative to the earth, the pitch velocity of the aircraft relative to the earth, the yaw velocity of the aircraft relative to the earth and the aircraft mass. The system (IV.23) could be written in a simplified form

$$\begin{aligned}
&\tfrac{d\mathbf{y}_i(t)}{dt} = \mathbf{f}_i(\mathbf{y}_i(t), \mathbf{u}_i(t)),\\
&\mathbf{y}_i(t) = (\alpha_{ai}(t), \beta_{ai}(t), \theta_{ai}(t), \psi_{ai}(t), \varphi_i(t), V_{a_i}(t), X_{G_i}(t), Y_{G_i}(t), Z_{G_i}(t), p_i(t), q_i(t), r_i(t), m_i(t))\\
&\mathbf{u}_i(t) = (\delta_{l_i}(t), \delta_{m_i(t)}, \delta_{n_i}(t), \delta_{x_i}(t))
\end{aligned} \tag{IV.24}$$

© EDP Sciences, SMAI 2012

henceforth $\mathbf{y}_i$ is called a state function and the expressions $\delta_{l_i}(t), \delta_{m_i(t)}, \delta_{n_i}(t), \delta_{x_i}(t)$ are respectively the roll control, the pitch control, the yaw control and the thrust control. The dynamics relationship can be written as : $\dot{\mathbf{y}}_i(t) = \mathbf{f}_i(\mathbf{y}_i, \mathbf{u}_i, t), \forall t \in [0, T], y_i(0) = y_{i0}$.

2.2.2 The objective function model

Let us define the quantity named the Sound Exposure Level 'SEL' [1, 10, 18] : $SEL = 10log\left[\int_{t'} 10^{0.1L_{A1,dt}(t)}dt\right]$ where t' is the noise event interval. $[t_{10}, t_{1f}]$ and $[t_{20}, t_{2f}]$ are the respective approach intervals for the first and second aircraft, the objective function is calculated as :

$$\begin{array}{rl} SEL_G & = 10\log\{\frac{1}{t_{2f}-t_{10}}[(t_{20}-t_{10})\int_{t_{10}}^{t_{20}} 10^{0.1L_{A1}(t)}dt + (t_{1f}-t_{20})\int_{t_{20}}^{t_{1f}} 10^{0.1L_{A1}(t)}dt \\ & +(t_{1f}-t_{20})\int_{t_{20}}^{t_{1f}} 10^{0.1L_{A2}(t)}dt + (t_{2f}-t_{1f})\int_{t_{1f}}^{t_{2f}} 10^{0.1L_{A2}(t)}dt,]\}, t \in [t_{10}, t_{2f}] \end{array} \quad \text{(IV.25)}$$

where the cost function SEL_G is the cumulated two-aircraft noise. Expressions $L_{A1}(t), L_{A2}(t)$ are equivalent and reflect the aircraft jet noise given by the formula [1, 13] : $L_{A1}(t) = 141 + 10\log\left(\frac{\rho_1}{\rho_i}\right)^w + 10\log\left(\frac{V_e}{c}\right)^{7.5} + 10\log s_1 + 3\log\left(\frac{2s_1}{\pi d_1^2} + 0.5\right) + 5\log\frac{\tau_1}{\tau_2} - 20\log R + \Delta V + 10\log\left[\left(1-\frac{v_2}{v_1}\right)^{me} + 1.2\frac{\left(1+\frac{s_2 v_2^2}{s_1 v_1^2}\right)^4}{\left(1+\frac{s_2}{s_1}\right)^3}\right] + 10\log\left[\left(\frac{\rho_i}{\rho_{ISA}}\right)^2\left(\frac{c}{c_{ISA}}\right)^4\right]$ where v_1 is the jet speed at the entrance of the nozzle, v_2 the jet speed at the nozzle exit, τ_1 the inlet temperature of the nozzle, τ_2 the temperature at the nozzle exit, ρ_i the density of air, ρ_1 the atmospheric density at the entrance of the nozzle, ρ_{ISA} the atmospheric density at ground, s_1 the entrance area of the nozzle hydraulic engine, s_2 the emitting surface of the nozzle hydraulic engine, d_1 the inlet diameter of the nozzle hydraulic engine, $V_e = v_1[1 - (V/v_1)\cos(\alpha_p)]^{2/3}$ the effective speed (α_p is the angle between the axis of the motor and the axis of the aircraft), R the source observer distance, w the exponent variable defined by $w = \dfrac{3(V_e/c)^{3.5}}{0.6 + (V_e/c)^{3.5}} - 1$, c the sound velocity (m/s), me the exhibiting variable depending on the type of aircraft : $me = 1.1\sqrt{\dfrac{s_2}{s_1}}, \quad \dfrac{s_2}{s_1} < 29.7; me = 6.0, \quad \dfrac{s_2}{s_1} \geq 29.7$, the term $\Delta V = -15log(C_D(M_c, \theta)) - 10log(1 - Mcos\theta)$, means the Doppler convection when $C_D(M_c, \theta) = [(1 + M_c cos\theta)^2 + 0.04M_c^2]$, M the aircraft Mach Number, M_c the convection Mach Number : $M_c = 0.62(v_1 - Vcos(\alpha_p))/c$, θ is the Beam angle. The objective formula above could be written in the following simplified form $J_{G12}(\mathbf{y}(.), \mathbf{u}(.)) = \int_{t'} g(\mathbf{y}(t), \mathbf{u}(t))dt$.

 © EDP Sciences, SMAI 2012

2.2.3 Constraints

The considered constraints concern aircraft flight speeds and altitudes, flight angles and control positions, energy constraint, aircraft separation, flight velocities of aircraft relative to the earth and the aircraft mass [4, 12]. On the whole, the constraints come together under the relationship $\mathbf{k}_{1i}(\mathbf{y}_i, \mathbf{u}_i) \leq 0, \mathbf{k}_{2i}(\mathbf{y}_i, \mathbf{u}_i) \geq 0$ where
$\mathbf{k}_{1i}(\mathbf{y}_i, \mathbf{u}_i) = (\alpha_i(t) - \alpha_{if}, \theta_i(t) - \theta_{if}, \psi_i(t) - \psi_{if}, \varphi_i(t) - \varphi_{if}, V_{a_i}(t) - V_{aif}, X_{G_i}(t) - X_{Gif}, Y_{G_i}(t) - Y_{Gif}, Z_{G_i}(t) - Z_{Gif}, p_i(t) - p_{if}, q_i(t) - q_{if}, r_i(t) - r_{if}, \delta_{l_i}(t) - \delta_{l_if}, \delta_{m_i}(t) - \delta_{mif}, \delta_{n_i}(t) - \delta_{nif}, \delta_{x_i}(t) - \delta_{xif}, m_i(t) - m_{if})$,
$\mathbf{k}_{2i}(\mathbf{y}_i, \mathbf{u}_i) = (\alpha_i(t) - \alpha_{i0}, \theta_i(t) - \theta_{i0}, \psi_i(t) - \psi_{i0}, \varphi_i(t) - \varphi_{i0}, V_{a_i}(t) - V_{ai0}, X_{G_i}(t) - X_{Gi0}, Y_{G_i}(t) - Y_{Gi0}, Z_{G_i}(t) - Z_{Gi0}, p_i(t) - p_{i0}, q_i(t) - q_{i0}, r_i(t) - r_{i0}, \delta_{l_i}(t) - \delta_{l_i0}, \delta_{m_i}(t) - \delta_{mi0}, \delta_{n_i}(t) - \delta_{ni0}, \delta_{x_i}(t) - \delta_{xi0}, m_i(t) - m_{i0})$.

2.2.4 The two-aircraft acoustic optimal control problem

The combination of the aircraft dynamic equation, the aircraft objective function and the aircraft flight constraints, the two-aircraft acoustic optimal control problem is given as follows :

$$\begin{cases} \min\limits_{\mathbf{u}\in\mathbf{U}} J_{G12}(\mathbf{y}(.), \mathbf{u}(.)) = \int_{t10}^{t_{1f}} g_1(\mathbf{y}_1(t), \mathbf{u}_1(t), t)dt + \int_{t20}^{t_{1f}} g_{12}(\mathbf{y}_1(t), \mathbf{u}_1(t), \mathbf{y}_2(t), \mathbf{u}_2(t), t)dt \\ + \int_{t20}^{t_{2f}} g_2(\mathbf{y}_2(t), \mathbf{u}_2(t), t)dt + \varphi(y(t_f)) \\ \dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{u}(t), \mathbf{y}(t)), \mathbf{u}(t) = (\mathbf{u}_1(t), \mathbf{u}_2(t)), \mathbf{y}(t) = (\mathbf{y}_1(t), \mathbf{y}_2(t)), \\ \mathbf{k}_{1i}(\mathbf{y}_i, \mathbf{u}_i) \leq 0, \mathbf{k}_{2i}(\mathbf{y}_i, \mathbf{u}_i) \geq 0, \forall t \in [t_{10}, t_{2f}], t_{10} = 0, \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0, \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0 \end{cases} \tag{IV.26}$$

where g_{12} shows the aircraft coupling noise function and J_{G12} is the SEL of the two A300-aircraft.

2.3 The numerical processing

The problem as defined in the relation (IV.26) is an optimal control problem [5, 7] with instantaneous constraints. The fourth order Runge-Kutta method is used to solve the differential system [8]. This method is chosen because of its higher order while avoiding the disavantages of Taylor methods requiring the evaluation of partial derivatives of f.

Algorithm 1 :

1. Let us subdivide the time interval $[t_0, t_f]$ as $h = t_{n+1} - t_n = \frac{t_f - t_0}{N}$, where N is the number of samples in numerical schema.

© EDP Sciences, SMAI 2012

2.

$$\begin{array}{l}\min\limits_{u\in\mathbf{U}} J_{12}(\mathbf{y}_n,\mathbf{u}_n)\\ \mathbf{l}_1 = h\mathbf{f}(t_n,\mathbf{y}_n,\mathbf{u}_n), \mathbf{l}_2 = h\mathbf{f}(t_n+\frac{h}{2},\mathbf{y}_n+\frac{\mathbf{l}_1}{2},\mathbf{u}_n), \mathbf{l}_3 = h\mathbf{f}(t_n+\frac{h}{2},\mathbf{y}_n+\frac{\mathbf{l}_2}{2},\mathbf{u}_n),\\ \mathbf{l}_4 = h\mathbf{f}(t_n+h,\mathbf{y}_n+\mathbf{l}_3,\mathbf{u}_n), \mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n+\frac{1}{6}(\mathbf{l}_1+2\mathbf{l}_2+2\mathbf{l}_3+\mathbf{l}_4), t_{n+1}=t_n+h\\ \mu_1\mathbf{k}_1(\mathbf{y}(t_n),\mathbf{u}(t_n),t_n)=0,\ \mu_2\mathbf{k}_2(\mathbf{y}(t_n),\mathbf{u}(t_n),t_n)=0,\ \mu_1\le 0,\ \mu_2\ge 0\\ Write\ t_{n+1}=t_n+h, \mathbf{y}_{n+1}, 0\le n\le N.\end{array} \quad \text{(IV.27)}$$

3. Stop.

This algorithm is implemented by AMPL. The Nonlinear Interior point Trust Optimization solver "KNITRO" is called on to extract the optimal dynamic solution of the two-aircraft optimal control problem. The numerical results and the optimality convergence characteristics are presented in the following section.

2.4 Numerics results

Figure IV.11 shows the aircraft trajectories and speeds characterized by a part of constant flight level followed by a continuous descent till the aircraft touch point. Constraints on speeds are considered, allowing a subsequent landing on the same runway. The maximum altitudes considered are 3500 m and 4100 m for the first and second aircraft. The approach duration is 600 s for the first aircraft and 690 s for the second. The aircraft speeds decrease from 200 m/s to 69 m/s. This shows the aircraft trajectory resulting from the two trajectories combination. Figure 1 shows also the two-aircraft flight-angles and throttles evolution versus time as recommended by ICAO during aircraft landing. As specified in this figure, the aircraft roll angles oscillate around zero. The flight-path angles are negative and bang-bang . They keep the recommended position for aircraft landing procedures. The attack angles stand between 2° and 20°. Since the trajectory of the aircraft is aligned with the runway, the yaw angle are small as shown in Figure 1.
Figure IV.12 shows the noise levels when the optimization is applied and the solutions obtained. The observation positions are $(-20000\,m, -20000\,m, 0\,m)$ for $AONL_1$, $(-19800\,m, -19800\,m, 0\,m)$ for $AONL_2$,...,$(-200\,m, -200\,m, 0\,m)$ for $AONL_{10}$. In this figure, $AONL$ means Aircraft Optimal Noise Level. As specified, noise levels increase and are maximum when the observation point lies below the aircraft. Noise levels decrease gradually as the aircraft moves away from the observation point. This is in good agreement with [15, 16]. By comparison, this result is also close to standard values of jet noise on approach as shown by Harvey [2, 11, 14].

 © EDP Sciences, SMAI 2012

European Series in Applied and Industrial Mathematics : Proceedings, March 2012, Vol. 35, p. 269-274 Fédération Denis Poisson (Orléans-Tours) et E. Trélat (UPMC), Editors

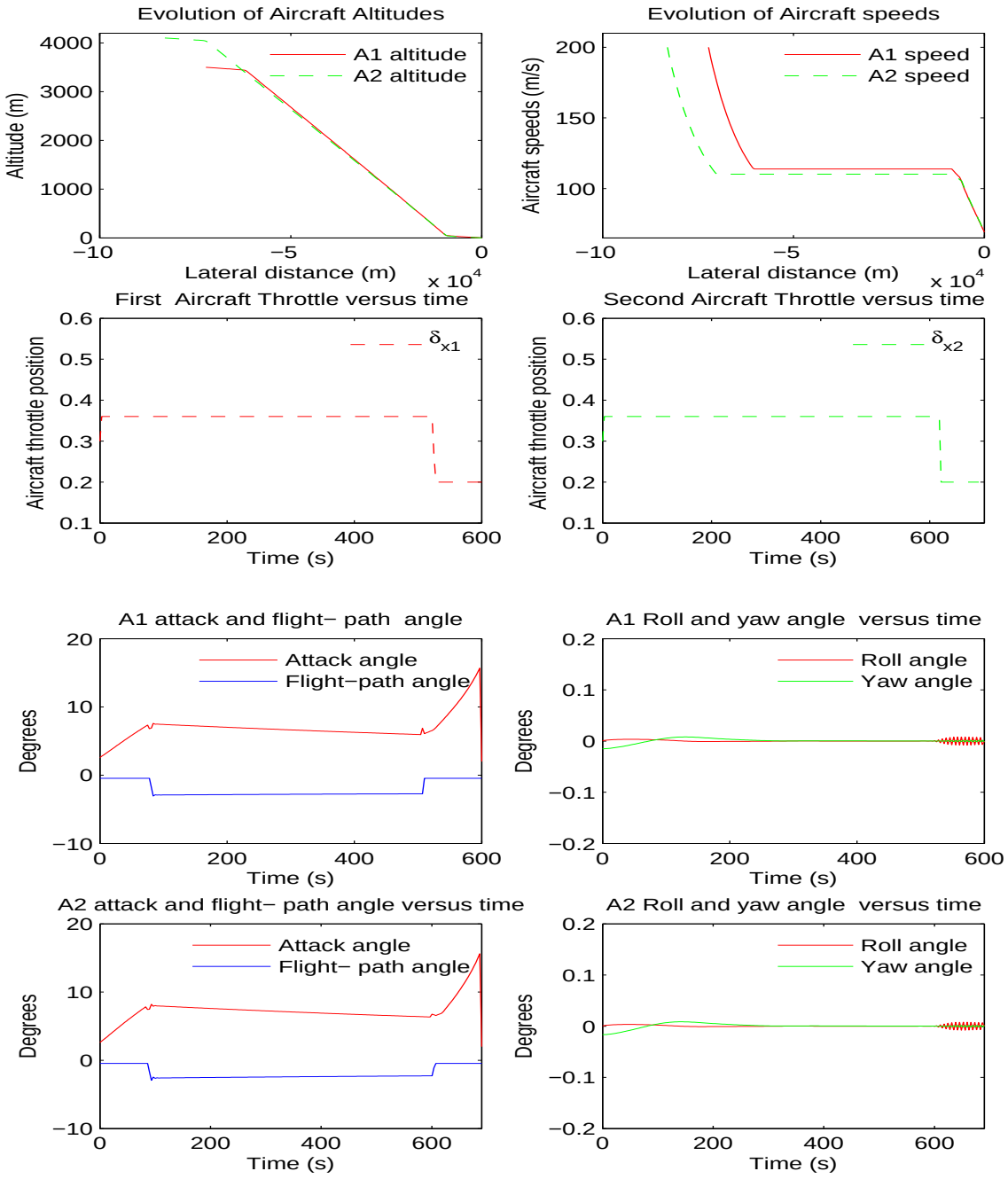


Figure IV.11 – Aircraft altitudes, speeds, throttles and flight-path angles

© EDP Sciences, SMAI 2012

European Series in Applied and Industrial Mathematics : Proceedings, March 2012, Vol. 35, p. 269-274 Fédération Denis Poisson (Orléans-Tours) et E. Trélat (UPMC), Editors

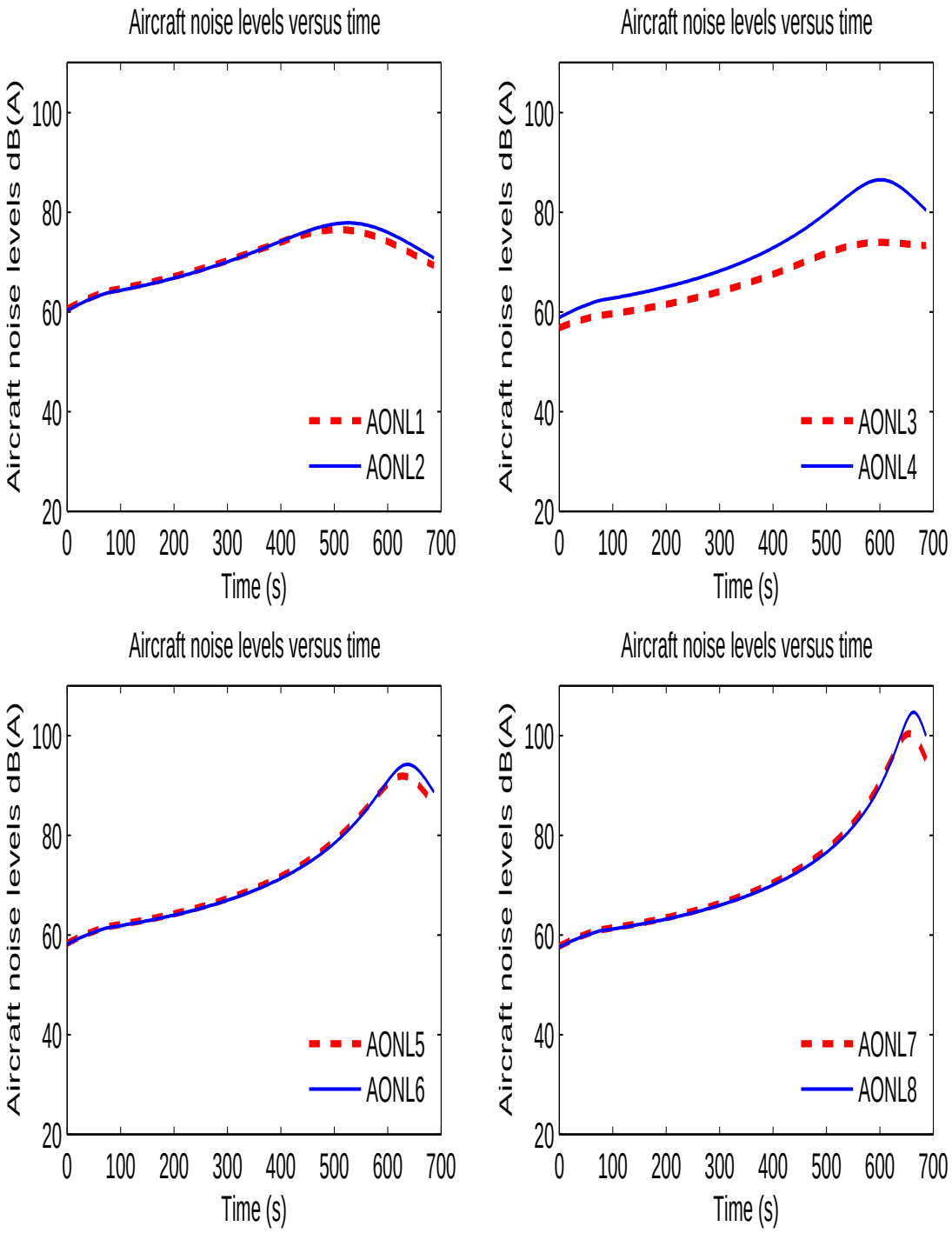


Figure IV.12 – news/index.phpAircraft optimal noise levels

© EDP Sciences, SMAI 2012

European Series in Applied and Industrial Mathematics : Proceedings, March 2012, Vol. 35, p. 269-274 Fédération Denis Poisson (Orléans-Tours) et E. Trélat (UPMC), Editors

2.5 Conclusion

In this paper, a mathematical model have been developped for noise reduction in the case of two approaching aircraft landing in succession on the same runway. An algorithm for solving the optimal control problem has been developed. Theoretical considerations and practices of a direct method and the Runge-Kutta discretization scheme are used. This discretization schema is chosen because it is of sufficiently high order and it does not require computation of the partial derivatives of f. KNITRO is applied to perform a number of numerical experiments. An optimal local solution to the discretized problem is found through a global convergence. The obtained trajectories exhibit optimal characteristics and are effective where the noise reduction is concerned.

References

[1] L. Abdallah. *Minimisation des bruits des avions commerciaux sous contraintes physiques et aérodynamiques*. Thèse de Mathématiques Appliquées de l'UCBL I, Septembre 2007

[2] L. Abdallah M. Haddou S. Khardi. *Optimization of operational aircraft parameters reducing noise emission*, Applied Mathematical Sciences, Vol. 4, no 11, 515-535, 2010.

[3] K. Blin. *Stochastic conflict detection for air traffic management*, Eurocontrol Experimental centre Publications Office, France, April 2000

[4] J-L. Boiffier. *The Dynamics of Flight, The Equations*, SUPAÉRO (Ecole Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace) et ONERA-CERT, Toulouse 25 Janvier 1999

[5] P. Destunder. *Méthodes numériques pour ingénieurs*, Hermes sciences publications, 12-8-2010.

[6] I. Chryssoverghi, J. Colestos and B. Kokkinis. *Classical and relaxed optimization methods for optimal control problems*, International Mathematical Forum, 2-2007 N° 30, pp 1477-1498.

[7] P. Faurer. *Analyse numérique, notes d'optimisation*, Ellipses Marketing, 1998.

[8] A. Fortin. *Analyse numérique pour ingénieurs*. Troisième edition, Presses internationales polytechnique, 2008, ISBN 978-2-553-01427-7

[9] R. Fourer, D-M. Gay and B-W. Kernigham. *A modelling Language for Mathematical Programming*, Second edition, Thomson Brooks[en ligne]disponible sur http ://www.ampl.com, 2003.

[10] M-M. Harris and E. Mary. *How do we Describe Aircraft Noise ?* NASA TM - 82712,

© EDP Sciences, SMAI 2012

FICAN, [en ligne] disponible sur www.fican.org

[11] H. Harvey Hubbard. *Aeroacoustics of flight vehicles. Theory and Practices.* Volume 1 : Noise sources and Volume 2 : Noise Control, NASA Langley Research Center, Hampton, Virginia 1994

[12] Ifrance. *Fiches techniques, historiques et photos d'avions A300-600, A300-600R* [en ligne] disponible sur http ://www.ifrance.com, Ifrance

[13] R. James Stone, D.E. Groesbeck, C.L. Zola. *An improved prediction method for noise generated by conventional profile coaxial jets*, NASA TM - 82712, AIAA-81-1991, 1991

[14] S.Khardi F. Nahayo and M. Haddou. *The Trust Region Sequential Quadratic Programming Method Applied to two-Aircraft Acoustic Optimal Control Problem*, Applied Mathematical Sciences, Vol.5, No.40, pp.1953-1976, 2011, ISSN 1312-885X.

[15] S. Khardi. *Mathematical Model for Advanced CDA and Takeoff Procedures Minimizing Aircraft Environmental Impact*, International mathematical Forum, 5, no 36, 1747 - 1774, 2010

[16] S.Khardi. *Reduction of commercial aircraft noise emission around airports. A new environmental challenge.* Eur. Transp. Res. Rev., (2009) Vol1, pp175-184

[17] B. Laboratories. AMPL : *A modelling Language for Mathematical Programming*, http ://www.ampl.com, 2003.

[18] D. Martin. *L'Analyse des Nuisances sonores autour des aéroports*, Revue technique numéro 58, Mai 2000.

[19] E. Roux. *Pour une approche analytique de la dynamique du vol*, Thèse, SUPAERO-ONERA, Novembre 2005

[20] E. Roux. *Modèle de longueur de piste au décollage-atterrissage, Avions de transport civil*, SUPAERO-ONERA, p 345, 2006.

[21] R-A. Waltz and T-D. Plantenga. *Knitro Documentation Release 8.0*, Ziena Optimization LLC [en ligne] disponible sur http ://www.ziena.com, November 28, 2011

 © EDP Sciences, SMAI 2012

Chapitre V

Principe du Minimum de Pontryagine Appliqué au Contrôle Optimal Acoustique de deux Avions en Approche

1 Introduction

L'objectif de ce travail est l'application de l'approche indirecte dans la résolution du modèle de deux avions tel que dévéloppé précédement. Rapelons que la dynamique de vol, associée au critère à minimiser génère un problème de commande optimale régi par des équations différentielles ordiniaires non-linéaires. La partie modélisation mathématique du problème ne sera pas reprise ici car n'ayant pas changé. Le principe de minimum de Pontryaguine est fortement sollicité dans la théorie de l'optimisation mathématique et du contrôle optimal des systèmes dynamiques et permet de trouver la commande optimale permettant d'amener un système dynamique d'un état à un autre [67, 68]. Les contraintes mixtes et instantanées sont présentes et portent sur l'état ou les commandes d'entrée. Ce principe, formulé par le mathématicien soviétique Lev Semenovich Pontryagine et ses étudiants, permet de se rattacher à la formulation générale Euler-Lagrangienne des équations dans le calcul des variations. Il éxamine la minimisation d'un Hamiltonien sur un espace des commandes admissibles.

2 Schéma de résolution du problème de deux avions par le principe de minimun de pontryagine

Afin de pouvoir appliquer la formulation de pontryagine, on réécrit le problème de deux avions comme suit :

$$\begin{cases} \min\limits_{\mathbf{u}\in\mathcal{U}} J_{12}(\mathbf{y}(.),\mathbf{u}(.)) = \int_{t0}^{t_f} g(\mathbf{y}(t),\mathbf{u}(t),t)dt \\ \dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{y}(t),\mathbf{u}(t)) \\ \mathbf{k}_1(\mathbf{y},\mathbf{u},t) \leq 0 \\ \mathbf{k}_2(\mathbf{y},\mathbf{u},t) \geq 0 \end{cases} \tag{V.1}$$

où on note J_{12} la fonction de bruit (coût du modèle), $\dot{\mathbf{y}}$ est la dynamique des avions en approche alors que $\mathbf{k}_{1i}(\mathbf{y}_i,\mathbf{u}_i)$ et $\mathbf{k}_{2i}(\mathbf{y}_i,\mathbf{u}_i)$ sont les contraintes sur l'état et la commande données par :

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_{1i}(\mathbf{y}_i,\mathbf{u}_i) = \; & (\alpha_i(t)-\alpha_{if}, \theta_i(t)-\theta_{if}, \psi_i(t)-\psi_{if}, \varphi_i(t)-\varphi_{if}, V_{a_i}(t)-V_{aif}, X_{G_i}(t)-X_{Gif}, \\ & Y_{G_i}(t)-Y_{Gif}, Z_{G_i}(t)-Z_{Gif}, p_i(t)-p_{if}, q_i(t)-q_{if}, r_i(t)-r_{if}, \delta_{l_i}(t)-\delta_{l_if}, \\ & \delta_{m_i}(t)-\delta_{mif}, \delta_{n_i}(t)-\delta_{nif}, \delta_{x_i}(t)-\delta_{xif}, m_i(t)-m_{if}) \\ \mathbf{k}_{2i}(\mathbf{y}_i,\mathbf{u}_i) = \; & (\alpha_i(t)-\alpha_{i0}, \theta_i(t)-\theta_{i0}, \psi_i(t)-\psi_{i0}, \varphi_i(t)-\varphi_{i0}, V_{a_i}(t)-V_{ai0}, X_{G_i}(t)-X_{Gi0}, \\ & Y_{G_i}(t)-Y_{Gi0}, Z_{G_i}(t)-Z_{Gi0}, p_i(t)-p_{i0}, q_i(t)-q_{i0}, r_i(t)-r_{i0}, \delta_{l_i}(t)-\delta_{l_i0}, \\ & \delta_{m_i}(t)-\delta_{mi0}, \delta_{n_i}(t)-\delta_{ni0}, \delta_{x_i}(t)-\delta_{xi0}, m_i(t)-m_{i0}) \end{aligned} \tag{V.2}$$

Considérons le pseudo-hamiltonien du système (V.1) donné par :

$$H(\mathbf{y},\mathbf{u},\tilde{\mathbf{p}},\tilde{\mathbf{p}}_0,t) = \tilde{\mathbf{p}}^T\mathbf{F}(\mathbf{y},\mathbf{u},t) - \tilde{\mathbf{p}}_0 g(\mathbf{y},\mathbf{u},t) - \mu_1\mathbf{k}_1(\mathbf{y},\mathbf{u},t) - \mu_2\mathbf{k}_2(\mathbf{y},\mathbf{u},t) \tag{V.3}$$

où le vecteur $\tilde{\mathbf{p}} = (\tilde{\mathbf{p}}_1,\tilde{\mathbf{p}}_2), \tilde{\mathbf{p}}_i = (\tilde{\mathbf{p}}_{1i},\tilde{p}_{2i},\tilde{p}_{3i},\tilde{p}_{4i},\tilde{p}_{5i},\tilde{p}_{6i},\tilde{p}_{7i},\tilde{p}_{8i},\tilde{p}_{9i},\tilde{p}_{10i},\tilde{p}_{11i},\tilde{p}_{12i},\tilde{p}_{13i})^T$ est l'etat adjoint. Avec cette nouvelle formulation de Pontryagine, les conditions nécéssaires d'optimalité sont données par :

$$\begin{aligned} & H_{\mathbf{u}}(\mathbf{y},\mathbf{u},\tilde{\mathbf{p}},\tilde{\mathbf{p}}_0,t) = 0 \\ & \dot{\mathbf{y}} = H_{\tilde{\mathbf{p}}}(\mathbf{y},\mathbf{u},\tilde{\mathbf{p}},\tilde{\mathbf{p}}_0,t) = \mathbf{F}(\mathbf{y}(t),\mathbf{u}(t)) \\ & \dot{\tilde{\mathbf{p}}} = -H_{\mathbf{y}}(\mathbf{y},\mathbf{u},\tilde{\mathbf{p}},\tilde{\mathbf{p}}_0,t) \\ & \mathbf{k}_1(\mathbf{y},\mathbf{u},t) \leq 0, \mathbf{k}_2(\mathbf{y},\mathbf{u},t) \geq 0, t \in [t_0,t_f], \mu_2 \geq 0 \end{aligned} \tag{V.4}$$

òu H est le pseudo-hamiltonien.

Les équations du coétat sont les suivantes :

$$\begin{aligned}
\dot{\tilde{p}}_{1i} &= -\frac{\partial H}{\partial \alpha_{ai}}, \dot{\tilde{p}}_{2i} = -\frac{\partial H}{\partial \beta_{ai}}, \dot{\tilde{p}}_{3i} = -\frac{\partial H}{\partial \theta_i}, \dot{\tilde{p}}_{4i} = -\frac{\partial H}{\partial \psi_i}, \dot{\tilde{p}}_{5i} = -\frac{\partial H}{\partial \varphi_i} \\
\dot{\tilde{p}}_{6i} &= -\frac{\partial H}{\partial V_{ai}}, \dot{\tilde{p}}_{7i} = -\frac{\partial H}{\partial X_{Gi}}, \dot{\tilde{p}}_{8i} = -\frac{\partial H}{\partial Y_{Gi}}, \dot{\tilde{p}}_{9i} = -\frac{\partial H}{\partial Z_{Gi}}, \dot{\tilde{p}}_{10i} = -\frac{\partial H}{\partial p_i} \\
\dot{\tilde{p}}_{11i} &= -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \dot{\tilde{p}}_{12i} = -\frac{\partial H}{\partial r_i}, \dot{\tilde{p}}_{13i} = -\frac{\partial H}{\partial m_i},
\end{aligned} \tag{V.5}$$

De l'équation $H_{\mathbf{u}}(\mathbf{y}, \mathbf{u}, \mathbf{p}, \mathbf{p}_0, t) = 0$, on a sous certaines hypothèses de régularité :

$$\mathbf{u}(t) = \psi(\mathbf{y}(t), \tilde{\mathbf{p}}(t)). \tag{V.6}$$

Le hamiltonien est donc :

$$\mathcal{H}(\mathbf{y}, \mathbf{u}, \tilde{\mathbf{p}}, \tilde{\mathbf{p}}_0, t) = H(\psi(\mathbf{y}, \tilde{\mathbf{p}}), \mathbf{y}, \tilde{\mathbf{p}}) \tag{V.7}$$

Le système de Hamilton devient :

$$\begin{aligned}
&\dot{y} = \mathcal{H}_{\tilde{p}}(y, u, \tilde{p}, \tilde{p}_0, t), y(t_0) = y_0 \\
&\dot{\tilde{p}} = -\mathcal{H}_y(y, u, \tilde{p}, \tilde{p}_0, t), \tilde{p}(t_f) = \varphi'(y(t_f)) \\
&k_1(y, u, t) \leq 0, k_2(y, u, t) \geq 0, t \in [t_0, t_f]
\end{aligned} \tag{V.8}$$

Le système ci-haut est un système hamiltonien[69, 70]. La conservation du hamiltonien n'est pas garantie le long des solutions numériques tout comme le flot numérique n'est symplectique. Par Lagrange, une courbe $\mathbf{y}_n, \tilde{\mathbf{p}}_n, \mathbf{u}_{n_k}, \tilde{\mathbf{q}}_{n_k}$ est une solution optimale du problème :

$$\begin{cases}
\min\limits_{\mathbf{u}_{n_k}} J_{12}(\mathbf{y}_n, \mathbf{u}_{n_k}) \\
\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + h \sum\limits_{k=1}^{s} b_k \mathbf{F}(\mathbf{y}_{n_k}, \mathbf{u}_{n_k}), \mathbf{y}(t_0) = y_0 \\
\mathbf{y}_{n_k} = \mathbf{y}_n + h \sum\limits_{j=1}^{s} a_k j \mathbf{F}(\mathbf{y}_{n_j}, \mathbf{u}_{n_j}), k = 1, ..., s \\
\mathbf{k}_1(\mathbf{y}_n, \mathbf{u}_{n_k}) \leq 0 \\
\mathbf{k}_2(\mathbf{y}_n, \mathbf{u}_{n_k}) \geq 0
\end{cases} \tag{V.9}$$

lorsque les conditions suivantes sont vérifiées :

$$\begin{aligned} L_{\mathbf{y}_n} &= \nabla_{\mathbf{y}_n}(L_n + L_{n+1}) = 0 \\ L_{\mathbf{y}_{n_k}} &= \nabla_{\mathbf{y}_{n_k}} L_{n+1} = 0, k = 1, ..., s \\ L_{\mathbf{u}_{n_k}} &= \nabla_{\mathbf{u}_{n_k}} L_{n+1} = 10, k = 1, ..., s \\ L_{\tilde{\mathbf{p}}_n} &= \nabla_{\tilde{\mathbf{p}}_n} L_n = 0, n = 0, ..., N \\ L_{\tilde{\mathbf{q}}_{n_k}} &= \nabla_{\tilde{\mathbf{q}}_{n_k}} L_{n+1} = 0, k = 1, ..., s \end{aligned} \tag{V.10}$$

Le lagrangien L est donné par la formule suivante :

$$\begin{aligned} L &= g(\mathbf{y}_n, \mathbf{u}_{n_k}) + L_0 + \sum_{n=0}^{N-1} L_{n+1} \\ L_0 &= \mathbf{p}_0^T \left(\mathbf{y}_(t_0) - \mathbf{y}_0\right) \\ L_{n+1} &= \mathbf{p}_{n+1}^T \left(\mathbf{y}_n - \mathbf{y}_{n+1} + h \sum_{j=1}^{s} b_j \mathbf{F}(\mathbf{u}_{n_j}, \mathbf{y}_{n_j})\right) + \sum_{k=1}^{s} \mathbf{q}_{n_k}^T \left(\mathbf{y}_n - \mathbf{y}_{n_k} + h \sum_{j=1}^{s} a_{kj} \mathbf{F}(\mathbf{u}_{n_j}, \mathbf{y}_{n_j})\right) \\ & n = 0, ..., N-1 \end{aligned} \tag{V.11}$$

Selon les travaux de J. Laurent-Varin et Hager, des transformations mathématiques montrent l'équivalence entre les systèmes (V.9, V.10, V.11) et les conditions d'optimalité [46, 71]. L'application d'une méthode de Runge-Kutta partitionnée symplectique de type $M = (\overline{A}, b), \tilde{M} = (\tilde{A}, \tilde{b})$ conduit à un système de la forme :

$$\begin{aligned} &\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + h \sum_{k=1}^{s} b_k \mathcal{H}_{\tilde{\mathbf{p}}}(\mathbf{u}_{n_k}, \mathbf{y}_{n_k}), \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0 \\ &\mathbf{y}_{n_k} = \mathbf{y}_n + h \sum_{j=1}^{s} a_{kj} \mathcal{H}_{\tilde{\mathbf{p}}}(\mathbf{u}_{n_j}, \mathbf{y}_{n_j}), k = 1, .., s \\ &\tilde{\mathbf{p}}_{n+1} = \tilde{\mathbf{p}}_n - h \sum_{k=1}^{s} \tilde{b}_k \mathcal{H}_{\mathbf{y}}(\tilde{\mathbf{p}}_{n_k}, \mathbf{y}_{n_k}), \tilde{\mathbf{p}}_N = \varphi'(t_f) \\ &\tilde{\mathbf{p}}_{n_k} = \tilde{\mathbf{p}}_n - h \sum_{j=1}^{s} \tilde{a}_{kj} \mathcal{H}_{\mathbf{y}}(\tilde{\mathbf{p}}_{n_j}, \mathbf{y}_{n_j}) \\ &\mathcal{H}(\mathbf{y}_{n_k}, \tilde{\mathbf{p}}_{n_k}) = H(\psi(\mathbf{y}_{n_k}, \tilde{\mathbf{p}}_{n_k}), \mathbf{y}_{n_k}, \tilde{\mathbf{p}}_{n_k}) \\ &\tilde{a}_{kj} := b_j - \frac{b_j}{b_k} a_{jk}, b_j = \tilde{b}_j \end{aligned} \tag{V.12}$$

$$\mathbf{k}_1(\mathbf{y}_n, \mathbf{u}_{n_k}) \leq 0$$

$$\mathbf{k}_2(\mathbf{y}_n, \mathbf{u}_{n_k}) \geq 0$$

Considérons le flot numérique

$$\begin{aligned} &\xi_h : \mathbf{R^{2n}} \longrightarrow \mathbf{R^{2n}} \\ &(\tilde{\mathbf{p}}_n, \mathbf{y}_n) \longrightarrow (\tilde{\mathbf{p}}_{n+1}, \mathbf{y}_{n+1}) \end{aligned} \tag{V.13}$$

Si le flot choisi est de manière que la relation :

$$\left(\frac{\partial \xi_h}{\partial(\tilde{\mathbf{p}}, \mathbf{y})}\right)^T \tilde{J} \left(\frac{\partial \xi_h}{\partial(\tilde{\mathbf{p}}, \mathbf{y})}\right) = \tilde{J} \tag{V.14}$$

soit vérifiée, la méthode de Runge-Kutta est dite symplectique pour tout hamiltonien H regulière et tout pas d'intégration h [72, 73]. La caractérisation de la méthode de Runge-Kutta symplectique se fait aussi à l'aide de la matrice $R = B\tilde{A} + \overline{A}^T \tilde{B} - b\tilde{b}^T$ de $\mathbf{R^{2s}}$ losque $B = diag(b_1, ..., b_s)$ et $\tilde{B} = diag(\tilde{b}_1, ..., \tilde{b}_s)$.

2.1 Algorithme de Runge-kutta partitionné symplectique

1. On subdivise l'intervalle de temps $[t_0, t_f]$ en N pas $h = t_{n+1} - t_n = \frac{t_f - t_0}{N}$, N étant le nombre maximal d'itération.

2. Pour $0 \leq n \leq N$,

$$\begin{aligned} &H_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}_{ki}, \mathbf{y}_{ki}, \tilde{\mathbf{p}}_{ki}) = 0 \\ &\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + h \sum_{k=1}^{s} b_k \mathcal{H}_{\tilde{\mathbf{p}}}(\mathbf{u}_{n_k}, \mathbf{y}_{n_k}), \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0 \\ &\mathbf{y}_{n_k} = \mathbf{y}_n + h \sum_{j=1}^{s} a_{kj} \mathcal{H}_{\tilde{\mathbf{p}}}(\mathbf{u}_{n_j}, \mathbf{y}_{n_j}), k = 1, .., s \\ &\tilde{\mathbf{p}}_{n+1} = \tilde{\mathbf{p}}_n - h \sum_{k=1}^{s} \tilde{b}_k \mathcal{H}_{\mathbf{y}}(\tilde{\mathbf{p}}_{n_k}, \mathbf{y}_{n_k}), \tilde{\mathbf{p}}_N = \varphi'(t_f) \\ &\tilde{\mathbf{p}}_{n_k} = \tilde{\mathbf{p}}_n - h \sum_{j=1}^{s} \tilde{a}_{kj} \mathcal{H}_{\mathbf{y}}(\tilde{\mathbf{p}}_{n_j}, \mathbf{y}_{n_j}) \\ &\mathcal{H}(\mathbf{y}_{n_k}, \tilde{\mathbf{p}}_{n_k}) = H(\psi(\mathbf{y}_{n_k}, \tilde{\mathbf{p}}_{n_k}), \mathbf{y}_{n_k}, \tilde{\mathbf{p}}_{n_k}) \\ &\tilde{a}_{kj} := b_j - \frac{b_j}{b_k} a_{jk}, b_j = \tilde{b}_j \\ &\mathbf{k}_1(\mathbf{y}_n, \mathbf{u}_{n_k}) \leq 0 \\ &\mathbf{k}_2(\mathbf{y}_n, \mathbf{u}_{n_k}) \geq 0 \\ &Ecrire\ t_{n+1}, \mathbf{y}_{n+1}, \mathbf{p}_{n+1} \end{aligned} \tag{V.15}$$

3. Arrêt

La première équation de (V.15) prend la forme explicite suivante :

$$\begin{array}{l} H_{\delta_{xi}}(\mathbf{u}_{ki}, \mathbf{y}_{ki}, \tilde{\mathbf{p}}_{ki}) = 0, H_{\delta_{li}}(\mathbf{u}_{ki}, \mathbf{y}_{ki}, \tilde{\mathbf{p}}_{ki}) = 0 \\ H_{\delta_{mi}}(\mathbf{u}_{ki}, \mathbf{y}_{ki}, \tilde{\mathbf{p}}_{ki}) = 0, H_{\delta_{ni}}(\mathbf{u}_{ki}, y_{ki}, \tilde{\mathbf{p}}_{ki}) = 0 \end{array} \tag{V.16}$$

La deuxième équation de (V.15) prend la forme explicite suivante :

$$\begin{array}{ll} m_{i,n+1} & = m_{i,n} + h\sum_{k=1}^{s} b_k \mathcal{H}_{\tilde{p}_{13i}}(\mathbf{u}_{n_k}, \mathbf{y}_{n_k}), m_i(t_0) = m_{i0} \\ V_{ai,n+1} & = V_{ai,n} + h\sum_{k=1}^{s} b_k \mathcal{H}_{\tilde{p}_{6i}}(\mathbf{u}_{n_k}, \mathbf{y}_{n_k}), V_{ai}(t_0) = V_{ai0} \\ \alpha_{a_i,n+1} & = \alpha_{a_i,n} + h\sum_{k=1}^{s} b_k \mathcal{H}_{\tilde{\mathbf{p}}_{1i}}(\mathbf{u}_{n_k}, \mathbf{y}_{n_k}), \alpha_{ai}(t_0) = \alpha_{ai0} \\ \beta_{a_i,n+1} & = \beta_{a_i,n} + h\sum_{k=1}^{s} b_k \mathcal{H}_{\tilde{\mathbf{p}}_{2i}}(\mathbf{u}_{n_k}, \mathbf{y}_{n_k}), \beta_{ai}(t_0) = \beta_{ai0} \\ p_{i,n+1} & = p_{i,n} + h\sum_{k=1}^{s} b_k \mathcal{H}_{\tilde{\mathbf{p}}_{10i}}(\mathbf{u}_{n_k}, \mathbf{y}_{n_k}), p_i(t_0) = p_{i0} \\ q_{i,n+1} & = q_{i,n} + h\sum_{k=1}^{s} b_k \mathcal{H}_{\tilde{\mathbf{p}}_{11i}}(\mathbf{u}_{n_k}, \mathbf{y}_{n_k}), q_i(t_0) = q_{i0} \\ r_{i,n+1} & = p_{i,n} + h\sum_{k=1}^{s} b_k \mathcal{H}_{\tilde{\mathbf{p}}_{12i}}(\mathbf{u}_{n_k}, \mathbf{y}_{n_k}), r_i(t_0) = r_{i0} \\ X_{G_i,n+1} & = X_{G_i,n} + h\sum_{k=1}^{s} b_k \mathcal{H}_{\tilde{\mathbf{p}}_{7i}}(\mathbf{u}_{n_k}, \mathbf{y}_{n_k}), X_{Gi}(t_0) = X_{Gi0} \\ Y_{G_i,n+1} & = Y_{G_i,n} + h\sum_{k=1}^{s} b_k \mathcal{H}_{\tilde{\mathbf{p}}_{8i}}(\mathbf{u}_{n_k}, \mathbf{y}_{n_k}), Y_{Gi}(t_0) = Y_{Gi0} \\ Z_{G_i,n+1} & = Z_{G_i,n} + h\sum_{k=1}^{s} b_k \mathcal{H}_{\tilde{\mathbf{p}}_{9i}}(\mathbf{u}_{n_k}, \mathbf{y}_{n_k}), Z_{Gi}(t_0) = Z_{Gi0} \\ \varphi_{i,n+1} & = \varphi_{i,n} + h\sum_{k=1}^{s} b_k \mathcal{H}_{\tilde{\mathbf{p}}_{5i}}(\mathbf{u}_{n_k}, \mathbf{y}_{n_k}), \varphi_i(t_0) = \varphi_{i0} \\ \theta_{i,n+1} & = \theta_{i,n} + h\sum_{k=1}^{s} b_k \mathcal{H}_{\tilde{\mathbf{p}}_{3i}}(\mathbf{u}_{n_k}, \mathbf{y}_{n_k}), \theta_i(t_0) = \theta_{i0} \\ \psi_{i,n+1} & = \psi_{i,n} + h\sum_{k=1}^{s} b_k \mathcal{H}_{\tilde{\mathbf{p}}_{4i}}(\mathbf{u}_{n_k}, \mathbf{y}_{n_k}), \psi_i(t_0) = \psi_{i0} \end{array} \tag{V.17}$$

La troisième équation de (V.15) prend la forme explicite suivante :

$$\begin{array}{ll} m_{i,n_k} & = m_{i,n} + h\sum_{j=1}^{s} a_{kj} \mathcal{H}_{\tilde{\mathbf{p}}_{13i}}(\mathbf{u}_{n_j}, \mathbf{y}_{n_j}), k = 1, .., s \\ V_{i,n_k} & = V_{ai,n} + h\sum_{j=1}^{s} a_{kj} \mathcal{H}_{\tilde{\mathbf{p}}_{6i}}(\mathbf{u}_{n_j}, \mathbf{y}_{n_j}), k = 1, .., s \\ \alpha_{ai,n_k} & = \alpha_{ai,n} + h\sum_{j=1}^{s} a_{kj} \mathcal{H}_{\tilde{\mathbf{p}}_{1i}}(\mathbf{u}_{n_j}, \mathbf{y}_{n_j}), k = 1, .., s \\ \beta_{ai,n_k} & = \beta_{ai,n} + h\sum_{j=1}^{s} a_{kj} \mathcal{H}_{\tilde{\mathbf{p}}_{2i}}(\mathbf{u}_{n_j}, \mathbf{y}_{n_j}), k = 1, .., s \\ p_{i,n_k} & = p_{i,n} + h\sum_{j=1}^{s} a_{kj} \mathcal{H}_{\tilde{\mathbf{p}}_{10i}}(\mathbf{u}_{n_j}, \mathbf{y}_{n_j}), k = 1, .., s \\ q_{i,n_k} & = q_{i,n} + h\sum_{j=1}^{s} a_{kj} \mathcal{H}_{\tilde{\mathbf{p}}_{11i}}(\mathbf{u}_{n_j}, \mathbf{y}_{n_j}), k = \overline{A}1, .., s \\ r_{i,n_k} & = p_{i,n} + h\sum_{j=1}^{s} a_{kj} \mathcal{H}_{\tilde{\mathbf{p}}_{12i}}(\mathbf{u}_{n_j}, \mathbf{y}_{n_j}), k = 1, .., s \\ X_{G_i,n_k} & = X_{G_i,n} + h\sum_{j=1}^{s} a_{kj} \mathcal{H}_{\tilde{\mathbf{p}}_{7i}}(\mathbf{u}_{n_j}, \mathbf{y}_{n_j}), k = 1, .., s \\ Y_{G_i,n_k} & = Y_{G_i,n} + h\sum_{j=1}^{s} a_{kj} \mathcal{H}_{\tilde{\mathbf{p}}_{8i}}(\mathbf{u}_{n_j}, \mathbf{y}_{n_j}), k = 1, .., s \\ Z_{G_i,n_k} & = Z_{G_i,n} + h\sum_{j=1}^{s} a_{kj} \mathcal{H}_{\tilde{\mathbf{p}}_{9i}}(\mathbf{u}_{n_j}, \mathbf{y}_{n_j}), k = 1, .., s \\ \varphi_{i,n_k} & = \varphi_{i,n} + h\sum_{j=1}^{s} a_{kj} \mathcal{H}_{\tilde{\mathbf{p}}_{5i}}(\mathbf{u}_{n_j}, \mathbf{y}_{n_j}), k = 1, .., s \\ \theta_{i,n_k} & = \theta_{i,n} + h\sum_{j=1}^{s} a_{kj} \mathcal{H}_{\tilde{\mathbf{p}}_{3i}}(\mathbf{u}_{n_j}, \mathbf{y}_{n_j}), k = 1, .., s \\ \psi_{i,n_k} & = \psi_{i,n} + h\sum_{k=1}^{s} a_{kj} \mathcal{H}_{\tilde{\mathbf{p}}_{4i}}(\mathbf{u}_{n_j}, \mathbf{y}_{n_j}), k = 1, .., s \end{array} \tag{V.18}$$

La quatrième équation de (V.15) prend la forme explicite suivante :

$$\begin{aligned}
\tilde{p}_{1i,n+1} &= \tilde{p}_{1i,n} - h\sum_{k=1}^{s}\tilde{b}_k\mathcal{H}_{\alpha_{ai}}(\tilde{\mathbf{p}}_{n_k},\mathbf{y}_{n_k},\mathbf{u}_{n_k}), \tilde{p}_{1i,N} = \tilde{p}_{1i}(t_f)\\
\tilde{p}_{2i,n+1} &= \tilde{p}_{2i,n} - h\sum_{k=1}^{s}\tilde{b}_k\mathcal{H}_{\beta_{ai}}(\tilde{\mathbf{p}}_{n_k},\mathbf{y}_{n_k},\mathbf{u}_{n_k}), \tilde{p}_{2i,N} = \tilde{p}_{2i}(t_f)\\
\tilde{p}_{3i,n+1} &= \tilde{p}_{3i,n} - h\sum_{k=1}^{s}\tilde{b}_k\mathcal{H}_{\theta_i}(\tilde{\mathbf{p}}_{n_k},\mathbf{y}_{n_k},\mathbf{u}_{n_k}), \tilde{p}_{3i,N} = \tilde{p}_{3i}(t_f)\\
\tilde{p}_{4i,n+1} &= \tilde{p}_{4i,n} - h\sum_{k=1}^{s}\tilde{b}_k\mathcal{H}_{\psi_i}(\tilde{\mathbf{p}}_{n_k},\mathbf{y}_{n_k},\mathbf{u}_{n_k}), \tilde{p}_{4i,N} = \tilde{p}_{4i}(t_f)\\
\tilde{p}_{5i,n+1} &= \tilde{p}_{5i,n} - h\sum_{k=1}^{s}\tilde{b}_k\mathcal{H}_{\varphi_i}(\tilde{\mathbf{p}}_{n_k},\mathbf{y}_{n_k},\mathbf{u}_{n_k}), \tilde{p}_{5i,N} = \tilde{p}_{5i}(t_f)\\
\tilde{p}_{6i,n+1} &= \tilde{p}_{6i,n} - h\sum_{k=1}^{s}\tilde{b}_k\mathcal{H}_{V_{ai}}(\tilde{\mathbf{p}}_{n_k},\mathbf{y}_{n_k},\mathbf{u}_{n_k}), \tilde{p}_{6i,N} = \tilde{p}_{6i}(t_f)\\
\tilde{p}_{7i,n+1} &= \tilde{p}_{7i,n} - h\sum_{k=1}^{s}\tilde{b}_k\mathcal{H}_{X_{Gi}}(\tilde{\mathbf{p}}_{n_k},\mathbf{y}_{n_k},\mathbf{u}_{n_k}), \tilde{p}_{7i,N} = \tilde{p}_{7i}(t_f)\\
\tilde{p}_{8i,n+1} &= \tilde{p}_{8i,n} - h\sum_{k=1}^{s}\tilde{b}_k\mathcal{H}_{Y_{Gi}}(\tilde{\mathbf{p}}_{n_k},\mathbf{y}_{n_k},\mathbf{u}_{n_k}), \tilde{p}_{8i,N} = \tilde{p}_{8i}(t_f)\\
\tilde{p}_{9i,n+1} &= \tilde{p}_{9i,n} - h\sum_{k=1}^{s}\tilde{b}_k\mathcal{H}_{Z_{Gi}}(\tilde{\mathbf{p}}_{n_k},\mathbf{y}_{n_k},\mathbf{u}_{n_k}), \tilde{p}_{9i,N} = \tilde{p}_{9i}(t_f)\\
\tilde{p}_{10i,n+1} &= \tilde{p}_{10i,n} - h\sum_{k=1}^{s}\tilde{b}_k\mathcal{H}_{p_i}(\tilde{\mathbf{p}}_{n_k},\mathbf{y}_{n_k},\mathbf{u}_{n_k}), \tilde{p}_{10i,N} = \tilde{p}_{10i}(t_f)\\
\tilde{p}_{11i,n+1} &= \tilde{p}_{11i,n} - h\sum_{k=1}^{s}\tilde{b}_k\mathcal{H}_{q_i}(\tilde{\mathbf{p}}_{n_k},\mathbf{y}_{n_k},\mathbf{u}_{n_k}), \tilde{p}_{11i,N} = \tilde{p}_{11i}(t_f)\\
\tilde{p}_{12i,n+1} &= \tilde{p}_{12i,n} - h\sum_{k=1}^{s}\tilde{b}_k\mathcal{H}_{r_i}(\tilde{\mathbf{p}}_{n_k},\mathbf{y}_{n_k},\mathbf{u}_{n_k}), \tilde{p}_{12i,N} = \tilde{p}_{12i}(t_f)\\
\tilde{p}_{13i,n+1} &= \tilde{p}_{13i,n} - h\sum_{k=1}^{s}\tilde{b}_k\mathcal{H}_{m_i}(\tilde{\mathbf{p}}_{n_k},\mathbf{y}_{n_k},\mathbf{u}_{n_k}), \tilde{p}_{13i,N} = \tilde{p}_{13i}(t_f)
\end{aligned} \tag{V.19}$$

La cinquième équation de (V.15) prend la forme explicite suivante :

$$\begin{aligned}
\tilde{p}_{1i,n_k} &= \tilde{p}_{1i,n} - h\sum_{j=1}^{s}\tilde{a}_{k,j}\mathcal{H}_{\alpha_{ai}}(\tilde{\mathbf{p}}_{n_j},\mathbf{y}_{n_j},\mathbf{u}_{n_j})\\
\tilde{p}_{2i,n_k} &= \tilde{p}_{2i,n} - h\sum_{j=1}^{s}\tilde{a}_{k,j}\mathcal{H}_{\beta_{ai}}(\tilde{\mathbf{p}}_{n_j},\mathbf{y}_{n_j},\mathbf{u}_{n_j})\\
\tilde{p}_{3i,n_k} &= \tilde{p}_{3i,n} - h\sum_{j=1}^{s}\tilde{a}_{k,j}\mathcal{H}_{\theta_i}(\tilde{\mathbf{p}}_{n_j},\mathbf{y}_{n_j},\mathbf{u}_{n_j})\\
\tilde{p}_{4i,n_k} &= \tilde{p}_{4i,n} - h\sum_{j=1}^{s}\tilde{a}_{k,j}\mathcal{H}_{\psi_i}(\tilde{\mathbf{p}}_{n_j},\mathbf{y}_{n_j},\mathbf{u}_{n_j})\\
\tilde{p}_{5i,n_k} &= \tilde{p}_{5i,n} - h\sum_{j=1}^{s}\tilde{a}_{k,j}\mathcal{H}_{\varphi_i}(\tilde{\mathbf{p}}_{n_j},\mathbf{y}_{n_j},\mathbf{u}_{n_j})\\
\tilde{p}_{6i,n_k} &= \tilde{p}_{6i,n} - h\sum_{j=1}^{s}\tilde{a}_{k,j}\mathcal{H}_{V_{ai}}(\tilde{\mathbf{p}}_{n_j},\mathbf{y}_{n_j},\mathbf{u}_{n_j})\\
\tilde{p}_{7i,n_k} &= \tilde{p}_{7i,n} - h\sum_{j=1}^{s}\tilde{a}_{k,j}\mathcal{H}_{X_{Gi}}(\tilde{\mathbf{p}}_{n_j},\mathbf{y}_{n_j},\mathbf{u}_{n_j})\\
\tilde{p}_{8i,n_k} &= \tilde{p}_{8i,n} - h\sum_{j=1}^{s}\tilde{a}_{k,j}\mathcal{H}_{Y_{Gi}}(\tilde{\mathbf{p}}_{n_j},\mathbf{y}_{n_j},\mathbf{u}_{n_j})\\
\tilde{p}_{9i,n_k} &= \tilde{p}_{9i,n} - h\sum_{j=1}^{s}\tilde{a}_{k,j}\mathcal{H}_{Z_{Gi}}(\tilde{\mathbf{p}}_{n_j},\mathbf{y}_{n_j},\mathbf{u}_{n_j})\\
\tilde{p}_{10i,n_k} &= \tilde{p}_{10i,n} - h\sum_{j=1}^{s}\tilde{a}_{k,j}\mathcal{H}_{p_i}(\tilde{\mathbf{p}}_{n_j},\mathbf{y}_{n_j},\mathbf{u}_{n_j})\\
\tilde{p}_{11i,n_k} &= \tilde{p}_{11i,n} - h\sum_{j=1}^{s}\tilde{a}_{k,j}\mathcal{H}_{q_i}(\tilde{\mathbf{p}}_{n_j},\mathbf{y}_{n_j},\mathbf{u}_{n_j})\\
\tilde{p}_{12i,n_k} &= \tilde{p}_{12i,n} - h\sum_{j=1}^{s}\tilde{a}_{k,j}\mathcal{H}_{r_i}(\tilde{\mathbf{p}}_{n_j},\mathbf{y}_{n_j},\mathbf{u}_{n_j})\\
\tilde{p}_{13i,n_k} &= \tilde{p}_{13i,n} - h\sum_{j=1}^{s}\tilde{a}_{k,j}\mathcal{H}_{m_i}(\tilde{\mathbf{p}}_{n_j},\mathbf{y}_{n_j},\mathbf{u}_{n_j})
\end{aligned} \tag{V.20}$$

Le diagramme suivant montre la commutation de l'approche directe et indirecte.

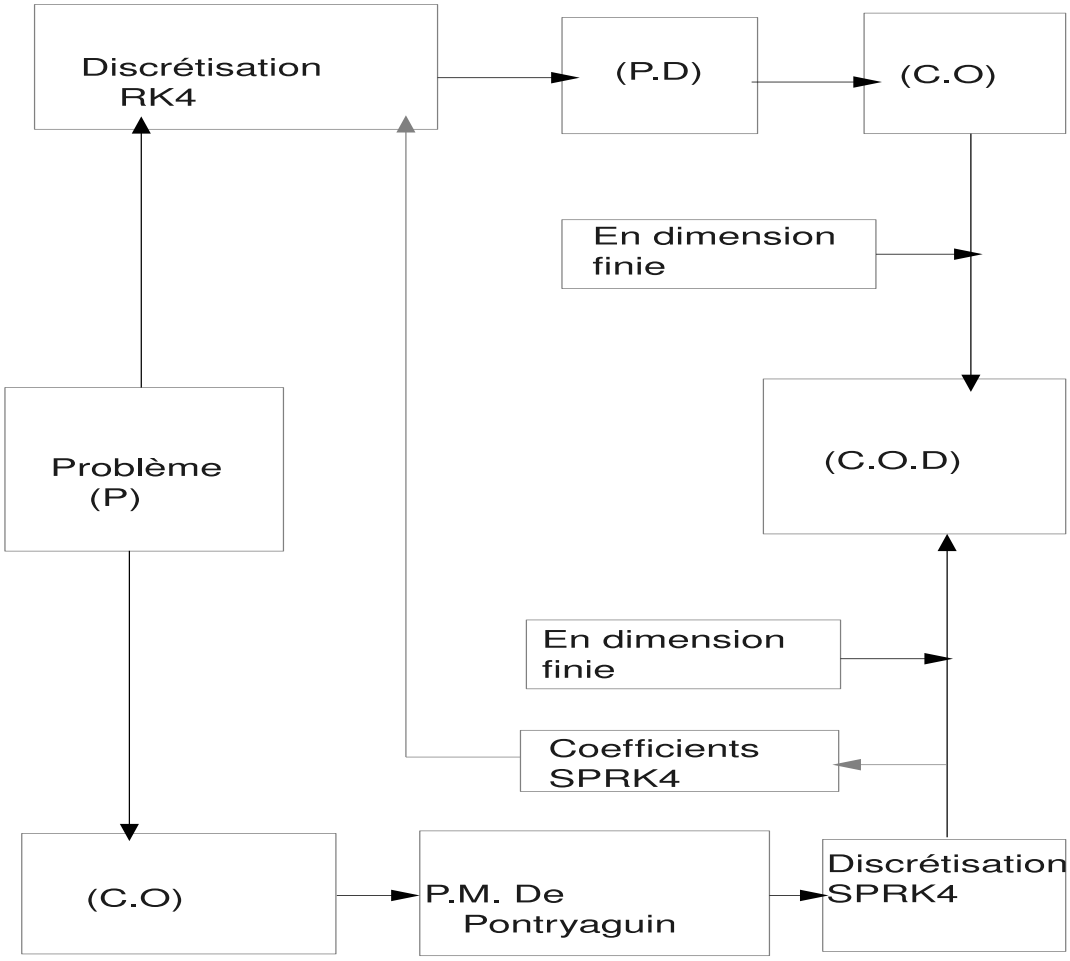


Figure V.1 – La commutation approche directe et indirecte

Les méthodes directes permettent de diminuer directement le coût en essayant de satisfaire les contraintes alors que les méthodes indirectes permettent de résoudre les conditions d'optimalité du problème et donnent des résultats avec une grande précision mais nécéssitent un temps de calcul et une capacité de stockage numérique importants.

2.2 Calcul des conditions d'ordre de l'algorithme SPRK

Le calcul des conditions d'ordre de la méthode de Runge-Kutta symplectique se base sur la théorie des Graphes G_i tel que demontré par J. Laurent-Varin dans [46] et Hager dans [71]. Nous considerons d'abord des conditions d'ordre s=4. Le lecteur est référé dans le document [46]

pour le tableau des conditions d'ordre pour $s \geq 5$. En posant $d_j = \sum_i b_i a_{ij}, c_i = \sum_j a_{ij}, \tilde{b}_i = b_i$, les conditions d'ordre prenent alors la forme suivante :

Tableau V.1 – Les équations des conditions d'ordre de SPRK, calcul des coefficients

Tableau des 8 conditions d'ordre lorsque s=4			
Graphes	Condition d'ordre	Graphes	Condition d'ordre
G_1	$\sum_{l=1,k=1}^{4} \frac{1}{b_k} a_{lk} d_k d_l = \frac{1}{8}$	G_2	$\sum_{j=1,k=1}^{4} a_{jk} d_j c_k = \frac{1}{24}$
G_3	$\sum_{i=1,k=1}^{4} \frac{b_i}{b_k} a_{ik} c_i d_k = \frac{5}{24}$	G_4	$\sum_{i=1,j=1}^{4} b_i a_{ij} c_j = \frac{1}{8}$
G_5	$\sum_{j=1}^{4} c_j^2 d_j = \frac{1}{12}$	G_6	$\sum_{i=1}^{4} b_i c_i^3 = \frac{1}{4}$
G_7	$\sum_{k=1}^{4} \frac{1}{b_k} c_k d_k^2 = \frac{1}{12}$	G_8	$\sum_{l=1}^{4} \frac{1}{b_l^2} d_l^3 = \frac{1}{4}$

3 Résultats

En considérant les conditions d'ordre 4 pour la mise en pratique de l'algorithme SPRK, les coefficients utilisés et calculés numériquement sous la programmation Matlab sont les suivants :

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 1.3751 & 0.3171 & 0.5825 & -0.0241 \\ -0.0871 & -0.4950 & 0.0221 & -0.0303 \\ 0.5710 & 0.3226 & 0.1438 & 0.2943 \\ 1.0398 & -0.0127 & 0.1040 & -0.0516 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2131 & 0.5315 & 0.0698 & 0.1856 \\ 0.4996 & 0.4161 & -0.1896 & 1.0000 \\ 0.1065 & 0.3105 & 0.0830 & 0.0000 \end{bmatrix} \tag{V.21}$$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -1.1621 & -0.2595 & -0.1210 & 0.2066 \\ 0.2480 & 1.0266 & 0.0669 & 0.1962 \\ -1.5306 & -1.9258 & -0.0740 & -0.5973 \\ -0.9805 & 0.5678 & 0.0307 & 0.2372 \end{bmatrix} \tag{V.22}$$

Les résultats présentés dans la suite viennent d'une part de l'approche indirecte par le principe de minimum de Pontryaguine et d'une autre part par l'approche directe en y injectant les coefficients b de l'approche indirecte.

3.1 Résultats numériques de l'Algorithme SPRK4

Les résultas suivants sont obtenus via la programmation AMPL(A Mathematical Programming Modeling Language) et le solveur KNITRO. La marge de l'érreur finale de réalisabilité et d'optimisation est : « Locally optimal solution found with final feasibility error (abs / rel) = 1.20e-07 / 2.19e-09 and final optimality error (abs / rel) = 1.69e-14 / 1.69e-14 ».

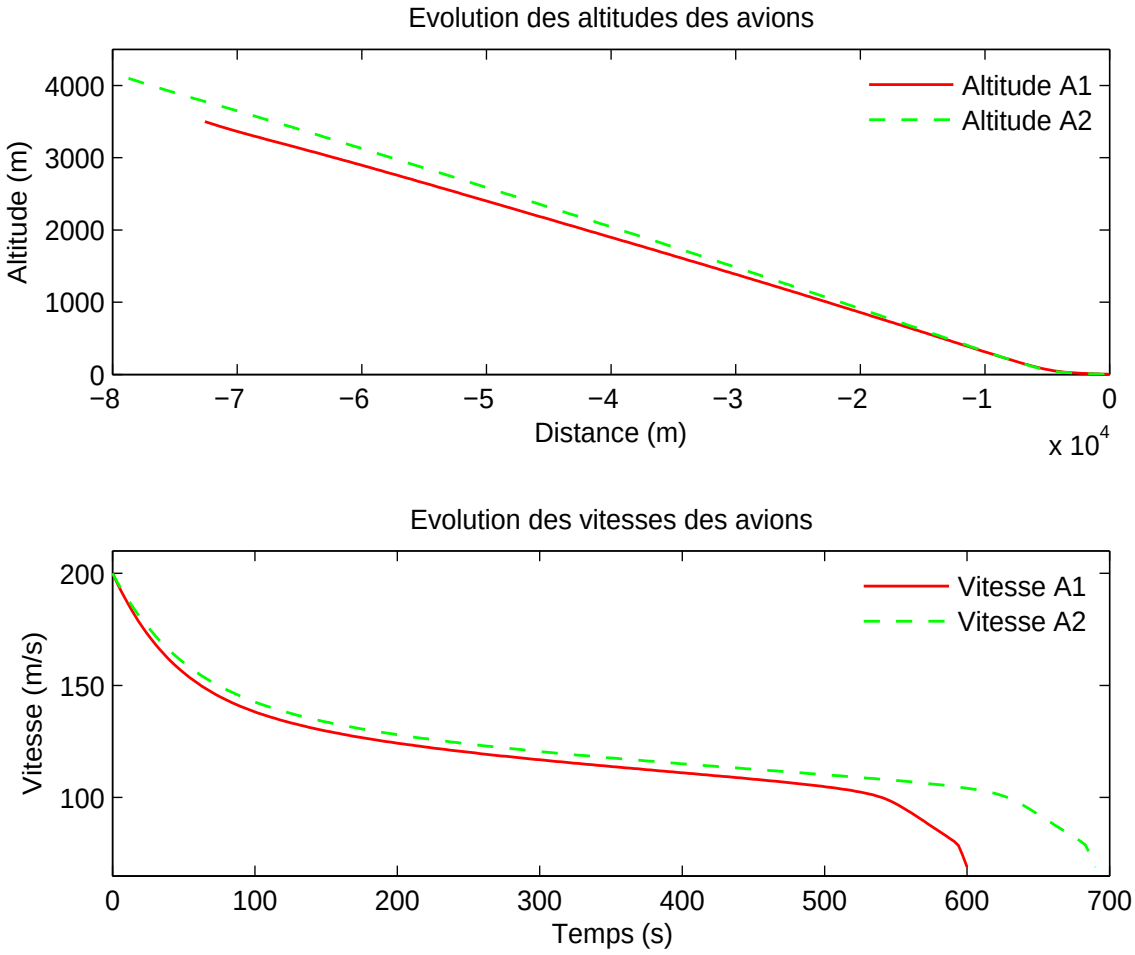


Figure V.2 – Evolution des trajectoires et des vitesses des deux avions

La figure V.2 montre l'évolution de la trajectoire des avions en descente continue. Lorsque le premier avion touche le sol, le deuxième se trouve à six cents mètres à une distance longitudinale de 3300 m. Cela résulte des contraintes de séparation étant donné que les avions attérissent de manière successive sur une seule piste. En fin d'approche, les deux trajectoires coincident et

respectent l'évolution standard de la trajectoire donné par les contructeurs de l'avion A300.

La figure V.2 montre aussi l'évolution des deux vitesses aérodynamiques des avions et prouvent un atterissage étant donné que les vitesses diminuent de 200m/s jusqu'à 69 m/s tel que certifié par l'OACI et les constructeurs des aeronefs. Signalons que la vitesse de toucher au sol est 69 m/s. Ces trajectoires obtenues sont proches des valeurs standard en approche comme le montre Suzuki dans [9].

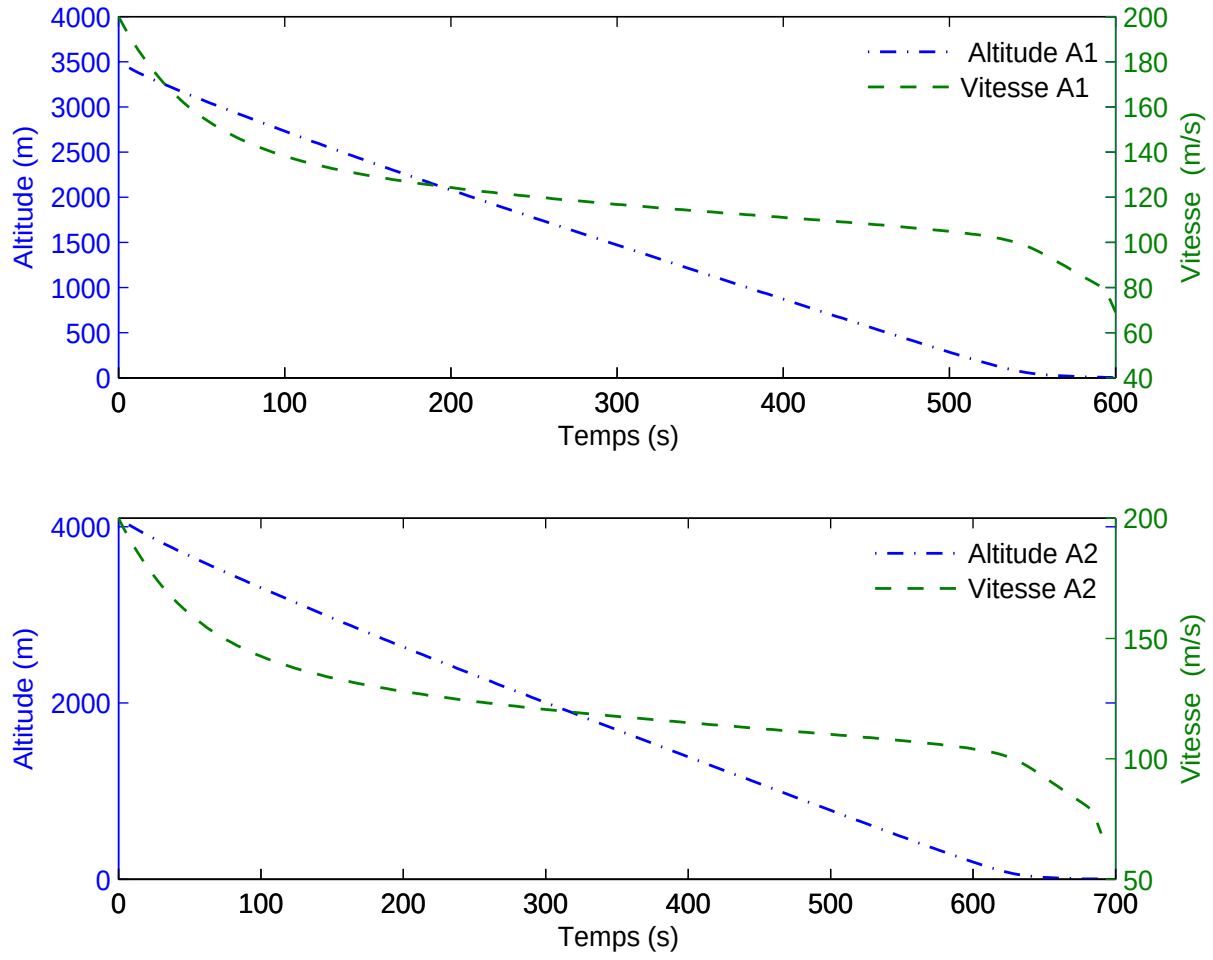


Figure V.3 – Comparaison evolutive de la trajectoire et la vitesse de chaque avion

La figure V.3 montre une corrélation en fonction du temps de l'évolution de la trajectoire et la vitesse de chaque avion. La durée maximale de l'approche est de 600 secondes pour le premier avion et 690 secondes pour le deuxième, ce qui donne une séparation temporelle de 90 secondes.

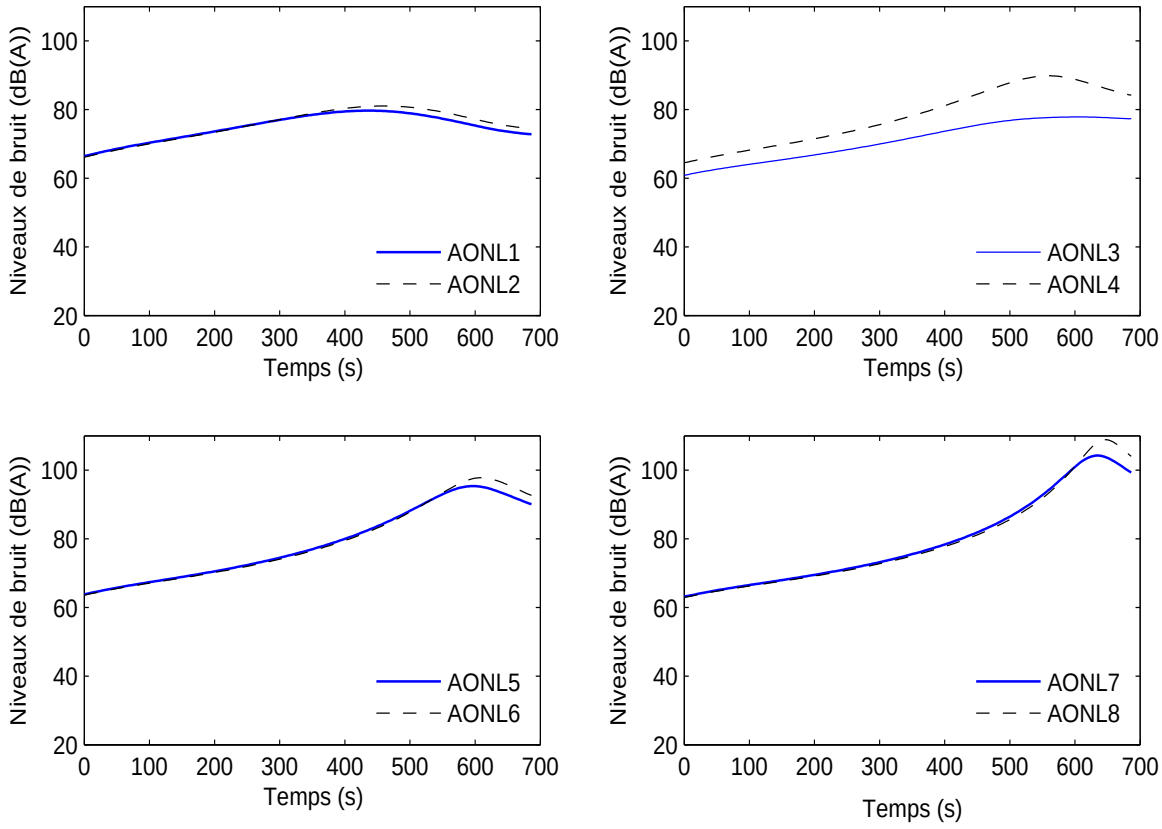


Figure V.4 – Le bruit émis par les deux avions

La figure V.4 montre les niveaux du bruit autour de l'aéroport lorsque l'optimisation est appliquée. Cela explique l'importance de l'optimisation acoustique des avions en approche ainsi que les gains qu'apporte ce modèle lorsque comparé à ce qui se fait quotidiennement. La position d'observation est prise au sol en dessous de la trajectoire de la manière suivante : $(-20000\ m, -20000\ m, 0\ m)$ pour $AONL_1$, $(-19800\ m, -19800\ m, 0\ m)$ pour $AONL_2$, ..., $(-3200\ m, -3200\ m, 0\ m)$ pour $AONL_8$. Le point de toucher au sol est $(0\ m, 0\ m, 0\ m)$ alors que la séparation temporelle des avions est de 90 s. En chaque point d'observation, il y a un vecteur de N niveaux de bruit comme le montre la discrétisation. Il est très important de considérer la valeur maximale parmi les N valeurs, laquelle valeur correspond à la distance la plus courte entre la source de bruit et le point d'observation. Ce résultat montre que le niveau de bruit maximal est variable en fonction des points d'observation et qu'il diminue lorsque l'avion s'en éloigne. Par comparaison, ce résultat est proche des valeurs standard de bruit de jet en approche comme le montre Harvey [74]. Ce résultat est déjà démontré par d'autres chercheurs,

y compris moi même [8, 75–78].

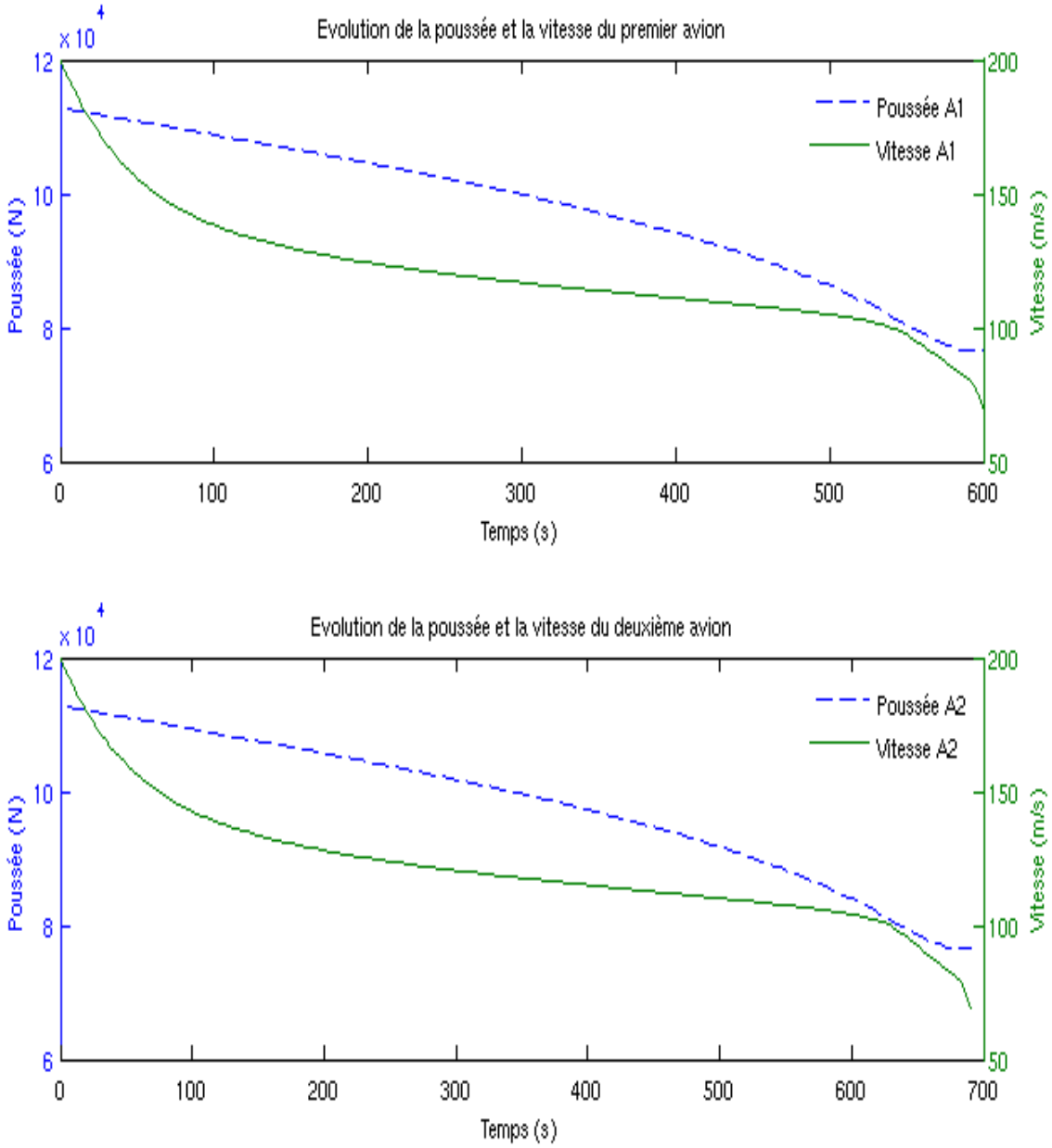


Figure V.5 – Comparaison evolutive de la poussée et la vitesse de chaque avion

La figure V.5 montre une évolution simultanée de la poussée et de la vitesse pour chaque avion. On constate que la vitesse diminue de 200 m/s à 69 m/s. De même, l'allure générale de

la poussée est descendante étant donné qu'il s'agit d'un attérissage. Les deux courbes montrent une corrélation entre la poussée et la vitesse des deux avions.

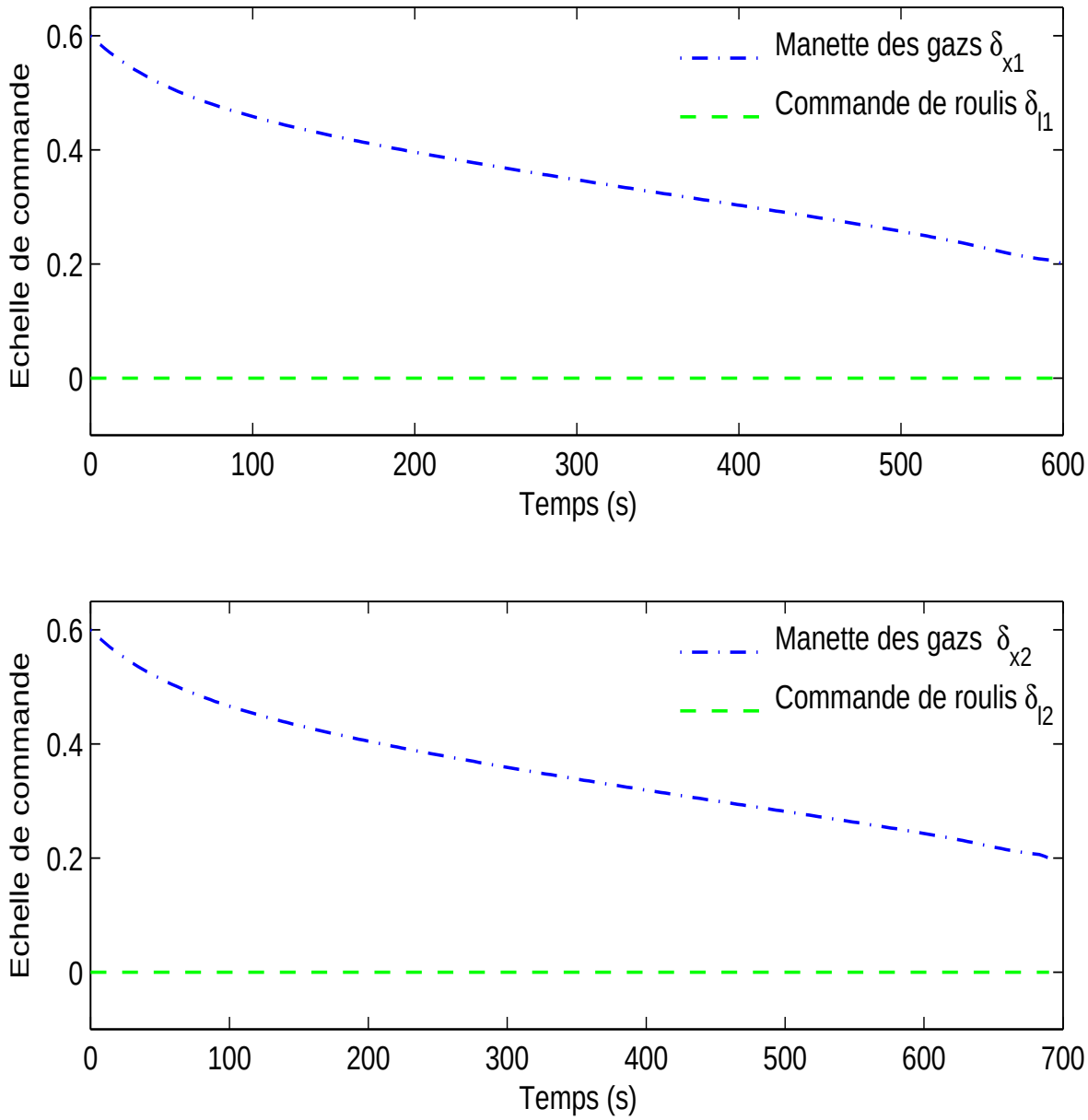


Figure V.6 – Evolution de la commande de poussée et de roulis de chaque avion

La figure V.6 montre une évolution de la manette des gazs (commande de poussée) et de la

commande de roulis en fonction du temps. La commande principale de l'avion varie de 0.6 à 0.2. La commande de roulis reste nulle, ce qui prouve une stabilité de l'avion et un confort des passagers.

La commande de tangage et de la commande de lacet sont faibles. La commande de tangage en approche tourne autour de 0.05 alors que la commande de lacet reste nulle, ce qui prouve un bon alignement de la trajectoire de l'avion sur la piste d'attérissage et un vol stable.

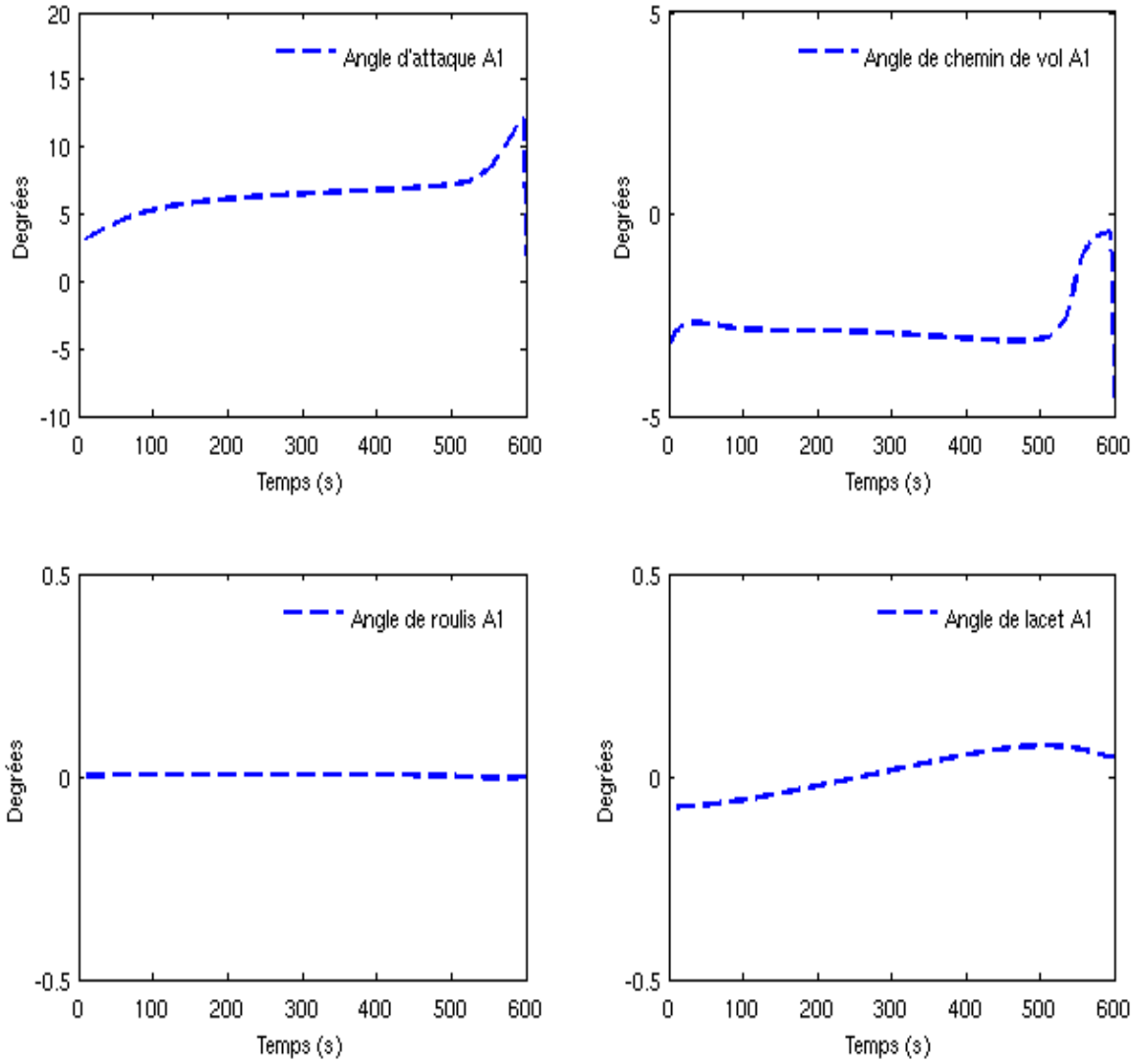


Figure V.7 – Evolution des angles aérodynamiques du premier avion

La figure V.7 montre l'évolution des principaux angles aérodynamiques du premier avion. On voit bien que le roulis est nul alors que l'angle de vol est négative tout au long de l'attérissage comme le stipule les procédures d'approche imposées par l'OACI. L'angle d'attaque varie entre 2 et 12 degrés et le lacet est faible étant donné que l'avion est bien orienté à la piste.

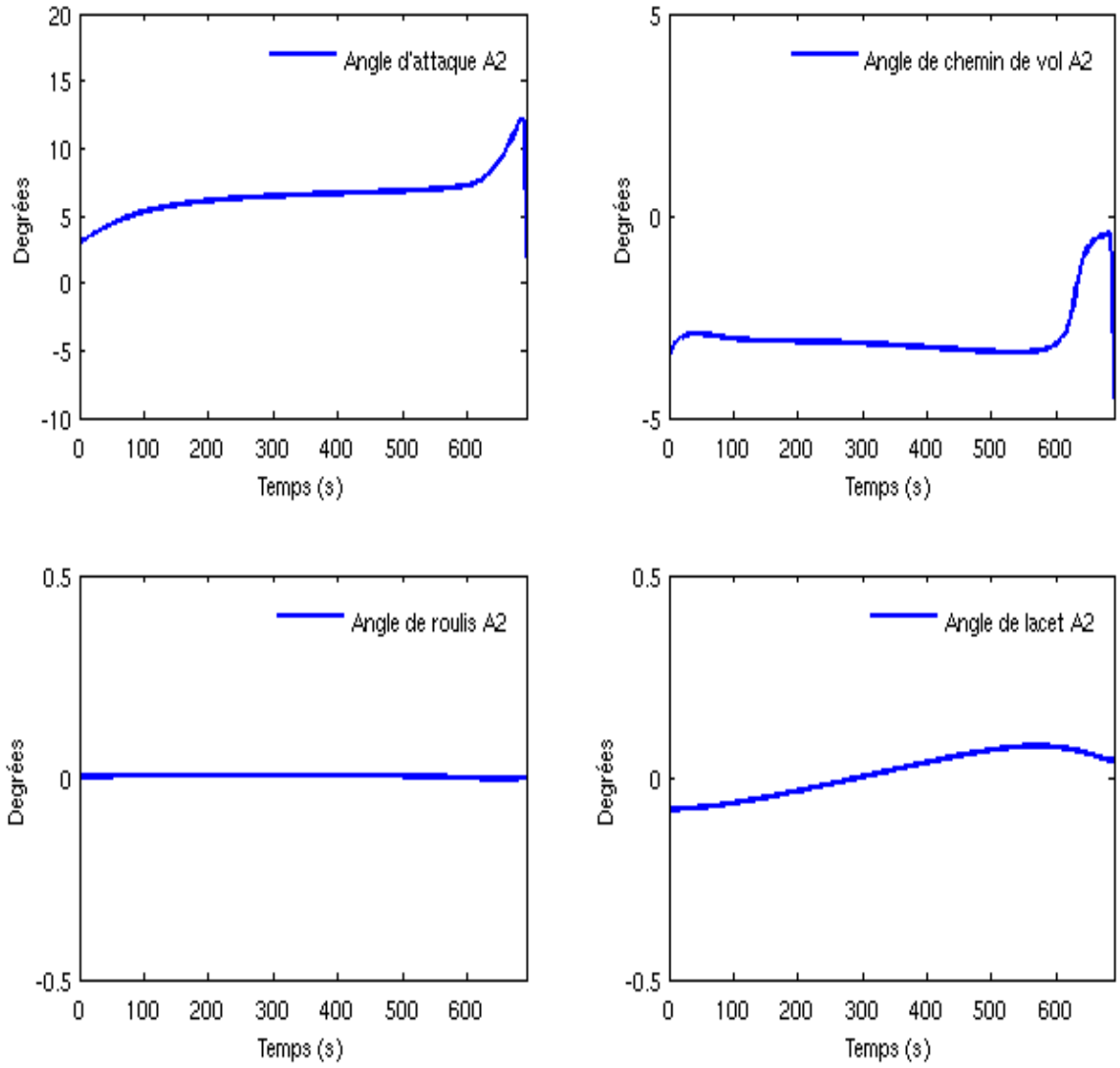


Figure V.8 – Evolution des angles aérodynamiques du deuxième avion

La figure V.8 montre l'évolution des principaux angles aérodynamiques du deuxième avion en approche. On remarque aussi que l'angle de roulis nul, ce qui prouve la stabilité du vol. L'an-

gle de vol est négative tout au long de l'attérissage comme le stipule les procédures d'approche imposées par l'OACI alors que l'angle d'attaque oscille entre 2 et 12 degrés. Le lacet est faible étant donné que l'avion est bien orienté à la piste.

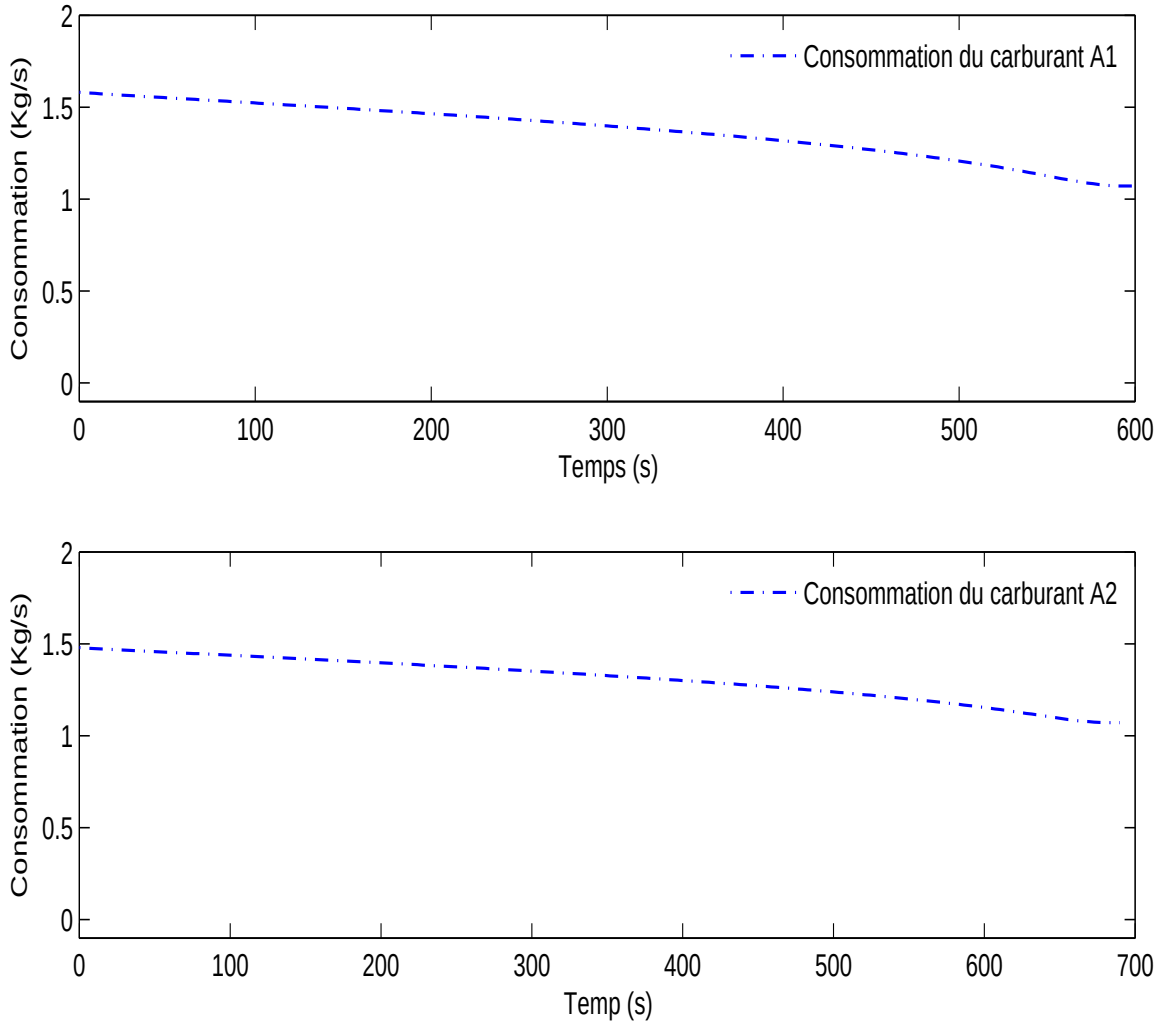


Figure V.9 – Evolution de la consommation du kérosène de chaque avion

La figure V.9 montre l'évolution de la consommation du kérosène par les avions en fonction du temps. Elle varie de 1.5 kg/s à 1 kg/s au point de toucher du sol. Ce résultat est déjà prouvé par Roux [55] et s'approche des standars des constructeurs de l'avion A300. Signalons que le modèle de base exploité au niveau de la consommation est celui de Torenbeek qui a déjà prouvé son éfficacité par rapport aux autres modèles.

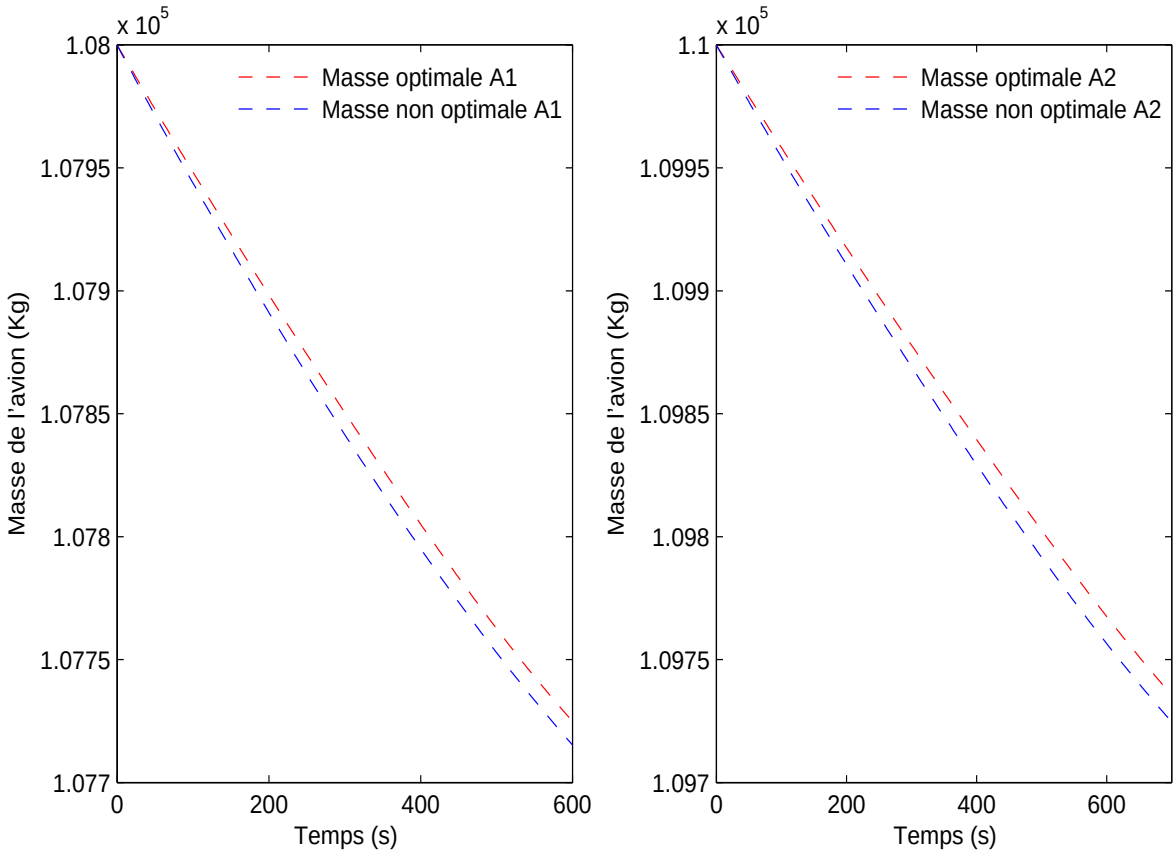


Figure V.10 – Evolution de la masse optimale et non optimale de chaque avion

La figure V.10 montre l'évolution de la masse optimale et non optimale des avions en fonction du temps. On remarque clairement que la masse dimunue tout au long de toute la procédure d'approche ce qui s'eplique par le consommation du kérosène par les avions. En comparant la masse optimale et la masse lorsque l'optimisation n'est pas considéré, on remarque la masse est petite lorsque l'optimisation n'est pas considéré car l'avion consomme plus de kérosène.

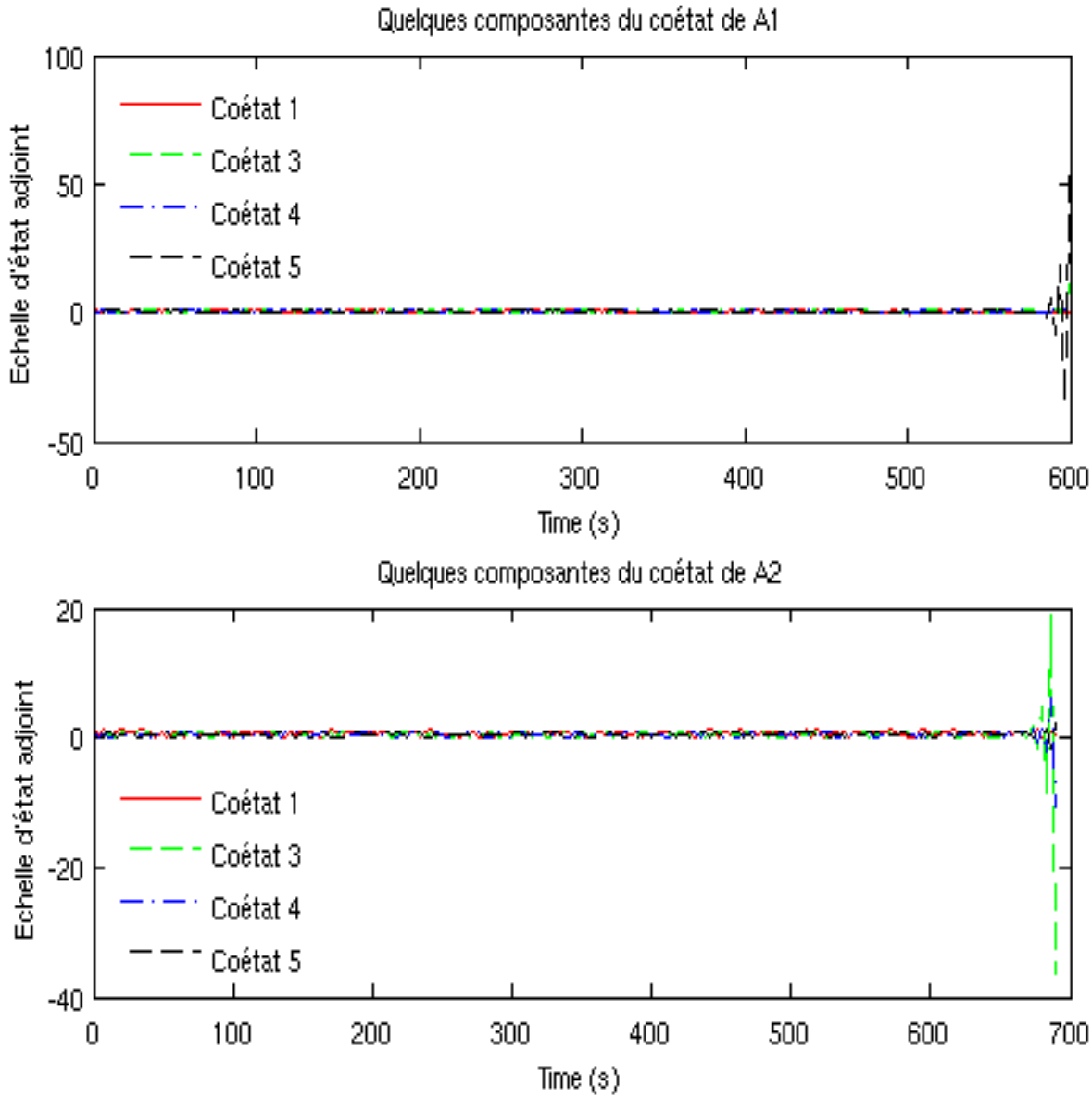


Figure V.11 – Evolution du certaines composantes du coétat

La figure V.11 montre certaines composantes du vecteur adjoint. Le vecteur adjoint est une variable supplémentaire sans dimension et n'ayant pas d'interprétation physique. Mathématiquement, on remarque une stabilité de l'algorithme sauf aux conditions limites finales. Ceci est due à la contrainte finale.

3.2 Résultats numériques de l'Algorithme RK4 aux coefficients de SPRK4

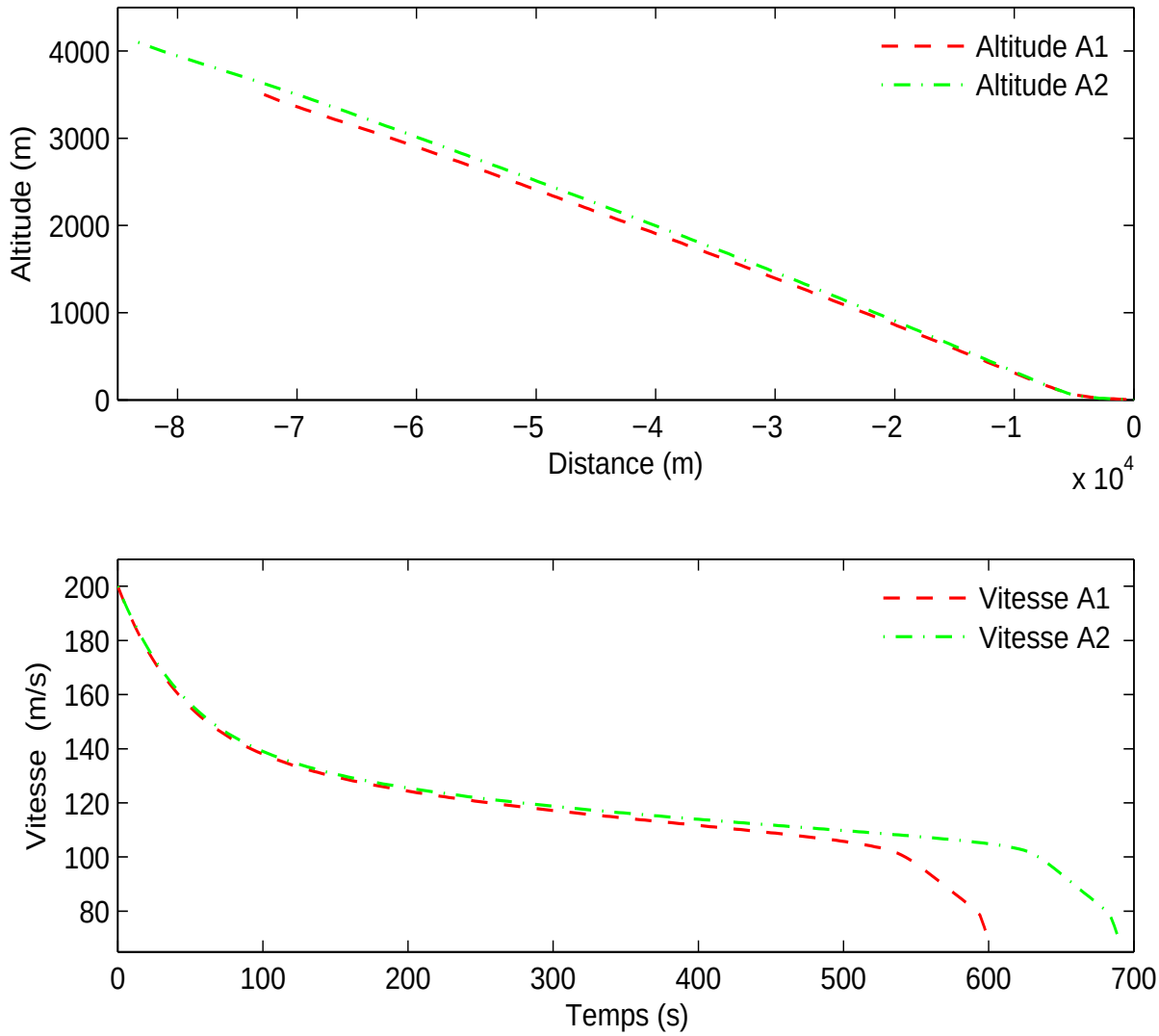


Figure V.12 – Evolution des trajectoires des deux avions.

La figure V.12 montre l'évolution de la trajectoire des avions en descente continue. Lorsque le premier avion touche le sol, le deuxième se trouve à six cents mètres à une distance longitudinale de 3300 m. Cela résulte des contraintes de séparation étant donné que les avions attérissent de manière successive sur une seule piste. En fin d'approche, les deux trajectoires coincident et

respectent l'évolution standard de la trajectoire donnée par les contructeurs de l'avion A300.

La figureV.12 montre l'évolution des deux vitesses aérodynamiques des avions et prouvent un attérissage étant donné que la vitesse diminue de 200m/s jusqu'à 69 m/s tel que certifié par l'OACI et les constructeurs des aeronefs. signalons que la vitesse de toucher au sol est 69 m/s.

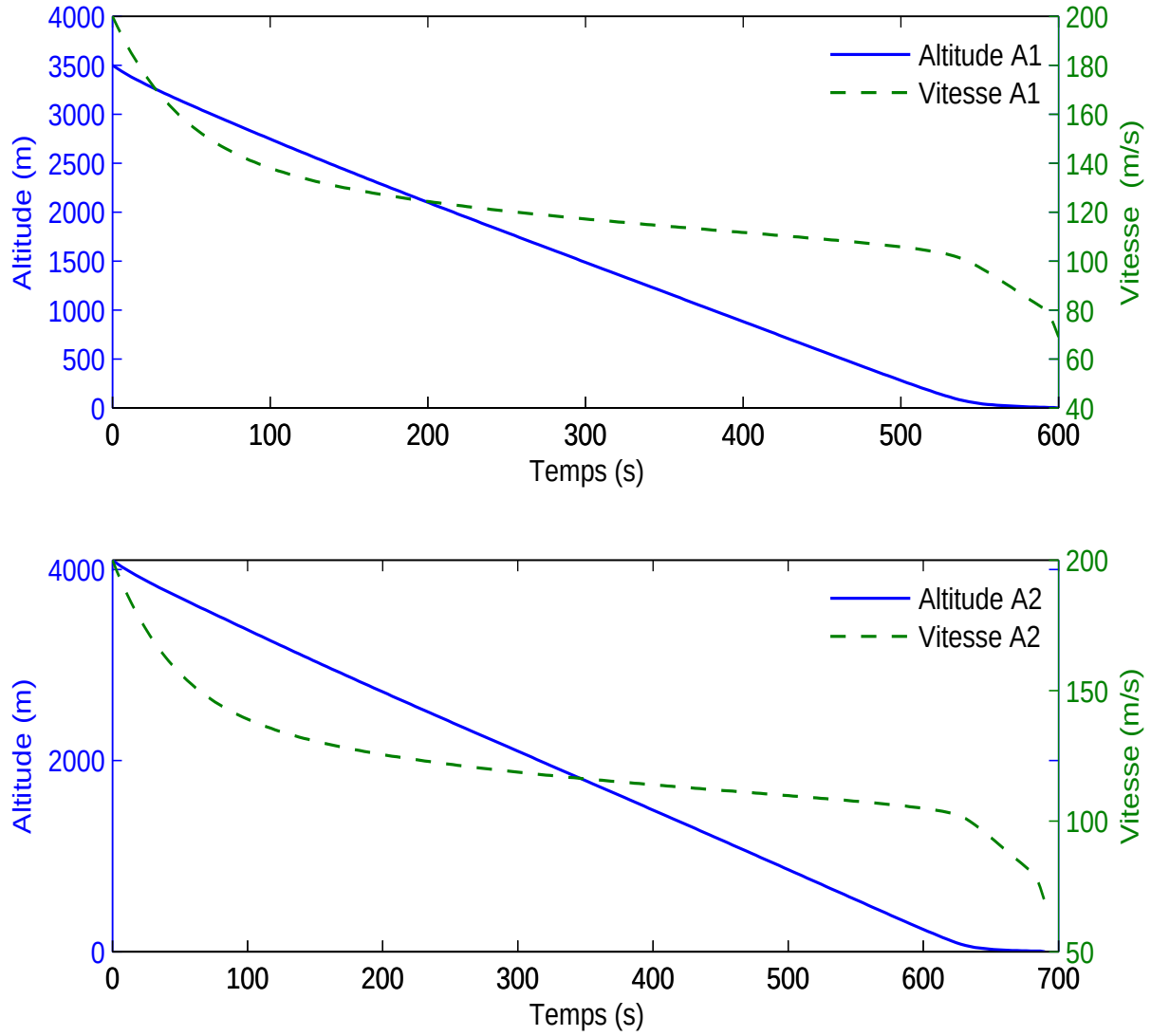


Figure V.13 – Comparaison evolutive de l'altitude et la vitesse de chaque avion

La figure V.13 montre une corrélation en fonction du temps de l'évolution de la trajectoire et la vitesse de chaque avion. La durée maximale de l'approche est de 600 secondes pour le

premier avion et 690 secondes pour le deuxième, ce qui donne une séparation temporelle de 90 secondes. On constate que la vitesse varie de 200 m/s en début d'approche pour toucher le sol avec une vitesse de 69 m/s comme recommandé par les contructeurs d'avions et l'OACI. Cette figure montre aussi que la trajectoire est rectiligne durant la plus grande partie d'approche. Cependant, au voisinage du point de toucher au sol, elle se modifie pour devenir tangent à la piste.

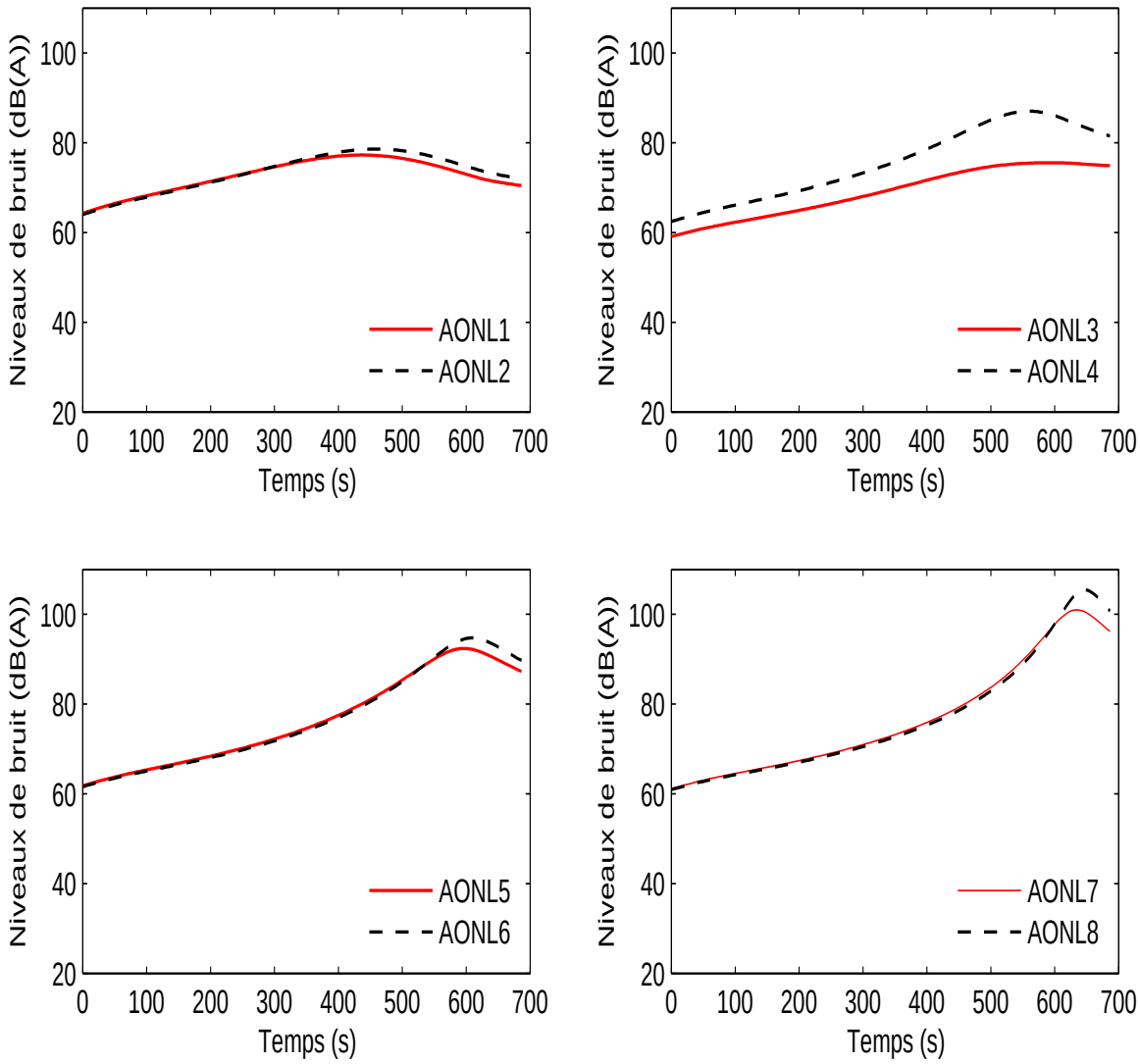


Figure V.14 – Le bruit émis par les deux avions

La figure V.14 montre l'évolution des niveaux du bruit des avions lorsque l'optimisation est appliquée. Cela explique l'importance de l'optimisation acoustique des avions en approche ainsi que les gains qu'apporte ce modèle lorsque comparé à ce qui se fait quotidiennement. La position d'observation est prise au sol en dessous de la trajectoire de la manière suivante : $(-20000\ m, -20000\ m, 0\ m)$ pour $AONL_1$, $(-19800\ m, -19800\ m, 0\ m)$ pour $AONL_1$, ..., $(-3200\ m, -3200\ m, 0\ m)$ pour $AONL_8$. Le point de toucher au sol est $(0\ m, 0\ m, 0\ m)$ alors que la séparation temporelle des avions est de 90 s. En chaque point d'observation, il y a un vecteur de N niveaux de bruit égale au nombre de points pris en compte dans la discrétisation. Il est très important de considérer la valeur maximale parmi les N niveaux de bruit qui correspond à la distance la plus courte entre la source de bruit et le point d'observation. Cela étant dû au fait que les termes sources pris en compte dans ce modèle ne génèrent que des ondes sphériques. La prise en compte des ondes directionnelles relève d'une meilleure compréhension de mécanisme de génération des ondes acoustiques par les composantes de l'avion [79]. Ce résultat montre que le niveau de bruit maximal est variable en fonction des points d'observation et qu'il diminue lorsque l'avion s'en éloigne. Par comparaison, ce résultat est proche des valeurs standard de bruit de jet en approche comme le montre Harvey [74]. Ce résultat est en parfait accord avec d'autres travaux déjà disponibles [76–78].

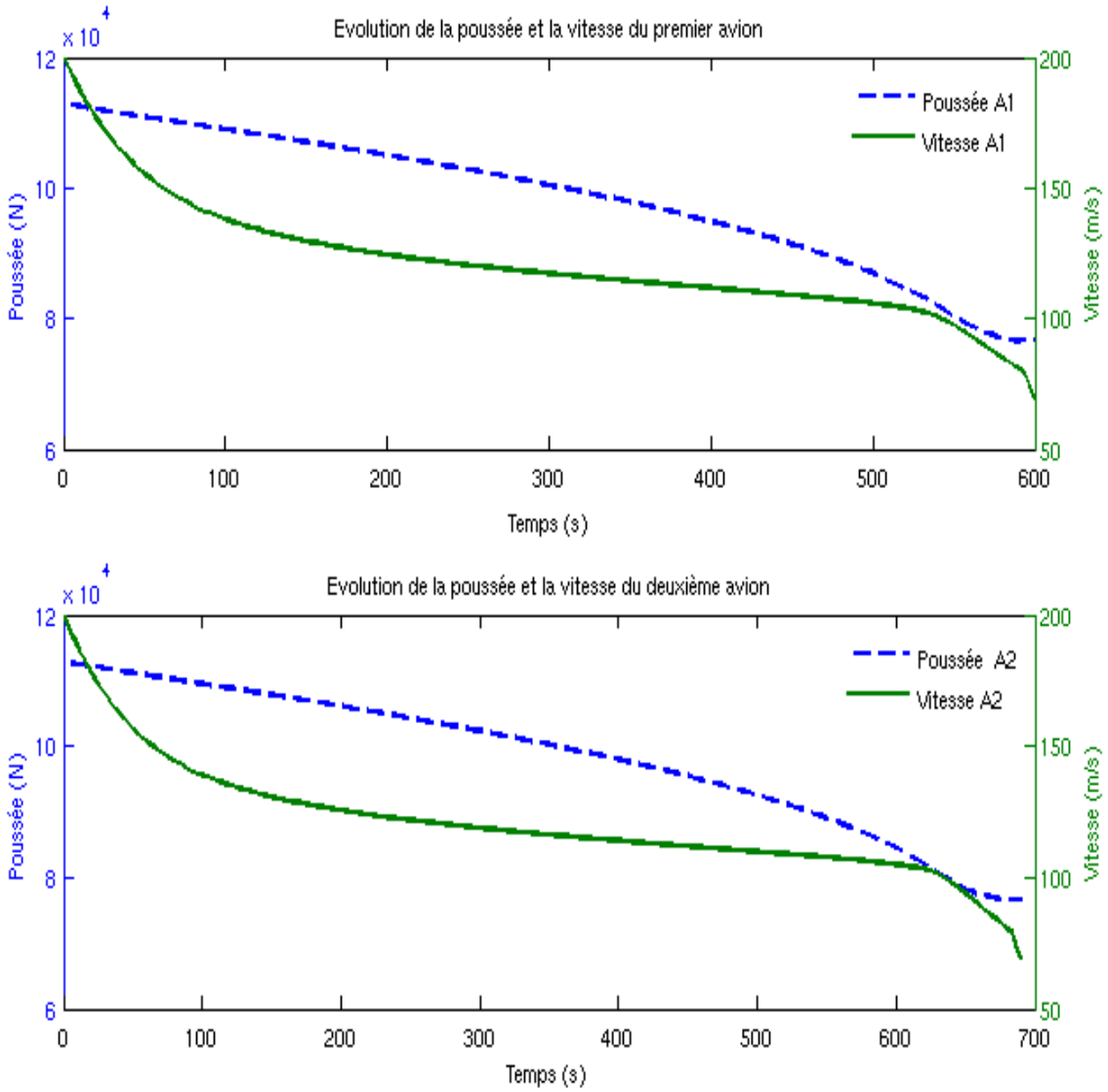


Figure V.15 – Comparaison evolutive de la poussée et la vitesse de chaque avion

La figure V.15 montre une évolution simultanée de la poussée et de la vitesse pour chaque avion.

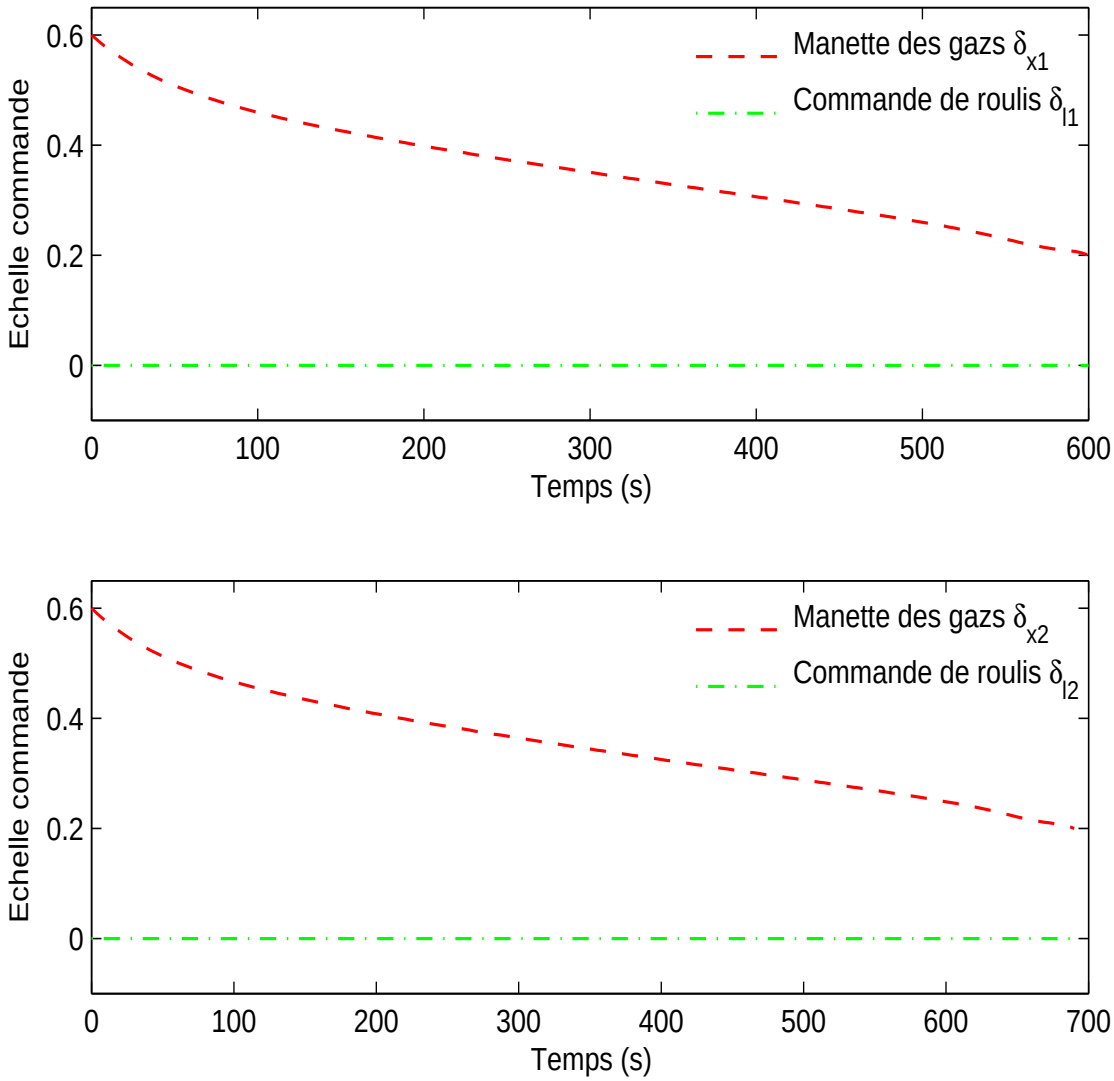


Figure V.16 – Evolution de la commande de poussée et de roulis de chaque avion

La figure V.16 montre une évolution de la manette des gazs (commande de poussée) et de la commande de roulis en fonction du temps. La commande principale de l'avion varie de 0.6 à 0.2. La commande de roulis reste nulle, ce qui prouve une stabilité de l'avion et un confort des passagers.

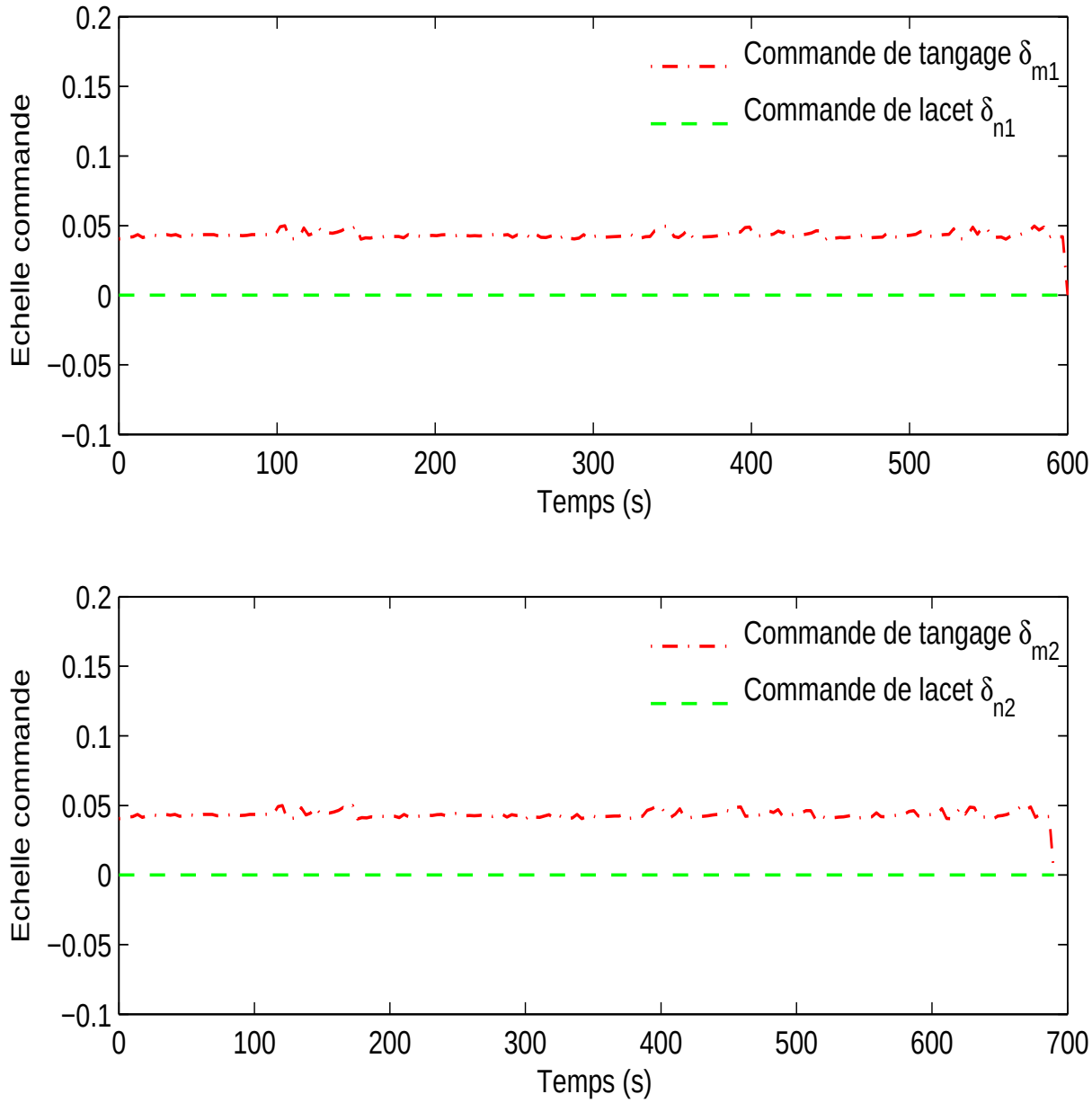


Figure V.17 – Evolution de la commande de tangage et de lacet de chaque avion

La figure V.17 montre une évolution de la commande de tangage et de la commande de lacet en fonction du temps. La commande de tangage est faible en approche et tourne autour de 0.05. La commande de lacet reste nulle, ce qui prouve un bon alignement de la trajectoire de l'avion sur la piste d'attérissage et un vol stable.

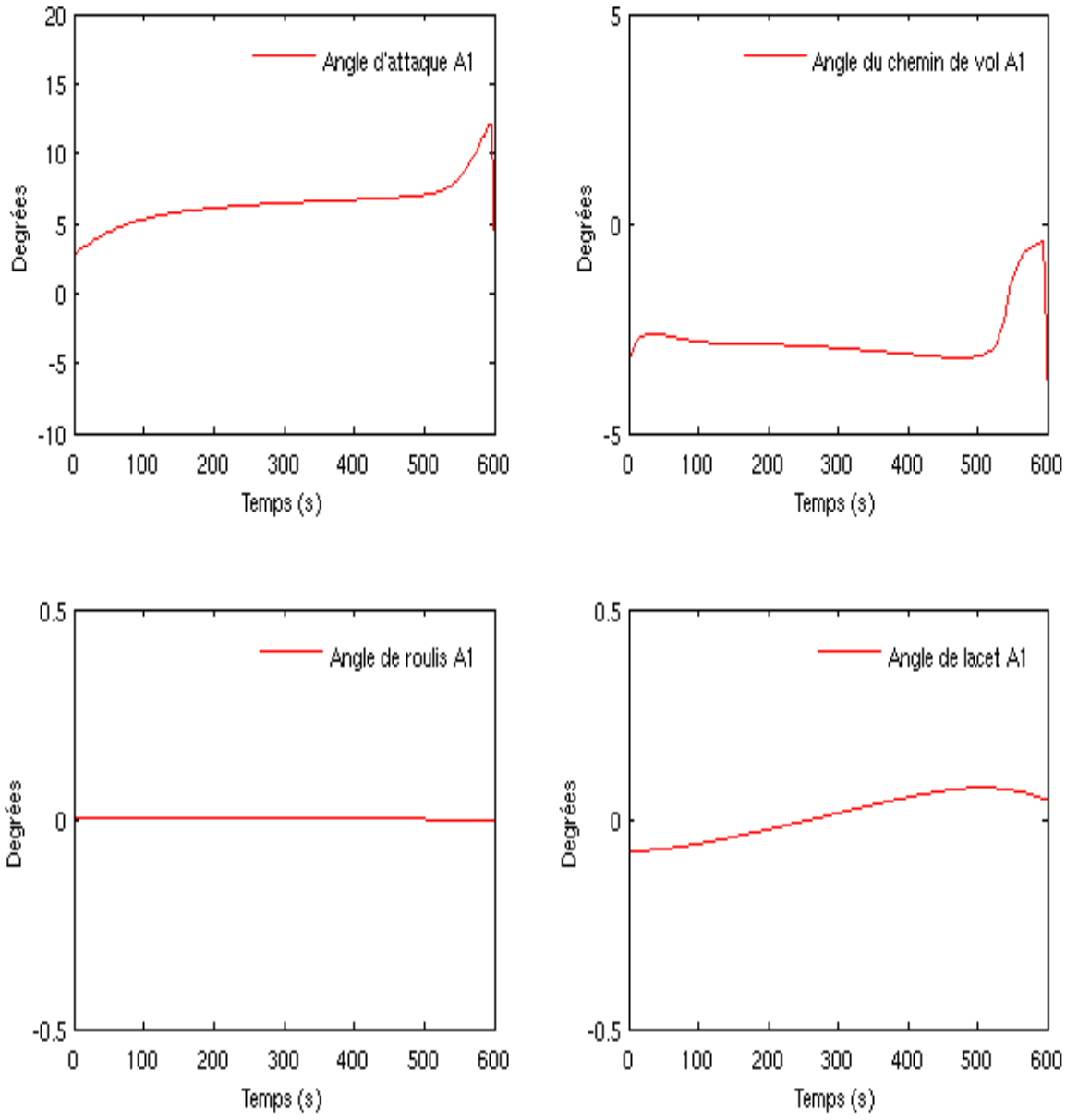


Figure V.18 – Evolution des angles aérodynamiques du premier avion

La figure V.18 montre l'évolution des principaux angles aérodynamiques de l'avion en approche. L'angle de roulis est nul et montre la stabilité du vol, l'angle de vol est négative tout au long de l'attérissage comme le stipule les procédures d'approche imposées par l'OACI. L'angle d'attaque varie entre 2 et 12 degrés et le lacet est faible étant donné que l'avion est bien orienté

à la piste.

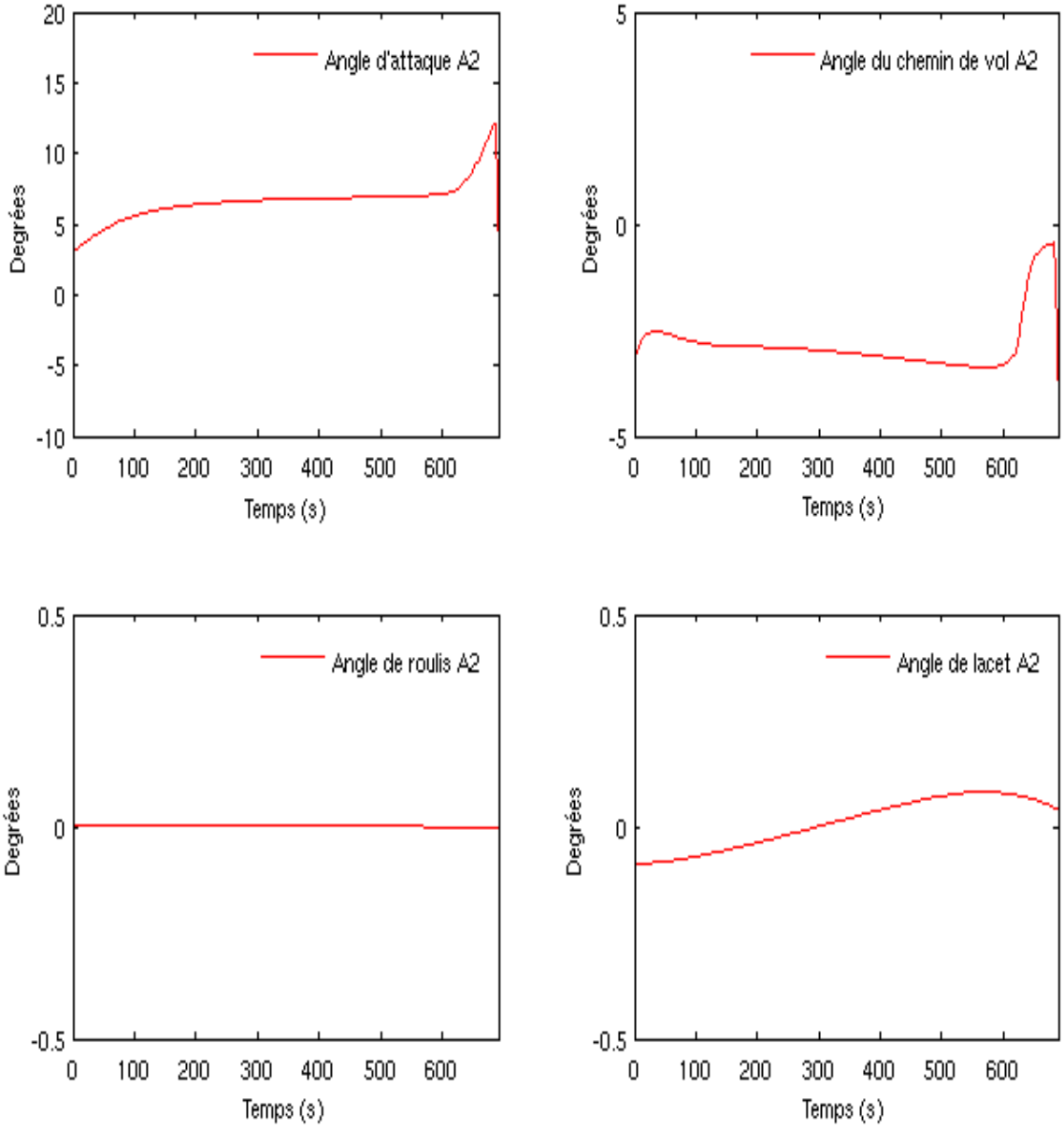


Figure V.19 – Evolution des angles aérodynamiques du deuxième avion

La figure V.19 montre la même évolution des angles du deuxième avion que celle du premier étant donné que les mêmes conditions sont privillegiées dans cette approche.

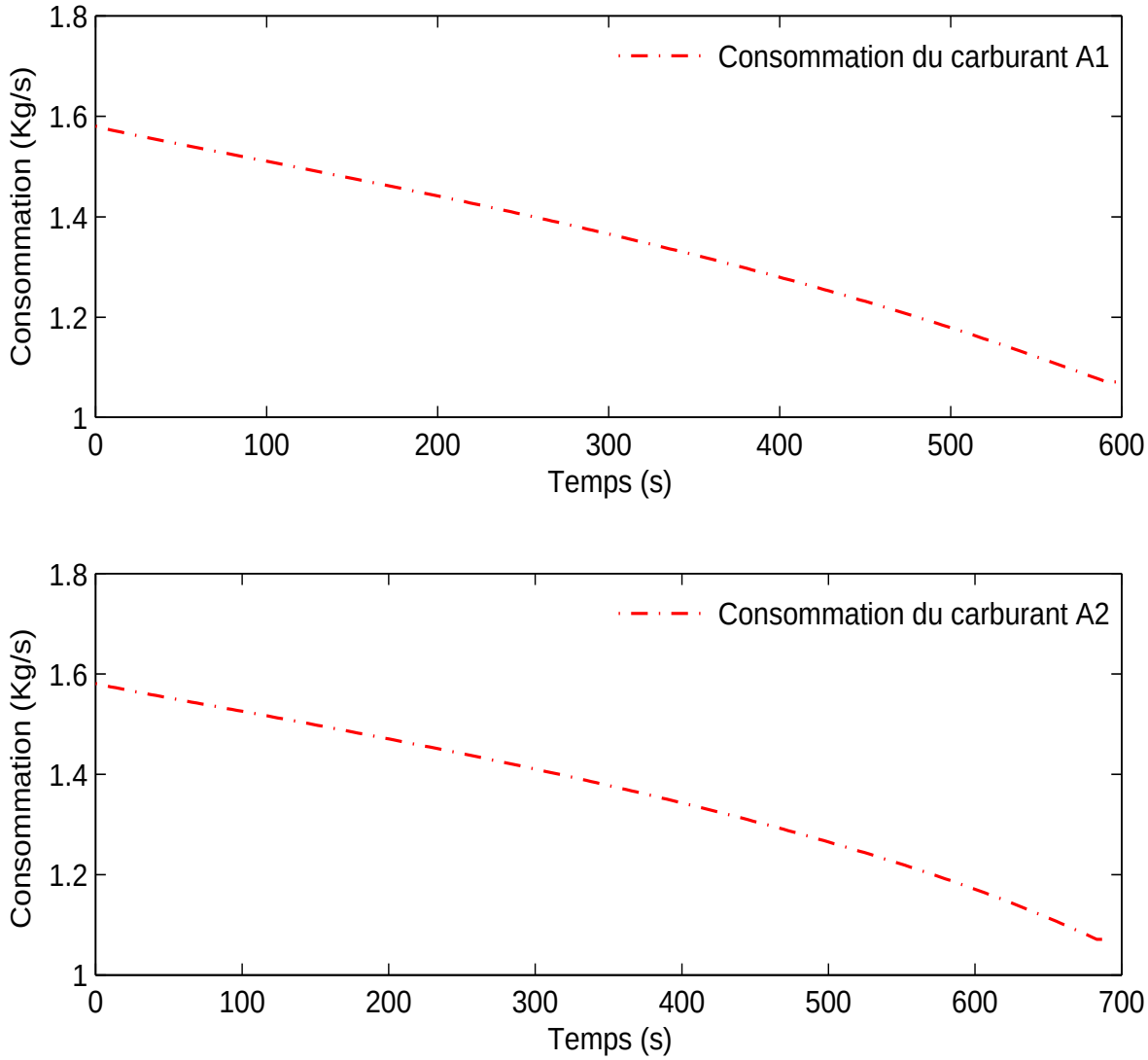


Figure V.20 – Evolution de la consommation du kérosène par chaque avion

La figure V.20 montre l'évolution de la consommation du kérosène par les avions en fonction du temps. Elle varie de 1.5 kg/s à 1 kg/s au point de toucher du sol. Ce résultat est en accord avec Elodie [55, 80, 81] et s'approche des standards des constructeurs de l'avion A300. Signalons que le modèle de base exploité au niveau de la consommation est celui de Torenbeek qui a déjà prouvé son éfficacité par rapport aux autres modèles.

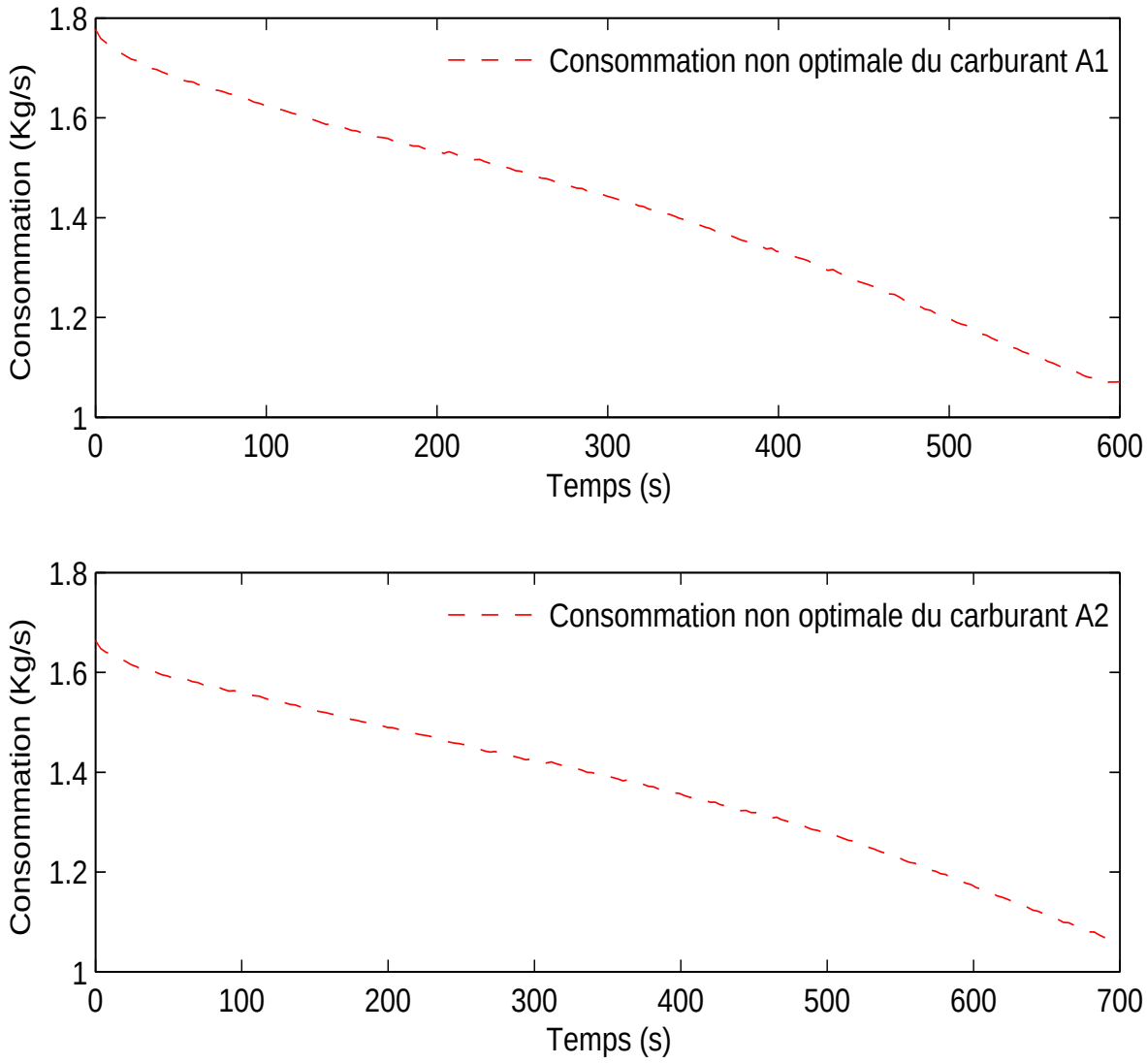


Figure V.21 – Evolution de la consommation non optimale du kérosène par chaque avion

La figure V.21 montre l'évolution de la consommation non optimale du kérosène par les avions en fonction du temps. Pour le premier avion, elle varie de 1.77738 kg/s à 1.07099 kg/s au point de toucher du sol. Pour le deuxième avion, elle varie de 1.66343 kg/s à 1.07099 kg/s au point de toucher du sol. On remarque que les avions touchent le sol avec la même consommation du kérosène, ce qui s'explique par les mêmes conditions finales appliquées.

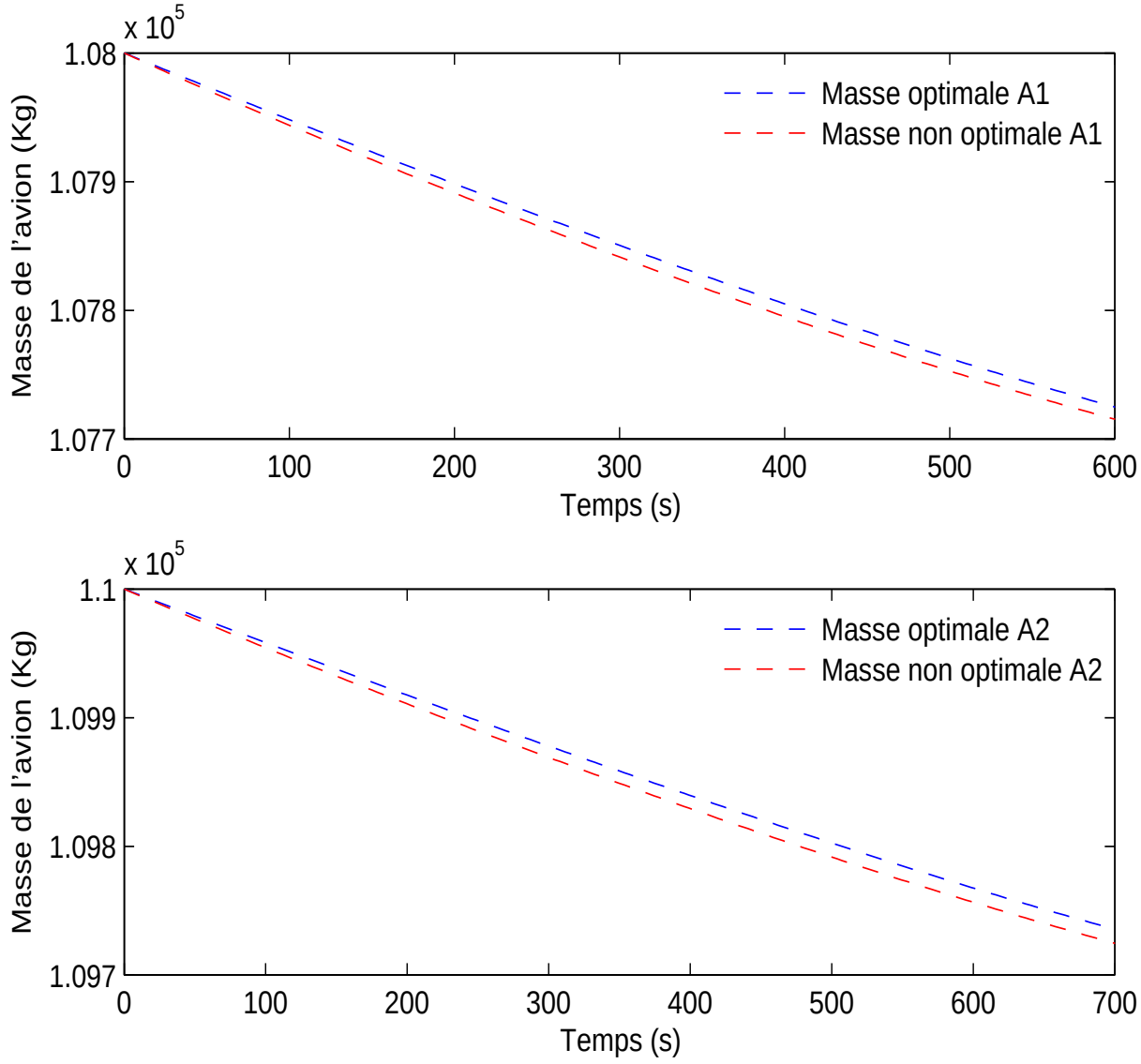


Figure V.22 – Evolution de la masse optimale et la masse non optimale de chaque avion

La figure V.22 montre l'évolution de la masse optimale et non optimale des avions en fonction du temps. Pour le premier avion, la masse optimale varie de 108000 kg à 107723.79176 kg au point de toucher du sol alors que la masse non optimale varie de 108000 kg à 107714.15755 kg. Pour le deuxième avion, la masse optimale varie de 110000 kg à 109734.50191 kg au point de toucher du sol alors que la masse non optimale varie de 110000 kg à 109723.53824 kg. On remarque donc un gain de masse se situant entre 9 kg et 11 kg.

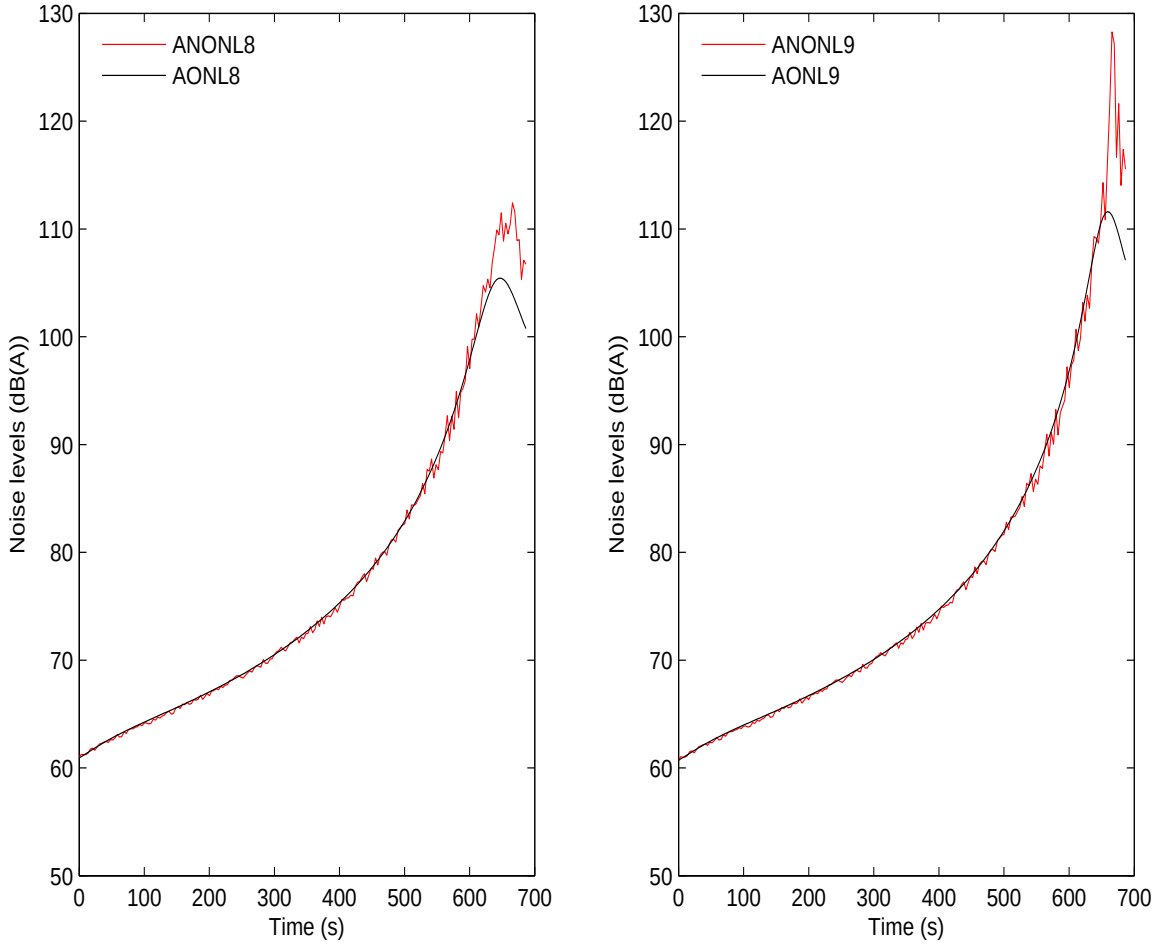


Figure V.23 – Evolution du bruit optimal et non optimal

La figure V.23 montre la comparaison de l'évolution du bruit lorsque l'optimisation est considérée et lorsque l'optimisation n'est pas appliquée. La légende $AONL$ signifie « **Aircraft Optimal Noise Levels** »alors que $ANONL$ signifie « **Aircraft Non Optimal Noise Levels** ». On voit bien qu'en fin d'approche, le gain en réduction de bruit est très net, ce qui confirme l'importance de l'optimisation. En comparant les valeurs maximales des niveaux de bruit avec optimisation et sans optimisation, les gains en niveaux de bruit se situent entre 5% et 8% en fonction des positions d'observation. Les points d'observation considérés sont fixes et ont les cordonnées suivantes. $AONL8 = (-3200\,m, -3200\,m, 0\,m)$, $AONL9 = (-2200\,m, -2200\,m, 0\,m)$. Ces cordonnées restent les mêmes pour $ANONL8$ et $ANONL9$.

3.3 Validation la commutation des résultats approches directe et indirecte

Dans ce chapitre, il a été développé de deux manières une résolution numérique du problème de contrôle optimal dans le cas de deux avions en approche. Des considérations théoriques et pratiques de l'algorithme SPRK4 et RK4 sont utilisées pour la mise en place d'un programme non-linéaire, implémentant le problème considéré.

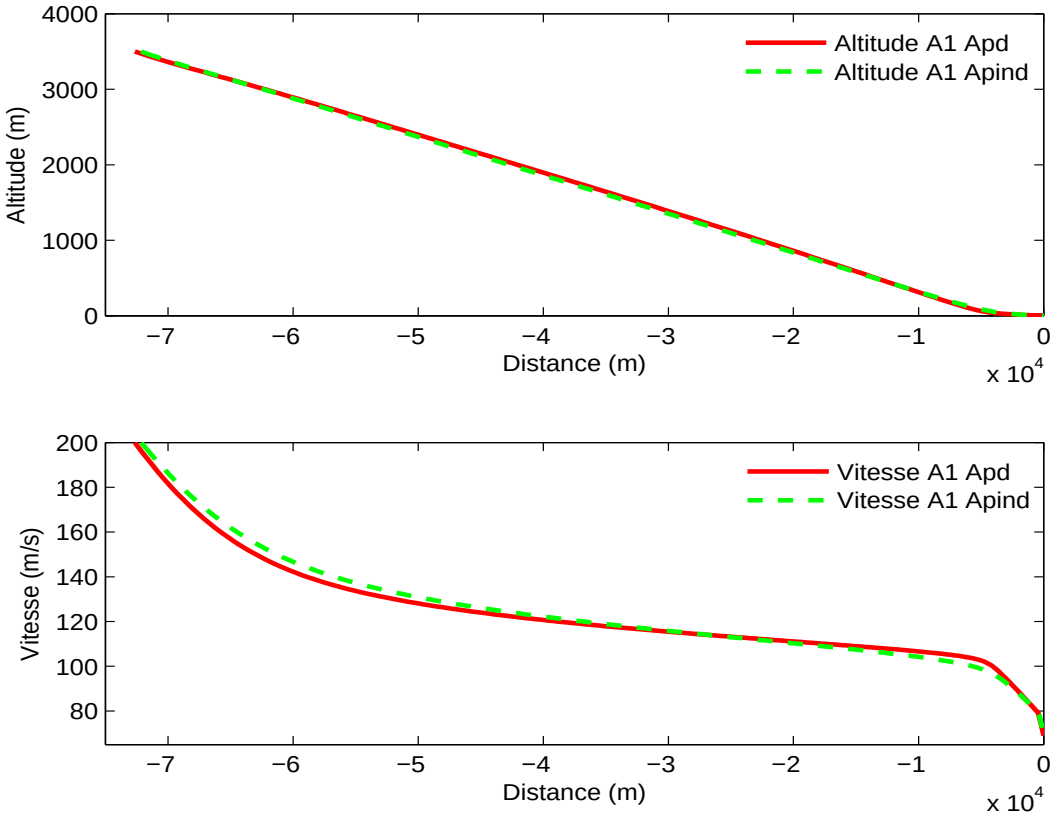


Figure V.24 – Comparaison altitude et vitesse A1 par les deux approches

La figure V.24 illustre la comparaison de l'altitude et la vitesse du premier avion lorsque les deux approches directe avec coefficients SPRK4 et indirecte SPRK4 sont considérées. On voit bien que l'altitude coincide presque partout, mais que la vitesse garde la même allure. Les résultats trouvés confirment une convergence sur une seule solution presque semblable. Cette solution optimale du problème discrétisé est trouvée moyennant une convergence locale.

4 Comparaison des procédures optimales et standards

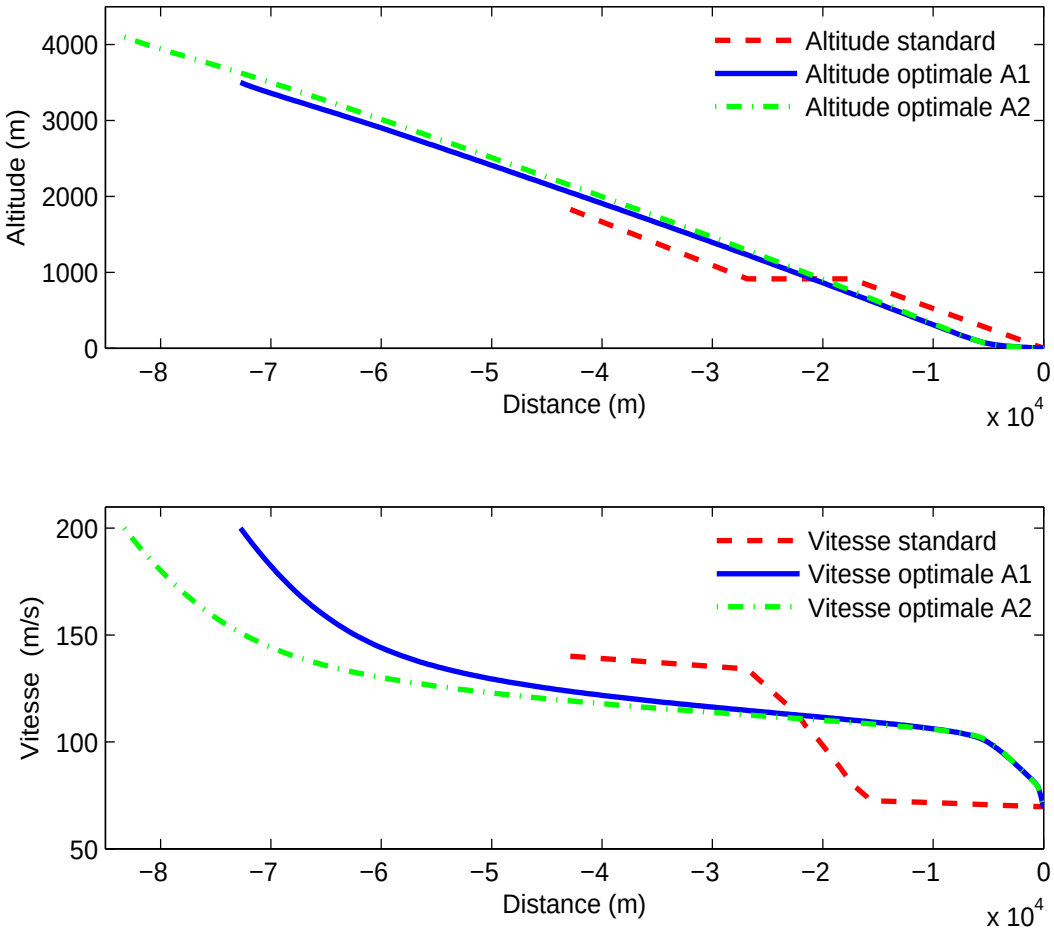


Figure V.25 – Comparaison des procédures optimales et standards

La figure V.25 illustre la comparaison des procédures optimales et standards des avions. Il s'agit proncipalement de l'altitude et la vitesse des deux avions en approche. On voit bien que la procédure en descente continue caracterise bien la solution optimale et que celle ci confirme une différence entre la procédure d'attérissage standard et la procédure d'attérissage optimale. Cette solution optimale du problème discrétisé trouvée moyennant une convergence locale confirme les exigences des constructeurs et de l'OACI. La vitesse de toucher au sol reste la même quelque soit la procédure considérée et la pente de la trajectoire ne change pas.

Chapitre VI

Cas-tests

1 Introduction

Dans ce chapitre, on montre les résultats obtenus pour plusieurs cas-tests. Nous varions la durée d'approche du deuxième avion, la discrétisation plus fine ainsi que le point d'observation fixe ou mobile sous trace.

La durée d'approche du premier avion restera 600 s alors que celui du deuxième avion variera de 690 s, 660 s, 645 s, 630 s et 615 s. Les deux dernières durées sont faites à titre théorique car la séparation minimale autorisée en pratique pour que le deuxième avion attérisse sur la même piste que le premier étant de 45 s. Le nombre maximal de discrétisation variera de N=200, 300, etc. L'observation mobile prendra la même position 2D que l'avion.

Nous présentons les résultats obtenus, confirmant l'éfficacité de la méthode et la convergence de l'algorithme.

2 Résultats, N=200, Cas du point d'observation mobile

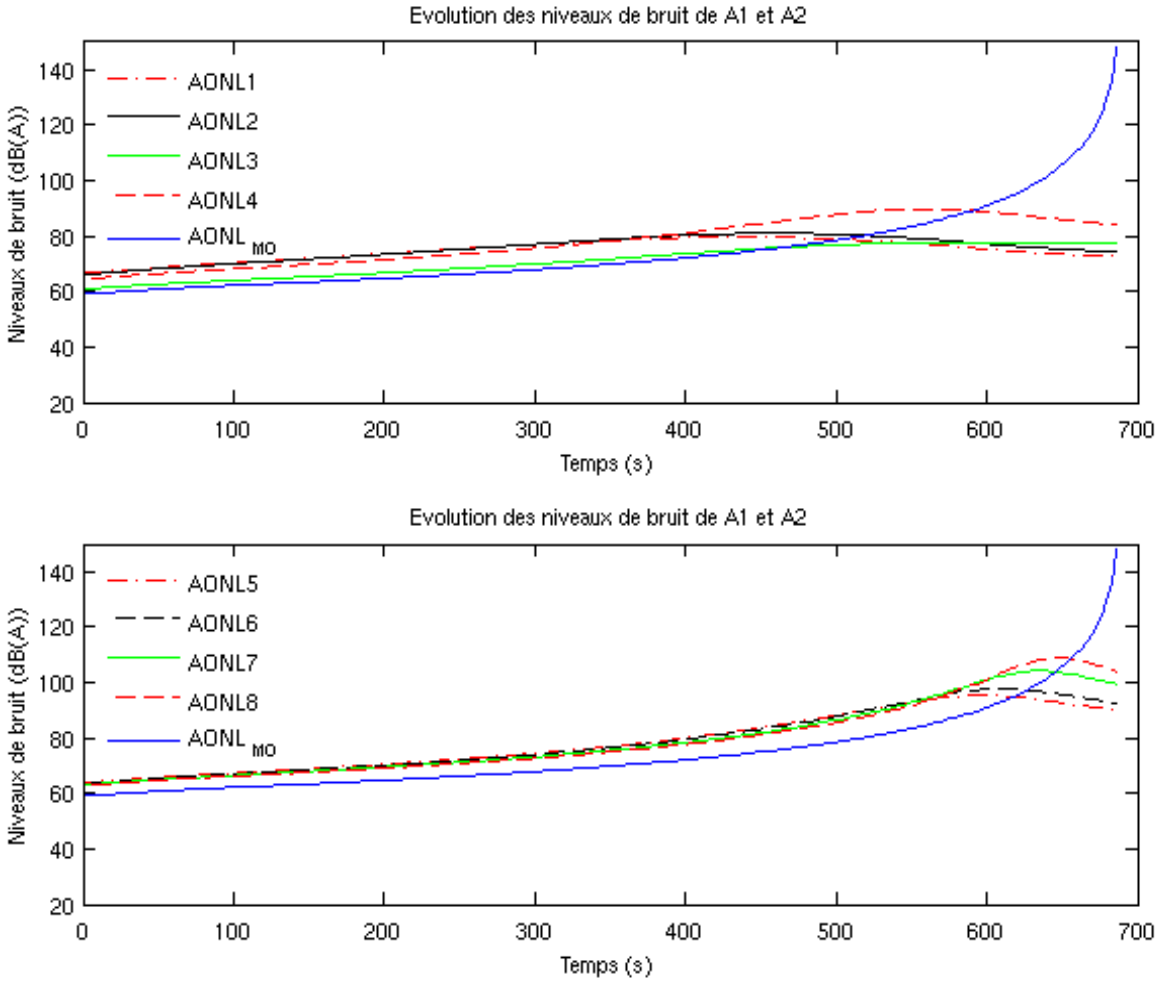


Figure VI.1 – Evolution du bruit global : Observation fixe et Observation mobile sous trace

La figure VI.1 montre une comparaison des niveaux de bruit émis par deux avions dans le cas d'un point d'observation mobile sous trace et des observations fixes au sol. La position d'observation est prise au sol en dessous de la trajectoire de la manière suivante : $(-20000\ m, -20000\ m, 0\ m)$ pour $AONL_1$, $(-19800\ m, -19800\ m, 0\ m)$ pour $AONL_1$, ..., $(-3200\ m, -3200\ m, 0\ m)$ pour $AONL_8$. $AONL_{MO}$ signifie « Aircraft optimal noise levels when moving observation is considered ». On voit bien que les niveaux de bruit augmentent énormement avec l'observation mobile surtout vers le point de toucher au sol car les niveaux de bruit pris en compte concernent toute la projection orthogonale de l'altitude de l'avion au

sol. Ce résultat montre que le niveau de bruit est maximal au point se trouvant directement sous l'avion et est variable en fonction des points d'observation. Par comparaison, ce résultat est proche des valeurs standards de bruit de jet en approche comme le montre Harvey [74]. Ce résultat est en parfait accord avec d'autres travaux déjà disponibles.

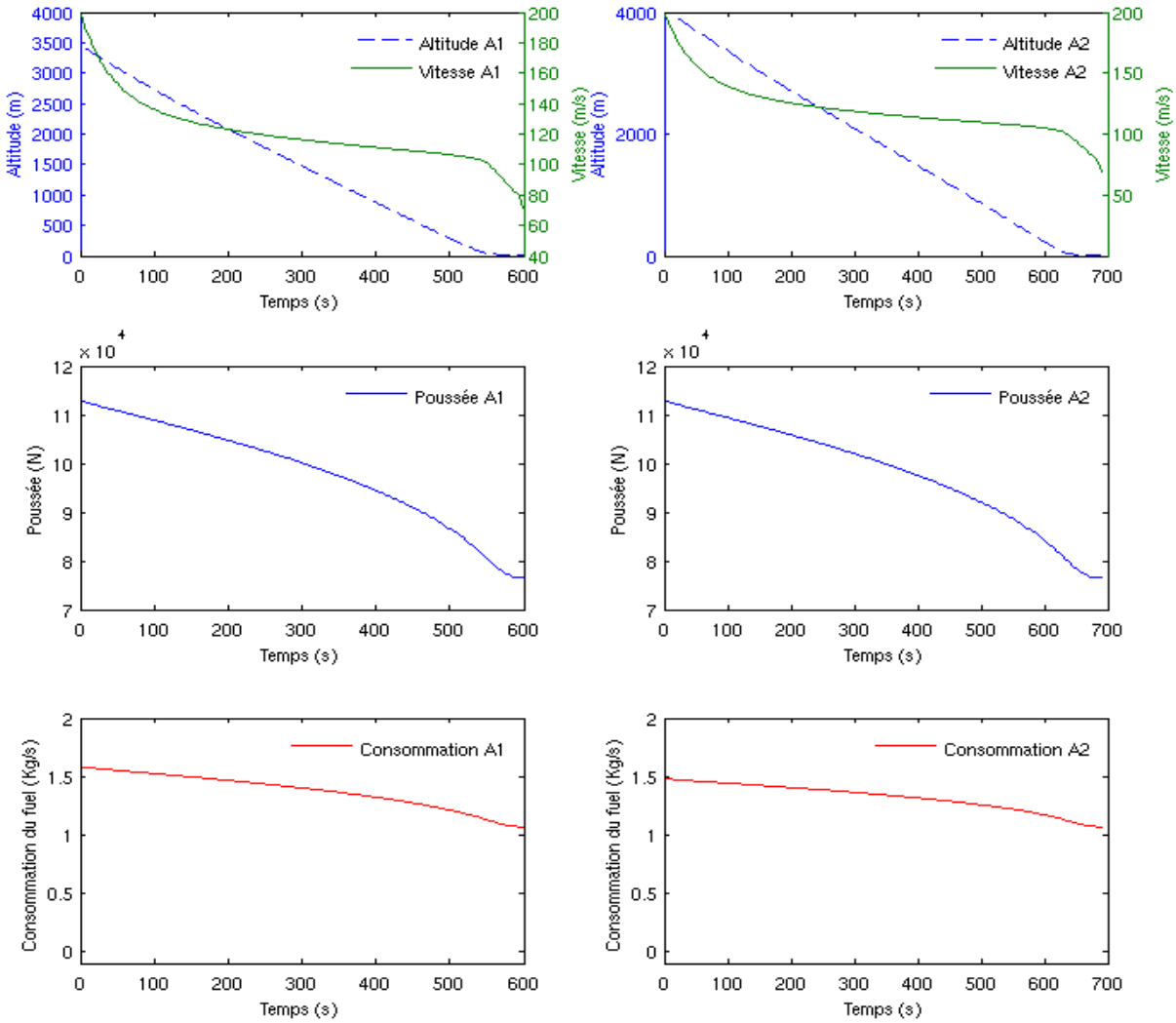


Figure VI.2 – Evolution de l'Altitude, Vitesse, Poussée et Consommation du carburant des deux avions

La figure VI.2 montre une évolution de l'altitude, la vitesse, la poussée et la consommation du carburant par les deux avions dans les mêmes conditions d'observation mobile sous trace.

De manière générale, on constate que l'algorithme converge et que les mêmes résutats trouvés précédement se confirment.

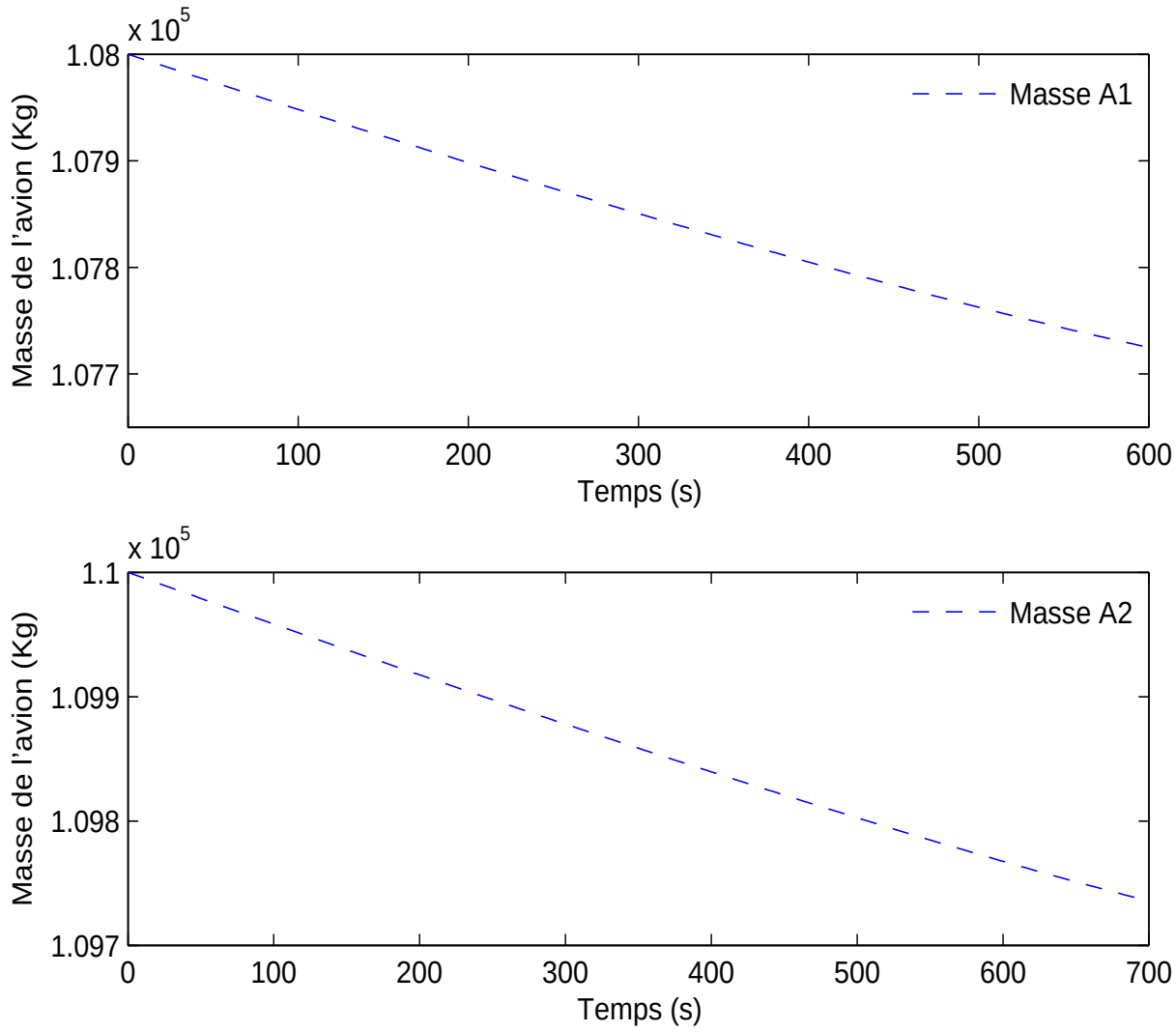


Figure VI.3 – Evolution de la masse des deux avions

La figure VI.3 montre l'évolution de la masse des deux avions tout au long de l'approche. On voit bien que la masse diminue, ce qui se traduit par la perte en kerosène consommée par les deux avions.

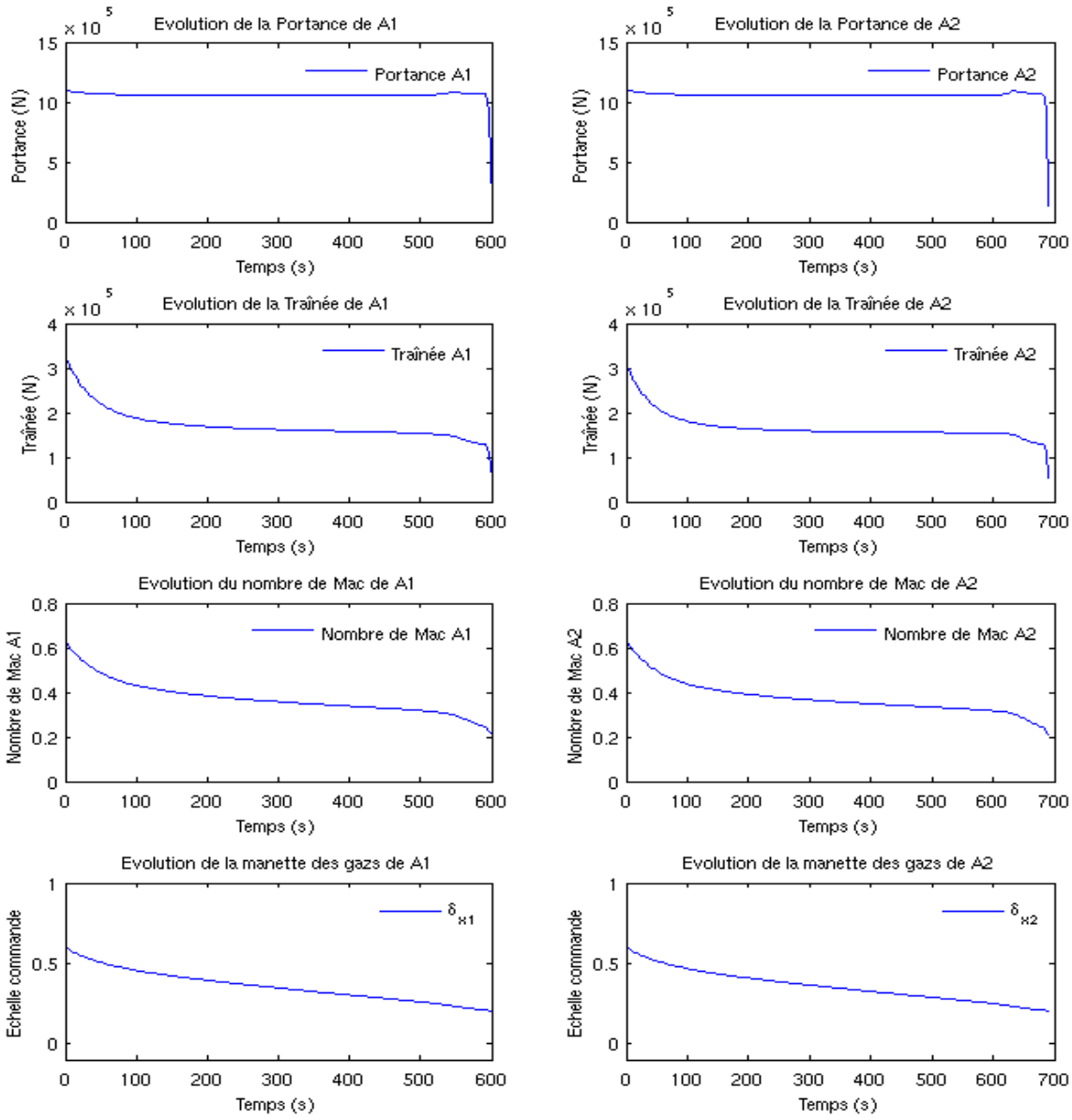


Figure VI.4 – Evolution de la Portance, Traînée, Nombre de Mac et Manette des gazs des deux avions

La figure VI.4 montre une évolution de la portance, la traînée, le nombre de Mac et la manette des gazs par les deux avions dans les mêmes conditions d'observation mobile sous trace.

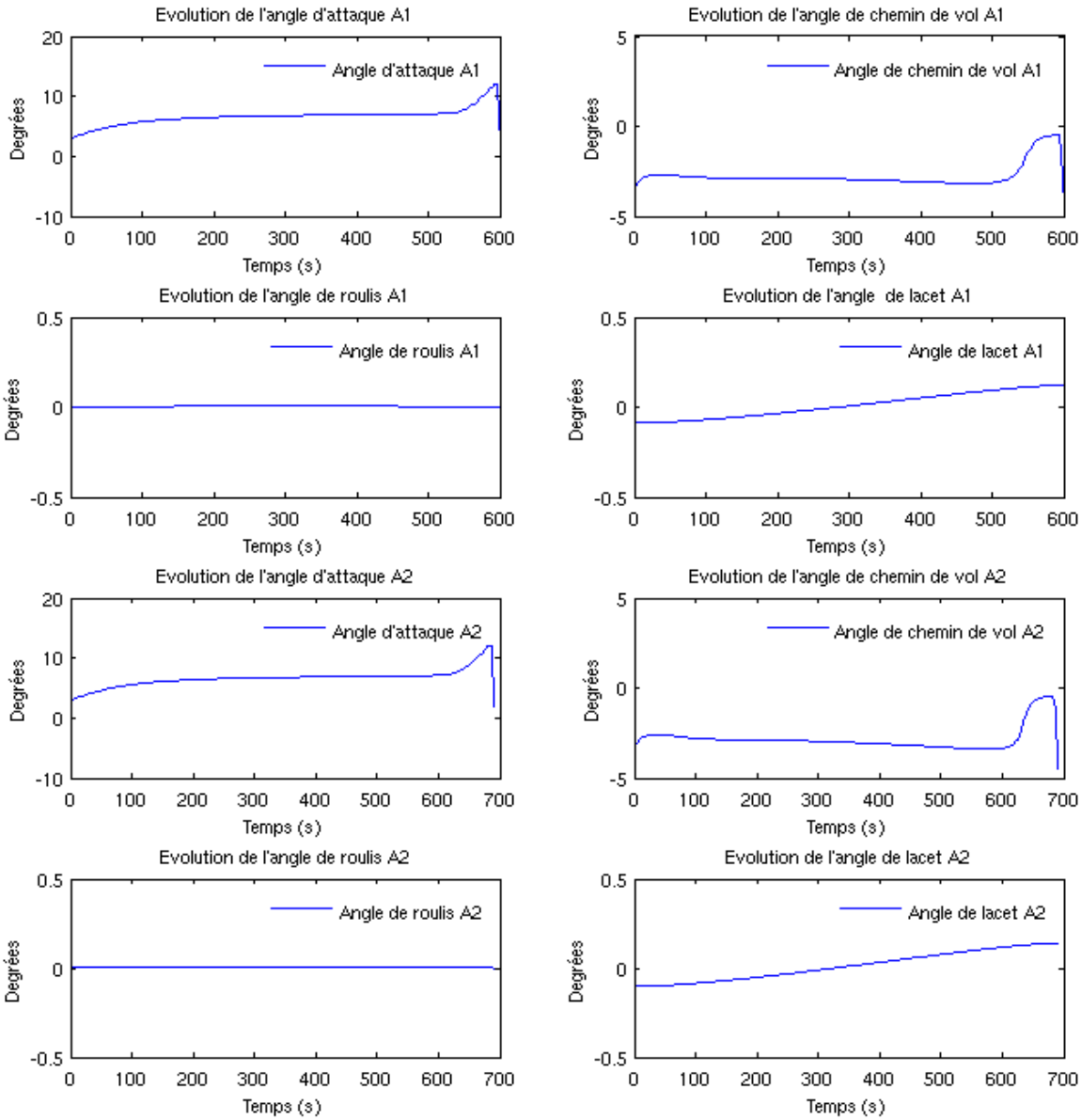


Figure VI.5 – Evolution des principaux angles de vol des deux avions

La figure VI.5 montre une évolution des principaux angles aérodynamiques des deux avions dans les mêmes conditions d'observation mobile sous trace.

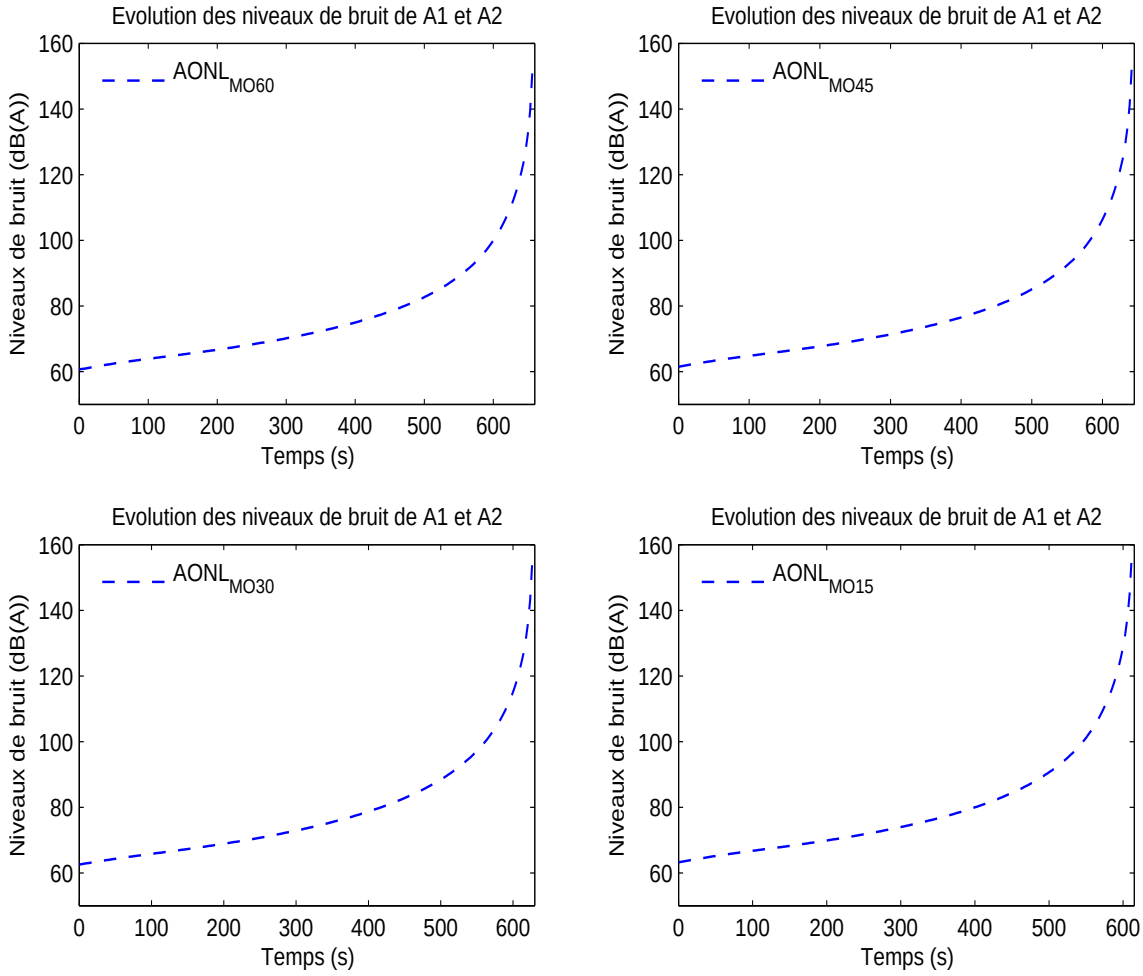


Figure VI.6 – Evolution du bruit global : Observation mobile sous trace, ts=60, ts=45, ts=30, ts=15

La figure VI.6 montre l'évolution du bruit global en fonction de la durée d'approche du deuxième avion. Les légendes $AONL_{M60}, AONL_{M45}, AONL_{M30}$ et $AONL_{M15}$ signifient respectivement que le point d'observation est mobile avec un intervalle d'attérissage de 60 s, 45 s, 30 s et 15 s entre le premier et le deuxième avion. Les deux dernières séparations de 30 s et 15 s sont irréalisables pratiquement car la durée minimale de séparation de deux attérissages successifs sur une seule piste est de 45 s. En calculant la valeur moyenne lorsque les durées des avions en approche sont 600s-660s, 600s-645s, 600s-630s, 600s-615s. On remarque que la moyenne du bruit global des deux avions varie respectivement de 76.5513 dB(A), 77.5586 dB(A),78.9554 dB(A) et 79.7146 dB(A). Cette légère augmentation du bruit global confirme le rapprochement des avions en fonction de la durée d'approche. On rappelle que les avions restent alignés et

attérissent successivement sur une seule piste.

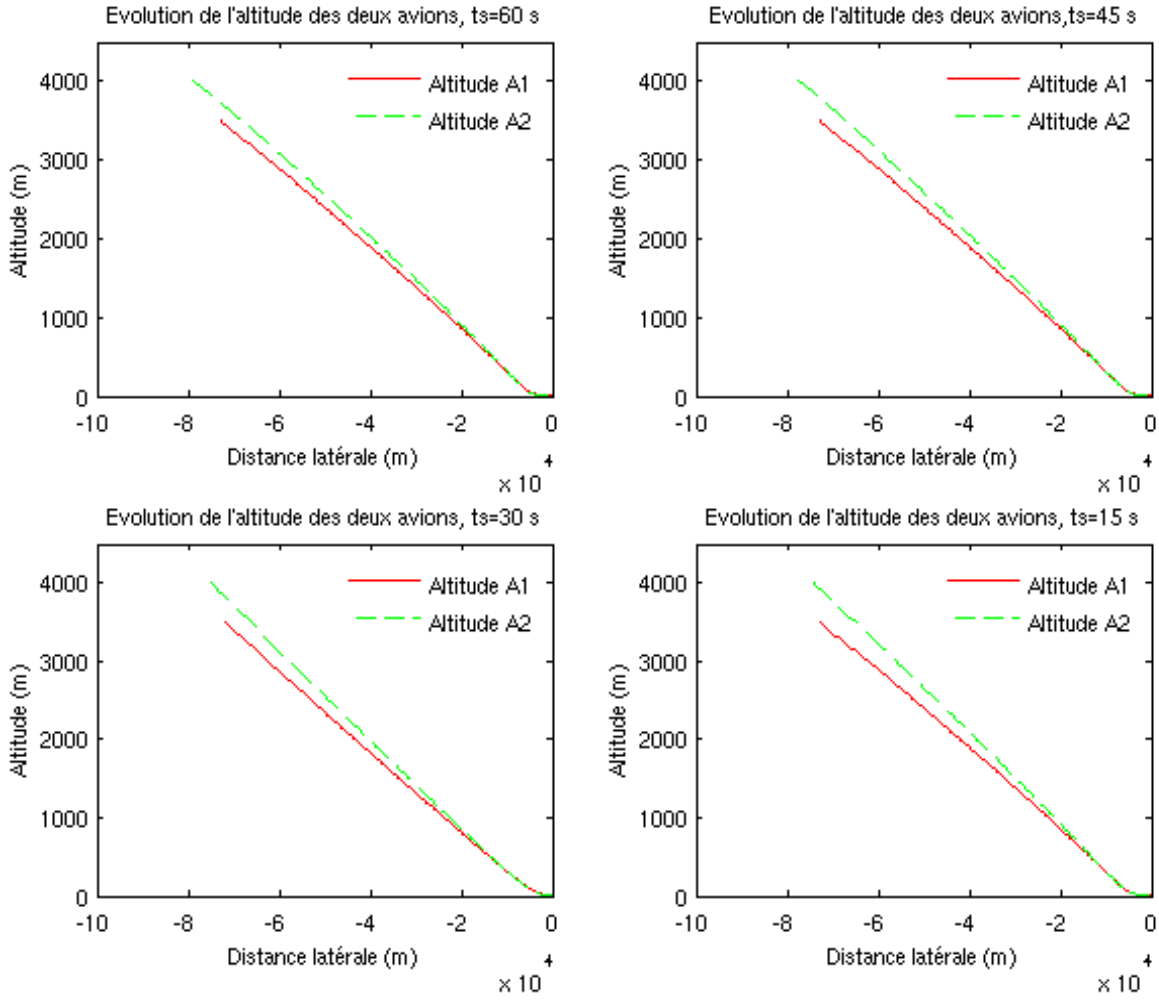


Figure VI.7 – Evolution de la trajectoire : Sépartaion durée approche (ts=60, ts=45, ts=30, ts=15)

La figure VI.7 montre l'évolution des trajectoires des avions lorsque les durées d'approche des deux avions sont respectivement de 600s-660s, 600s-645s, 600s-630s, 600s-615s. On voit bien que l'allure générale de la trajectoire reste la même, mais qu'il ya un racourcissement de la trajectoire du deuxième avion en fonction de la durée d'approche. Evidement que les deux cas de 600s-630s et 600s-615s sont des cas théoriques, non réalisables pratiquement.

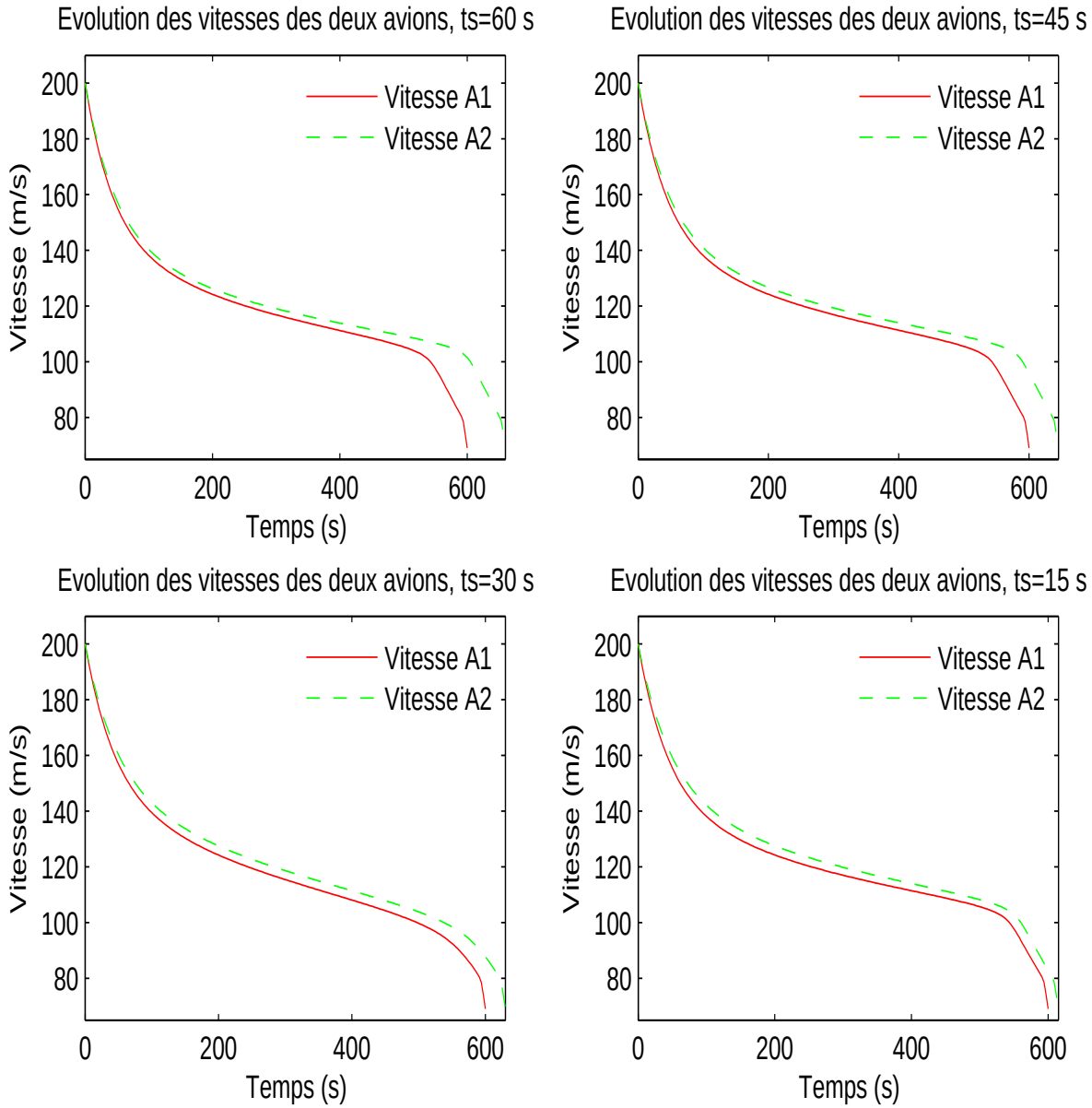


Figure VI.8 – Evolution de la vitesse : Sépartaion durée approche (ts=60, ts=45, ts=30, ts=15)

La figure VI.8 montre l'évolution des vitesses des avions lorsque les durées d'approche des deux avions sont respectivement de 600s-660s, 600s-645s, 600s-630s, 600s-615s. On voit bien que l'allure générale de la vitesse reste la même, mais qu'il ya un racourcissement de la vitesse du deuxième avion en fonction de la durée d'approche. Evidement que les deux cas de 600s-630s et 600s-615s sont des cas théoriques, non réalisables pratiquement.

3 Résultats, N=300, Point d'observation mobile

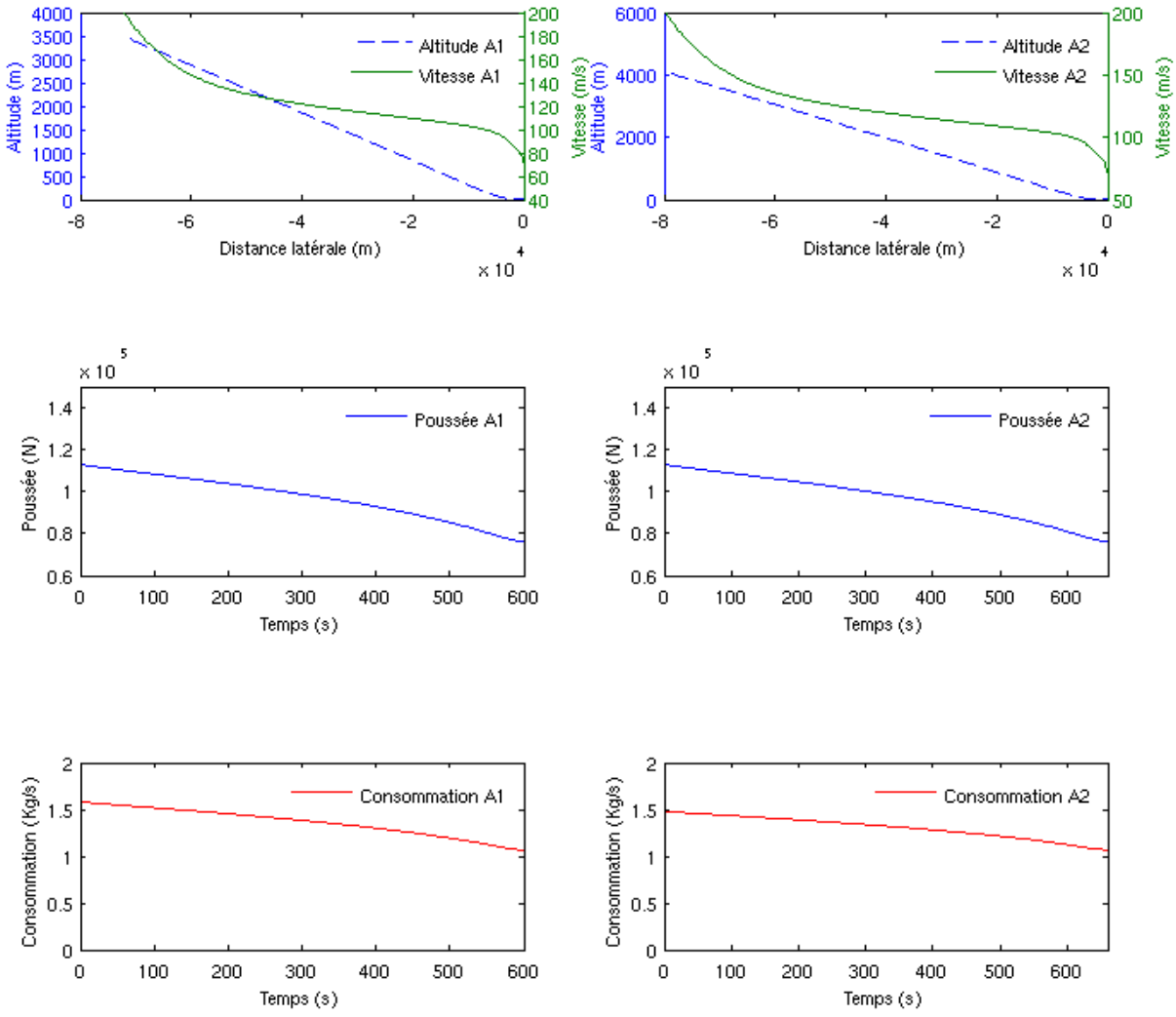


Figure VI.9 – Evolution de l'Altitude, Vitesse, Poussée et Consommation du carburant des deux avions

La figure VI.9 montre l'évolution de l'altitude, la vitesse , la poussée et la consommation de carburant par les avions dans un cas où le nombre maximal de discrétisation est N= 300.

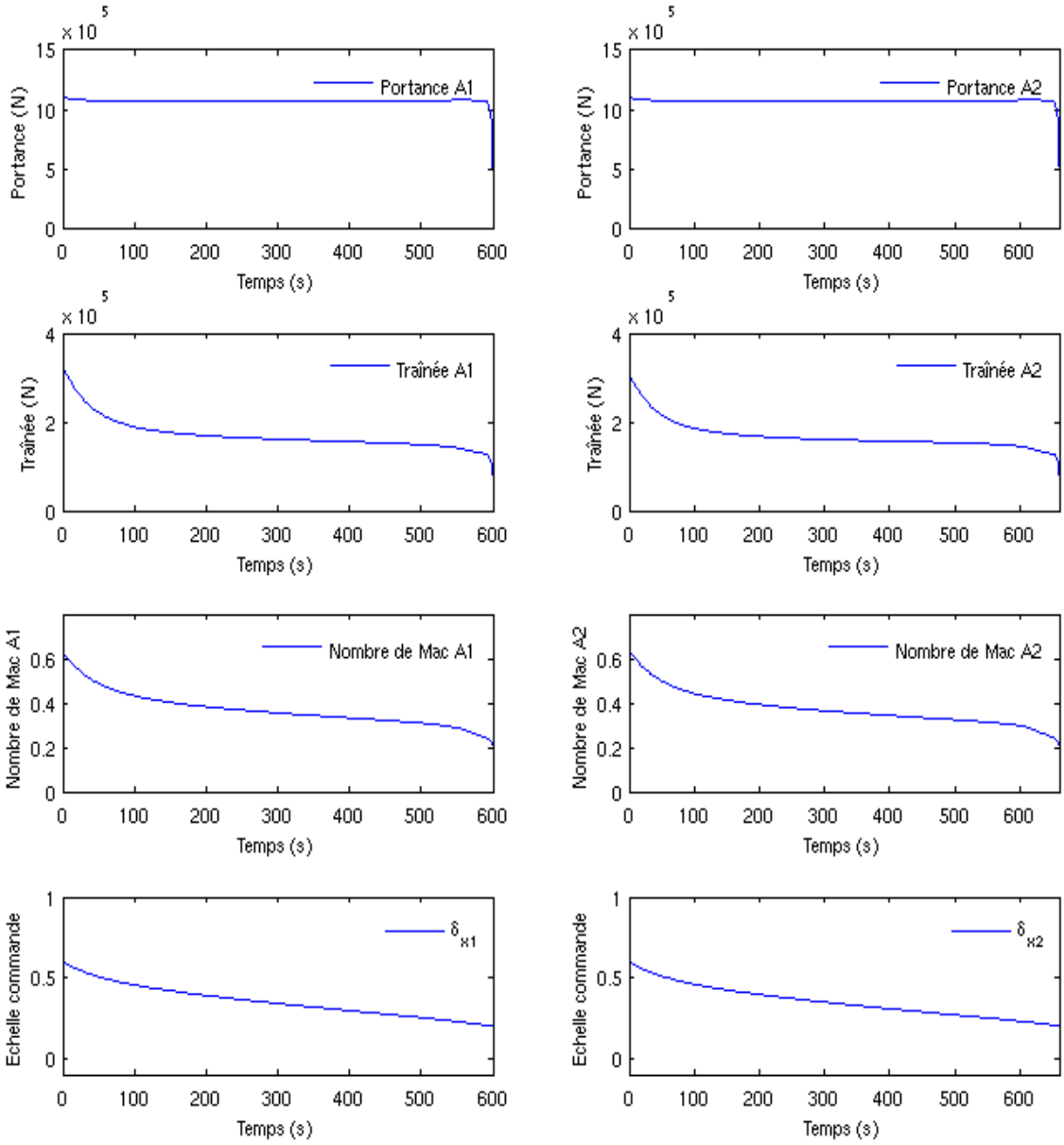


Figure VI.10 – Evolution de la Portance, Traînée, Nombre de Mac et Manette des gazs des deux avions.

La figure VI.10 montre l'évolution de la portance, la traînée , le nombre de mac et la manette des gazs des deux avions dans un cas où le nombre maximal de discrétisation est N= 300.

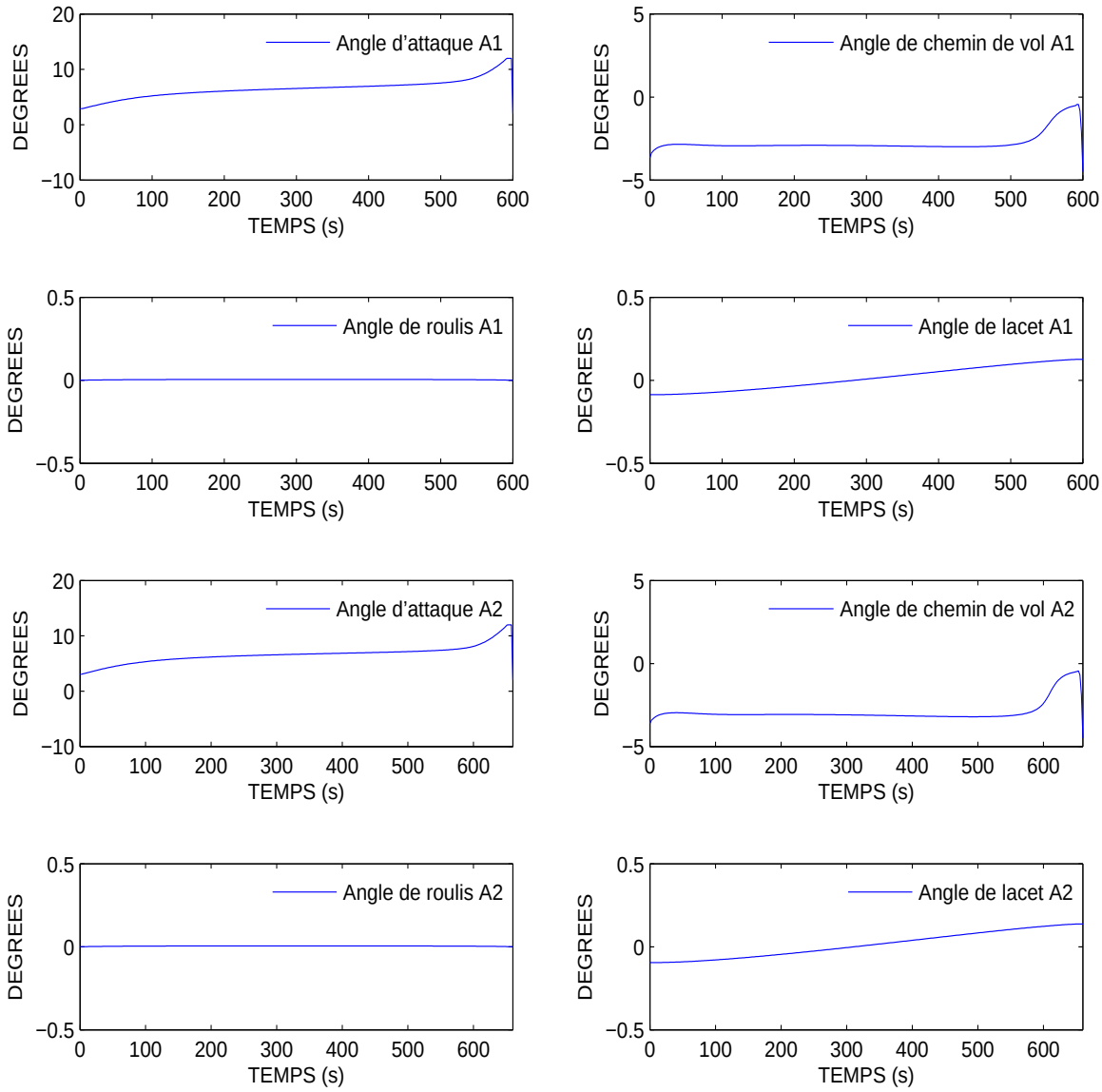


Figure VI.11 – Evolution des principaux angles de vol des deux avions

La figure VI.11 montre l'évolution des principaux angles aérodynamiques des avions lorsque le nombre maximal de discrétisation est N= 300.

Au niveau de l'évolution du bruit global, en calculant la valeur moyenne lorsque les durées des avions en approche sont 600s-690s, 600s-660s et 600s-645s, on remarque que la moyenne du

bruit global des deux avions varie respectivement de 74.9018 dB(A), 76.8085 dB(A) et 77.8231 dB(A). Cette légère augmentation du bruit global confirme le rapprochement des avions en fonction de la durée d'approche. Signalons que les avions restent alignés et attérissent successivement sur une seule piste.

4 Discussion des résultats des cas-tests

Après avoir comparé les différents résultats obtenus pour tous ces cas-tests, on remarque que les résustats restent presque les mêmes durant tout le processus d'optimisation, ce qui confirme la stabilité de l'algorithme adopté. Seulement, plus la discrétisation est fine (N plus grand), plus le programme est couteux en temps de calcul et en mémoire de stockage, ce qui est normale car le nombre de paramêmetres augmente avec N. Signalons tout de même que d'autres simulations numériques restent envisageables en fonction des critères privillegiés où de la répartition des points d'observations.

Conclusion générale et perspectives

Les recherches que nous avons menées au cours de cette thèse permettent de développer la modélisation mathématique et la résolution d'un problème de commande optimale d'un système dynamique de deux avions commerciaux en approche, minimisant le bruit perçu au sol sous contrainte énergétique.

Deux techniques sont proposées pour la résolution de ce problème. Il s'agit principalement de la technique d'optimisation non-linéaire par une méthode directe et la technique d'optimisation non-linéaire par une méthode indirecte centrée sur le principe de maximum de Pontryaguine.

Nous avons développé la modélisation mathématique des équations de la commande optimale d'un système dynamique de deux avions civils A300. Il s'agissait de revenir sur le modèle dynamique tridimensionnel exact de ce système, l'analyse de ces performances opérationnelles et qualités de vol. La modélisation des efforts aérodynamiques, propulsifs et massiques d'un avion commercial, constituent la base de la dynamique de vol de celui-ci. Ce problème a été résolu en utilisant une méthode de programmation séquentielle quadratique globalisée par régions de confiance. Le critère à minimiser était le bruit global émis par les deux avions en approche. Les résulats numériques trouvés sous la programmation AMPL et l'extraction des solutions par KNITRO présentent des caracteristiques optimales.

Sous la même démarche directe, le chapitre 4 vise la réduction des niveaux de bruit au sol émis par deux avions attérisant successivement sur une piste. Les contraintes liées à la sécurité, à la stabilité et aux performances de vol sont prises en compte. Une nouvelle contrainte énergétique a été nouvellement introduite. Ce problème type contrôle optimal non convexe est régi par des équations différentielles ordinaires non linéaires. Une méthode directe sous un schéma de discrétisation de Runge-Kutta d'odre 4 est utilisée dans la résolution de ce problème. Les

processus numériques montrent qu'il y a deux trajectoires optimales conduisant à une réduction des niveaux de bruit perçus au sol et qui fournissent des caractéristiques de vol optimales.

Au chapitre 5, nous avons montré la résolution numérique du problème de deux avions en utilisant l'approche indirecte où le principe de minimum de Pontryaguine est sollicité sous un schéma de discrétisation de type Runge-Kutta partitionné symplectique d'ordre 4. Cela démontre la bonne résolution du problème d'autant plus que les résultats obtenus dans cette approche confirment la commutation entre celle-ci et l'approche directe.

Au dernier chapitre, on montre plusieurs cas-tests. Ici nous varions la séparation temporelle des avions, la discrétisation plus fine ainsi que l'observation mobile sous trace. Les résultats obtenus prouvent une convergence de l'algorithme dans la recheche d'une solution optimale locale.

Le modèle dévéloppé dans cette thèse a été comparé aux autres modèles issus de la littérature ainsi qu'aux expérimentations numériques déjà effectuées dans le Laboratoire des Transports et Environnement de l'IFSTTAR. Les résultats montrent que les tendances entre notre modèle et la réalité se confirment. En toute évidence, l'intérêt de notre modélisation par rapport aux autres modèles issus de la littérature se fait remarquer par son caractère tridimensionnel exact avec une variation de la masse des avions et un couplage acoustique tout au long du vol.

Les perceptives d'avenir de ce modèle concernent la poursuite de la modélisation multi-avions en incluant davantage le gestion du traffic aérien et la variation des avions sur une plateforme aéroportuaire. Ce modèle typiquement non-linéaire et non convexe conduirait à l'utilisation d'autres méthodes comme les méthodes génétiques.

Annexe 1 : Méthode indirecte et équations de l'algorithme SPRK4

La mise en pratique de l'algorithme de Runge-Kutta partitionné symplectique pour le problème considéré donne les équations suivantes pour la dynamique de vol :

$$
\begin{aligned}
\mathbf{H} = \; & p_{1i}\dot{\alpha}_{ai} + p_{2i}\dot{\beta}_{ai} + p_{3i}\dot{\theta}_i + p_{4i}\dot{\psi}_i + p_{5i}\dot{\varphi}_i + p_{6i}\dot{V}_{a_i} + p_{7i}\dot{X}_{G_i} + p_{8i}\dot{Y}_{G_i} \\
& + p_{9i}\dot{Z}_{G_i} + p_{10i}\dot{p}_i + p_{11i}\dot{q}_i + p_{12i}\dot{r}_i + p_{13i}\dot{m}_i - p_0 g - \mu_{11i}(\alpha_i - \alpha_{if}) \\
& - \mu_{12i}(\theta_i - \theta_{if}) - \mu_{13i}(\psi_i - \psi_{if}) - \mu_{14i}(\varphi_i - \varphi_{if}) - \mu_{15i}(V_{a_i} - V_{aif}) \\
& - \mu_{16i}(X_{G_i} - X_{Gif}) - \mu_{17i}(Y_{G_i} - Y_{Gif}) - \mu_{18i}(Z_{G_i} - Z_{Gif}) - \mu_{19i}(p_i - p_{if}) \\
& - \mu_{110i}(q_i - q_{if}) - \mu 111i(r_i - r_{if}) - \mu_{112i}(\delta_{l_i} - \delta_{l_i f}) - \mu 113i(\delta_{m_i} - \delta_{mif}) \\
& - \mu_{114i}(\delta_{n_i} - \delta_{nif}) - \mu_{115i}(\delta_{x_i} - \delta_{xif}) - \mu_{116i}(m_i - m_{if}) + \mu_{21i}(\alpha_i - \alpha_{if}) \\
& + \mu_{22i}(\theta_i - \theta_{if}) + \mu_{23i}(\psi_i - \psi_{if}) + \mu_{24i}(\varphi_i - \varphi_{if}) + \mu_{25i}(V_{a_i} - V_{aif}) \\
& + \mu_{26i}(X_{G_i} - X_{Gif}) + \mu_{27i}(Y_{G_i} - Y_{Gif}) + \mu_{28i}(Z_{G_i} - Z_{Gif}) + \mu_{29i}(p_i - p_{if}) \\
& + \mu_{210i}(q_i - q_{if}) + \mu 211i(r_i - r_{if}) + \mu_{212i}(\delta_{l_i} - \delta_{l_i f}) + \mu 213i(\delta_{m_i} - \delta_{mif}) \\
& + \mu_{214i}(\delta_{n_i} - \delta_{nif}) + \mu_{215i}(\delta_{x_i} - \delta_{xif}) + \mu_{216i}(m_i - m_{if})
\end{aligned}
\tag{VI.1}
$$

Les équations du coétat sont les suivantes :

$$
\begin{aligned}
\dot{p}_{1i} = \; & -[p_{1i}\dot{\alpha}_{ai,\alpha_{ai}} + p_{2i}\dot{\beta}_{ai,\alpha_{ai}} + p_{3i}\dot{\theta}_{i,\alpha_{ai}} + p_{4i}\dot{\psi}_{i,\alpha_{ai}} + p_{5i}\dot{\varphi}_{i,\alpha_{ai}} + p_{6i}\dot{V}_{ai,\alpha_{ai}} + p_{7i}\dot{X}_{G_i,\alpha_{ai}} \\
& + p_{8i}\dot{Y}_{G_i,\alpha_{ai}} + p_{9i}\dot{Z}_{G_i,\alpha_{ai}} + p_{10i}\dot{p}_{i,\alpha_{ai}} + p_{11i}\dot{q}_{i,\alpha_{ai}} + p_{12i}\dot{r}_{i,\alpha_{ai}} + p_{13i}\dot{m}_{i,\alpha_{ai}} - p_0 g_{\alpha_{ai}} \\
& - \mu_{12i}\theta_{i,\alpha_{ai}} - \mu_{13i}\psi_{i,\alpha_{ai}} - \mu_{14i}\varphi_{i,\alpha_{ai}} - \mu_{15i}V_{a_i,\alpha_{ai}} - \mu_{16i}X_{G_i,\alpha_{ai}} - \mu_{17i}Y_{G_i,\alpha_{ai}} \\
& - \mu_{18i}Z_{G_i,\alpha_{ai}} - \mu_{19i}p_{i,\alpha_{ai}} - \mu_{110i}q_{i,\alpha_{ai}} - \mu 111i r_{i,\alpha_{ai}} - \mu_{116i}m_{i,\alpha_{ai}} + \mu_{21i} \\
& + \mu_{22i}\theta_{i,\alpha_{ai}} + \mu_{23i}\psi_{i,\alpha_{ai}} + \mu_{24i}\varphi_{i,\alpha_{ai}} + \mu_{25i}V_{a_i,\alpha_{ai}} + \mu_{26i}X_{G_i,\alpha_{ai}} + \mu_{27i}Y_{G_i,\alpha_{ai}} \\
& + \mu_{28i}Z_{G_i,\alpha_{ai}} + \mu_{29i}p_{i,\alpha_{ai}} + \mu_{210i}q_{i,\alpha_{ai}} + \mu 211i r_{i,\alpha_{ai}} + \mu_{216i}m_{i,\alpha_{ai}}]
\end{aligned}
\tag{VI.2}
$$

$$\begin{aligned}\dot{p}_{2i} = \; & -[p_{1i}\dot{\alpha}_{ai,\beta_{ai}} + p_{2i}\dot{\beta}_{ai,\beta_{ai}} + p_{3i}\dot{\theta}_{i,\beta_{ai}} + p_{4i}\dot{\psi}_{i,\beta_{ai}} + p_{5i}\dot{\varphi}_{i,\beta_{ai}} + p_{6i}\dot{V}_{ai,\beta_{ai}} + p_{7i}\dot{X}_{G_i,\beta_{ai}} \\ & + p_{8i}\dot{Y}_{G_i,\beta_{ai}} + p_{9i}\dot{Z}_{G_i,\beta_{ai}} + p_{10i}\dot{p}_{i,\beta_{ai}} + p_{11i}\dot{q}_{i,\beta_{ai}} + p_{12i}\dot{r}_{i,\beta_{ai}} + p_{13i}\dot{m}_{i,\beta_{ai}} - p_0 g_{\beta_{ai}} \\ & - \mu_{12i}\theta_{i,\beta_{ai}} - \mu_{13i}\psi_{i,\beta_{ai}} - \mu_{14i}\varphi_{i,\beta_{ai}} - \mu_{15i}V_{a_i,\beta_{ai}} - \mu_{16i}X_{G_i,\beta_{ai}} - \mu_{17i}Y_{G_i,\beta_{ai}} \\ & - \mu_{18i}Z_{G_i,\beta_{ai}} - \mu_{19i}p_{i,\beta_{ai}} - \mu_{110i}q_{i,\beta_{ai}} - \mu 111 i r_{i,\beta_{ai}} - \mu_{116i}m_{i,\beta_{ai}} + \mu_{21i}\alpha_{ai,\beta_{ai}} \\ & + \mu_{22i}\theta_{i,\beta_{ai}} + \mu_{23i}\psi_{i,\beta_{ai}} + \mu_{24i}\varphi_{i,\beta_{ai}} + \mu_{25i}V_{a_i,\beta_{ai}} + \mu_{26i}X_{G_i,\beta_{ai}} + \mu_{27i}Y_{G_i,\beta_{ai}} \\ & + \mu_{28i}Z_{G_i,\beta_{ai}} + \mu_{29i}p_{i,\beta_{ai}} + \mu_{210i}q_{i,\beta_{ai}} + \mu 211 i r_{i,\beta_{ai}} + \mu_{216i}m_{i,\beta_{ai}}]\end{aligned} \tag{VI.3}$$

$$\begin{aligned}\dot{p}_{3i} = \; & -[p_{1i}\dot{\alpha}_{ai,\theta_i} + p_{2i}\dot{\beta}_{ai,\theta_i} + p_{3i}\dot{\theta}_{i,\theta_i} + p_{4i}\dot{\psi}_{i,\theta_i} + p_{5i}\dot{\varphi}_{i,\theta_i} + p_{6i}\dot{V}_{ai,\theta_i} + p_{7i}\dot{X}_{G_i,\theta_i} \\ & + p_{8i}\dot{Y}_{G_i,\theta_i} + p_{9i}\dot{Z}_{G_i,\theta_i} + p_{10i}\dot{p}_{i,\theta_i} + p_{11i}\dot{q}_{i,\theta_i} + p_{12i}\dot{r}_{i,\theta_i} + p_{13i}\dot{m}_{i,\theta_i} - p_0 g_{\theta_i} \\ & - \mu_{12i}\theta_{i,\theta_i} - \mu_{13i}\psi_{i,\theta_i} - \mu_{14i}\varphi_{i,\theta_i} - \mu_{15i}V_{a_i,\theta_i} - \mu_{16i}X_{G_i,\theta_i} - \mu_{17i}Y_{G_i,\theta_i} - \mu_{18i}Z_{G_i,\theta_i} \\ & - \mu_{19i}p_{i,\theta_i} - \mu_{110i}q_{i,\theta_i} - \mu 111 i r_{i,\theta_i} - \mu_{116i}m_{i,\theta_i} + \mu_{21i}\alpha_{ai,\theta_i} + \mu_{22i} + \mu_{23i}\psi_{i,\theta_i} \\ & + \mu_{24i}\varphi_{i,\theta_i} + \mu_{25i}V_{a_i,\theta_i} + \mu_{26i}X_{G_i,\theta_i} + \mu_{27i}Y_{G_i,\theta_i} + \mu_{28i}Z_{G_i,\theta_i} + \mu_{29i}p_{i,\theta_i} \\ & + \mu_{210i}q_{i,\theta_i} + \mu 211 i r_{i,\theta_i} + \mu_{216i}m_{i,\theta_i}]\end{aligned} \tag{VI.4}$$

$$\begin{aligned}\dot{p}_{4i} = \; & -[p_{1i}\dot{\alpha}_{ai,\psi_i} + p_{2i}\dot{\beta}_{ai,\psi_i} + p_{3i}\dot{\theta}_{i,\psi_i} + p_{4i}\dot{\psi}_{i,\psi_i} + p_{5i}\dot{\varphi}_{i,\psi_i} + p_{6i}\dot{V}_{ai,\psi_i} + p_{7i}\dot{X}_{G_i,\psi_i} \\ & + p_{8i}\dot{Y}_{G_i,\psi_i} + p_{9i}\dot{Z}_{G_i,\psi_i} + p_{10i}\dot{p}_{i,\psi_i} + p_{11i}\dot{q}_{i,\psi_i} + p_{12i}\dot{r}_{i,\psi_i} + p_{13i}\dot{m}_{i,\psi_i} - p_0 g_{\psi_i} \\ & - \mu_{12i}\theta_{i,\psi_i} - \mu_{13i}\psi_{i,\psi_i} - \mu_{14i}\varphi_{i,\psi_i} - \mu_{15i}V_{a_i,\psi_i} - \mu_{16i}X_{G_i,\psi_i} - \mu_{17i}Y_{G_i,\psi_i} \\ & - \mu_{18i}Z_{G_i,\psi_i} - \mu_{19i}p_{i,\psi_i} - \mu_{110i}q_{i,\psi_i} - \mu 111 i r_{i,\psi_i} - \mu_{116i}m_{i,\psi_i} + \mu_{21i}\alpha_{ai,\psi_i} \\ & + \mu_{22i}\theta_{i,\psi_i} + \mu_{23i} + \mu_{24i}\varphi_{i,\psi_i} + \mu_{25i}V_{a_i,\psi_i} + \mu_{26i}X_{G_i,\psi_i} + \mu_{27i}Y_{G_i,\psi_i} + \mu_{28i}Z_{G_i,\psi_i} \\ & + \mu_{29i}p_{i,\psi_i} + \mu_{210i}q_{i,\psi_i} + \mu 211 i r_{i,\psi_i} + \mu_{216i}m_{i,\psi_i}]\end{aligned} \tag{VI.5}$$

$$\begin{aligned}\dot{p}_{5i} = \; & -[p_{1i}\dot{\alpha}_{ai,\varphi_i} + p_{2i}\dot{\beta}_{ai,\varphi_i} + p_{3i}\dot{\theta}_{i,\varphi_i} + p_{4i}\dot{\psi}_{i,\varphi_i} + p_{5i}\dot{\varphi}_{i,\varphi_i} + p_{6i}\dot{V}_{ai,\varphi_i} + p_{7i}\dot{X}_{G_i,\varphi_i} \\ & + p_{8i}\dot{Y}_{G_i,\varphi_i} + p_{9i}\dot{Z}_{G_i,\varphi_i} + p_{10i}\dot{p}_{i,\varphi_i} + p_{11i}\dot{q}_{i,\varphi_i} + p_{12i}\dot{r}_{i,\varphi_i} + p_{13i}\dot{m}_{i,\varphi_i} - p_0 g_{\varphi_i} \\ & - \mu_{12i}\theta_{i,\varphi_i} - \mu_{13i}\psi_{i,\varphi_i} - \mu_{14i}\varphi_{i,\varphi_i} - \mu_{15i}V_{a_i,\varphi_i} - \mu_{16i}X_{G_i,\varphi_i} - \mu_{17i}Y_{G_i,\varphi_i} \\ & - \mu_{18i}Z_{G_i,\varphi_i} - \mu_{19i}p_{i,\varphi_i} - \mu_{110i}q_{i,\varphi_i} - \mu 111 i r_{i,\varphi_i} - \mu_{116i}m_{i,\varphi_i} + \mu_{21i}\alpha_{ai,\varphi_i} \\ & + \mu_{22i}\theta_{i,\varphi_i} + \mu_{23i}\psi_{i,\varphi_i} + \mu_{24i} + \mu_{25i}V_{a_i,\varphi_i} + \mu_{26i}X_{G_i,\varphi_i} + \mu_{27i}Y_{G_i,\varphi_i} + \mu_{28i}Z_{G_i,\varphi_i} \\ & + \mu_{29i}p_{i,\varphi_i} + \mu_{210i}q_{i,\varphi_i} + \mu 211 i r_{i,\varphi_i} + \mu_{216i}m_{i,\varphi_i}]\end{aligned} \tag{VI.6}$$

$$
\begin{aligned}
\dot{p}_{6i} = \; & -[p_{1i}\dot{\alpha}_{ai,V_{ai}} + p_{2i}\dot{\beta}_{ai,V_{ai}} + p_{3i}\dot{\theta}_{i,V_{ai}} + p_{4i}\dot{\psi}_{i,V_{ai}} + p_{5i}\dot{\varphi}_{i,V_{ai}} + p_{6i}\dot{V}_{ai,V_{ai}} + p_{7i}\dot{X}_{G_i,V_{ai}} \\
& + p_{8i}\dot{Y}_{G_i,V_{ai}} + p_{9i}\dot{Z}_{G_i,V_{ai}} + p_{10i}\dot{p}_{i,V_{ai}} + p_{11i}\dot{q}_{i,V_{ai}} + p_{12i}\dot{r}_{i,V_{ai}} + p_{13i}\dot{m}_{i,V_{ai}} - p_0 g_{V_{ai}} \\
& - \mu_{12i}\theta_{i,V_{ai}} - \mu_{13i}\psi_{i,V_{ai}} - \mu_{14i}\varphi_{i,V_{ai}} - \mu_{15i}V_{a_i,V_{ai}} - \mu_{16i}X_{G_i,V_{ai}} - \mu_{17i}Y_{G_i,V_{ai}} \\
& - \mu_{18i}Z_{G_i,V_{ai}} - \mu_{19i}p_{i,V_{ai}} - \mu_{110i}q_{i,V_{ai}} - \mu 111 i r_{i,V_{ai}} - \mu_{116i}m_{i,V_{ai}} + \mu_{21i}\alpha_{ai,V_{ai}} \\
& + \mu_{22i}\theta_{i,V_{ai}} + \mu_{23i}\psi_{i,V_{ai}} + \mu_{24i}\varphi_{i,V_{ai}} + \mu_{25i} + \mu_{26i}X_{G_i,V_{ai}} + \mu_{27i}Y_{G_i,V_{ai}} + \mu_{28i}Z_{G_i,V_{ai}} \\
& + \mu_{29i}p_{i,V_{ai}} + \mu_{210i}q_{i,V_{ai}} + \mu 211 i r_{i,V_{ai}} + \mu_{216i}m_{i,V_{ai}}]
\end{aligned}
\tag{VI.7}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{p}_{7i} = \; & -[p_{1i}\dot{\alpha}_{ai,X_{Gi}} + p_{2i}\dot{\beta}_{ai,X_{Gi}} + p_{3i}\dot{\theta}_{i,X_{Gi}} + p_{4i}\dot{\psi}_{i,X_{Gi}} + p_{5i}\dot{\varphi}_{i,X_{Gi}} + p_{6i}\dot{V}_{ai,X_{Gi}} + p_{7i}\dot{X}_{G_i,X_{Gi}} \\
& + p_{8i}\dot{Y}_{G_i,X_{Gi}} + p_{9i}\dot{Z}_{G_i,X_{Gi}} + p_{10i}\dot{p}_{i,X_{Gi}} + p_{11i}\dot{q}_{i,X_{Gi}} + p_{12i}\dot{r}_{i,X_{Gi}} + p_{13i}\dot{m}_{i,X_{Gi}} - p_0 g_{X_{Gi}} \\
& - \mu_{12i}\theta_{i,X_{Gi}} - \mu_{13i}\psi_{i,X_{Gi}} - \mu_{14i}\varphi_{i,X_{Gi}} - \mu_{15i}V_{a_i,X_{Gi}} - \mu_{16i}X_{G_i,X_{Gi}} - \mu_{17i}Y_{G_i,X_{Gi}} \\
& - \mu_{18i}Z_{G_i,X_{Gi}} - \mu_{19i}p_{i,X_{Gi}} - \mu_{110i}q_{i,X_{Gi}} - \mu 111 i r_{i,X_{Gi}} - \mu_{116i}m_{i,X_{Gi}} + \mu_{21i}\alpha_{ai,X_{Gi}} \\
& + \mu_{22i}\theta_{i,X_{Gi}} + \mu_{23i}\psi_{i,X_{Gi}} + \mu_{24i}\varphi_{i,X_{Gi}} + \mu_{25i}V_{a_i,X_{Gi}} + \mu_{26i} + \mu_{27i}Y_{G_i,X_{Gi}} + \mu_{28i}Z_{G_i,X_{Gi}} \\
& + \mu_{29i}p_{i,X_{Gi}} + \mu_{210i}q_{i,X_{Gi}} + \mu 211 i r_{i,X_{Gi}} + \mu_{216i}m_{i,X_{Gi}}]
\end{aligned}
\tag{VI.8}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{p}_{8i} = \; & -[p_{1i}\dot{\alpha}_{ai,Y_{Gi}} + p_{2i}\dot{\beta}_{ai,Y_{Gi}} + p_{3i}\dot{\theta}_{i,Y_{Gi}} + p_{4i}\dot{\psi}_{i,Y_{Gi}} + p_{5i}\dot{\varphi}_{i,Y_{Gi}} + p_{6i}\dot{V}_{ai,Y_{Gi}} + p_{7i}\dot{X}_{G_i,Y_{Gi}} \\
& + p_{8i}\dot{Y}_{G_i,Y_{Gi}} + p_{9i}\dot{Z}_{G_i,Y_{Gi}} + p_{10i}\dot{p}_{i,Y_{Gi}} + p_{11i}\dot{q}_{i,Y_{Gi}} + p_{12i}\dot{r}_{i,Y_{Gi}} + p_{13i}\dot{m}_{i,Y_{Gi}} - p_0 g_{Y_{Gi}} \\
& - \mu_{12i}\theta_{i,Y_{Gi}} - \mu_{13i}\psi_{i,Y_{Gi}} - \mu_{14i}\varphi_{i,Y_{Gi}} - \mu_{15i}V_{a_i,Y_{Gi}} - \mu_{16i}X_{G_i,Y_{Gi}} - \mu_{17i}Y_{G_i,Y_{Gi}} \\
& - \mu_{18i}Z_{G_i,Y_{Gi}} - \mu_{19i}p_{i,Y_{Gi}} - \mu_{110i}q_{i,Y_{Gi}} - \mu 111 i r_{i,Y_{Gi}} - \mu_{116i}m_{i,Y_{Gi}} + \mu_{21i}\alpha_{ai,Y_{Gi}} \\
& + \mu_{22i}\theta_{i,Y_{Gi}} + \mu_{23i}\psi_{i,Y_{Gi}} + \mu_{24i}\varphi_{i,Y_{Gi}} + \mu_{25i}V_{a_i,Y_{Gi}} + \mu_{26i}X_{G_i,Y_{Gi}} + \mu_{27i} + \mu_{28i}Z_{G_i,Y_{Gi}} \\
& + \mu_{29i}p_{i,Y_{Gi}} + \mu_{210i}q_{i,Y_{Gi}} + \mu 211 i r_{i,Y_{Gi}} + \mu_{216i}m_{i,Y_{Gi}}]
\end{aligned}
\tag{VI.9}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{p}_{9i} = \; & -[p_{1i}\dot{\alpha}_{ai,Z_{Gi}} + p_{2i}\dot{\beta}_{ai,Z_{Gi}} + p_{3i}\dot{\theta}_{i,Z_{Gi}} + p_{4i}\dot{\psi}_{i,Z_{Gi}} + p_{5i}\dot{\varphi}_{i,Z_{Gi}} + p_{6i}\dot{V}_{ai,Z_{Gi}} + p_{7i}\dot{X}_{G_i,Z_{Gi}} \\
& + p_{8i}\dot{Y}_{G_i,Z_{Gi}} + p_{9i}\dot{Z}_{G_i,Z_{Gi}} + p_{10i}\dot{p}_{i,Z_{Gi}} + p_{11i}\dot{q}_{i,Z_{Gi}} + p_{12i}\dot{r}_{i,Z_{Gi}} + p_{13i}\dot{m}_{i,Z_{Gi}} - p_0 g_{Z_{Gi}} \\
& - \mu_{12i}\theta_{i,Z_{Gi}} - \mu_{13i}\psi_{i,Z_{Gi}} - \mu_{14i}\varphi_{i,Z_{Gi}} - \mu_{15i}V_{a_i,Z_{Gi}} - \mu_{16i}X_{G_i,Z_{Gi}} - \mu_{17i}Y_{G_i,Z_{Gi}} \\
& - \mu_{18i}Z_{G_i,Z_{Gi}} - \mu_{19i}p_{i,Z_{Gi}} - \mu_{110i}q_{i,Z_{Gi}} - \mu 111 i r_{i,Z_{Gi}} - \mu_{116i}m_{i,Z_{Gi}} + \mu_{21i}\alpha_{ai,Z_{Gi}} \\
& + \mu_{22i}\theta_{i,Z_{Gi}} + \mu_{23i}\psi_{i,Z_{Gi}} + \mu_{24i}\varphi_{i,Z_{Gi}} + \mu_{25i}V_{a_i,Z_{Gi}} + \mu_{26i}X_{G_i,Z_{Gi}} + \mu_{27i}Y_{G_i,Z_{Gi}} + \mu_{28i} \\
& + \mu_{29i}p_{i,Z_{Gi}} + \mu_{210i}q_{i,Z_{Gi}} + \mu 211 i r_{i,Z_{Gi}} + \mu_{216i}m_{i,Z_{Gi}}]
\end{aligned}
\tag{VI.10}
$$

$$\begin{aligned}\dot{p}_{10i} = \; & -[p_{1i}\dot{\alpha}_{ai,p_i} + p_{2i}\dot{\beta}_{ai,p_i} + p_{3i}\dot{\theta}_{i,p_i} + p_{4i}\dot{\psi}_{i,p_i} + p_{5i}\dot{\varphi}_{i,p_i} + p_{6i}\dot{V}_{ai,p_i} + p_{7i}\dot{X}_{G_i,p_i} \\ & + p_{8i}\dot{Y}_{G_i,p_i} + p_{9i}\dot{Z}_{G_i,p_i} + p_{10i}\dot{p}_{i,p_i} + p_{11i}\dot{q}_{i,p_i} + p_{12i}\dot{r}_{i,p_i} + p_{13i}\dot{m}_{i,p_i} - p_0 g_{p_i} \\ & - \mu_{12i}\theta_{i,p_i} - \mu_{13i}\psi_{i,p_i} - \mu_{14i}\varphi_{i,p_i} - \mu_{15i}V_{a_i,p_i} - \mu_{16i}X_{G_i,p_i} - \mu_{17i}Y_{G_i,p_i} \\ & - \mu_{18i}Z_{G_i,p_i} - \mu_{19i}p_{i,p_i} - \mu_{110i}q_{i,p_i} - \mu 111 i r_{i,p_i} - \mu_{116i}m_{i,p_i} + \mu_{21i}\alpha_{ai,p_i} \\ & + \mu_{22i}\theta_{i,p_i} + \mu_{23i}\psi_{i,p_i} + \mu_{24i}\varphi_{i,p_i} + \mu_{25i}V_{a_i,p_i} + \mu_{26i}X_{G_i,p_i} + \mu_{27i}Y_{G_i,p_i} + \mu_{28i}Z_{G_i,p_i} \\ & + \mu_{29i} + \mu_{210i}q_{i,p_i} + \mu 211 i r_{i,p_i} + \mu_{216i}m_{i,p_i}]\end{aligned} \tag{VI.11}$$

$$\begin{aligned}\dot{p}_{11i} = \; & -[p_{1i}\dot{\alpha}_{ai,q_i} + p_{2i}\dot{\beta}_{ai,q_i} + p_{3i}\dot{\theta}_{i,q_i} + p_{4i}\dot{\psi}_{i,q_i} + p_{5i}\dot{\varphi}_{i,q_i} + p_{6i}\dot{V}_{ai,q_i} + p_{7i}\dot{X}_{G_i,q_i} \\ & + p_{8i}\dot{Y}_{G_i,q_i} + p_{9i}\dot{Z}_{G_i,q_i} + p_{10i}\dot{p}_{i,q_i} + p_{11i}\dot{q}_{i,q_i} + p_{12i}\dot{r}_{i,q_i} + p_{13i}\dot{m}_{i,q_i} - p_0 g_{q_i} \\ & - \mu_{12i}\theta_{i,q_i} - \mu_{13i}\psi_{i,q_i} - \mu_{14i}\varphi_{i,q_i} - \mu_{15i}V_{a_i,q_i} - \mu_{16i}X_{G_i,q_i} - \mu_{17i}Y_{G_i,q_i} \\ & - \mu_{18i}Z_{G_i,q_i} - \mu_{19i}p_{i,q_i} - \mu_{110i}q_{i,q_i} - \mu 111 i r_{i,q_i} - \mu_{116i}m_{i,q_i} + \mu_{21i}\alpha_{ai,q_i} \\ & + \mu_{22i}\theta_{i,q_i} + \mu_{23i}\psi_{i,q_i} + \mu_{24i}\varphi_{i,q_i} + \mu_{25i}V_{a_i,q_i} + \mu_{26i}X_{G_i,q_i} + \mu_{27i}Y_{G_i,q_i} + \mu_{28i}Z_{G_i,q_i} \\ & + \mu_{29i}p_{i,q_i} + \mu_{210i} + \mu 211 i r_{i,q_i} + \mu_{216i}m_{i,q_i}]\end{aligned} \tag{VI.12}$$

$$\begin{aligned}\dot{p}_{12i} = \; & -[p_{1i}\dot{\alpha}_{ai,r_i} + p_{2i}\dot{\beta}_{ai,r_i} + p_{3i}\dot{\theta}_{i,r_i} + p_{4i}\dot{\psi}_{i,r_i} + p_{5i}\dot{\varphi}_{i,r_i} + p_{6i}\dot{V}_{ai,r_i} + p_{7i}\dot{X}_{G_i,r_i} \\ & + p_{8i}\dot{Y}_{G_i,r_i} + p_{9i}\dot{Z}_{G_i,r_i} + p_{10i}\dot{p}_{i,r_i} + p_{11i}\dot{q}_{i,r_i} + p_{12i}\dot{r}_{i,r_i} + p_{13i}\dot{m}_{i,r_i} - p_0 g_{r_i} \\ & - \mu_{12i}\theta_{i,r_i} - \mu_{13i}\psi_{i,r_i} - \mu_{14i}\varphi_{i,r_i} - \mu_{15i}V_{a_i,r_i} - \mu_{16i}X_{G_i,r_i} - \mu_{17i}Y_{G_i,r_i} \\ & - \mu_{18i}Z_{G_i,r_i} - \mu_{19i}p_{i,r_i} - \mu_{110i}q_{i,r_i} - \mu 111 i r_{i,r_i} - \mu_{116i}m_{i,r_i} + \mu_{21i}\alpha_{ai,r_i} \\ & + \mu_{22i}\theta_{i,r_i} + \mu_{23i}\psi_{i,r_i} + \mu_{24i}\varphi_{i,r_i} + \mu_{25i}V_{a_i,r_i} + \mu_{26i}X_{G_i,r_i} + \mu_{27i}Y_{G_i,r_i} \\ & + \mu_{28i}Z_{G_i,r_i} + \mu_{29i}p_{i,r_i} + \mu_{210i}q_{i,r_i} + \mu 211 i + \mu_{216i}m_{i,r_i}]\end{aligned} \tag{VI.13}$$

$$\begin{aligned}\dot{p}_{13i} = \; & -[p_{1i}\dot{\alpha}_{ai,m_i} + p_{2i}\dot{\beta}_{ai,m_i} + p_{3i}\dot{\theta}_{i,m_i} + p_{4i}\dot{\psi}_{i,m_i} + p_{5i}\dot{\varphi}_{i,m_i} + p_{6i}\dot{V}_{ai,m_i} + p_{7i}\dot{X}_{G_i,m_i} \\ & + p_{8i}\dot{Y}_{G_i,m_i} + p_{9i}\dot{Z}_{G_i,m_i} + p_{10i}\dot{p}_{i,m_i} + p_{11i}\dot{q}_{i,m_i} + p_{12i}\dot{r}_{i,m_i} + p_{13i}\dot{m}_{i,m_i} - p_0 g_{m_i} \\ & - \mu_{12i}\theta_{i,m_i} - \mu_{13i}\psi_{i,m_i} - \mu_{14i}\varphi_{i,m_i} - \mu_{15i}V_{a_i,m_i} - \mu_{16i}X_{G_i,m_i} - \mu_{17i}Y_{G_i,m_i} \\ & - \mu_{18i}Z_{G_i,m_i} - \mu_{19i}p_{i,m_i} - \mu_{110i}q_{i,m_i} - \mu 111 i r_{i,m_i} - \mu_{116i}m_{i,m_i} + \mu_{21i}\alpha_{ai,m_i} \\ & + \mu_{22i}\theta_{i,m_i} + \mu_{23i}\psi_{i,m_i} + \mu_{24i}\varphi_{i,m_i} + \mu_{25i}V_{a_i,m_i} + \mu_{26i}X_{G_i,m_i} + \mu_{27i}Y_{G_i,m_i} \\ & + \mu_{28i}Z_{G_i,m_i} + \mu_{29i}p_{i,m_i} + \mu_{210i}q_{i,m_i} + \mu 211 i r_{i,m_i} + \mu_{216i}]\end{aligned} \tag{VI.14}$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{H}_{\delta_{xi}} = \quad & -[p_{1i}\dot{\alpha}_{ai,\delta_{xi}} + p_{2i}\dot{\beta}_{ai,\delta_{xi}} + p_{3i}\dot{\theta}_{i,\delta_{xi}} + p_{4i}\dot{\psi}_{i,\delta_{xi}} + p_{5i}\dot{\varphi}_{i,\delta_{xi}} + p_{6i}\dot{V}_{ai,\delta_{xi}} \\
& + p_{7i}\dot{X}_{G_i,\delta_{xi}} + p_{8i}\dot{Y}_{G_i,\delta_{xi}} + p_{9i}\dot{Z}_{G_i,\delta_{xi}} + p_{10i}\dot{p}_{i,\delta_{xi}} + p_{11i}\dot{q}_{i,\delta_{xi}} + p_{12i}\dot{r}_{i,\delta_{xi}} \\
& + p_{13i}\dot{m}_{i,\delta_{xi}} - p_0 g_{\delta_{xi}}] = 0 \\
\mathbf{H}_{\delta_{li}} = \quad & -[p_{1i}\dot{\alpha}_{ai,\delta_{li}} + p_{2i}\dot{\beta}_{ai,\delta_{li}} + p_{3i}\dot{\theta}_{i,\delta_{li}} + p_{4i}\dot{\psi}_{i,\delta_{li}} + p_{5i}\dot{\varphi}_{i,\delta_{li}} + p_{6i}\dot{V}_{ai,\delta_{li}} \\
& + p_{7i}\dot{X}_{G_i,\delta_{li}} + p_{8i}\dot{Y}_{G_i,\delta_{li}} + p_{9i}\dot{Z}_{G_i,\delta_{li}} + p_{10i}\dot{p}_{i,\delta_{li}} + p_{11i}\dot{q}_{i,\delta_{li}} + p_{12i}\dot{r}_{i,\delta_{li}} \\
& + p_{13i}\dot{m}_{i,\delta_{li}} - p_0 g_{\delta_{li}}] = 0 \\
\mathbf{H}_{\delta_{mi}} = \quad & -[p_{1i}\dot{\alpha}_{ai,\delta_{mi}} + p_{2i}\dot{\beta}_{ai,\delta_{mi}} + p_{3i}\dot{\theta}_{i,\delta_{mi}} + p_{4i}\dot{\psi}_{i,\delta_{mi}} + p_{5i}\dot{\varphi}_{i,\delta_{mi}} + p_{6i}\dot{V}_{ai,\delta_{mi}} \\
& + p_{7i}\dot{X}_{G_i,\delta_{mi}} + p_{8i}\dot{Y}_{G_i,\delta_{mi}} + p_{9i}\dot{Z}_{G_i,\delta_{mi}} + p_{10i}\dot{p}_{i,\delta_{mi}} + p_{11i}\dot{q}_{i,\delta_{mi}} + p_{12i}\dot{r}_{i,\delta_{mi}} \\
& + p_{13i}\dot{m}_{i,\delta_{mi}} - p_0 g_{\delta_{mi}}] = 0 \\
\mathbf{H}_{\delta_{ni}} = \quad & -[p_{1i}\dot{\alpha}_{ai,\delta_{ni}} + p_{2i}\dot{\beta}_{ai,\delta_{ni}} + p_{3i}\dot{\theta}_{i,\delta_{ni}} + p_{4i}\dot{\psi}_{i,\delta_{ni}} + p_{5i}\dot{\varphi}_{i,\delta_{ni}} + p_{6i}\dot{V}_{ai,\delta_{ni}} \\
& + p_{7i}\dot{X}_{G_i,\delta_{ni}} + p_{8i}\dot{Y}_{G_i,\delta_{ni}} + p_{9i}\dot{Z}_{G_i,\delta_{ni}} + p_{10i}\dot{p}_{i,\delta_{ni}} + p_{11i}\dot{q}_{i,\delta_{ni}} \\
& + p_{12i}\dot{r}_{i,\delta_{ni}} + p_{13i}\dot{m}_{i,\delta_{ni}} - p_0 g_{\delta_{ni}}] = 0
\end{aligned}
\tag{VI.15}
$$

Annexe 2 : Publications internationales et Participation aux congrès

Articles publiés

1. F. NAHAYO, S. KHARDI, J. NDIMUBANDI, M. HADDOU and M. HAMADICHE, *Two-Aircraft Acoustic Optimal Control Problem. SQP algorithms*, ARIMA, Volume 14 - pp. 101 -123, 2011, published online by INRIA and available at http ://intranet.inria.fr/international/arima/.

2. S. KHARDI, F. NAHAYO and M. HADDOU- *The Trust Region Sequential Quadratic Programing Method Applied to Two-Aircraft Acoustic Optimal Control Problem*, Applied Mathematical Sciences, Volume 5, 2011,N°.40,1953-1976, available at http ://www.m-hikari.com/ams/ams-2011/.

3. F. NAHAYO, S. KHARDI et M. HADDOU - *Optimal control of two-commercial aircraft dynamic system during approach. The noise levels minimization*, General Mathematics Notes, Vol.3 N°.2, April 2011, published online and available at http ://www.geman.in/.

4. F. NAHAYO, M. HADDOU, S. KHARDI and M. HAMADICHE - *Two-Aircraft optimal control problem. The in-flight noise reduction*, EDP Sciences- European Series in Applied and Industrial Mathematics : Proceedings, March 2012, Vol. 35, p. 269-274 Fédération Denis Poisson (Orléans-Tours) et E. Trélat (UPMC), Editors, Article published online by EDP Sciences and available at http ://www.esaim-proc.org or http ://dx.doi.org/10.1051/proc/201235026

5. F. NAHAYO, S. KHARDI and M. HADDOU, *Two-Aircraft Dynamic System on Approach. Flight Path and Noise Optimization*, Applied Mathematical Sciences, Vol. 6, 2012, N^o. 78, p. 3861 - 3880

Articles soumis

M. HADDOU, M.HAMADICHE, S. KHARDI, F. NAHAYO, J. NDIMUBANDI - *A direct methode applied to aircraft optimal control problem on approach. Fourth order Runge-Kutta schemes and Non-linear Interior point Trust Region Optimization solver*, Control and Cybernetics journal, 2012.

Congrès et rapport

1. F. NAHAYO, S. KHARDI, M. HAMADICHE, J. NDIMUBANDI, M. HADDOU - *Réduction du Bruit de deux avions commerciaux en approche par une technique de commande optimale*, $10^{ème}$ Congrès Français d'Acoustique , Lyon-France, 12-16 Avril 2010.
2. F. NAHAYO, S. KHARDI, M. HADDOU, J. NDIMUBANDI and M. HAMADICHE, *Optimal control applied to trajectories minimizing the noise from commercial aircraft*, $5^{ème}$ Conférence Internationale en Recherche Opérationnelle (CIRO'10), Marrakech, May 24-27 2010
3. F. NAHAYO, S. KHARDI, J. NDIMUBANDI, M. HADDOU and M. HAMADICHE, *Two-Aircraft Acoustic Optimal Control Problem. SQP algorithms*, CARI'10, Yamoussoukro-Côte d'Ivoire, Octobre 2010.
4. F. NAHAYO, M. HADDOU, S. KHARDI and M. HAMADICHE - *Two-Aircraft optimal control problem. The in-flight noise reduction*, SMAI, $5^{ème}$ Biennale Française des Mathématiques Appliquées et Industrielles, Guidel, Bretagne - France, 23-27 mai 2011.
5. F. NAHAYO en collaboration avec S. KHARDI, J. NDIMUBANDI, M. HADDOU et M. HAMADICHE - *Les méthodes numériques appliquées en optimisation non-linéaire et en commande optimale*, Rapport IFSTTAR-LTE N ° 0911, Lyon-France, Novembre 2009
6. F. NAHAYO, J. NDIMUBANDI and S. KHARDI, *Two-Aircraft Acoustic Optimal Control Problem : The Trust Region Sequential Quadratic Programming Algorithm, Journées scientifiques* - $50^{ème}$ Anniversaire de la Faculté des Sciences, Université du Burundi, Bujumbura-Burundi, 6 Juillet 2011.
7. S. KHARDI, L. ABDALLAH, E. KONOVALOVA, F. NAHAYO and M. HOUACINE, *Aircraft optimal approach minimizing noise, fuel consumption and pollutant emissions*, ETTAP09 (17^{th} Transport and Air Pollution Symposium - 3^{rd} Environment and Transport Symposium), June 2-4, 2009 Toulouse (France)

Références bibliographiques

[1] S. Redonnet and E. Manoha. *bruit aval de soufflante d'un turboréacteur double-flux.* Onera (2006). 1

[2] D. Martin. *L'analyse des nuisances sonores autour des aéroports.* (Revue technique numéro 58, Mai 2000). 2, 46

[3] A. Peyrat-Armandy. *Les avions des transports modernes et futurs.* (TEKNEA, 1997). 2, 46

[4] M. Ventre. *Les challenges environnementaux pour le transport aérien.* SAFRAN, Un leader technologique international (Septembre 2009). 2, 46

[5] O. I. Zapolozhets and V. I. Tokarev. *Predicted flight procedures for minimum noise impact.* Vol 55, Numéro 2, pp129-149, Elsevier Science Ltd (Great Britain), (Ukraine, 1998). 2

[6] E. Roux. *Modèle de longueur de piste au décollage-atterrissage, avions de transport civil.* SUPAERO-ONERA (p 345, 2006). 2

[7] L. Abdallah. *Minimisation des bruits des avions commerciaux sous contraintes physiques et aérodynamiques.* Thèse de l'UCBL I (Septembre 2007). 3, 11, 22, 46

[8] M. Le Merrer. *Optimisation de trajectoire d'avion pour la prise en compte du bruit dans la gestion du vol.* Thèse de l'ISAE, Département Onera : Commande des systèmes et dynamique du vol, campus SupAero, Toulouse (18 janvier 2012). 3, 135

[9] S. Suzuki T. Tsuchiya and A. Andreeva. *Trajectory optimization for safe, clean and quiet flight.* Dept. of Aeronautics and Astronautics, The University of Tokyo, ENRI International Workshop on ATM/CNS (Japan. (EIWAC 2009)). 3, 133

[10] F. J-P Vormer. *Theoretical and operational aspects of optimal airport arrival trajectories.* Thèse de Technische Universiteit Delft (8 Décembre 2005). 3, 46

[11] Xavier Prats i Menéndez. *Contributions to the optimisation of aircraft noise abatement procedures*. Doctoral thesis of Universitat Politècnica de Catalunya (càtedra abertis Mayo 2011, Barcelona). 3

[12] C. Stoica. *Analyse, représentation et optimisation de la circulation des avions sur une plate-forme aéroportuaire*. Thèse de l'Institut national polytechnique de Toulouse-CNRS (Mai, 2005). 3, 46

[13] J. F.Bonnans and J. Laurent-Varin. *Computation of order conditions for symplectic partioned runge-kutta schemes with application to optimal control*. Numerische Mathematik (Springer-Verlag, September 2005). 3, 22

[14] M. Houacine and S.Khardi. *Gauss Pseudospectral Method for Less Noise and Fuel Consumption from Aircraft operations*. (2010, ISSN 0021-8669). 6

[15] B. Laboratories. *Ampl, a modelling language for mathematical programming*. [en ligne]disponible sur http ://www.ampl.com (2003). 7

[16] D-M. Gay R. Fourer and B-W. Kernigham. *A modelling language for mathematical programming, 2d ed.* Thomson Brooks[en ligne]disponible sur http ://www.ampl.com (2003). 7

[17] T. Plantenga and R. Waltz. *Knitro 5.1 for nonlinear optimization, ziena optimization*. [en ligne]disponible sur http ://www.ziena.com (Inc.May, 2007). 7

[18] J. Nocedal R-H. Byrd and R-A. Waltz. *Knitro : An integrated package for nonlinear optimization*. University of Colorado[en ligne]disponible sur http ://www.ziena.com,http ://www.ampl.com (February, 2006). 7

[19] R-A. Waltz and T-D. Plantenga. *Knitro documentation release 8.0*. Ziena Optimization LLC [en ligne]disponible sur http ://www.ziena.com (November 28, 2011). 7, 33, 34

[20] R-A. Waltz and T-D. Plantenga. *Knitro 7.0 user's manual*. Ziena Optimization, Inc.[en ligne] disponible sur http ://www.ziena.com (September, 2010). 7, 33, 34

[21] A. Fortin. *Analyse numérique pour ingénieurs. Troisième edition*. (2008, ISBN 978-2-553-01427-7). 7

[22] F. Bonans and P. Rouchon. *Analyse et commande des systèmes dynamiques*. Ecole polytechnique, Département de Mathématiques Appliquées, Majeure Mathématiques Appliquées (Septembre 2003). 11

[23] J. P. Demailly. *Analyse numérique et équations différentielles, 3ème édition*. Presses Universitaires de Grenoble (Février 2006). 11

[24] J. C. Gilbert. *Eléments d'optimisation différentiable-théorie et algorithmes*. INRIA Rocquencourt (France, 6 juin 2009). 11, 15, 22

[25] V. Catherine. *Optimisation mécanique, optimisation topologique.* Université de Technologique de Compiègne (France, 2004). 11

[26] R. Dautray and J-L. Lions. *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques.* Masson (Paris, 1985). 11

[27] S.Mottelet. *Optimisation non-linéaire.* Université de Technologie de Campiège (2003). 11

[28] F. Clarke. *Nonsmoth analysis in control theory : a survey.* European control conference and University of Lyon 1, Porto (September 2001). 11, 22

[29] D. Ridzal. *A generalized sequential quadratic programming framework for large-scale optimization.* Department of Computational and Applied Mathematics, Rice University, Houston, Texas (December 7, 2004). 12

[30] A. Barclay and al. *Sqp methods and their application to numerical optimal control problem, report na 97-3.* Department of Mathematics, UNiversity of California (San Diego, USA, 1997). 12

[31] B. Christof and M. Helmut. *Sqp-methods for solving optimal control problems with control and state constraints : adjoint variables, sensitivity analysis and real-time control.* Elsivier Science, J. of Computational and Applied Mathematics (Germany, August 2000, vol. 120, pp85-108). 12

[32] J-C. Culioli. *Introduction à l'optimisation.* Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris (Paris 1994). 13

[33] P. Destunder. *Méthodes numériques pour ingénieurs.* Hermes sciences publications (12-8-2010). 13

[34] P. Faurer. *Analyse numérique, notes d'optimisation.* Ellipses Marketing (1998). 13

[35] P. Borne. *Commande et optimisation des processus.* Technip (17-04-2003). 13

[36] M. Bergounioux. *Optimisation et contrôle des systèmes linéaires, cours et exercices corrigés.* (Dunod, 2002). 14, 15

[37] M. Ouriemchi. *Résolution de problèmes non-linéaires par les méthodes des points intérieurs. théorie et algorithmes.* Thèse de l'Université de Havre (2005). 18

[38] J. S. Wright and J. T. Mathew. *A feasible trust-region sequential quadratic programming algorithm.* Optimization technical report, University of Wisconsin (2002). 21, 69

[39] J. C. GILBERT. *Sqplab- a matlab software for solving nonlinear optimization problems and optimal control problems.* INRIA-Rocquencourt, France (February 2009). 21

[40] A. Ledoux Hermant. *Sur l'algorithme de tir pour résoudre les problèmes de commande optimale avec contraintes sur l'état, thèse de mathématiques appliquées de l'ecole polytechnique.* INRIA (5 Septembre 2008). 22

[41] A. Briani. *Convergence of hamilton-jacobi equations for sequences of optimal control problems.* Universtità di Pisa (Italy,). 22

[42] T. Haberkorn. *Transfert orbital à poussée faible avec minimisation de la consommation : résolution par homotopie différentielle.* Thèse de l'Institut National Polytechnique de Toulouse (Toulouse 18 octobre 2004). 22

[43] E. Trélat. *Contôle optimal-théorie et applications.* Mathématiques concrètes, ed. Vuibert (France, Mai 2005). 22, 28, 30

[44] F. Bonnans. *Systèmes dynamiques, optimisation et commande optimale.* INRIA (Rocquencourt, 2001). 22

[45] M. Haddou. *Introduction à la théorie du contrôle.* Université d'Orléans (Janvier 2004). 22, 26

[46] J. LAURENT-VARIN. *Calcul des trajectoires optimales de lanceurs spatiaux réutilisables par une méthode de point intérieur.* (Novembre 2005). 24, 126, 130

[47] E. Trelat. *Contrôle optimal.* Cours de Master Mathématiques, Université d'Orléans (Année académique 2007/2008). 26

[48] M. Xavier-Jonsson. *Méthodes des points intérieurs et de régions de confiance en optimisation non-linéaire et application à la conception des verres ophtalmiques progressifs.* Thèse de l'Université Paris IV (2002). 33

[49] S. Khardi and L. Abdallah. *Optimization approaches of aircraft flight path reducing noise : comparison of modeling methods.* Applied acoustics, ELSEVIER (November 2011). 39

[50] J-L. Boiffier. *The dynamics of flight, the equations.* SUPAÉRO(Ecole Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace) et ONERA-CERT (Toulouse 25 Janvier 1999). 39, 40

[51] J-L. Boiffier. *Dynamique de vol de l'avion.* SupAéro, Départements des Aéronefs (Toulouse-Novembre 2001). 39, 48

[52] K. Blin. *Stochastic conflict detection for air traffic management.* Eurocontrol Experimental centre Publications Office (France, April 2000). 40, 46

[53] Ruppli R. *Algèbre linéaire, idées et méthodes.* (2002). 40

[54] E. Eraydin. *Domaine de validité des équations de la dynamique de vol : Découplage.* Thèse de l'Ecole Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace, ONERA-CERT (1994). 43

[55] E. Roux. *Pour une approche analytique de la dynamique du vol.* Thèse, SUPAERO-ONERA (Novembre 2005). 45, 47, 139, 151

[56] E. Roux. *Avions civils à réaction, plan 3 vues et données caractéristiques.* Editions Elodies Roux (p 658, 2007). 45

[57] S. Khardi L. Abdallah and M. Haddou. *Optimization of operational aircraft parameters reducing noise emission.* Laboratoire de Mathématiques et Applications, Physique Mathématique d'Orléans-Laboratoire Transport et Environnement(INRETS) (France, 2008). 46

[58] E. Mary and M-M. Harris. *How do we describe aircraft noise ? [en ligne] disponible sur www.fican.org.* FICAN. 46

[59] D.E. Groesbeck R. J. Stone and C.L. Zola. *An improved prediction method for noise generated by conventional profile coaxial jets.* NASA TM - 82712, AIAA-81-1991 (1981). 46

[60] DGAC. *Mémento à l'usage des utilisateurs des procédures d'approche et de départ aux instruments.* Rapport de la DGAC, 5ême édition (Août 1995). 47

[61] DGAC. *Méthodes et minimums de séparations des aéronefs aux procédures.* Rapport de la DGAC (Fevrier 2009). 47

[62] H. Sors. *Séparation et contrôle aérien.* International Virtual Aviation Organization[en ligne] disponible sur http ://academy.ivao.aero/ (15 octobre 2008). 47

[63] O. Dominique. *Cisaillement de vent ou windshear.* http ://www.aviation-fr.info (2008). 47

[64] Ifrance. *Fiches techniques, historiques et photos d'avions a300-600, a300-600r [en ligne]disponible sur http ://www.ifrance.com.* Ifrance. 48

[65] J. Colestos I. Chryssoverghi and B. Kokkinis. *Classical and relaxed optimization methods for optimal control problems.* International Mathematical Forum (2-2007 $N°$ 30, pp 1477-1498). 49

[66] F. Nahayo and S. Khardi. *Les méthodes numériques appliquées en optimisation non-linéaire et en commande optimale.* Rapport LTE $N°$: 0911 (Novembre 2009). 49

[67] F. A. C. C. Fontes. *Optimisation-based control of constrained nonlinear systems.* A thesis submitted for the degree of Doctor of Philosophy of the University of London and for

the Diploma of Membership of the Imperial College (Centre for Process Systems Engineering and Department of Electrical and Electronic Engineering Imperial College of Science, Technology and Medicine, London SW7 2BY, August 1999). 123

[68] A. Jardin. *Contribution à une méthodologie de dimensionnement des systèmes mécatroniques : analyse structurelle et couplage à l'optimisation dynamique.* Thèse de l'INSA de Lyon, EEA (15 janvier 2010). 123

[69] C. Park and D. J. Scheeres. *Solutions of optimal feedback control problems with general boundary conditions using hamiltonian dynamics and generating functions.* Proceeding of the 2004 American Control Conference (Boston, Massachusetts June 30 - July 2, 2004). 125

[70] I. Michael Ross and F. Fahroo. *A persepective on methods for trajectory opimization.* American Institute of Aeronautics and Astronautics, Naval Postgraduate School, Monterey, CA 93943 (2003). 125

[71] W. W. Hager. *Runge-kutta methods in optimal control and the transformed adjoint system.* Department of Mathematics, University of Florida, Gainesville , FL 32611, Numerische Mathmatic (September 1999). 126, 130

[72] P. Chartier. *Méthodes numériques pour les équations différentielles ordinaires et algébriques avec application aux systèmes hamiltoniens.* Habilitation à Diriger des Recherches, Université de Rennes 1 Institut Mathématique de Rennes (21 janvier 2000). 127

[73] G. Vilmart. *Etude d'intégrateurs géométriques pour des équations diffrentielles.* Thèse de l'Univesrité de Genève- Université de Rennes 1 (11 octobre 2011). 127

[74] H. Harvey Hubbard. *Aeroacoustics of flight vehicles, theory and practices.* Volume 1 : Noise sources and Volume 2 : Noise Control. NASA Langley Research Center (Hampton, Virginia 1994). 134, 145, 159

[75] F. Nahayo S. Khardi and M. Haddou. *Optimal control of two-commercial aircraft dynamic system during approach. the noise levels minimization.* General Mathematics Notes, Vol.3 N°.2 (April 2011). 135

[76] F. Nahayo S.Khardi J.Ndimubandi M.Haddou and M.Hamadiche. *Two-aircraft acoustic optimal control problem. sqp algorithms.* ARIMA , Ed. INRIA, Vol.14., pp.101-123 (2011). 135, 145

[77] F. Nahayo M.Haddou S.Khardi M.Hamadiche and J.Ndimubandi. *Two-aircraft optimal control problem. the in-flight noise reduction.* Journal of the European Series in Applied and Industrial Mathematics (ESAIM). Ed. EDP Sciences-ESAIM (Cambridge University press, USA) (Mars, 2012). 135, 145

[78] F. Nahayo S. Khardi and M. Haddou. *The trust region sequential quadratic programming method applied to two-aircraft acoustic optimal control problem.* Applied Mathematical Sciences, Vol.5, No.40, pp.1953-1976 (2011, ISSN 1312-885X). 135, 145

[79] M. Hamadiche. *Elastic wing response's to an incoming gust.* International journal of Multiphysics. Vol 1, Number 2. p.153-174 (2007). 145

[80] S. Khardi and Lina Abdallah. *Optimization approaches of aircraft flight path reducing noise. comparison of modeling methods.* Applied acoustics, Vol.73, Issue 4, 291-301 (2012). 151

[81] O. Konovalova S. Khardi, Lina Abdallah and M. Houacine. *Optimal approach minimizing aircraft noise and fuel consumption.* Acta Acoustica united with Acoustica, Vol.96 N.1,pp68-75(8) (2010). 151