2024-04

Calcul variationnel aux -différences

Ndagijimana, Livingstone

UB, FS

UNIVERSITE DU BURUNDI
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES
CENTRE DE RECHERCHE EN MATHEMATIQUES ET PHYSIQUE

CALCUL VARIATIONNEL AUX β-DIFFERENCES

Par :

Livingstone NDAGIJIMANA

Mémoire présenté et défendu publiquement en vue de l'obtention du Diplôme de Master en Mathématiques Fondamentales et Appliquées.
Option : Mathématiques Fondamentales et Appliquées

Sous la direction de :
Pr Gaspard BANGEREZAKO

Bujumbura, Avril 2024

Les membres du Jury

Pr François NDAYIRAGIJE (**Président**)

Dr Denis NKURUNZIZA (**Secrétaire**)

Pr Gaspard BANGEREZAKO (**Directeur**)

Prof. Servat NYANDWI (**Membre**)

Dédicace

A Dieu le tout puissant ;

A mes parents ;

A mes frères et sœurs ;

A toute ma famille ;

A mes amis.

Remerciements

Je tiens à remercier tous ceux qui ont contribué à la réalisation de ce travail.

Mes sincères remerciements vont à mon directeur de mémoire Professeur Gaspard BANGEREZAKO, qui, malgré ses nombreuses activités a accepté de diriger ce travail. Sa disponibilité, sa patience et les conseils qu'il m'a prodigués m'a été beaucoup utile pour arriver à la réalisation de ce travail.

Je tiens également à remercier tous les membres du jury qui ont lu notre travail avec intérêt et proposé des corrections et autres ajouts en vue d' enrichir le travail, sans oublier mes camarades et amis, avec qui j'ai appris beaucoup de choses et partagé les meilleurs moments de mon parcours universitaire.

Mes sincères remerciements vont à mes chers parents qui m'ont envoyé à l'école et qui se sont donnés corps et âme pour que j'arrive où je suis aujourd'hui. J'espère juste vous apporter un peu de satisfaction et de fierté par cette réalisation personnelle, qui n'est au fond qu'une étape d'une grande aventure : la vie.

Enfin, je tiens également à remercier toute ma famille qui m'a toujours soutenu jusqu'à maintenant.

Résumé

Nous développons un calcul variationnel aux problèmes d'extremum conditionnel basé sur l'opérateur général aux β-différences

$$D_\beta f(t) = \frac{f(\beta(t)) - f(t)}{\beta(t) - t}, \quad \beta(t) \neq t$$

introduit par Hamza et Al [2].

En particulier, nous obtenons des conditions d'optimalité pour des problèmes variationnels généralisés tels que le β-problème isopérimétrique, le β-problème de Lagrange, et le β-problème de contrôle optimal obtenus pour le calcul aux différences et aux q-différences.

Mots-clés : β-Calcul variationnel ; β-Équation d'Euler-Lagrange ; β-problème isopérimétrique ; β-problème de Lagrange ; β-problème de contrôle optimal et β-système de Hamilton.

Abstract

We develop a variational calculus for condional extremum problems based on the general β-difference operator

$$D_\beta f(t) = \frac{f(\beta(t)) - f(t)}{\beta(t) - t}, \quad \beta(t) \neq t$$

introduced by Hamza et al [2].
In particular, we obtain optimality conditions for generalized variational problems such as the β-isopermetric problem, the β-Lagrange problem and the β-optimal control problem obtained for the difference and q-difference calculus.

Keywords : β-Variationnal calculus ; β-Euler–Lagrange equation ; β-isoperimetric problem ; β-Lagrange problem ; β-optimal control problem and β-Hamilton system.

Table des matières

Avant-propos

Ce mémoire rentre dans le cadre de l'obtention du diplôme de master en mathématiques fondamentales et appliquées. Il étudie le calcul variationnel aux β-différences.

Les conditions d'optimalité pour des problèmes variationnels généralisés tels que le β-problème isopérimétrique, le β-problème de Lagrange, et le β-problème de contrôle optimal pour le calcul aux différences et aux q-différences ont été obtenus.

Ce mémoire est d'importance car il généralise le calcul variationnel classique, basée sur la dérivée et l'intégrale classique dont le premier est le calcul variationnel classique basé sur la dérivée aux différences et le deuxième est le calcul variationnel basé sur la dérivée aux q-différences.

Introduction

Dans ce travail, nous faisons une nouvelle généralisation du calcul variationnel classique, basée sur la dérivée et l'intégrale classique.
La première généralisation du calcul variationnel classique consistait au calcul variationnel basé sur la dérivée aux différences définie dans [11] :

$$Df(t) = f(t+1) - f(t). \tag{1}$$

La deuxième généralisation était basé sur la dérivée aux q-différences définie dans [10] :

$$D_q f(t) = \frac{f(qt) - f(t)}{qt - t}. \tag{2}$$

Une troisième généralisation est basée sur la dérivée aux q-différences non uniformes définie dans [9] :

$$Df(x(z)) = \frac{f(x(q^{\frac{1}{2}}z)) - f(x(q^{-\frac{1}{2}}z))}{x(q^{\frac{1}{2}}z) - x(q^{-\frac{1}{2}}z)}, x(z) = \frac{z + z^{-1}}{2}, z = q^s. \tag{3}$$

Notre travail consiste en une généralisation qui regroupe les deux premières et est basée sur la dérivée aux β-différences

$$D_\beta f(t) = \frac{f(\beta(t)) - f(t)}{\beta(t) - t} \tag{4}$$

de sorte que si β (t) = t + 1, elle apporte à la première généralisation et si β(t) = qt, elle apporte à la deuxième.

Notre travail est composé de trois chapitres : le premier traite le calcul aux β-différences dans le but d'introduire le deuxième et le troisième chapitre. Le deuxième chapitre traite les équations aux β-différences et le troisième chapitre qui est la contribution de ce mémoire parle du calcul variationnel aux β-différences.

Chapitre 1

Calculs aux β-différences

Dans ce chapitre, nous introduisons l'opérateur aux β-différences défini par :

$$D_\beta f(t) = \frac{f(\beta(t)) - f(t)}{\beta(t) - t} \tag{1.1}$$

pour tout t avec $\beta(t) \neq$ t et D_βf(t)=$f'(t)$ quand $\beta(t) =$ t à condition que $f'(t)$ existe dans le sens habituel. Ici, β : I$\longrightarrow$ I est une fonction continue strictement croissante, et f est une fonction arbitraire définie, en général, sur un sous-ensemble I $\subset \mathbb{R}$ avec $\beta(t) \in I$ pour tout t $\in$ I.

Tout au long de ce travail, X est un espace de Banach de norme $\|.\|$, et nous le désignons par

$$\beta^k(t) := \underbrace{\beta \circ \beta \cdots \circ \beta(t)}_{kfois} \quad et \quad \beta^{-k}(t) := \underbrace{\beta^{-1} \circ \beta^{-1} \cdots \circ \beta^{-1}(t)}_{kfois},$$

$k \in \mathbb{N}_0 \bigcup\{0\}$ où $\mathbb{N}$ est l'ensemble des nombres naturels. Par commodité β^0(t) = t pour tous t $\in$ I.

La fonction générale β peut être linéaire ou non linéaire. Il existe alors de nombreuses types selon le nombre de ses points fixes dans I. Deux classes de β peuvent être considérées[4].

La première classe de β est la famille de toute fonction β qui a un unique point fixe $s_0 \in$ I satisfaisant l'inégalité suivante :

$$(t - s_0)(\beta(t) - t) \leqslant 0 \quad pour\ tout \quad t \in I.$$

La deuxième classe de β est la famille de toute fonction β qui possède un unique point fixe $s_0 \in I$ et satisfaisant l'inégalité suivante :

$$(t - s_0)(\beta(t) - t) \geqslant 0 \qquad pour\ tout \quad t \in I.$$

Les opérateurs aux différences de Hahn et Jackson [19, 8] sont des formes spéciales linéaires d'un opérateur aux différences général D_β lorsque β(t) = t + 1 et β(t) = qt, q $\in$ (0,1), respectivement. Ces fonctions appartiennent dans la première classe de β définie ci-haut.

De plus, la fonction β(t) = t + 1, appartient dans la deuxième classe.

Dans l'ensemble de ce travail, nous considérons toutes les fonctions β appartenant à la première classe et donnons une analyse rigoureuse du calcul basé sur D_β . Dans cette classe, le mouvement de la séquence $\{\beta^k(t)\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ est vers s_0 . Chaque choix de la fonction β donne un nouvel opérateur aux différences. Ainsi, nous pouvons obtenir une large classe d'opérateurs aux différences.

L'avantage de cette étude est qu'elle aide et permet d'éviter les répétitions dans la preuve des résultats une fois pour l'opérateur aux q-différences de Jackson, une fois pour l'opérateur aux différences de Hahn et une fois pour tout autre opérateur aux différences basé sur le modèle D_β.

Nous organisons ce chapitre comme suit. Dans la section 1, nous introduisons la β-dérivée et prouvons ses principales propriétés, notamment, la règle de la chaîne, la formule de Leibniz et le théorème de la valeur moyenne. Dans la section 2, nous introduisons l'intégrale et établissons le théorème fondamental du β-calcul.

1.1 β-Différentiation

Supposons que la fonction β n'ait qu'un seul point fixe $s_0 \in I$ et satisfait la condition suivante :

$$(t - s_0)(\beta(t) - t) \leqslant 0, \forall t \in I, \tag{1.2}$$

où l'égalité n'a lieu que si t = s_0. Ici, I est supposé être un intervalle de la droite réelle. Dans ce qui suit, nous introduisons deux lemmes importants pour prouver nos principaux résultats.

Lemme 1.1 : Les affirmations suivantes sont vraies.
(i) La séquence de fonctions $\{\beta^k(t)\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ converge uniformément vers la fonction constante $\hat{\beta}(t) := s_0$ sur chaque intervalle compact J $\subseteq$ I contenant s_0.
(ii) La série $\sum_{k=0}^{\infty} |\beta^k(t) - \beta^{k+1}(t)|$ est uniformément convergente vers $|t - s_0|$ sur chaque intervalle compact J $\subseteq$ I contenant s_0.

Preuve
(i) Soit J = [a, b], $s_0 \in$ J. Si t $\in [s_0, b]$, alors la condition (1.2) implique $\beta^{k+1}(t) \leqslant \beta^k(t)$ pour tout $k \in \mathbb{N}_0$. Ainsi, la séquence $\{\beta^k(t)\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ est décroissante jusqu'à la fonction constante $\hat{\beta}(t) = s_0$. D'après le théorème de Dini, $\{\beta^k(t)\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ converge uniformément vers la fonction constante $\hat{\beta}(t)$ sur l'intervalle $[s_0, b]$. De même, on peut prouver sa convergence uniforme sur [a, s_0]. Par conséquent, la séquence $\{\beta^k(t)\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ converge uniformément sur l'intervalle J = [a, b].

(ii) On applique le théorème de Dini à $S_n(t) = \sum_{k=0}^{n}(\beta^k(t) - \beta^{k+1}(t))$, n = 1, 2, . . . à la fois sur [s_0 , b] et [a, s_0] pour obtenir le résultat souhaité.

$\boxdot$

Lemme 1.2 ([2]) : Si f : I $\longrightarrow$ X est continue en s_0 , alors la suite $\{f(\beta^k(t))\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ converge uniformément à f(s_0) sur tout intervalle compact J $\subseteq$ I contenant s_0 .

Théorème 1.3 : Si f : I $\longrightarrow$ X est continue en s_0 , alors la série $\sum_{k=0}^{\infty} \|(\beta^k(t)-\beta^{k+1}(t))f(\beta^k(t))\|$ est uniformément convergente sur tout intervalle compact J $\subseteq$ I contenants_0

Preuve : Soit J $\subseteq$ I un intervalle compact contenant s_0 . D'après le lemme 1.2, il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\|f(\beta^k(t)) - f(s_0)\| < 1$, $\forall$ t $\in$ J, k$\geqslant$ k_0. Alors $\|f(\beta^k(t))\| < 1 + \|f(s_0)\|$ pour k$\geqslant$ k_0 et $t \in$ J, ce qui implique à son tour que :

$$|(\beta^k(t)-\beta^{k+1}(t))| \parallel f(\beta^k(t))\| \leqslant |(\beta^k(t)-\beta^{k+1}(t))|(1+\parallel f(s_0)\|) \tag{1.3}$$

$\forall$ t $\in$ J, k $\geqslant$ k_0.

Considérons les deux séquences

$$D_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \|(\beta^k(t)-\beta^{k+1}(t))f(\beta^k(t))\| \tag{1.4}$$

et

$$C_n(t) = \sum_{k=0}^{n} |(\beta^k(t)-\beta^{k+1}(t))|(1+\|f(s_0)\|). \tag{1.5}$$

D'après le lemme 1.1(ii), $C_n(t)$ converge uniformément vers | $t - s_0$ | (1+ $\parallel f(s_0) \parallel$) sur J. Par le critère de Cauchy, étant donné $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\parallel C_n(t) - C_m(t) \parallel < \epsilon, \forall t \in J, n \geqslant m \geqslant n_0. \tag{1.6}$$

En utilisant (1.3) et (1.6), on a

$\parallel D_n(t) - D_m(t) \parallel \leqslant \parallel C_n(t) - C_m(t) \parallel < \epsilon, \forall n \geqslant m \geqslant max\{n_0, k_0\}$.
C'est pourquoi $\sum_{k=0}^{\infty} \parallel (\beta^k(t)-\beta^{k+1}(t))f(\beta^k(t) \parallel$ est uniformément convergente sur J .

$\square$

Dans ce qui suit, nous présentons un exemple de forme spéciale de β avec un seul point fixe $s_0 \in$ I et satisfait à la condition (1.2).

Exemple 1.4 : β(t) := ln t + 1 qui est une fonction non-linéaire continue strictement croissante définie sur I = [1, +∞[.
Le seul point fixe est $s_0 = 1$. On voit que β^k (t) = ln β^{k-1} (t) + 1, $\beta^{-1}(t) = e^{t-1}$ et pour t $\in$ I, $lim_{k\longrightarrow\infty}$ β^k(t) = 1, $lim_{k\longrightarrow\infty}\beta^{-k}(t) = \infty$.

Maintenant, nous introduisons l'opérateur aux β-différences comme suit.

Définition 1.5 : Pour une fonction f : I $\longrightarrow$ X, nous définissons l'opérateur aux β-différences de f comme :

$$D_\beta f(t) = \begin{cases} \frac{f(\beta(t))-f(t)}{\beta(t)-t}, t \neq s_0 \\ f^{'}(s_0), t = s_0 \end{cases} \tag{1.7}$$

à condition que la dérivée ordinaire $f^{'}$ existe pour t = s_0 . Dans ce cas, on dit que D_β est la β-dérivée de f en t. On dit que f est β-différenciable sur I si $f^{'}$ (s_0) existe.

Dans ce qui suit, nous énonçons quelques propriétés de l'opérateur aux β-différences.

(i) D_β est un opérateur linéaire.
(ii) Si f est β-différentiable en t, alors f($\beta(t)$) = f (t) + $(\beta(t) - t)D_\beta f(t)$.
(iii) Si f est β-différentiable, alors f est continue en s_0 .

Théorème 1.6 : Supposons que $f : I \longrightarrow X$ et $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions β-différentiables en t $\in I$. Alors :
(i) Le produit fg :$I \longrightarrow X$ est β-différentiable en t et

$$\begin{aligned} D_\beta(fg)(t) &= f(\beta(t))D_\beta g(t) + g(t)D_\beta f(t) \\ &= g(\beta(t))D_\beta f(t) + f(t)D_\beta g(t), \end{aligned}$$

(ii) $\frac{f}{g}$ est β-différentiable en t et

$$D_\beta(\frac{f}{g})(t) = \frac{g(t)D_\beta f(t) - f(t)D_\beta g(t)}{g(t)g(\beta t)}, g(t)g(\beta t) \neq 0.$$

Exemples 1.7

1.$D_\beta t^n = \sum_{k=0}^{n-1}(\beta(t))^{n-k-1}t^k, t \in I$,$n \geqslant 1$.
2. Pour $t \neq 0, D_\beta \frac{1}{t} = -\frac{1}{t\beta(t)}, t \in I, \beta(t) \neq 0$.
3. Si f : I $\longrightarrow \mathbb{R}^2$ est définie par f (t) = $(t^2, 2t)$ et β(t) = $\frac{1}{2}$ t + 1, alors

$$D_\beta f(t) = \frac{(-\frac{3}{4}t^2 + t + 1, 2 - t)}{1 - \frac{1}{2}t}.$$

Lemme 1.8 : Posons que f : I $\longrightarrow$ X est β-différentiable et D_β f (t) = 0 pour tout t $\in$ I, alors f(t) = f (s_0), t $\in$ I.

Preuve :
Puisque $D_\beta f(t) = 0$, t $\in$ I, alors f (t) = f (β(t)), t $\in$ I. Par conséquent, f (t) = f (β^k (t)), t $\in$ I et k $\in \mathbb{N}_0$. Prenons k $\longrightarrow \infty$ et en utilisant la continuité de f en s_0 , on obtient f (t) = f(s_0) pour t $\in$ I.

□

Définition 1.9 : Soit $s_0 \in$ [a, b] $\subset$ I. On définit le β-intervalle par

$$[a,b]_\beta = \{\beta^k(a); k \in \mathbb{N}_0\} \cup \{\beta^k(b); k \in \mathbb{N}_0\} \cup \{s_0\},$$

et la classe $[c]_\beta$ pour tout point c $\in$ I par

$$[c]_\beta = \{\beta^k(c); k \in \mathbb{N}_0\} \cup \{s_0\}.$$

Enfin, pour tout ensemble A $\subset \mathbb{R}$, on définit $A^* = A \setminus \{s_0\}$.

Dans le lemme suivant, [a, b] est un sous-intervalle compact de I et $s_0 \in [a,b]$.

Lemme 1.10 : Soit f : [a, b] $\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue en s_0. Les affirmations suivantes sont vraies :
(i) D_β f(t) $>$ 0 pour tout t $\in [a,b]^*_\beta$ si et seulement si f est strictement croissante sur $[a,b]_\beta$.
(ii) D_β f (t) $<$ 0 pour tout t $\in [a,b]^*_\beta$ si et seulement si f est strictement décroissante sur $[a,b]_\beta$.

Preuve :
Nous prouvons uniquement la première partie et la seconde peut être montrée de la même manière. Pour la preuve de (i), supposons que D_β f (t)$>$ 0 pour tout t $\in [a,b]^*_\beta$. Nous pouvons supposer que $s_0 \notin \{a,b\}$. Nous avons a $< \beta(a) < \beta^2(a) < ... < \beta^k(a) < ... < s_0 < ... < \beta^m(b) < ... < \beta(b) < b$.
Ensuite, en utilisant la continuité de f en s_0, nous concluons que f(a)<f (β(a)) $< f(\beta^2(a)) < ... < f(\beta^k(a)) < ... < f(s_0) < ... < f(\beta^m(b)) < ... < f(\beta(b)) < f(b)$. Cela implique que f est strictement croissante sur $[a,b]_\beta$. Inversement, supposons que f soit strictement croissante sur $[a,b]_\beta$ pour tout k $\in \mathbb{N}_0$. Si β^{k+1} (t) $> \beta^k$ (t), alors f (β^{k+1} (t)) $> f(\beta^k(t))$, et si β^{k+1} (t) $< \beta^k$, alors f($\beta^{k+1}(t)) < f(\beta^k(t))$. Par conséquent, D_β f (t) $>$ 0, $\forall$ t $\in [a,b]^*_\beta$.

□

L'exemple suivant montre que la règle de chaîne ordinaire ne s'applique pas aux β-calculs ;

Exemple 1.11 : Considérons les fonctions f (t) = t^2 et g(t) = 3t. Alors

$D_\beta(f \circ g)(t)$= 9 (β(t) + t), tandis que
$D_\beta f(g(t)) D_\beta g(t)$ = 3 (β(3t) + 3t).

Cela signifie que

$$D_\beta(f \circ g)(t) \neq D_\beta f(g(t)) D_\beta g(t).$$

Le théorème suivant nous donne une formule analogue de la règle de chaîne pour le β-calcul.

Théorème 1.12 : Soit g : I $\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et β-différentiable et f : $\mathbb{R} \longrightarrow X$ est continue-ment différentiable. Alors il existe un point c entre β(t) et t tel que

$$D_\beta(f \circ g)(t) = f^{'}(g(c))D_\beta g(t). \tag{1.8}$$

Preuve : Le cas t = s_0 est la règle de chaîne habituelle. Le cas t $\neq s_0$ avec g(β(t)) = g(t) est évident puisque les deux côtés de (1.8) sont nuls. Pour t $\neq s_0$ avec g(β(t)) $\neq g(t)$, on a

$$\begin{aligned} D_\beta(f \circ g)(t) &= \frac{(f \circ g)(\beta(t)) - (f \circ g)(t)}{\beta(t) - t} \\ &= \frac{f(g(\beta(t))) - f(g(t))}{g(\beta(t)) - g(t)} \frac{g(\beta(t)) - g(t)}{\beta(t) - t}. \end{aligned}$$

D'après le théorème des valeurs moyennes, il existe un nombre réel η entre g(β(t)) et g(t) tel que

$$\frac{f(g(\beta(t))) - f(g(t))}{g(\beta(t)) - g(t)} = f^{'}(\eta).$$

Puisque g est une fonction continue, alors il existe c entre β(t) et t tel que g(c) = η. Ainsi

$$D_\beta(f \circ g)(t) = f^{'}(g(c))D_\beta g(t).$$

$\square$

Dans le théorème suivant, nous obtenons la formule de la nième β-dérivée du produit fg, où l'une d'elles est une fonction à valeur réelle et l'autre est une fonction à valeur vectorielle.

Pour n $\in \mathbb{N}$, soit $S_k^{(n)}$ l'ensemble de toutes les chaînes possibles de longueur n contenant k fois β et n - k fois D_β . On note $f^{D_\beta \beta}$ (t) = $(D_\beta f)(\beta(t))$ et $f^{\beta D_\beta}(t) = D_\beta(f(\beta(t)))$, et f^{Γ} est définie de la même manière pour $\Gamma \in S_k^{(n)}$.

Si f est n fois β-différentiable sur I, alors les dérivées d'ordre supérieur de f sont définies par

$D_\beta^n f = D_\beta(D_\beta^{n-1} f)$, $n \in \mathbb{N}_0$ où $D_\beta^0 f = f$.

Enfin, on peut voir que

$(\sum_{\Gamma \in S_k^{(n)}} f^{\Gamma D_\beta})(t) + (\sum_{\Gamma \in S_{k-1}^{(n)}} f^{\Gamma_\beta})(t) = (\sum_{\Gamma \in S_k^{(n+1)}} f^{\Gamma})(t).$

Théorème 1.13 (Formule de Leibniz) : Si f et g sont des fonctions n fois β-différentiables, alors nous avons :

$$D_\beta^n(fg)(t) = \sum_{k=0}^{n}(\sum_{\Gamma\in S_k^{(n)}} f^{\Gamma})(t)D_\beta^k g(t), t \neq s_0. \tag{1.9}$$

Preuve : On prouve par récurrence sur n. D'après le théorème 1.6 (i), l'énoncé est vrai pour n =1. Supposons que (1.9) soit vrai pour n = m. Maintenant, nous prouvons que c'est vrai pour n = m + 1. Nous avons

$D_\beta^{m+1}(fg)(t) = D_\beta[\sum_{k=0}^{m}(\sum_{\Gamma\in S_k^{(m)}} f^{\Gamma})(t)D_\beta^k g(t)]$

$= \sum_{k=0}^{m}(\sum_{\Gamma\in S_k^{(m)}} D_\beta f^{\Gamma})(t)D_\beta^k g(t) + \sum_{k=0}^{m}(\sum_{\Gamma\in S_k^{(m)}} f^{\Gamma})(\beta(t))D_\beta^{k+1} g(t)$

$= \sum_{k=0}^{m}(\sum_{\Gamma\in S_k^{(m)}} D_\beta f^{\Gamma})(t)D_\beta^k g(t) + \sum_{k=1}^{m+1}(\sum_{\Gamma\in S_{k-1}^{(m)}} f^{\Gamma})(\beta(t))D_\beta^{k} g(t)$

$=(\sum_{\Gamma\in S_0^{(m)}} D_\beta f^{\Gamma})(t)g(t) + \sum_{k=1}^{m}(\sum_{\Gamma\in S_k^{(m)}} D_\beta f^{\Gamma})(t)D_\beta^k g(t)$
$+ (\sum_{\Gamma\in S_m^{(m)}} f^{\Gamma})(\beta(t))D_\beta^{m+1} g(t) + \sum_{k=1}^{m}(\sum_{\Gamma\in S_{k-1}^{(m)}} f^{\Gamma})(\beta(t))D_\beta^{k} g(t)$

$= (\sum_{\Gamma\in S_0^{(m)}} D_\beta f^{\Gamma})(t)g(t) + (\sum_{\Gamma\in S_m^{(m)}} f^{\Gamma})(\beta(t))D_\beta^{m+1} g(t)$
$+ \sum_{k=1}^{m}[(\sum_{\Gamma\in S_k^{(m)}} f^{\Gamma D_\beta})(t) + (\sum_{\Gamma\in S_{k-1}^{(m)}} f^{\Gamma\beta})]D_\beta^k g(t)$

$=(\sum_{\Gamma\in S_0^{(m+1)}} f^{\Gamma})(t)g(t) + (\sum_{\Gamma\in S_{m+1}^{(m+1)}} f^{\Gamma})(t)D_\beta^{m+1} g(t)$
$+ \sum_{k=1}^{m}(\sum_{\Gamma\in S_k^{(m+1)}} f^{\Gamma})(t)D_\beta^k g(t)$

$= \sum_{k=0}^{m+1}(\sum_{\Gamma\in S_k^{(m+1)}} f^{\Gamma})(t)D_\beta^k g(t).$

C'est pourquoi (1.9) est valable pour tout n $\in \mathbb{N}$.

□

Le théorème de Rolle n'est pas en général vrai par rapport à la β-dérivative comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 1.14 : La fonction f(t) = $4t^2$ - 9t, définie dans l'exemple 1.12, est ordinairement différentiable et donc β-différentiable sur $\mathbb{R}$ par rapport à β(t) = $\frac{1}{2}$ t + $\frac{3}{4}$. Clairement, f (1) = f (β(1)), mais f(t) $\neq$ f (β(t)) à l'intérieur de l'intervalle [1, β(1)], c'est-à-dire qu'il n'y a pas de points compris entre 1 et β(1) tels que D_β f (t) = 0. En fait, f(t) = f (β(t)) seulement en 1 et $\frac{3}{2}$. Cela implique l'échec du théorème de Rolle par rapport à la β-dérivée.

Théorème 1.15 (Théorème de la valeur moyenne) : Supposons que f , g : I $\longrightarrow$ X sont des fonctions β-différentiables sur I. Alors

$$\|f(y)-f(x)\| \leqslant sup_{t\in I}\|D_\beta f(t)\|(y-x) \tag{1.10}$$

pour chaque x, y $\in [a,b]_\beta$, $x < s_0 < y$, où a, b $\in$ I, a $\leqslant$ b.

1.2 β-Intégration

On dit que G est une β-primitive de la fonction g : I $\longrightarrow$ X si D_β G(t) = g (t) pour t $\in$ I.

Définition 1.16 : On note Ω l'espace vectoriel de toutes les fonctions g : I $\longrightarrow$ X qui sont continues à s_0 et disparaissent à s_0 . On définit l'opérateur $T_\beta : \Omega \longrightarrow \Omega$ par :
$T_\beta(g)(t) = g(\beta(t))$, t $\in$ I.

Soit Y = $\{g \in \Omega : \sum_{k=0}^{\infty} g(\beta^k(t))$ est uniformément convergente sur I$\}$.

Nous avons besoin du lemme suivant pour prouver le théorème à suivre.

Lemme 1.17 : L'opérateur A : Y $\longrightarrow$ Ω défini par

$$A(g)(t) = \sum_{k=0}^{\infty} g(\beta^k(t)) \tag{1.11}$$

est l'inverse de l'opérateur I - T_β .

Preuve : $(I-T_\beta)^{-1}$g(t) = $\sum_{k=0}^{\infty} T_\beta^k g(t)$ = $\sum_{k=0}^{\infty} g(\beta^k(t))$ = A(g)(t).

$\square$

Théorème 1.18 : Supposons que g : I $\longrightarrow$ X est continue en s_0 . Alors la fonction G définie par

$$G(t) = \sum_{k=0}^{\infty}(\beta^k(t)-\beta^{k+1}(t))g(\beta^k(t), t \in I \tag{1.12}$$

est une β-primitive de g avec $G(s_0) = 0$. Inversement, une β-primitive G de g avec $G(s_0)$= 0 est donnée par la formule (1.12).

Preuve : Pour tout $t \in I$ et $t \neq s_0$, on a :

$$\begin{aligned} D_\beta G(t) &= \frac{G(\beta(t)) - G(t)}{\beta(t) - t} \\ &= \frac{\sum_{k=0}^{\infty}(\beta^{k+1}(t) - \beta^{k+2}(t))g(\beta^{k+1}(t)) - \sum_{k=0}^{\infty}(\beta^k(t) - \beta^{k+1}(t))g(\beta^k(t)}{\beta(t) - t} \\ &= g(t). \end{aligned}$$

Pour montrer que $D_\beta G(s_0) = g(s_0)$, soit $\epsilon > 0$. Par la continuité de g (t) à t = s_0 , il y a un $\delta > 0$ tel que

$\parallel g(\beta^k(s_0 + h)) - g(s_0)) \parallel < \varepsilon$, k $\geqslant 0, 0 < h < \delta$.

Cela implique que

$\parallel \frac{1}{h} G(s_0 + h) - g(s_0) \parallel \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{h}(\beta^k(s_0 + h) - \beta^{k+1}(s_0 + h)) \parallel g(\beta^k(s_0 + h)) - g(s_0) \parallel$
$< \varepsilon$, $0 < h < \delta$.

À l'inverse, supposons que G soit une β-primitive de g s'annulant en s_0 . Cela implique que

$$\begin{aligned} g(t) &= D_\beta G(t) \\ &= \frac{G(\beta(t)) - G(t)}{\beta(t) - t} \\ &= \frac{T_\beta G(t) - G(t)}{\beta(t) - t} \\ &= \frac{(I - T_\beta)G(t)}{t - \beta(t)}. \end{aligned}$$

Alors $g(t)(t - \beta(t)) = (I - T_\beta)G(t)$, ce qui implique que $G(t) = (I - T_\beta)^{-1}(t - \beta(t))g(t)$. La fonction $F(t) = (t - \beta(t))g(t) \in \Omega$ et $G(t) = (I - T_\beta)^{-1}F(t)$. Par le lemme 1.21 on a :

$$G(t) = \sum_{k=0}^{\infty} F(\beta^k(t)) = \sum_{k=0}^{\infty}(\beta^k(t) - \beta^{k+1}(t))g(\beta^k(t)).$$

□

Définition 1.19 : Soit $f : I \longrightarrow X$ et a, b $\in I$. Nous définissons la β-intégrale de f de a à b par

$$\int_a^b f(t)d_\beta t = \int_{s_0}^b f(t)d_\beta t - \int_{s_0}^a f(t)d_\beta t \tag{1.13}$$

où

$$\int_{s_0}^x f(t)d_\beta t = \sum_{k=o}^{\infty}(\beta^k(x) - \beta^{k+1}(x))f(\beta^k(x)) \tag{1.14}$$

à condition que la série converge en $x = a$ et $x = b$. f est dite β-intégrable sur I si la série converge en a, b pour tout a, b $\in I$. Clairement, si f est continue en $s_0 \in I$, alors f est β-intégrable sur I.

Dans les formules intégrales (1.13) et (1.14), lorsque $\beta(t) = qt$, $q \in (0,1)$, on obtient la q-intégrale de Jackson.

$$\int_a^b f(t)d_qt := \int_0^b f(t)d_qt - \int_0^a f(t)d_qt \tag{1.15}$$

où

$$\int_0^x f(t)d_qt = x(1-q)\sum_{k=o}^{\infty} q^k f(xq^k), x \in I \tag{1.16}$$

[14, 12, 18].

Si $\beta(t) = qt + w$, $q \in (0,1), w > 0$, alors (1.15) et (1.16) se réduisent en intégrale de Hahn.

$$\int_a^b f(t)d_{q,w}t := \int_{w_0}^b f(t)d_{q,w}t - \int_{w_0}^a f(t)d_{q,w}t, \tag{1.17}$$

où

$$\int_{w_0}^x f(t)d_{q,w}t := (x(1-q)-w)\sum_{k=0}^{\infty} q^k f(xq^k + w[k]_q), x \in I, \tag{1.18}$$

où $w_0 = \frac{w}{1-q}$ et $[k]_q = \frac{1-q^k}{1-q}$ [12, 18, 15, 3, 1].

Lemme 1.20 : Si f : I $\longrightarrow$ X est β-intégrable sur I et a, b, c $\in$ I, alors les affirmations suivantes sont vraies :
(i) La β-intégrale est un opérateur linéaire.
(ii) $\int_a^a$ f (t) d_β t $= 0$.
(iii) $\int_a^b$ f (t) d_β t $= -\int_b^a$ f (t) d_β t.
(iv) $\int_a^b$ f (t) d_β t $= \int_a^c$ f (t) d_β t $+ \int_c^b$ f (t) d_β t.

Par le théorème 1.18, on obtient le premier théorème fondamental du β-calcul qui s'énonce comme suit :

Théorème 1.21([2]) : Soit g : $I \longrightarrow X$ une fonction continue en s_0 . Définir la fonction

$$G(x) = \int_{s_0}^x g(t)d_\beta t, x \in I. \tag{1.19}$$

Alors F est continue en s_0, $D_\beta G(x)$ existe pour tout $x \in I$ et $D_\beta G(x) = g(x)$.

Corollaire 1.22 : Si $g : I \longrightarrow X$ est continue en s_0 . Alors

$$\int_t^{\beta(t)} g(\tau)d_\beta\tau = (\beta(t)-t)g(t), t \in I. \tag{1.20}$$

Preuve : Soit $G(x) = \int_{s_0}^{t} g(\tau)d_\beta\tau, t \in I$. D'après le théorème 1.21, F(t) est continue en s_0 et $D_\beta G(t) = g(t), \quad \forall\, t \ \in I$. Alors

$$\begin{aligned}\int_t^{\beta(t)} g(\tau)d_\beta\tau &= \int_{s_0}^{\beta(t)} g(\tau)d_\beta\tau - \int_{s_0}^{t} g(\tau)d_\beta\tau\\ &= G(\beta(t)) - G(t).\end{aligned}$$

Puisque $G(\beta(t)) = G(t) + (\beta(t) - t)D_\beta G(t)$, alors $\int_t^{\beta(t)} g(\tau)d_\beta\tau = (\beta(t) - t)g(t), t \in I$.

□

Maintenant, nous énonçons et prouvons le deuxième théorème fondamental du β-calcul.

Théorème 1.23 ([2]) : Si $f : I \longrightarrow X$ est β-différentiable sur I, alors

$$\int_a^b D_\beta f(t)d_\beta t = f(b) - f(a), \tag{1.21}$$

pour tout $a, b \in I$.

Preuve : Nous avons

$$\begin{aligned}\int_{s_0}^{b} D_\beta f(t)d_\beta t &= \sum_{k=0}^{\infty}(\beta^k(b) - \beta^{k+1}(b))(D_\beta f)(\beta^k(b))\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}(f(\beta^k(b)) - f(\beta^{k+1}(b)))\\ &= lim_{n\longrightarrow\infty}\sum_{k=0}^{n}(f(\beta^k(b)) - f(\beta^{k+1}(b)))\\ &= f(b) - f(s_0).\end{aligned}$$

De la même manière,

$$\int_{s_0}^{a} D_\beta f(t)d_\beta t = f(a) - f(s_0).$$

Donc,

$$\int_a^b D_\beta f(t)d_\beta t = f(b) - f(a), \forall a, b \in I.$$

□

Le théorème suivant établit la formule de la β-intégration par parties[2].

Théorème 1.24 : Supposons que f, g soient des fonctions β-différentiables sur I et D_β f, D_βg toutes deux continues à s_0 . Alors

$$\int_a^b f(t)D_\beta g(t)d_\beta t = f(t)g(t)|_a^b - \int_a^b D_\beta f(t)g(\beta(t))d_\beta t, a, b \in I.$$

Les deux lemmes suivants et la définition 1.25 sont fondamentaux dans l'étude du calcul variationnel. La première est basée à l'origine sur ([17], le lemme 1.1) et la seconde sur ([13],Lemme 1.2). Les deux sont adaptés dans [1] pour le cas de la fonction de Hahn $\beta(t) =$ qt + ω, q $\in$ (0,1), $\omega > 0$. Ici, suivant [1], nous montrons que les deux lemmes sont valables pour le cas de notre fonction générale β(t).

Définition 1.25 ([13]) : Soit g : $[r]_\beta \times \left] -\tilde{\theta}, \tilde{\theta}\right[\longrightarrow \mathbb{R}$. On dit que g(t,.) est continue en θ_0 uniformément en t si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $|\theta - \theta_0| < \delta$ implique $|g(t,\theta) - g(t,\theta_0)| < \varepsilon$ pour tout t $\in [r]_\beta$.

De plus, on dit que g(t, $\cdot$) est différentiable en θ_0 uniformément en t si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que $0 < |\theta - \theta_0| < \delta$ implique
$|\frac{g(t,\theta)-g(t,\theta_0)}{\theta-\theta_0} - g_\theta(t,\theta_0)| < \varepsilon$, $\forall t \in [r]_\beta$.

lemme 1.26 : Supposons que g(t, $\cdot$) soit différentiable en θ_0 , uniformément en t pour tout t $\in [r]_\beta$ et que $G(\theta) = \int_{s_0}^{r} g(t,\theta) d_\beta t$ pour θ dans un voisinage de θ_0 et $\int_{s_0}^{r} g_\theta(t,\theta_0) d_\beta t$ existe. Alors $G(\theta)$ est dérivable en θ_0 avec $G^{'}(\theta_0\ ) = \int_{s_0}^{r} g_\theta(t,\theta_0) d_\beta t$.

Preuve : Puisque g(t, $\cdot$) est différentiable en θ_0 uniformément en t, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $t \in [r]_\beta$ et pour $0 < |\theta - \theta_0| < \delta$, les inégalités suivantes sont vraies :

$$\begin{aligned} |\frac{g(t,\theta) - g(t,\theta_0)}{\theta - \theta_0} - g_\theta(t,\theta_0)| &< \frac{\varepsilon}{r - s_0}, \\ |\frac{G(\theta) - G(\theta_0)}{\theta - \theta_0} - G^{'}(\theta_0)| &\leqslant \int_{s_0}^{r} |\frac{g(t,\theta) - g(t,\theta_0)}{\theta - \theta_0} - g_\theta(t,\theta_0)| d_\beta t \\ &< \int_{s_0}^{r} \frac{\varepsilon}{r - s_0} d_\beta t = \varepsilon. \end{aligned}$$

C'est pourquoi G($\cdot$) est dérivable en θ_0 et $G^{'}(\theta_0) = \int_{s_0}^{r} g_\theta(t,\theta_0) d_\beta t$.

□

Suite à [15], Lemme 4.3, nous montrons que leurs résultats sont valables pour notre fonction générale β(t).

Lemme 1.27 : Posons que f : I $\longrightarrow$ X, g : I $\longrightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions β-intégrables sur I. Si $\|f(t)\| \leqslant g(t)$ pour tout t $\in [a,b]_\beta$, a, b $\in$ I et a $\leqslant$ b, alors pour x, y $\in [a,b]_\beta$,
x $< s_0 < y$, on a

$$\| \int_{s_0}^{y} f(t) d_\beta t \| \leqslant \int_{s_0}^{y} g(t) d_\beta t, \tag{1.22}$$

$$\| \int_{s_0}^{x} f(t) d_\beta t \| \leqslant - \int_{s_0}^{x} g(t) d_\beta t, \tag{1.23}$$

et

$$\| \int_{x}^{y} f(t) d_{\beta}t \| \leqslant \int_{x}^{y} g(t) d_{\beta}t. \tag{1.24}$$

Par conséquent, si g(t) $\geqslant 0$ pour tout t $\in [a,b]_{\beta}$, alors les inégalités $\int_{s_0}^{y} g(t)d_{\beta}t \geqslant 0$ et $\int_{x}^{y} g(t)d_{\beta}t \geqslant 0$ sont valables pour tout x, y $\in [a,b]_{\beta}$, $x < s_0 < y$.

Preuve : Puisque y $> s_0$, alors β^{k+1} (y) $< \beta^{k}(y)$, k $\in \mathbb{N}_0$, y $\in [a,b]_{\beta}$,

$$\begin{aligned} \| \int_{s_0}^{y} f(t) d_{\beta}t \| &\leqslant \sum_{k=O}^{\infty} (\beta^{k}(y) - \beta^{k+1}(y)) \| f(\beta^{k}(y)) \| \\ &\leqslant \sum_{k=O}^{\infty} (\beta^{k}(y) - \beta^{k+1}(y)) g(\beta^{k}(y)) \\ &= \int_{s_0}^{y} g(t) d_{\beta}t. \end{aligned}$$

De même, nous pouvons prouver l'équation (1.23). De plus, si x, y $\in [a,b]_{\beta}$ et $x < s_0 < y$, alors il existe k_1 , $k_2 \in \mathbb{N}$ tels que x $= \beta^{k_2}(a)$ et y $= \beta^{k_1}(b)$.
Nous concluons que

$$\begin{aligned} \| \int_{x}^{y} f(t) d_{\beta}t \| &= \| \sum_{k=k_1}^{\infty} [(\beta^{k}(y) - \beta^{k+1}(y)) f(\beta^{k}(y))] - \sum_{k=k_2}^{\infty} [(\beta^{k}(x) - \beta^{k+1}(x)) g(\beta^{k}(x))] \| \\ &\leqslant \sum_{k=O}^{\infty} (\beta^{k+k_1}(y) - \beta^{k+k_1+1}(y)) \| f(\beta^{k+k_1}(y)) \| - \sum_{k=O}^{\infty} (\beta^{k+k_2+1}(x) - \beta^{k+k_2}(x)) \| f(\beta^{k+k_2}(x)) \| \\ &\leqslant \sum_{k=O}^{\infty} (\beta^{k+k_1}(y) - \beta^{k+k_1+1}(y)) g(\beta^{k+k_1}(y)) - \sum_{k=O}^{\infty} (\beta^{k+k_2}(x) - \beta^{k+k_2+1}(x)) g(\beta^{k+k_2}(x)) \\ &= \int_{s_0}^{y} g(t) d_{\beta}t - \int_{s_0}^{x} g(t) d_{\beta}t \\ &= \int_{x}^{y} g(t) d_{\beta}t. \end{aligned}$$

En mettant f(t) $= 0$ dans (1.22) et (1.24) on obtient

$\int_{s_0}^{y} g(t)d_{\beta}t \geqslant 0$ et $\int_{x}^{y} g(t)d_{\beta}t \geqslant 0$.

□

Lemme 1.28 : Soit f : I $\longrightarrow$ X et g : I $\longrightarrow \mathbb{R}$ est β-différentiable sur I.
Si $\|D_{\beta}f(t)\| \leqslant D_{\beta}$ g(t), t $\in [a,b]_{\beta}$, a, b $\in$ I et a $\leqslant$ b, alors

$$\|f(y) - f(x)\| \leqslant g(y) - g(x), \tag{1.25}$$

pour chaque x, y $\in [a,b]_{\beta}$, $x < s_0 < y$.

Preuve :
Supposons que $\|D_{\beta}f(t)\| \leqslant D_{\beta}$ g(t), t $\in [a,b]_{\beta}$, a, b $\in$ I, a $\leqslant$ b. Par le théorème 1.23 et

le lemme 1.22 on obtient

$\| \int_x^y D_\beta f(t) d_\beta t \| \leqslant \int_x^y D_\beta g(t) d_\beta t,$

qui conduit à

$\|f(y) - f(x)\| \leqslant g(y) - g(x).$

□

Nous sommes maintenant en mesure de prouver le théorème 1.15.

Preuve : (Du théorème 1.15) définissons la fonction g par g(t) = $sup_{\tau \in I} \|D_\beta f(\tau)\|$(t - x). Nous avons : D_β g(t) = $sup_{\tau \in I} \|D_\beta f(\tau)\| \geqslant sup_{\tau \in [a,b]_\beta} \|D_\beta f(\tau)\| \geq \|D_\beta f(t)\|$, t $\in [a, b]_\beta$. Alors, d'après le lemme 1.28

$\|f(y) - f(x)\| \leq g(y) - g(x) = sup_{t \in I} \|D_\beta f(t)\|(y - x).$

Chapitre 2

Équations aux β-différences

2.1 Les β-fonctions exponentielles et les β-fonctions trigonométriques

Définition 2.1 ([5]) : Les β-fonctions exponentielles $e_{p,\beta(t)}$ et $E_{p,\beta(t)}$ sont définies par

$$e_{p,\beta}(t) = \frac{1}{\Pi_{k=0}^{\infty}[1 - p(\beta^k(t))(\beta^k(t) - \beta^{k+1}(t))]} \tag{2.1}$$

et

$$E_{p,\beta}(t) = \Pi_{k=0}^{\infty}[1 + p(\beta^k(t))(\beta^k(t) - \beta^{k+1}(t))]. \tag{2.2}$$

Les deux produits dans (2.1) et (2.2) convergent vers un nombre non nul pour tout t $\in$ I puisque $\sum_{k=0}^{\infty} |p(\beta^k(t))(\beta^k(t) - \beta^{k+1}(t))|$ est uniformément convergente d'après le théorème 1.3. Pour le cas où p est une fonction constante p(t) = z, z $\in \mathbb{C}$ et $\beta(t)$ = qt + ω, $\omega > 0$ et q $\in$ (0 ; 1), on obtient la fonction exponentielle de Hahn[5]. De (2.1) et (2.2) on a : $e_{p,\beta}(t) = \frac{1}{E_{-p,\beta}(t)}$.

Théorème 2.2 : Les β-fonctions exponentielles $e_{p,\beta}(t)$ et $E_{p,\beta}$(t) sont solutions uniques d'équations aux β-différences du premier ordre

$$D_\beta y(t) = p(t)y(t); y(s_0) = 1; \tag{2.3}$$

et

$$D_\beta y(t) = p(t)y(\beta(t)); y(s_0) = 1; \tag{2.4}$$

respectivement.

Preuve : Comme $e_{p,\beta}(t)$ et $E_{p,\beta}$(t) sont les solutions d'équations aux β-différences du premier ordre ci-haut citées et $y(s_0) = 1$, alors $e_{p,\beta}\ (s_0) = E_{p,\beta}\ (s_0) = 1$. On a

$$\begin{aligned}
D_\beta e_{p,\beta}(t) &= \frac{e_{p,\beta}(\beta(t)) - e_{p,\beta}(t)}{\beta(t)-t} \\
&= \frac{1}{\beta(t)-t}\left[\frac{1}{\Pi_{k=0}^{\infty}[1-p(\beta^{k+1}(t))(\beta^{k+1}(t)-\beta^{k+2}(t))} - \frac{1}{\Pi_{k=0}^{\infty}[1-p(\beta^{k}(t))(\beta^{k}(t)-\beta^{k+1}(t))}\right] \\
&= \frac{p(t)}{\Pi_{k=0}^{\infty}[1-p(\beta^{k}(t))(\beta^{k}(t)-\beta^{k+1}(t))]} \\
&= p(t)e_{p,\beta}(t).
\end{aligned}$$

De même, nous voyons que $E_{p,\beta}$(t) est une solution de (2.4). Enfin, pour prouver le caractère unique de la solution $e_{p,\beta}(t)$, soit x(t) une autre solution de (2.3). on a :

$$D_\beta\left(\frac{x(t)}{e_{p,\beta}(t)}\right) = \frac{e_{p,\beta}(t)D_\beta x(t) - x(t)D_\beta e_{p,\beta}(t)}{e_{p,\beta}(t)e_{p,\beta}(\beta(t))} = 0\ ,\ \mathrm{t} \in \mathrm{I}.$$

D'après le lemme 1.8, $\frac{x(t)}{e_{p,\beta}(t)}$ est une fonction constante et $\frac{x(t)}{e_{p,\beta}(t)} = \frac{x(s_0)}{e_{p,\beta}(s_0)} = 1$ c'est-à-dire x(t) $= e_{p,\beta}(t)$ pour tout t $\in$ I. De même $E_{p,\beta}$(t) est l'unique solution de (2.4).

Considérons l'équation linéaire non homogène aux β-différences du premier ordre

$$D_\beta y(t) = p(t)y(t) + f(t); y(s_0) = y_0 \in X. \tag{2.5}$$

Théorème 2.3 : Soit f : I $\longrightarrow$ X une fonction continue en s_0. Alors

$$y(t) = e_{p,\beta}(t)(y_0 + \int_{s_0}^{t} f(\tau)E_{-p,\beta}(\beta(\tau))d_\beta\tau) \tag{2.6}$$

est une solution de l'équation (2.5).

Preuve : Nous avons

$$\begin{aligned}
D_\beta y(t) &= D_\beta e_{p,\beta}(t)y_0 + D_\beta e_{p,\beta}(t)\int_{s_0}^{t} f(\tau)E_{-p,\beta}(\beta(\tau))d_\beta\tau + e_{p,\beta}(\beta(t))f(t)E_{-p,\beta}(\beta(t)) \\
&= p(t)e_{p,\beta}(t)y_0 + p(t)e_{p,\beta}(t)\int_{s_0}^{t} f(\tau)E_{-p,\beta}(\beta(\tau))d_\beta\tau + f(t) \\
&= p(t)y(t) + f(t).
\end{aligned}$$

De plus, $y(s_0) = y_0$.

Dans les deux théorèmes suivants, nous introduisons quelques propriétés importantes du β-fonction exponentielle.

Théorème 2.4 : Soit p : I $\longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue en s_0. Alors les propriétés suivantes sont vraies :

(i) $e_{p,\beta}(\beta(t)) = [1 + (\beta(t) - t)p(t)]e_{p,\beta}(t)$, t $\in$ I

(ii)$D_\beta(\frac{1}{e_{p,\beta}(t)}) = \frac{-p(t)}{e_{p,\beta}(\beta(t))}$,

(iii) $\frac{1}{e_{p,\beta}(t)}$ est l'unique solution de l'équation aux différences du premier ordre

$$D_\beta y(t) = \frac{-p(t)e_{p,\beta}(t)}{e_{p,\beta}(\beta(t))}y(t), \qquad y(s_0) = 1. \tag{2.7}$$

Preuve : (i) A partir de la définition de D_β , on a

$$\begin{aligned} e_{p,\beta}(\beta(t)) &= e_{p,\beta}(t) + (\beta(t) - t)D_\beta e_{p,\beta}(t) \\ &= e_{p,\beta}(t)[1 + (\beta(t) - t)p(t)]. \end{aligned}$$

(ii)D'après le théorème 1.6 (ii), on obtient

$$D_\beta(\frac{1}{e_{p,\beta}(t)}) = \frac{-D_\beta e_{p,\beta}(t)}{e_{p,\beta}(t)e_{p,\beta}(\beta(t))} = \frac{-p(t)}{e_{p,\beta}(\beta(t))}.$$

(iii) Nous pouvons voir que $\frac{1}{e_{p,\beta}(s_0)} = 1$. Par la partie (ii), on obtient $\frac{1}{e_{p,\beta}(t)}$ est une solution de (2.7). Pour montrer que la solution est unique, supposons que x(t) soit une autre solution de (2.7), alors

$$\begin{aligned} D_\beta(x(t)e_{p,\beta}(t)) &= x(t)D_\beta e_{p,\beta}(t) + D_\beta x(t)e_{p,\beta}(\beta(t)) \\ &= x(t)p(t)e_{p,\beta}(t) - \frac{p(t)e_{p,\beta}(t)}{e_{p,\beta}(\beta(t))}x(t)e_{p,\beta}(\beta(t)) = 0. \end{aligned}$$

Par conséquent, $x(t)e_{p,\beta}(t) = x(s_0)e_{p,\beta}(s_0) = 1$. Donc, x(t) = $\frac{1}{e_{p,\beta}(t)}$.

□

Théorème 2.5 : Supposons que p ; q : I $\longrightarrow \mathbb{C}$ sont des fonctions continues en s_0. Puis les propriétés suivantes sont vraies :

(i) $\frac{1}{e_{p,\beta}(t)} = e_{\frac{-p(t)}{1-p(t)(t-\beta(t))},\beta}(t)$,

(ii)$e_{p,\beta}(t)e_{q,\beta}(t) = e_{[p(t)+(\beta(t)-t)p(t)q(t)+q(t)],\beta}(t)$,

(iii)$\frac{e_{p,\beta}(t)}{e_{q,\beta}(t)} = e_{\frac{p(t)-q(t)}{1-q(t)(t-\beta(t))},\beta}(t)$.

Preuve : (i) Clairement $e_{\frac{-p(t)}{1-p(t)(t-\beta(t))},\beta}(t)$ est une solution de l'équation (2.7), alors

$$\frac{1}{e_{p,\beta}(t)} = e_{\frac{-p(t)}{1-p(t)(t-\beta(t))},\beta}(t).$$

(ii) Nous avons

$$\begin{aligned}D_\beta(e_{p,\beta}(t)e_{q,\beta}(t)) &= D_\beta e_{p,\beta}(t)e_{q,\beta}(t) + e_{p,\beta}(\beta(t))D_\beta e_{q,\beta}(t))\\ &= p(t)e_{p,\beta}(t)e_{q,\beta}(t) + q(t)e_{p,\beta}(\beta(t))e_{q,\beta}(t)\\ &= p(t)e_{p,\beta}(t)e_{q,\beta}(t) + q(t)e_{q,\beta}(t)[1 + (\beta(t) - t)p(t)]e_{p,\beta}(t)\\ &= [p(t) + (\beta(t) - t)p(t)q(t) + q(t)]e_{p,\beta}(t)e_{q,\beta}(t),\end{aligned}$$

(iii) Ceci est une conséquence de (i) et (ii).

Définition 2.6 ([5]) : Les β-fonctions trigonométriques sont définies par

$$cos_{p,\beta}(t) = \frac{e_{ip,\beta}(t) + e_{-ip,\beta}(t)}{2}, \quad sin_{p,\beta}(t) = \frac{e_{ip,\beta}(t) - e_{-ip,\beta}(t)}{2i}, \tag{2.8}$$

$$Cos_{p,\beta}(t) = \frac{E_{ip,\beta}(t) + E_{-ip,\beta}(t)}{2}, \quad Sin_{p,\beta}(t) = \frac{E_{ip,\beta}(t) - E_{-ip,\beta}(t)}{2i}. \tag{2.9}$$

Il est connu que : $e_{p,\beta}(t) = \frac{1}{E_{-p,\beta}(t)}$, $e_{p,\beta}(s_0) = 1$, $E_{p,\beta}(s_0) = 1$.

Théorème 2.7 ([?]) : Soit z $\in \mathbb{C}$ une constante. Alors la fonction ϕ(t) définie par $\phi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \alpha_k(t)$ est l'unique solution du β-problème de valeur initiale du premier ordre

$$D_\beta y(t) = zy(t), y(s_0) = 1,$$

où

$$\alpha_k(t) = \begin{cases} \sum_{i_1,i_2,\ldots,i_{k-1}=0}^{\infty}(\prod_{l=1}^{k-1}(\beta,\beta)_{\sum_{j=1}^{l} i_j})(\beta^{\sum_{j=1}^{k-1} i_j}(t) - s_0), & si \quad k \geq 2\\ t - s_0, \quad si \quad k = 1 \\ 1, \quad si \quad k = 0 \end{cases} \tag{2.10}$$

avec $(\beta,\beta)_i = \beta^i$ (t) – $\beta^{i+1}(t)$.

Preuve : Nous prouvons par la méthode d'approximation successive. Choisissons $\phi_0(t)$ =y_0 = 1 comme une solution initiale. En utilisant la relation $\phi_{k+1}(t) = y_0 + \int_{s_0}^{t} f(\tau, \phi_k(\tau))d_\beta\tau$, avec $f(\tau, \phi_k(\tau)) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \phi_k(t)$, k $\geqslant$ 0, on obtient

$$\begin{aligned}\phi_1(t) &= 1 + \int_{s_0}^{t} f(\tau, \phi_0(\tau))d_\beta\tau\\ &= 1 + \int_{s_0}^{t} z\phi_0(\tau)d_\beta\tau\\ &= 1 + z(t - s_0).\end{aligned}$$

Encore par la même relation , la fonction $\phi_2(t)$ est donnée par

$$\begin{aligned}\phi_2(t) &= 1 + \int_{s_0}^{t} f(\tau, \phi_1(\tau)) d_\beta \tau \\ &= 1 + \int_{s_0}^{t} z\phi_1(\tau) d_\beta \tau \\ &= 1 + z(t - s_0) + z^2 \sum_{i_1=0}^{\infty} (\beta^{i_1}(t) - \beta^{i_1+1}(t))(\beta^{i_1}(t) - s_0) \\ &= 1 + z(t - s_0) + z^2 \sum_{i_1=0}^{\infty} (\beta, \beta)_{i_1} (\beta^{i_1}(t) - s_0).\end{aligned}$$

Également $\phi_3(t)$ est donnée par

$$\begin{aligned}\phi_3(t) &= 1 + \int_{s_0}^{t} f(\tau, \phi_2(\tau)) d_\beta \tau \\ &= 1 + \int_{s_0}^{t} z\phi_2(\tau) d_\beta \tau \\ &= 1 + z(t - s_0) + z^2 \sum_{i_1=0}^{\infty} (\beta, \beta)_{i_1} (\beta^{i_1}(t) - s_0) + z^3 \sum_{i_2=0}^{\infty} (\beta, \beta)_{i_2} \sum_{i_1=0}^{\infty} (\beta, \beta)_{i_1+i_2} (\beta^{i_1+i_2}(t) - s_0) \\ &= 1 + z(t - s_0) + z^2 \sum_{i_1=0}^{\infty} (\beta, \beta)_{i_1} (\beta^{i_1}(t) - s_0) + z^3 \sum_{i_2,i_1=0}^{\infty} (\beta, \beta)_{i_2} (\beta, \beta)_{i_1+i_2} (\beta^{i_1+i_2}(t) - s_0).\end{aligned}$$

Par induction sur n, on peut montrer que :

$$\phi_n(t) = 1 + z(t - s_0) + \sum_{k=2}^{n} z^n \sum_{i_1, i_2, i_3, \ldots, i_{k-1}=0}^{\infty} (\Pi_{l=1}^{k-1} (\beta, \beta)_{\sum_{j=1}^{l} i_j}) (\beta^{\sum_{j=1}^{k-1} i_j}(t) - s_0).$$

C'est pourquoi $\phi_n(t) \longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} z^k \alpha_k(t)$.

2.2 Existence et unicité des solutions

Théorème 2.8 ([6]) : Supposons que f : $\mathbb{R}^2 \longrightarrow$ X est continue en $(s_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ et satisfait la condition de Lipschitz (par rapport à y)

$$\|f(t, y_1) - f(t, y_2)\| \leq L\|y_1 - y_2\|, \quad \forall (t, y_1), (t, y_2) \in \mathbb{R}^2. \tag{2.11}$$

Alors le β-problème de la valeur initiale du premier ordre a une unique solution sur $[s_0, s_0 + \delta]$, où L est une constante positive et $\delta = min\{a, \frac{b}{Lb+M}, \frac{\rho}{L}\}$ avec $\rho \in (0,\ 1)$.

Preuve : Nous prouvons le théorème pour t $\in [s_0, s_0 + \delta]$ et la preuve pour t $\in [s_0 - \delta, s_0]$ est similaire. Définissons l'opérateur T par

$$Ty(t) = y_0 + \int_{s_0}^{t} f(\tau, y(\tau)) d_\beta \tau. \tag{2.12}$$

Soit $C_{[s_0, s_0+\delta]}$ l'espace de toutes les fonctions continues en s_0 et borné sur l'intervalle $[s_0, s_0 + \delta]$ avec la norme suprême telle que pour y $\in C_{[s_0,s_0+\delta]}$, $\|y\|_\infty = sup_{t \in [s_0, s_0+\delta]}$

$\|y(t)\|_\infty$. Cet espace est complet. Soit S $= \{y \in C_{[s_0,s_0+\delta]} : \|y-y_0\|_\infty \leq b\}$.

S $\subset C_{[s_0,s_0+\delta]}$ et est fermé , S est un espace métrique complet. D'abord, on prouve que T : $S \longrightarrow S$. Soit $\phi \in S$

$$\begin{aligned}
\|T\phi(t)-y_0\| &= \|\int_{s_0}^{t} f(\tau,y(\tau))d_\beta\tau\| \\
&= \|\int_{s_0}^{t}(f(\tau,y(\tau))-f(\tau,y_0)+f(\tau,y_0))d_\beta\tau\| \\
&\leq \int_{s_0}^{t}\|f(\tau,y(\tau)-f(\tau,y_0)+f(\tau,y_0)\|d_\beta\tau \\
&\leq \int_{s_0}^{t}(\|f(\tau,y(\tau)-f(\tau,y_0)\|+\|f(\tau,y_0)\|)d_\beta\tau \\
&\leq \int_{s_0}^{t}(L\|\phi(\tau)-y_0\|+M)d_\beta\tau \\
&\leq (Lb+M)\int_{s_0}^{t} d_\beta\tau \\
&\leq (Lb+M)(t-s_0) \\
&\leq (Lb+M)\delta.
\end{aligned}$$

En vue de $\delta \leq \frac{b}{Lb+M}$, Nous avons $\|T\phi(t)-y_0\| \leq$ b, signifie que , T $\phi \in S$. En suite, nous montrons que T est une application de contradiction. Soit $\phi_1, \phi_2 \in S$,

$$\begin{aligned}
\|T\phi_1(t)-T\phi_2(t)\| &= \|\int_{s_0}^{t}(f(\tau,\phi_1(\tau))-f(\tau,\phi_2(\tau)))d_\beta\tau\| \\
&\leq \int_{s_0}^{t}\|(f(\tau,\phi_1(\tau))-f(\tau,\phi_2(\tau))\|d_\beta\tau \\
&\leq \int_{s_0}^{t} L\|\phi_1(\tau)-\phi_2(\tau)\|d_\beta\tau \\
&\leq L\|\phi_1-\phi_2\|_\infty\int_{s_0}^{t} d_\beta\tau \\
&= L\|\phi_1-\phi_2\|_\infty(t-s_0) \\
&\leq L\|\phi_1-\phi_2\|_\infty \\
&\leq \rho\|\phi_1-\phi_2\|_\infty.
\end{aligned}$$

Alors T est une application de contradiction.

□

Théorème 2.9 ([16]) : Soit $f_i(t,y_1,y_2)$: I $\times \prod_{i=1}^{2} S_i(x_i,b_i) \longrightarrow X$, $s_0 \in I$ tel que les conditions suivantes sont remplies :
(i) Pour $y_i \in S_i(x_i,b_i)$, i = 1, 2, $f_i(t,y_1,y_2)$ sont continues à t = s_0 .
(ii) Il existe une constante positive A telle que, pour t $\in$ I, $y_i, \tilde{y} \in S_i(x_i,b_i)$, i = 1, 2, la condition suivante de Lipschitz est satisfaite : $\|f_i(t,y_1,y_2)-f_i(t,\tilde{y}_1,\tilde{y}_2)\| \leq A\sum_{i=1}^{2}\|y_i-\tilde{y}_i\|$
Alors il existe une solution unique du β-problème de valeur initiale

$$D_\beta y_i(t) = f_i(t,y_1(t),y_2(t)), y_i(s_0) = x_i \in X i = 1,2, t \in I. \tag{2.13}$$

signifie le vecteur transposé.

Preuve : Soit $y_0 = (x_1, x_2)^T$ et $b = (b_1, b_2)^T$, où $(.,.)^T$ signifie le vecteur transposé. Définir la fonction f : I $\times \prod_{i=1}^{2} S_i(x_i, b_i) \longrightarrow X \times X$ par
$f(t, y_1, y_2) = (f_1(t, y_1, y_2),\ f_2(t, y_1, y_2))^T$. Il est facile de montrer que le système (2.13) est équivalente à β-problème de valeur initiale

$$D_\beta y(t) = f(t, y(t)), y_{s_0} = y_0. \tag{2.14}$$

Puisque chaque f_i est continue à t = s_0, f est continue à t = s_0. La fonction f satisfait la condition de Lipschitz parce que pour y, $\tilde{y} \in \prod_{i=1}^{2} S_i(x_i, b_i)$,

$$\begin{aligned}\|f(t, y) - f(t, \tilde{y})\| &= \|f(t, y_1, y_2) - f(t, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2\| \\ &= \sum_{i=1}^{2} \|f_i(t, y_1, y_2) - f_i(t, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2\| \\ &\leq A \sum_{i=1}^{2} \|y_i - \tilde{y}_i\| = A\|y_i - \tilde{y}\|.\end{aligned}$$

Corollaire 2.10 : Soit $f(t, y_1, y_2)$ une fonction définie sur I $\times \prod_{i=1}^{2} S_i(x_i, b_i)$ tel que les conditions suivantes sont satisfaites :
(i) Pour toute valeur de $y_i \in S_i(x_i, b_i)$, i = 1, 2, , f est continue à t = s_0 .
(ii) f satisfait la condition de Lipschitz $\|f(t, y_1, y_2) - f(t, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2)\| \leq A \sum_{i=1}^{2} \|y_i - \tilde{y}_i\|$
où A > 0, $y_i, \tilde{y}_i \in S_i(x_i, b_i)$, et t $\in$ I.

Alors ,

$$D_\beta^2 y(t) = f(t, y(t), D_\beta y(t)), D_\beta^{i-1} y(s_0) = x_i, i = 1, 2, \tag{2.15}$$

a une solution unique sur $[s_0, s_0 + \delta]$.

Preuve : Considérons l'équation (2.15). Elle est équivalente à (2.13), où $\{\phi_i(t)\}_{i=1}^{2}$ est une solution de (2.13) si est seulement si $\phi_1(t)$ est une solution de (2.15). Ici,

$$f_i(t, y_1, y_2) = \begin{cases} y_2, & i = 1, \\ f(t, y_1, y_2), & i = 2. \end{cases}$$

Ainsi, par le théorème 1.1, il existe $\delta > 0$ tel que le système (2.13) a une solution unique sur $[s_0, s_0 + \delta]$.

$\square$

Corollaire 2.11 ([16]) : Supposons que les fonctions $a_j(t)$: I $\longrightarrow \mathbb{C}$, j = 0, 1, 2 et b(t) : I $\longrightarrow$ X satisfait aux conditions suivantes :
(i)$a_j(t)$, j = 0, 1, 2 et b(t) sont continues en s_0 avec $a_0(t) \neq 0$ pour tout $\in$ I,

(ii) $\frac{a_j(t)}{a_0(t)}$ est bornée sur I, j = 1, 2. Alors

$$a_0(t)D_\beta^2 y(t) + a_1(t)D_\beta y(t) + a_2(t)y(t) = b(t), D_\beta^{i-1}y(s_0) = x_i, x_i \in X, i = 1, 2, \quad (2.16)$$

a une solution unique sur un sous-intervalle J $\subset$ I, $s_0 \in$ J.

Preuve : En divisant par $a_0(t)$, on obtient

$$D_\beta^2 y(t) = A_1(t)D_\beta y(t) + A_2(t)y(t) + B(t), \quad (2.17)$$

où A_j(t) = -$\frac{a_j(t)}{a_0(t)}$ et B(t) = $\frac{b(t)}{a_0(t)}$. Puisque A_j(t) et B(t) sont continues a t = s_0, la fonction $f(t, y_1, y_2)$, définie par

$$f(t, y_1, y_2) = A_1(t)y_2 + A_2(t)y_1 + B(t),$$

est continue a t =s_0. De plus, A_j(t) est borné sur I. Par conséquent, il y a A > 0 tel que $|A_j(t)| \leq A$ pour tout t $\in$ I. Nous voyons que f satisfait la condition de Lipschitz avec la Constante de Lipschitz A. Ainsi , $f(t, y_1, y_2)$ satisfait à la condition du corollaire 2.11 . Il existe une solution unique de (2.16) sur J.

$\square$

Le corollaire suivant nous donne les conditions suffisantes pour l'existence et l'unicité d'une solution du β-problème de Cauchy (2.14).

Corollaire 2.12 : Supposons que les fonctions $a_j(t)$: I $\longrightarrow \mathbb{C}$, j = 0, 1, . . . , n et b(t) : I $\longrightarrow$ X satisfait aux conditions suivantes :
(i) $a_j(t)$, j = 0, 1, . . . , n et b(t) sont continues en s_0 avec $a_0(t) \neq 0$ pour tout t $\in$ I,
(ii) $a_j(t)$ /$a_j(t)$ est borné sur I, j = 1, . . . , n. Alors

$$a_0(t)D_\beta^n y(t) + a_1(t)D_\beta^{n-1}y(t) + \cdots + a_n(t)y(t) = b(t), \quad (2.18)$$

$D_\beta^{i-1}y(s_0) = x_i$, i = 1, . . . , n, a une solution unique sur un sous-intervalle J $\subset$ I contenant s_0 .

Preuve : En divisant par $a_0(t)$, on obtient

$$D_\beta^n y(t) = A_1(t)D_\beta^{n-1}y(t) + A_2(t)D_\beta^{n-2}y(t) + ... + A_n(t)y(t) = B(t), \quad (2.19)$$

où A_j(t) = -$\frac{a_j(t)}{a_0(t)}$ et B(t) = $\frac{b(t)}{a_0(t)}$. Puisque A_j(t) et B(t) sont continues à t = s_0, la fonction $f(t, y_1, y_2, ...ny_n)$, définie par

$$f(t, y_1, y_2, ..., y_n) = A_1(t)D_\beta^{n-1}y(t) + A_2(t)D_\beta^{n-2}y(t) + ... + A_n(t)y(t) + B(t),$$

est continue a t $=s_0$. De plus, A_j(t) est borné I. Par conséquent, il y a A $>$ 0 tel que $|A_j(t)| \leq A$ pour tout t $\in$ I. Nous voyons que f satisfait la condition de Lipschitz avec la constante de Lipschitz A. Ainsi , $f(t, y_1, y_2, ..., y_n)$ satisfait la condition du corollaire 2.12. Il existe une solution unique de (2.18) sur J.

$\square$

2.3 Équations aux β-différences linéaires d'ordre supérieur

Considérons l'équation aux β-différences linéaire homogène d'ordre n

$$a_0(t)D_\beta^n y(t) + a_1(t)D_\beta^{n-1}y(t) + ... + a_{n-1}(t)D_\beta y(t) + a_n(t)y(t) = 0, \tag{2.20}$$

où les coefficients $a_j(t)$, $0 \leq j \leq$ n, sont supposés satisfaits aux conditions du corollaire 2.12. L'équation (2.20) peut s'écrire $L_n y = 0$, où
$L_n y = a_0(t)D_\beta^n y(t) + a_1(t)D_\beta^{n-1}y(t) + ... + a_{n-1}(t)D_\beta y(t) + a_n(t)y(t)$.

Le lemme suivant est une conséquence immédiate du corollaire 2.12.

Lemme 2.13 : Si la fonction y est une solution de l'équation homogène (2.20) telle que $y(s_0)$ et $D_\beta y(s_0)$= 0, $s_0 \in I$, alors y(t) = 0 pour tout t $\in$ J.

Preuve : Par le corollaire 2.12, si $x_i = 0$, i=1,2 dans le β-problème de valeur initiale (2.16), lequel a une solution unique sur J, alors y tel que y(t)=0 pour tout t $\in$ J est une solution unique d'équation aux β-différences (2.14), lequel satisfait les conditions initiales données $y(s_0)$ et $D_\beta y(s_0)$= 0.

$\square$

Théorème 2.14 : L'équation linéaires homogènes d'ordre n aux β-différences (2.20) est équivalente au système linéaire homogène du premier ordre de la forme $D_\beta y(t) = A(t)y(t)$, où $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ et A= $\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\frac{a_n}{a_0} & -\frac{a_{n-1}}{a_0} & \cdots & -\frac{a_1}{a_0} \end{pmatrix}$.

Preuve : Soit

$$\begin{aligned} y_1 &= y, \\ y_2 &= D_\beta y, \\ &\vdots \\ y_{n-1} &= D_\beta^{n-2} y, \\ y_n &= D_\beta^{n-1} y. \end{aligned} \tag{2.21}$$

β-différenciant (2.21), on a

$$D_\beta y = D_\beta y_1, D_\beta^2 y = D_\beta y_2, ..., D_\beta^{n-1} y = D_\beta y_{n-1}, D_\beta^n y = D_\beta y_n. \tag{2.22}$$

Alors

$$D_\beta y_1 = y_2, D_\beta y_2 = y_3, \cdots, D_\beta y_{n-1} = y_n. \tag{2.23}$$

Puisque $a_0(t) \neq 0$ sur J, (2.20) équivaut à

D_β^n y = - $\frac{a_n(t)}{a_0(t)} y - \frac{a_{n-1}(t)}{a_0(t)} D_\beta y - \cdots - \frac{a_1(t)}{a_0(t)} D_\beta^{n-1} y$

de (2.21) et (2.22), on a

$$D_\beta y = -\frac{a_n(t)}{a_0(t)} y_1 - \frac{a_{n-1}(t)}{a_0(t)} y_2 - \cdots - \frac{a_1(t)}{a_0(t)} y_n. \tag{2.24}$$

En combinant (2.23) et (2.24), on obtient

$$\begin{aligned} D_\beta y_1 &= y_2, \\ D_\beta y_2 &= y_3, \\ &\vdots \\ D_\beta y_{n-1} &= y_n, \\ D_\beta y &= -\frac{a_n(t)}{a_0(t)} y_1 - \frac{a_{n-1}(t)}{a_0(t)} y_2 - \cdots - \frac{a_1(t)}{a_0(t)} y_n. \end{aligned} \tag{2.25}$$

Ceci est équivalent à l'équation vectorielle aux β-différences linéaire homogène

$$D_\beta y(t) = A(t) y(t). \tag{2.26}$$

Théorème 2.15 : Considérons l'équation (2.20) et le système correspondant (2.26). Si f est une solution de (2.20) sur J, alors $\phi = (f, D_\beta f, \cdots, D_\beta^{n-1} f)^T$ est une solution de (2.26) sur J. Inversement, si $\phi = (\phi_1, \cdots, \phi_n)$ est une solution de (2.26) sur J, alors sa première composante ϕ_1 est une solution f de (2.20) sur J et $\phi = (f, D_\beta f, \cdots, D_\beta^{n-1} f)^T$.

Preuve : Supposons que f vérifie l'équation (2.20). Alors

$$a_0(t)D_\beta^n f(t)+\cdots+a_{n-1}(t)D_\beta f(t)+a_n(t)f(t)=0, t\in J. \tag{2.27}$$

Considérerons

$$\phi(t)=(\phi_1(t),\cdots,\phi_n(t))^T=(f(t),D_\beta f(t),\cdots,D_\beta^{n-1}f(t))^T. \tag{2.28}$$

De (2.27) et (2.28), on a

$$\begin{aligned} D_\beta\phi_1(t)&=\phi_2(t),\\ D_\beta\phi_2(t)&=\phi_3(t),\\ &\vdots\\ D_\beta\phi_{n-1}(t)&=\phi_n(t), \end{aligned} \tag{2.29}$$

$$D_\beta\phi(t)=-\tfrac{a_n(t)}{a_0(t)}\phi_1(t)-\tfrac{a_{n-1}(t)}{a_0(t)}\phi_2(t)-\cdots-\tfrac{a_1(t)}{a_0(t)}\phi_n(t).$$

La comparaison de (2.29) avec (2.24), ϕ, définit par (2.26), satisfait le système (2.24). A l'inverse, supposons que ϕ(t) = $(\phi_1(t),\cdots,\phi_n(t))^T$ satisfait le système (2.24) sur J. Alors (2.29) est valable pour tout t $\in$ J. Les n − 1 premières équations de (2.29) donnent

$$\begin{aligned} \phi_2(t)&=D_\beta\phi_1(t),\\ \phi_3(t)&=D_\beta\phi_2(t)=D_\beta^2\phi_1(t),\\ &\vdots\\ \phi_n(t)&=D_\beta\phi_{n-1}(t)=D_\beta^2\phi_{n-2}(t)=...=D_\beta^{n-1}\phi_1(t). \end{aligned} \tag{2.30}$$

Et donc

$D_\beta\phi_n(t)=D_\beta^n\phi_1(t)$. La dernière équation de (2.29) devient

$$a_0(t)D_\beta^n\phi_1(t)+a_1(t)D_\beta^{n-1}\phi_1(t)+...+a_{n-1}(t)D_\beta\phi_1(t)+a_n(t)\phi_1(t)=0.$$

Ainsi ϕ_1 est une solution f de l'équation (2.20) ; et de plus, (2.20) montre que

$$\phi(\mathrm{t})=(f(t),D_\beta f(t),...,D_\beta^{n-1}f(t))^T.$$

Définition 2.16 : (Un ensemble fondamental) Un ensemble de n solutions linéairement indépendantes du nième ordre d'équation aux β-différences linéaire homogène (2.20) est appelé un ensemble fondamental d'équation (2.20).

Théorème 2.17 : Toute solution arbitraire y de l'équation aux β-différences linéaire homogène (2.20) sur J peut être représenté comme une combinaison linéaire appropriée d'un ensemble fondamental de solutions $y_1, ..., y_n$ de (2.20).

Nous nous intéressons maintenant à la construction de l'ensemble fondamental des solutions de l'équation (2.20) lorsque les coefficients sont constants.

L'équation (2.20) peut s'écrire sous la forme

$$L_n y(t) = a_0 D_\beta^n y(t) + a_1 D_\beta^{n-1} y(t) + \cdots + a_n y(t) = 0, \tag{2.31}$$

où a_j , $0 \leq j \leq n$, sont des constantes. D'après le théorème 2.15, l'équation (2.20) est équivalente à un système

$$D_\beta Y(t) = AY(t), \tag{2.32}$$

où

$$A= \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\frac{a_n}{a_0} & -\frac{a_{n-1}}{a_0} & \cdots & -\frac{a_1}{a_0} \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de l'équation (2.20) est donné par

$$P(\lambda) = det(\lambda I - A) = a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + ... + a_n, \tag{2.33}$$

où I est la matrice carrée unitaire d'ordre n,λ_i , $1 \leq i \leq k$, sont des racines distinctes de p(λ) = 0 de multiplicité m_i, de sorte que $\sum_{ki=1}^{n} m_i$ = n.

Chapitre 3

Calcul variationnel aux β-différences

Dans ce chapitre, nous discutons quelques concepts fondamentaux du calcul variationnel aux β-différences comme la β-équation d'Euler-Lagrange, le β-problème isopérimétrique, le β-problème de Lagrange et le β-problèmes du contrôle optimal.
Dans ce chapitre, nous nous intéressons au problème d'extremum conditionnel pour la fonctionnelle suivante

$$J(y(x)) = \int_a^b F(x, y(x), D_\beta y(x), ..., D_\beta^n y(x)) d_\beta x \tag{3.1}$$

sous les contraintes de frontières

$$\begin{aligned} y(a) = y(b) = c_0, \\ D_\beta y(a) = D_\beta y(b) = c_1, \\ \vdots \\ D_\beta^{n-1} y(a) = D_\beta^{n-1} y(b) = c_{n-1}, \end{aligned} \tag{3.2}$$

où

$$D_\beta f(x) = \frac{f(\beta(x)) - f(x)}{\beta(x) - x}. \tag{3.3}$$

3.1 La β-équation d'Euler-Lagrange

On considère la fonctionnelle β-intégrale,

$$J(y(x)) = \int_a^b F(x, y(x), D_\beta y(x), ..., D_\beta^n y(x)) d_\beta x. \tag{3.4}$$

Ici la fonction $F(x, y_0(x), ..., y_n(x))$ est supposée admettre ses dérivées partielles premières relativement à tous ses arguments.

Soit E l'espace linéaire de fonctions y(x) ($b \leqslant x \leqslant a$) dans lesquelles est définie la norme

$$\parallel y \parallel = max_{0\leq i\leq k}(max_{x\in[a,b]_\beta} D^i_\beta y(x)) \tag{3.5}$$

et soit E' la variété linéaire des fonctions appartenant à E et satisfaisant aux contraintes en (3.2). Nous étudions le problème d'extremum pour la fonctionnelle J, sur la variété E'. On calcule d'abord la première variation de la fonctionnelle J sur la variété linéaire E' :

$$\begin{aligned}\delta J(y(x),h(x)) =& \frac{d}{dt}J(y(x)+th(x))|_{t=0}\\ =& \frac{d}{dt}\int_a^b [F(x,y(x)+th(x),D_\beta y(x)+tD_\beta h(x),...,D^k_\beta y(x)+tD^k_\beta h(x))]d_\beta x|_{t=0}\\ =& \sum_{i=0}^{k}\int_a^b [F_i(x,y(x),D_\beta y(x),...,D^k_\beta y(x))D^i_\beta h(x)]d_\beta x\end{aligned} \tag{3.6}$$

où

$$F_i = \frac{\partial F}{\partial y_i}(F = F(x,y_0,...,y_k)). \tag{3.7}$$

La variation dépend d'une fonction arbitraire h(x). Puisque la variation est effectuée sur la variété linéaire E' , h(x) est tel que y(x) + th(x) appartient aussi à la variété linéaire E' et satisfait en particulier aux contraintes

$$\begin{aligned} h(a) &= h(b) = 0,\\ D_\beta h(a) &= D_\beta h(b) = 0,\\ &\vdots\\ D^k_\beta h(a) &= D^k_\beta h(b) = 0.\end{aligned} \tag{3.8}$$

De la relation $D_\beta(fg)(x) = f(\beta(x))D_\beta g(x) + g(x)D_\beta f(x)$, on obtient la formule de β-intégration par parties :

$\int_a^b f(\beta(x))D_\beta g(x)d_\beta x = (fg)(x)|_a^b - \int_a^b D_\beta f(x)g(x)d_\beta x$

$$\int_a^b f(x)D^i_\beta g(x)d_\beta x = f(x)D^{i-1}_\beta g(x)|_a^b - \int_a^b D_\beta f(\beta^{-1}x)D^{i-1}_\beta g(x)d_\beta x. \tag{3.9}$$

En utilisant (3.8) et (3.9), (3.6) donne :

$$\delta J(y(x),h(x)) = \sum_{i=0}^{n}\int_a^b -D_\beta[F_i(\beta^{-1}(x),y(\beta^{-1}(x)),D_\beta y(\beta^{-1}(x)),...,D^n_\beta y(\beta^{-1}(x)))D^{i-1}_\beta h(x)]d_\beta x. \tag{3.10}$$

Nous avons

$$\delta J(y(x),h(x)) = -\sum_{i=0}^{n}\int_a^b D_\beta[F_i(\beta^{-1}(x),y(\beta^{-1}(x)),D_\beta y(\beta^{-1}(x)),...,D_\beta^n y(\beta^{-1}(x)))D_\beta^{i-1}h(x)]d_\beta x$$

$$= \int_a^b \sum_{i=0}^{n}(-1)^i D_\beta^i[F_i(\beta^{-i}(x),y(\beta^{-i}(x)),D_\beta y(\beta^{-i}(x)),...,D_\beta^n y(\beta^{-i}(x)))]h(\beta(x))d_\beta x. \tag{3.11}$$

Très important de distinguer $D_\beta f(ax)$ qui signifie ici $[D_\beta f](ax)$ avec $D_\beta[f(ax)]$ signifiant $D_\beta g(x)$ pour g(x) = f(ax).

Pour dériver la β-équation d'Euler-Lagrange correspondante, nous avons besoin du lemme suivant, qui constitue une β-version de ce qu'on appelle le « lemme fondamental du calcul variationnel ».

Lemme 3.2 : Soit f $\in$ D. Alors $\int_a^b f(x)h(\beta(x))d_\beta x = 0$ pour toutes les fonctions h $\in$ D avec h(a) = h(b) = 0 si et seulement si f(x) = 0 pour tout x $\in [a,b]_\beta$.

Preuve : Il ressort clairement de la définition de la β-intégration que si f(x) = 0 pour tout x $\in [a,b]_\beta$, alors $\int_a^b f(x)h(\beta(x))d_\beta x = 0$. Pour prouver l'autre implication, supposons au contraire qu'il existe des $l \in [a,b]_\beta$ tels que $f(l) \neq 0$. Nous avons les deux cas suivants.

Cas I. $l \neq s_0$. Alors, soit $l = \beta^n(a)$ soit $l = \beta^n(b)$ pour certains n $\in \mathbb{N}_0$. Tout d'abord, supposons que $l = \beta^n(a))$ pour un certains n $\in \mathbb{N}_0$. Définir

$$h(x) = \begin{cases} f(l), x = \beta(a) \\ 0, sinon \end{cases} \tag{3.12}$$

Clairement, h $\in$ D avec h(a) = h(b) = 0. Alors
$\int_a^b f(x)h(\beta(x))d_\beta x = \int_{s_0}^b f(x)h(\beta(x))d_\beta x - \int_{s_0}^a f(x)h(\beta(x))d_\beta x$

$$= -(l-\beta(l))f^2(l) \neq 0.$$

Cas II. $l = s_0$. Soit $f(s_0) \neq 0$ et sans perte de généralité, supposons que f $(s_0\ ) > 0$. La continuité de f en s_0 implique $lim_{n\longrightarrow\infty} f(\beta^n(a)) = lim_{n\longrightarrow\infty} f(\beta^n(b)) = f(s_0)$. Par conséquent, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $f(\beta^n(a)) > 0$ et $f(\beta^n(b)) > 0$ pour tout $n > n_0$. Si $s_0 \notin \{a,b\}$, on définit h par :

$$h(x) = \begin{cases} f(\beta^n(a)), x = \beta^{n+1}(a)\ \forall n > n_0 \\ f(\beta^n(b)), x = \beta^{n+1}(b)\ \forall n > n_0 \\ 0\ sinon \end{cases} \tag{3.13}$$

Ainsi,
$\int_a^b f(x)h(\beta(x))d_\beta x = \sum_{n=n_0}^{\infty}(\beta^n(b) - \beta^{n+1}(b))f^2(\beta^n(b) - \sum_{n=n_0}^{\infty}(\beta^n(a) - \beta^{n+1}(a))f^2(\beta^n(a)$
Pour $s_0 = c$, on définit h par

$$h(x) = \begin{cases} f(\beta^n(b)), x = \beta^{k+1}(b)\ \forall n > n_0 \\ 0,\ sinon \end{cases} \tag{3.14}$$

Donc,
$\int_a^b f(x)h(\beta(x))d_\beta x = \sum_{n=n_0}^{\infty}(\beta^n(b) - \beta^{n+1}(b))f^2(\beta^n(b)) \neq 0.$

$\square$

Remarquons ensuite que (3.12) s'écrit sous la forme $\delta J(y(x), h(x)) = I(f) = \int_a^b f(x)h(\beta(x))d_\beta x$
Ainsi, la condition nécessaire pour le problème extrémal (3.1)- (3.3) s'écrit

$$\sum_0^n (-1)^i D_\beta^i [F_i(\beta^{-i}(x), y(\beta^{-i}(x)), D_\beta y(\beta^{-i}(x)), ..., D_\beta^n y(\beta^{-i}(x))] = 0. \tag{3.15}$$

$D_\beta^i y(a) = D_\beta^i y(b) = c_i$, i= 0,1,...,n-1.
Pour n = 1 , par exemple, on a respectivement :

$$F_0(x, y(x), D_\beta y(x)) - D_\beta[F_1(\beta^{-1}x, y(\beta^{-1}(x)), D_\beta y(\beta^{-1}(x))] = 0 \tag{3.16}$$

$y(a) = y(b) = c_0$.
(3.15) est la β-équation d'Euler-Lagrange correspondant à la β-intégrale (3.4).

3.2 Applications

3.2.1 Le β-problème isopérimétrique

Supposons qu'il soit nécessaire de trouver l'extremum de la fonctionnelle

$$J(y(x)) = \int_a^b f(x, y(x), D_\beta y(x), ..., D_\beta^n y(x))d_\beta x, \tag{3.17}$$

$$D_\beta^i y(a) = D_\beta^i y(b) = c_i, i = 1, ..., n-1 \tag{3.18}$$

sous les contraintes

$$\tilde{J}_i(y(x)) = \int_a^b (f^i(x, y(x), D_\beta y(x), ..., D_\beta^n y(x))d_\beta x = c_i \tag{3.19}$$

$i = 1, ..., m$.

Pour résoudre ce problème, nous devons considérer les généralités suivantes. Soient J(y) et $\tilde{J}_1$(y), . . . , $\tilde{J}_m(y)$ des fonctionnelles différentiables sur l'espace normé E, ou sur sa variété $E^{'}$. Nous avons le théorème suivant :

Théorème 3.4 [7] Si une fonctionnelle J(y) atteint son extremum au point $\tilde{y}$ sous les conditions supplémentaires $\tilde{J_i}$ (y)= c_i , i=1,2,3,...,m et $\tilde{y}$ n'est un point stationnaire pour aucune des fonctionnelles $\tilde{J_i}$ $(\delta(\tilde{J_i}(\tilde{y},h) \neq 0, i = 0,1,...,m$ identiquement) tandis que les fonctionnelles $\delta\tilde{J_i}$(i=1,...,m) sont linéairement indépendantes, alors $\tilde{y}$ est un point stationnaire de la fonctionnelle J -$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i\tilde{J_i}$ où les λ_i sont des constantes.

Ainsi par ce théorème, la condition extrémale nécessaire pour la fonctionnelle J(y) sous les contraintes supplémentaires $\tilde{J_i}$ (y)= c_i, i = 1, . . . , m, vérifiant les conditions du théorème, est donnée par l'équation (3.15) avec

$$F = f - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i\tilde{J_i}. \qquad (3.20)$$

Il s'agit d'une équation aux β-différences d'ordre 2n contenant m paramètres inconnus.Elle est en principe, résolue de manière unique sous les 2n contraintes aux limites et les m conditions supplémentaires.

3.2.2 Le β-problème de Lagrange

Supposons maintenant qu'il soit nécessaire de trouver l'extremum de la fonctionnelle

$$J(y_1(x),...,y_n(x)) = \int_a^b f(x, y_1(x),...,y_n(x), D_\beta y_1(x),...,D_\beta y_n(x))d_\beta x \qquad (3.21)$$

sous les contraintes
$f^i(x, y_1(x),...,y_n(x), D_\beta y_1(x),...,D_\beta y_n(x)) = 0, i = 1,...,m; m < n,$

$$y_i(a) = y_i(b) = c_i, i = 1,...,n. \qquad (3.22)$$

Ce problème peut être transformé en β-problème isopérimétrique comme suit : Tout d'abord, multipliez chaque ième équation de (3.22) par une fonction arbitraire λ_i(x) définie comme tout le reste sur $L = [a,...,b]_\beta$ puis appliquer la β-intégration sur L sur le résultat :

$$\tilde{J}_i(y_1(x),...,y_n(x)) = \int_a^b \lambda_i(x)f^i(x, y_1(x),...,y_n(x), D_\beta y_1(x),...,D_\beta y_n(x))d_\beta x = 0 \quad (3.23)$$

i = 1, . . . , m.
La question restante est celle de savoir si les deux contraintes (3.22) et (3.23) sont équivalentes. La réponse est oui puisque évidemment de (3.22) découle (3.23). Enfin, c'est par le lemme fondamental du β-calcul variationnel (voir Lemme 3.1) que (3.22) suit de (3.23).

3.2.3 Le β-problème du contrôle optimal

Supposons qu'on lui donne une équation aux β-différences à n dimensions du type

$$f^0(x, y(x), D_\beta y(x), ..., D_\beta^n y(x), u(x)) = 0. \tag{3.24}$$

L'équation est dite contrôlée, u(x) et y(x) la fonction de contrôle et la trajectoire de contrôle, respectivement. Soit J(y(x), u(x)) une fonctionnelle β-intégrale contrôlée dans le sens où cela dépend de la fonction de contrôle u(x) :

$$J(y(x), u(x)) = \int_a^b f(x, y(x), D_\beta y(x), ..., D_\beta^n y(x), u(x)) d_\beta x. \tag{3.25}$$

Le β-problème du contrôle optimal consiste en ce que parmi toutes les fonctions de contrôle admissibles u(x) pour laquelle la solution correspondante de l'équation aux β-différences dans (3.15) satisfait les conditions aux limites

$$D_\beta^i y(a) = D_\beta^i y(b) = c_i, i = 1, 2, ..., n-1. \tag{3.26}$$

Trouver ce problème pour lequel la solution en question est un extremum pour la fonctionnelle dans (3.25). Pour cela, il convient de réduire l'équation aux β-différences (3.24) au système d'équations aux β-différences du premier ordre de rang n (supposons que l'équation (3.24) puisse être résolue en rapport avec $D_\beta^n y(x)$) :
Soit

$$\begin{aligned} z_1 &= y(x), \\ z_2 &= D_\beta y(x), \\ &\vdots \\ z_n &= D_\beta^{n-1} y(x) \end{aligned}$$

et

$$z = \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}.$$

(3.24) et (3.26) peuvent s'écrire simplement

$$\begin{gathered} D_\beta z(x) = \tilde{f}^0(x, z(x), u(x)), \\ z(a) = z(b) = C, \end{gathered} \tag{3.27}$$

et la fonctionnelle dans (3.25) prend la forme

$$\tilde{J}(z(x), u(x)) = \int_a^b \tilde{f}(x, z(x), u(x)) d_\beta x. \tag{3.28}$$

Notons au passage que les algorithmes d'évaluation de $\tilde{f}^0$ et $\tilde{f}$ sont élémentaires . Ainsi suite au β-problème de Lagrange, notre extremum problème consiste à trouver l'extremum du fonctionnelle sous les contraintes ci-dessous (remarquez que comme il n'y a pas toute dérivée de u(x), aucune contrainte de limite n'est nécessaire) :

$$\hat{J}(y(x), u(x)) = \int_a^b \{\tilde{f}(x, z(x), u(x)) - \lambda(x)[\tilde{f}^0(x, z(x), u(x)) - D_\beta z]\} d_\beta x \tag{3.29}$$

$z(a) = z(b) = C.$

D'après (3.16), le β-système d'Euler-Lagrange correspondant s'écrit

$$\begin{aligned} (\tilde{f}_z - \lambda(x)\tilde{f}^0_z) - D_\beta[\lambda(\beta^{-1}(x))] &= 0, \\ (\tilde{f}_u - \lambda(x)\tilde{f}^0_u) &= 0. \end{aligned} \tag{3.30}$$

En combinant (3.30) avec la première équation dans (3.27), nous concluons que la solution du problème satisfait le système :

$$\begin{aligned} D_\beta z &= H_\lambda, \\ D_\beta[\lambda(\beta^{-1}(x))] &= -H_z, \\ H_u &= 0, \end{aligned} \tag{3.31}$$

où

$$H(x, z, \lambda, u) = -\tilde{f}(x, z, u) + \lambda(x)\tilde{f}^0(x, z, u). \tag{3.32}$$

Vu les similitudes du problème posé et de la formule obtenue (équations (3.31)- (3.32)), avec leurs analogues en contrôle optimal continu, on peut dire que nous avions affaire avec une β-version d'une des versions du « principe du maximum » [**?**, **?**]. Ainsi nous pouvons faire référence à H dans (3.32) comme la β-fonction de Hamilton-Pontriagyn, (3.31) comme le β-système de Hamilton-Pontriagyn. Rappelons que la référence à Pontriagyn est liée à le « principe du maximum » dans [16], celui de Hamilton est lié au fait que dans le cas du calcul pur de variation (la fonction et le système de contrôle ne sont pas présents explicitement), les β-systèmes de Hamilton et de Hamilton-Pontriagyn sont équivalents (voir la sous-section suivante pour la β-situation).

3.2.4 Interconnexion entre le β-calcul variationnel, le β-problème du contrôle optimal et le β-système de Hamilton

Ici, nous voulons montrer que pour le cas le plus simple de recherche de l'extremum de la fonctionnelle

$$J(y(x)) = \int_a^b F(y(x), D_\beta y(x)) d_\beta x,$$
$$y(a) = y(b) = c_0. \tag{3.33}$$

Les trois types de problèmes sont équivalents à la β-équation d'Euler-Lagrange, les β-système de Hamilton-Pontriagyn et β-système de Hamilton. Nous montrons cela en trois étapes :

a)Nous montrons d'abord comment obtenir le β-système de Hamilton à partir de la β-équation d'Euler-Lagrange.

Pour la fonctionnelle (3.33), la β-équation d'Euler-Lagrange s'écrit

$$F_0(y(x), D_\beta y(x)) - D_\beta[F_1(y(\beta^{-1}(x)), D_\beta(y(\beta^{-1}(x))] = 0. \tag{3.34}$$

Soit

$$\lambda(x) = F_1(y(x), D_\beta y(x)), \tag{3.35}$$

et

$$H = -F + \lambda(x) D_\beta y. \tag{3.36}$$

Alors on obtient de (3.33),(3.35) et (3.36) le β-système de Hamilton

$$\begin{aligned} D_\beta y &= +H_\lambda(y(x), \lambda, D_\beta y), \\ D_\beta[\lambda(\beta^{-1}x)] &= -H_y(y(x), \lambda, D_\beta y). \end{aligned} \tag{3.37}$$

b) Pour obtenir le β-système de Hamilton-Pontriagyn à partir du β-système de Hamilton (3.37), il suffit supposer que u(x) = $D_\beta y(x)$ est l'équation de contrôle pour l'équation initiale non contrôlée donnée le problème extrême. Dans ce cas, (3.37) donne

$$\begin{aligned} D_\beta y &= +H_\lambda(y(x), \lambda, u(x)), \\ D_\beta[\lambda(\beta^{-1}x)] &= -H_y(y(x), \lambda, u(x)), \end{aligned} \tag{3.38}$$

avec

$$H(y(x), \lambda(x), u(x)) = -F(y(x), u(x)) + \lambda(x) u(x), \tag{3.39}$$

β-fonction de Hamilton-Pontriagyn, et de (3.35) nous obtenons la troisième équation de

(3.31) :

$$H_u = 0. \tag{3.40}$$

c) Enfin nous montrons comment obtenir la β-équation d'Euler-Lagrange (3.34) à partir du β-système de Hamilton-Pontriagyn (3.38) - (3.40). D'après (3.39) et (3.40), on a

$$\lambda(x) = F_1(y(x), u(x)) = F_1(y(x), D_\beta y(x)). \tag{3.41}$$

tandis qu'à partir de (3.38) on obtient

$$D_\beta[\lambda(\beta^{-1}(x))] = F_0(y(x), u(x)) = F_0(y(x), D_\beta y(x)). \tag{3.42}$$

Finalement, (3.41) et (3.42) donnent la β-équation d'Euler-Lagrange (3.34).

Conclusion

Dans ce travail, nous avons introduit le calcul variationnel d'un opérateur général D_β dans le but de généraliser le calcul variationnel basé sur la dérivée aux différences et le calcul variationnel basé sur la dérivée aux q-différences.

La β-Équation d'Euler-Lagrange, le β-problème isopérimétrique, le β-problème de Lagrange et le β-problème du contrôle optimal ont été étudiés.

Bibliographie

[1] A.B.Malinowska, Torres, DFM : The Hahn quantum variational calculus. J. Optim. Theory Appl. 147, 419-442 (2010).

[2] A. E. Hamza, Abdel-Shakoor M. Sarhan, Enas M. Shehata and Khaled A. Aldwoah, A general quantum difference calculus, Advances. in Difference Equations, 2015 :182.

[3] A.E.Hamza,S.M Ahmed : Existence and uniqueness of solutions of Hahn difference equations. Adv. Differ. Equ. 2013, 316 (2013).

[4] A.E. Hamza, A.M. Sarhan, E.M. Shehata and K.A. Aldowah, A general quantum difference calculus, Advances in Difference Equations, Springer, 2015(182), (2015).

[5] A.E.Hamza, A.M. Sarhan, E.M.Shehata : Exponential, trigonometric and hyperbolic functions associated with a general quantum difference operator. Adv. Dyn. Syst. Appl. 12(1), 25–38 (2017).

[6] A.E.Hamza, E.M. Shehata : Existence and uniqueness of solutions of general quantum difference equations. Adv. Dyn. Syst. Appl. 11, 45–58 (2016).

[7] A.P.Kartaschev : Rojestvinie.Differential equations and variational calculus,(Nauka, Moscou, 1986), 1986.

[8] F. H. Jackson, q-Difference equations, Amer. J. Math. 32, 1910, no. 4, 305–314.

[9] G.Bangerezako, Variational calculus on q-nonuniform lattices, J. Math. Anal. Appl. 306 (2005) 161-179.

[10] G.Bangerezako, Variational q-calculus J. Math. Anal. Appl. 289 (2004) 650-665.

[11] J.A.Cadzow , Discrete calculus of variations, Int. J. Control, Vol. 11, no3 (1970) 393-407.

[12] K.A.Aldwoah : Generalized Time Scales and the Associated Difference Equations. PhD thesis, Cairo University (2009).

[13] M.Bohner : Calculus of variations on time scales. Dyn. Syst. Appl. 13, 339-349 (2004).

[14] M.H.Annaby,Z.S.Mansour : q-Fractional Calculus and Equations. Springer, Berlin (2012).

[15] M.H.Annaby, V.Hamza,K.A Aldwoah : Hahn difference operator and associated Jackson-Nörlund integrals. J. Optim.Theory Appl. 154, 133-153 (2012).

[16] N.Faried, E.M.Shehata, R.M. El Zafarani : On homogeneous second order linear general quantum difference equations. J. Inequal. Appl. 2017, 198 (2017).

[17] R.F.Curtain, A.J.Pritchard : Functional Analysis in Modern Applied Mathematics. Elsevier, Amsterdam (1977).

[18] V.Kac, P.Cheung, : Quantum Calculus. Springer, New York (2002).

[19] W. Hahn, ¨Uber Orthogonalpolynome, die q-Differenzengleichungen gen¨ ugen, Math. Nachr. 2, 1949, 4–34.