Université du Burundi

Dépôt institutionnel officiel **https://repository.ub.edu.bi**

Grenier du Savoir du Burundi Mémoires et Thèses

2023-03

Fonctions moyennes généralisées surles entiers sans facteur carré

CINYABUGUMA KASISI, Moïse

UB

https://repository.ub.edu.bi/handle/123456789/380

Téléchargé depuis le dépôt institutionnel officiel de l'Université du Burundi

UNIVERSITE DU BURUNDI

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Centre de Recherche en Mathématiques et Physique

Fonctions moyennes généralisées sur les entiers sans facteur carré

Par

CINYABUGUMA KASISI Moïse

Mémoire présenté et défendu en vue de l'obtention du Diplôme de Master en Mathématiques Fondamentales et Appliquées

<u>Sous la direction du</u> :

Prof. Servat NYANDWI

Bujumbura, Mars 2023

"***Tout est arrangé par le nombre***"**.**

Pythagore

Composition du jury

Pr Gaspard BANGEREZAKO (**Président**)

Dr Janvier Pesser NTAHOMVUKIYE (**Secrétaire**)

Prof. Servat NYANDWI (**Directeur**)

Dr Rénovat NKUNZIMANA (**Membre**)

Dédicace

– A mes chers parents,

– A ma chère épouse Kasole Muhindo Martine,

– A mes chers enfants,

– A toute ma famille, mes frères, soeurs et amis,

Je dédie ce modeste travail.

CINYABUGUMA Kasisi Moïse

Remerciements

La réalisation de ce mémoire a été possible grâce au concours de plusieurs personnes à qui je voudrais témoigner ma gratitude la plus profonde.

Je voudrais tout d'abord adresser toute ma reconnaissance au Professeur Servat NYANDWI, Directeur de ce mémoire, pour l'accompagnement scientifique digne de portée dont il m'a fait bénéficier. Sa disponibilité, sa rigueur, ses remarques et suggestions constructives resteront d'un souvenir inoubliable.
Je remercie également les membres du jury pour avoir accepté d'examiner ce travail et, par ricochet, tous les enseignants des départements de Mathématique et Physique de la faculté des sciences de l'Université du Burundi qui n'ont ménagé aucun effort pour élargir mon champ de connaissances et de compétences scientifiques.

Mes remerciements s'adressent également à tous mes chefs et mes collègues de service de l'Observatoire Volcanologique de Goma (OVG), de l'Institut Majengo, de l'Université Catholique Sapientia (UCS/Goma), de l'Université du Cinquantenaire (Uni-50/Lwiro), de l'ISP/Machumbi, de l'ISP/Nyiragongo et de l'ULPGL/Goma, pour le privilège de l'encouragement qu'ils m'ont inconditionnellement réservé.

Un « merci », tout à fait particulier et non le moins élégant, aux familles Bakulikira N.J. Dieudonné, Kasole Innocent, Bashizi K. Jean-Claude, Nyakalala M. Pacifique, Metre B. Dug, Bagalwa S. Jean-Paul, David Byamungu W., Tumsifumungu B. Bertin et Katembo B. Axel, ainsi qu'à la soeur Ninaw'abana Jeannette et à l'Abbé Migabo N. Hilaire, pour leur marque de sympathie et leur proximité toutes particulières.

Cette page de remerciements ne saurait ne pas faire mention, de façon spéciale et tout à fait particulière, des noms des profs Katcho K., Mavonga T. Georges, Dario T. et Mushagalusa N. Jean-Marie. Je leur dois une fière chandelle.

Que mes frères et sœurs ainsi que mes amis, pour leur marque de sympathie, se sentent concernés par cette page de remerciements.

J'aimerai remercier, en fin, tous mes camarades des départements de Mathématique et Physique, faculté des sciences de l'Université du Burundi, pour leur confiance et leurs encouragements incessants pendant notre parcours de ce niveau d'études.

Résumé

En théorie des nombres, les fonctions arithmétiques sont souvent d'un comportement erratique. Certaines de ces fonctions prennent des petites valeurs ou des grandes valeurs. Ce comportement est le point de départ qui motive une étude en moyenne de ces fonctions.

Dans ce mémoire, nous nous sommes intéressés aux propriétés arithmétiques et à l'estimation de la fonction sommatoire de la fonction

$$f_g(n) = \frac{1}{h(n)} \sum_{d|n} g(d) f(d), \tag{1}$$

où f et g sont des fonctions strictement positives telles que g s'annule en tout entier ayant un facteur au moins carré et h la fonction définie par le produit de convolution $h = g * \mathbb{1}$.

Abstract

In number theory, arithmetic functions are often erratic. Some of these functions take small values or large values. This behavior is the starting point that motivates a study of these functions on average.
In this dissertation, we are interested in the arithmetic properties and the estimation of the summation function of the function

$$f_g(n) = \frac{1}{h(n)} \sum_{d|n} g(d) f(d), \tag{2}$$

where f and g are strictly positive functions such that g cancels at any integer with at least one squared factor and h is the function defined by the convolution product $h = g * \mathbb{1}$.

Table des matières

Composition du Jury **i**

Dédicace **ii**

Remerciements **iii**

Résumé **iv**

Abstract **v**

Table des matières **vi**

Notations **viii**

Avant-propos **x**

Introduction générale **1**

1 Généralités sur les fonctions arithmétiques **4**

1.1 Définitions, propriétés et opérations sur les fonctions arithmétiques [2, 14, 24, 32] 4

1.2 Propriétés de certaines fonctions arithmétiques 9

1.3 Fonction sommatoire associée à une fonction arithmétique 14

1.4 Série de Dirichlet associée à une fonction arithmétique 18

1.4.1 Définition 18

1.4.2 Séries de Dirichlet et produit eulérien 18

1.4.3 Une autre représentation de la fonction Zêta de Riemann 19

1.4.4 Les séries de Dirichlet associées aux fonctions $\tau,\ \varphi,\ k^{\omega},\ \varphi_k,\ \mu^2, \sigma,$ et μ 20

2 Propriétés et fonctions sommatoires de quelques fonctions moyennes 21

2.1 Introduction 21

2.2 Quelques propriétés des fonctions $f_i,\ 1 \leq i \leq 7$ 22

2.3 Fonctions sommatoires de quelques fonctions moyennes 25

3 Etude de la fonction f_g 37

3.1 Quelques propriétés de la fonction f_g 37

3.2 Série de Dirichlet associée à la fonction f_g 40

3.3 Fonction sommatoire et valeur moyenne de la fonction f_g 43

3.3.1 Estimation de la fonction sommatoire de f_g lorsque f est additive . 43

3.3.2 Estimation de la fonction sommatoire de f_g lorsque f est multiplicative 48

Conclusion générale 52

Bibliograhie 53

Notations, Sigles et Abréviations

1. $\mathbb{N}^*$ désigne l'ensemble des entiers naturels non nuls.

2. $m|n$ signifie m divise n et $m \nmid$n signifie m ne divise pas n.

3. (m, n) ou $m \wedge n$ désigne le pgcd de m et n.

4. p désigne un entier naturel premier.

5. $d|n$ signifie d divise n

6. $p^r||n$ signifie que p^r divise n et p^{r+1} ne divise pas n.

7. $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x.

8. ln ou log désigne la fonction logarithme népérien.

9. $\{x\}$ désigne la partie fractionnaire ou décimale de x.

10. $Re(s) = \sigma$ et $Im(s) = t$ désignent respectivement la partie réelle et la patie imaginaire du nombre complexe $s = \sigma + it$.

11. $\sum\limits_{n \leq x} 1$ désigne le nombre d'entiers $n \leq x$.

12. $f(x) = O(g(x))$ ou $f \ll g$, les notations de Landau et Vinog radov, pour signifier qu'il existe une constante réelle $c > 0$ et un réel x_0 tel que pour tout $x \geq x_0, |f(x)| \leq cg(x)$.

13. $f = o(g)$ signifie que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{|f(x)|}{g(x)} = 0$.

14. $n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$ ou $\left(n = \prod_{p^\alpha | n} p^\alpha\right)$ est la factorisation de n en facteurs premiers.

15. $(f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d)g(\frac{n}{d})$ désigne la convolution des fonctions f et g.

16. $\mathbb{P}$: ensemble des nombres premiers.

17. $\mathcal{F}(\mathbb{N}^*, \mathbb{C})$: ensemble des fonctions arithmétiques.

18. $\mathcal{A}$: ensemble des fonctions additives.

19. $\mathfrak{m}$: ensemble des fonctions multiplicatives.

20. $\log_2 x$ signifiera $\log \log x$

21. TNP : Théorème des Nombres Premiers

22. $f \sim g$ signifie que $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

Avant-propos

Ce rapport de recherche est un mémoire de Master en Mathématiques fondamentales et appliquées. Il s'inscrit dans le cadre du cours de Théorie des nombres.
Le but de ce mémoire est d'étudier les propriétés arithmétiques et la moyenne sur les entiers quelconques de la fonction $f_g(n) = \frac{1}{h(n)}\sum\limits_{d|n} g(d)f(d),$ f et g étant des fonctions strictement positives telles que g s'annule en tout entier non libre de carré et h la fonction arithmétique telle que $h = g * \mathbb{1}$.

Il s'agit, en utilisant les méthodes élémentaires et analytiques, d'estimer les valeurs moyennes de la fonction $f_g(n) = \frac{1}{h(n)}\sum\limits_{d|n} g(d)f(d)$ lorsque la fonction f est soumise à la condition que la série $\sum\limits_{p} \frac{|f(p)-1|}{p^{\delta}}$ $converge, \ lorsque$ $0 < \delta < 1$, et f est, en particulier, multiplicative.

Introduction générale

L'étude des fonctions arithmétiques est, en théorie des nombres, un thème central car elle révèle des informations sur l'anatomie des entiers. Par exemple, en établissant que $\sum\limits_{n\leq x}\omega(n) \sim x\log\log x$ $(x \to \infty)$, où $\omega(n)$ représente le nombre de facteurs premiers distincts de n, nous apprendrons qu'en moyenne un nombre n a approximativement $\log\log x$ facteurs. Plusieurs autres fonctions arithmétiques nous aident aussi à obtenir plus d'informations sur la structure multiplicative des nombres entiers [5].

Par ailleurs, les fonctions arithmétiques sont très souvent mal connues et possèdent un comportement qui semble irrégulier et sans cohérence [12]. En effet, en étudiant la fonction $f_0(n) = \prod\limits_{p|n}(p-2)$, Olivier R. et Pierrine B. [12] ont trouvé,à priori, que la suite des valeurs sur les entiers entre 1 et 54 n'informe que peu, même peu, même si l'on se contente de cette suite, sur les entiers impairs de ce sous-ensemble de $\mathbb{N}$.

Pour obtenir plus d'informations, Olivier R. et Pierrine B. [12] ont cherché à déterminer l'ordre moyen de la fonction ci-dessus par une approximation de $\frac{1}{x}\sum\limits_{n\leq x} f_0(n)$; une irrégularité en est alors sortie. Ils ont, précisément, montré que si x est un nombre réel, alors pour un certain réel $\theta \in]\frac{1}{2}, 1[\subset \mathbb{R}$, $\frac{1}{x}\sum\limits_{n\leq x} f_0(n) = cx + O\left(x^\theta\right)$, où $c = \frac{1}{2}\prod\limits_{p\geq 2}\left(1 - \frac{3}{p(p+1)}\right) = 0,14630\cdots$

L'ordre moyen a ainsi pour effet de dissimiler certaines valeurs aberrantes prises par la fonction arithmétique considérée [12].

Ce qui précède témoigne de l'intérêt qu'il y a, d'une part, à étudier les fonctions arithmétiques et, d'autre part, à déterminer l'ordre moyen d'une fonction arithmétique.

Dans ce cadre, Sébastien Gaboury [14], J. M. De Koninck et J. Grah [4], P. Ndoricimpa, S. Nyandwi et al. [29] ont mené leur réflexion sur les fonctions arithmétiques définies comme suit :

$$f_1(n) = \frac{1}{\tau(n)}\sum_{d|n} f(d), \tag{3}$$

$$f_2(n) = \frac{1}{2^{\omega(n)}} \sum_{\substack{d|n \\ (d,\frac{n}{d})=1}} f(d), \tag{4}$$

$$f_3(n) = \frac{1}{2^{\omega(n)}} \sum_{d|n} \mu^2(n) f(d) \tag{5}$$

$$f_4(n) = \frac{1}{\tau(n)} \sum_{d|n} \mu^2(d), \tag{6}$$

$$f_5(n) = \frac{1}{\tau(n)} \sum_{d|n} \mu^2(d) f(d), \tag{7}$$

$$f_6(n) = \frac{1}{2^{\omega(n)}} \sum_{\substack{d|n \\ (d,\frac{n}{d})=1}} \mu^2(d), et \tag{8}$$

$$f_7(n) = \frac{1}{2^{\omega(n)}} \sum_{\substack{d|n \\ (d,\frac{n}{d})=1}} \mu^2(d) f(d). \tag{9}$$

où f est une fonction arithmétique. Ces derniers [29] ont estimé les fonctions sommatoires sur les entiers y-friables.

L'étude de la valeur moyenne ne se limite non seulement pas aux entiers ordinaires mais aussi aux entiers soumis à des contraintes multiplicatives. Par exemple, A. Congera et S. Nyandwi [3], ont orienté leur réflexion vers la fonction piltz sur les entiers sans facteur premier dans un intervalle de type $]y, z]$.

Ces différentes recherches ont fait l'estimation de l'ordre moyen pour des fonctions arithmétiques ne portant que sur une catégorie d'entiers.

Le présent mémoire, quant à lui, généralise la recherche sur les fonctions moyennes introduites par M. De Koninck et J. Grah [4] et portant sur les entiers ordinaires ou sur les diviseurs unitaires.

L'étude de la fonction $f_g(n) = \frac{1}{h(n)} \sum_{d|n} g(d) f(d)$, où $h = g * \mathbb{1}$, g étant une fonction multiplicative et f une fonction arithmétique non nulle, et sa fonction sommatoire englobe celle de la fonction $\frac{1}{2^{\omega(n)}} \sum_{d|n} \mu^2(n) f(n)$.

Pour faciliter la compréhension de ce mémoire, nous l'avons subdivisé en trois chapitres précédés par la présente introduction et sanctionnés par une conclusion générale.

Le premier chapitre concerne les généralités sur les fonctions arithmétiques et les séries de Dirichlet associées aux fonctions arithmétiques. Le deuxième chapitre constitue un condensé des propriétés et des principaux résultats sur les fonctions arithmétiques moyennes et explorées par les autres chercheurs.

Le troisième chapitre, en fin, constitue une exploration des propriétés et une estimation de la fonction sommatoire de la fonction f_g et se termine par des applications.

Chapitre 1

Généralités sur les fonctions arithmétiques

L'étude des fonctions arithmétiques est un thème central en théorie des nombres.

En effet, l'étude de celles-ci nous révèle des puissantes propriétés des nombres naturels

Par exemple, ces fonctions peuvent être utilisées pour étudier les propriétés de certains ensembles de diviseurs [14, 24, 29].

Pour faciliter la compréhension de ce travail, nous définissons quelques concepts utilisés dans la suite de ce mémoire.

1.1 Définitions, propriétés et opérations sur les fonctions arithmétiques [2, 14, 24, 32]

Définition 1.1. *Une fonction arithmétique est une application de* $\mathbb{N}^*$ *dans* $\mathbb{C}$ *; c'est donc une suite complexe définie sur* $\mathbb{N}^*$ *[2, 14, 24, 32].*

On montre que l'ensemble $\mathcal{F}(\mathbb{N}^*, \mathbb{C})$ *des fonctions arithmétiques est un groupe additif et* $(\mathcal{F}(\mathbb{N}^*, \mathbb{C}), +, .)$ *est un* $\mathbb{C}$*-espace vectoriel.*

Comme exemples de fonctions arithmétiques, on a :

1) La fonction unité $\mathbb{1}(n)$ qui vaut 1 pour chaque nombre entier n.

2) La fonction définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $e(n) = \begin{cases} 1 \text{ si } n = 1 \\ 0 \text{ si non} \end{cases}$;

3) La fonction N définie par $N(n) = n$: c'est la fonction identité.

4) La fonction $\tau(n) = \sum\limits_{d|n} 1$ qui compte le nombre de diviseurs de l'entier n

5) La fonction $\omega(n) = \sum\limits_{p|n} 1$ qui compte le nombre de diviseurs premiers de l'entier n
6) La fonction $\sigma(n) = \sum\limits_{d|n} d$ donne la somme des diviseurs de n.
7) La fonction $\varphi(n) = card\,\{1 \leq k \leq n,\ (k,n) = 1\}$ qui compte le nombre d'entiers plus petits que n et copremiers à n.
8) La fonction de Möbius $\mu(n) = \begin{cases} (-1)^r & \text{si } n = \prod\limits_{i=1}^{r} p_i \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$
9) La fonction $\mu^2(n) = |\mu(n)|$
Les fonctions arithmétiques les plus étudiées sont les fonctions additives et les fonctions multiplicatives.

Définition 1.2. *Une fonction arithmétique f est dite multiplicative si $f(1) = 1$ et $f(mn) = f(m)f(n)$ dès que $(m,n) = 1$. Elle est dite*

- Complètement multiplicative si $f(mn) = f(m)f(n)$, quels que soient les naturels m et n.

- Fortement multiplicative si $f(p^r) = f(p)$ quels que soient l'entier premier p et l'entier $r \geq 1$.

Proposition 1.1. *Soit f une fonction arithmétique. Si f est multiplicative, alors pour tout entier $n = \prod\limits_{p^r|n} p^r$, on a $f(n) = \prod\limits_{p|n} f(p^r)$ [2, 14, 24, 32].*

Proposition 1.2. *Si f et g sont deux fonctions arithmétiques multiplicatives, alors il en est de même des fonctions fg et $\frac{f}{g}(g \neq 0)$ [2, 14, 24, 32].*

Définition 1.3. *On appelle convolution de Dirichlet ou produit de convolution de deux fonctions arithmétiques f et g, la fonction F définie par $F(n) = \sum\limits_{d|n} f(d)g(\frac{n}{d})$, pour tout naturel $n \geq 1$. On note $F = f * g$.*

Proposition 1.3. *Si f et g sont des fonctions multiplicatives, alors $F = f * g$ est aussi multiplicative.*

Démonstration. Soient m et n deux entiers positifs tels que $(m,n) = 1$. On pose $d = d_1 d_2$, où $d_1|m$ et $d_2|n$. Dans ce cas, on aura $(d_1, d_2) = 1$. Par conséquent

$$\begin{aligned}
F(mn) &= \sum_{d|mn} f(d)g(\frac{mn}{d}) \\
&= \sum_{d_1|m}\sum_{d_2|n} f(d_1d_2)g(\frac{mn}{d_1d_2}) \\
&= \sum_{d_1|m}\sum_{d_2|n} f(d_1)f(d_2)g(\frac{m}{d_1})g(\frac{n}{d_2}) \\
&= \sum_{d_1|m} f(d_1)f(d_2)g(\frac{m}{d_1})\sum_{d_2|n} f(d_2)g(\frac{n}{d_2}) \\
&=F(m)F(n)
\end{aligned}$$

□

Corollaire 1.1. *Soit f une fonction multiplicative ; alors la fonction F définie par $F(n) = \sum_{d|n} f(d)$ est également multiplicative*

Démonstration. Il suffit, en effet, de remarquer que $F = f * \mathbb{1}$ et utiliser la proposition 1.3. □

Définition 1.4. *Une fonction arithmétique f est dite "additive" si $f(mn) = f(m) + f(n)$ dès que $(m, n) = 1$. Si, de plus, pour tout $m, n \in \mathbb{N}^*$, $f(mn) = f(m) + f(n)$, alors on dit que la fonction f est complètement additive.*

Dans le cas où, pour tout nombre p et pour tout entier $\alpha \geq 1$, $f(p^\alpha) = f(p)$, on dit que la fonction f est fortement additive.

Proposition 1.4. *Si f, g et h sont des fonctions arithmétiques, alors :*

i) $f * g = g * f$

ii) $(f * g) * h = f * (g * h)$

iii) $f * (g + h) = f * g + f * h$

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}^*$; alors on a :

i)

$$\begin{aligned}
(f * g)(n) &= \sum_{d|n} f(d)g(\frac{n}{d}) \\
&= \sum_{d|n} g(d)f(\frac{n}{d}) \\
&= (g * f)(n)
\end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned}
[(f*g)*h](n) &= \sum_{d|n}(f*g)(d)h(\frac{n}{d}) \\
&= \sum_{dm=n}(f*g)(d)h(m) \\
&= \sum_{dm=n}(\sum_{kl=d}f(k)g(l))h(m) \\
&= \sum_{klm=n}f(k)g(l)h(m) \\
&= \sum_{k|n}f(k)\sum_{l|\frac{n}{k}}g(l)f(\frac{n}{kl}) \\
&= \sum_{k|n}f(k)(g*h)((\frac{n}{k})) \\
&= (f*(g*h))(n)
\end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned}
[f*(g+h)](n) &= \sum_{d|n}(f)(d)[g(\frac{n}{d}+h(\frac{n}{d})] \\
&= \sum_{d|n}(f)(d)g(\frac{n}{d}+\sum_{d|n}(f)(d)h(\frac{n}{d}) \\
&= (f*g)(n)+(f*h)(n)
\end{aligned}$$

□

Proposition 1.5. *La fonction arithmétique* $\mathbf{e}$ *définie par* $\forall n \in \mathbb{N}*$,

$$\mathbf{e}(n) = \begin{cases} 1 & si\ n = 1 \\ 0 & si\ non \end{cases}$$

est un élément neutre pour la loi "$*$" de convolution de Dirichlet dans l'ensemble $\mathcal{F}(\mathbb{N}^*, \mathbb{C})$ *des fonctions arithmétiques.*

Démonstration. Soit f une fonction arithmétique, alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
(f*e)(n) &= \sum_{d|n}f(d)e(\frac{n}{d}) \\
&= f(n).e(1) \\
&= f(n)
\end{aligned}$$

Donc $f*e = f$ et comme la loi $*$ est commutative, alors $e*f = f$.

D'où e est l'élément neutre. □

Définition 1.5. *Soient f et g deux fonctions arithmétiques. On dit que g est "l'inverse" de f et on note $g = f^{-1}$ si $f * g = g * f = e$; on dit alors que f est inversible et vice-versa.*

Proposition 1.6. *Une fonction arithmétique f est inversible si et seulement si $f(1) \neq 0$.*

Démonstration. Si f est inversible, d'inverse g, alors $f * g = \sigma$. En particulier, $f(1).g(1) = 1$ et $f(1) \neq 0$. Réciproquement, si $f(1) \neq 0$, alors $\frac{1}{f(1)} \neq 0$. Considérons alors la fonction arithmétique g telle que $(f * g)(n) = e(n)$.
-Si, $n = 1$, alors $\sum\limits_{d|1} f(d)g(\frac{1}{d}) = e(1)$ i.e. $f(1)g(1) = 1$ i.e. $g(1) = \frac{1}{f(1)}$
-Si $n > 1$, alors

$$\begin{aligned}
&\sum_{d|n} f(d)g(\frac{n}{d}) = e(n) = 0\\
&f(1)g(n) + \sum_{d|n,d>1} f(d)g(\frac{n}{d}) = 0\\
&f(1)g(n) = -\sum_{d|n,d>1} f(d)g(\frac{n}{d})\\
&g(n) = -\frac{1}{f(1)} \sum_{d|n,d>1} f(d)g(\frac{n}{d})
\end{aligned}$$

Ainsi, la fonction arithmétique g définie par récurrence par

$$g(n) = \begin{cases} \frac{1}{f(n)} & \text{si } n = 1 \\ -\frac{1}{f(n)} \sum\limits_{d|n,d>1} f(d)g(\frac{n}{d}) & \text{si n>1} \end{cases}$$

vérifie $f * g = e$. D'où f est est inversible, d'inverse g. □

Définition 1.6. *On appelle fonction de Dekind, la fonction φ_k définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par $\varphi_k(n) = n\prod\limits_{p|n}(1 + \frac{k-1}{p})$, $k \in \mathbb{N}$ et $k \geq 2$.*

Définition 1.7. *[15] (valuation p-adique).*
Pour chaque nombre premier p, la valuation p-adique, notée v_p, est définie comme la fonction arithmétique qui associe à chaque nombre entier n l'exposant de p dans sa factorisation canonique. $v_p(n)$ est donc le plus grand entier k tel que p^k divise n.

Proposition 1.7. *[15].(Théorème de Legendre). Pour tout nombre premier p et pour tout entier non nul n,*

$$v_p(n!) = \sum_{k \geq 1} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$$

Démonstration. Ce résultat est démontré dans [15]. □

1.2 Propriétés de certaines fonctions arithmétiques

Proposition 1.8. *[15]*

i) *Pour tout entier premier* p *et* $\forall r \in \mathbb{N}^*$, *on a* $\tau(p^r) = r + 1$.

ii) *Si* $n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{r_i}$ *est la factorisation de* n, *alors* $\tau(n) = \prod_{i=1}^{k} (r_i + 1)$, *où* k *est le nombre de facteurs premiers de* n.

iii) $\tau = \mathbb{1} * \mathbb{1}$.

iv) *Pour tout nombre premier* p, *on a* $\sigma(p) = p+1$, $\varphi(p) = p-1$, $\varphi_j(p) = p\left(1 + \frac{j-1}{p}\right)$, $\mu^2(p) = 1$, $\omega(p) = 1$

v) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{d|n} \varphi(d) = n$ *(Formule de Gauss)*

Proposition 1.9. *[15]*

i) *Pour tout entier premier* p *et* $\forall r \in \mathbb{N}^*$, *on a* $\tau(p^r) = r + 1$.

ii) *Si* $n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{r_i}$ *est la factorisation de* n, *alors* $\tau(n) = \prod_{i=1}^{k} (r_i + 1)$, *où* k *est le nombre de facteurs premiers de* n.

iii) $\tau = \mathbb{1} * \mathbb{1}$.

iv) *Pour tout nombre premier* p, *on a* $\sigma(p) = p+1$, $\varphi(p) = p-1$, $\varphi_j(p) = p\left(1 + \frac{j-1}{p}\right)$, $\mu^2(p) = 1$, $\omega(p) = 1$

v) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{d|n} \varphi(d) = n$ *(Formule de Gauss)*

Corollaire 1.2.

$$
\begin{aligned}
&i)\ \ \tau(n) = \prod_{p^r|n}(r+1)\\
&ii)\ \ \varphi(n) = n\prod_{p|n}\left(1-\frac{1}{p}\right)\\
&iii)\ \ \varphi_j(n) = n\prod_{p|n}\left(1-\frac{j-1}{p}\right)\\
&iv)\ \ \sigma(n) = \prod_{i=1}^{r}\frac{1-p_i^{i+1}}{1-p_i}\\
&v)\ \ \mu(n) = \begin{cases}(-1)^r & si\ \ n = P_1.P_2\cdots P_r\\ 0 & si\ \ sinon\end{cases}
\end{aligned}
$$

Proposition 1.10.

$$
\begin{aligned}
&i)\ \ \mu * \mathbb{1} = e\ \Rightarrow \mathbb{1} = \mu^{-1}\\
&ii)\ \ \varphi = \mu * N\\
&iii)\ \ \varphi * \mathbb{1} = N\\
&iv)\ \ \tau^{-1} = \mu * \mu\\
&v)\ \ \mu^2 * \mathbb{1} = 2^{\omega}\\
&vi)\ \ \varphi_k = k^{\omega} * \varphi
\end{aligned}
$$

Démonstration. i)$\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$
\begin{aligned}
(\mu * \mathbb{1})(n) &= \sum_{d|n}.\mathbb{1}\left(\frac{n}{d}\right)\mu(d)\\
&= \sum_{d|n}\mu(d)\\
&= \begin{cases}1 & \text{si } n = 1\\ 0 & \text{si } n > 1\end{cases}\\
&= e(n)
\end{aligned}
$$

D'où $\mu * \mathbb{1} = e$. On en déduit que $\mu^{-1} = \mathbb{1}$ et $\mathbb{1}^{-1} = \mu$

ii) D'après la proposition 1.8 (Formule de Gauss), on a :

$$\sum_{d|n}\varphi(d) = n \tag{1.1}$$

où $\varphi * \mathbb{1} = N$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\varphi &= N * \mathbb{1}^{-1}\\ &= N * \mu\end{aligned}$$

iii) Découle directement de (i) et (ii).
iv)$\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}\tau(n) &= \sum_{d|n} 1\\ &= (\mathbb{1} * \mathbb{1})(n)\end{aligned}$$

D'où $\tau = \mathbb{1} * \mathbb{1}$.
Par conséquent, $\tau^{-1} = \mathbb{1}^{-1} * \mathbb{1}^{-1} = \mu * \mu$

v) Comme les fonctions 2^ω et $\mu^2 * \mathbb{1}$ sont multiplicatives, il suffira de montrer que, pour tout entier $r \geq 1$, $2^{\omega(p^r)} = (\mu^2 * \mathbb{1})(p^r)$.

On a :

$$2^{\omega(p^r)} \quad = 2$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}(\mu^2 * \mathbb{1})(p^r) &= \sum_{d|p^r} \mu^2(d)\mathbb{1}(\tfrac{p^r}{d})\\ &= \sum_{d|p^r} \mu^2(d)\\ &= \sum_{i=1}^{r} \mu^2(p^i)\\ &= 2\end{aligned}$$

Il en résulte que pour tout naturel $n \geq 1$, on a :
$(\mu^2 * \mathbb{1})(n) = 2^\omega(n)$
Ce qui traduit que $\mu^2 * \mathbb{1} = 2^\omega$

vi) Il suffira de montrer que, pour tout entier
$r \geq 1$, $\varphi_k(p^r) = (k^\omega * \varphi)(p^r)$.

En effet, d'une part, d'après la définition,

$$\begin{aligned}\varphi_k(p^r) &= p^r\prod_{q|p}(1+\tfrac{k-1}{q})\\ &= \ p^r(1+\tfrac{k-1}{p})\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}(k^\omega*\varphi)(p^r) &= \sum_{d|p^r}k^{\omega(d)}\varphi(\tfrac{p^r}{d})\\ &= \sum_{i=0}^{r}k^{\omega(p^i)}\varphi(\tfrac{p^r}{p^i})\\ &= \sum_{i=0}^{r}k^{\omega(p^i)}\varphi(p^{r-i})\\ &= \varphi(p^r)+\sum_{i=1}^{r-1}k^{\omega(p^i)}\varphi(p^{r-i})+k\\ &= p^r(1-\tfrac{1}{p})+k+\sum_{i=1}^{r-1}k.(p^{r-i})(1-\tfrac{1}{p})\\ &= p^r(1-\tfrac{1}{p})+k+kp^r\sum_{i=1}^{r-1}\tfrac{1}{p^i}(1-\tfrac{1}{p})\\ &= p^r(1-\tfrac{1}{p})+k+kp^r(1-\tfrac{1}{p})\sum_{i=1}^{r-1}\tfrac{1}{p^i}\end{aligned}$$

Comme

$$\sum_{i=1}^{r-1}\frac{1}{p^i} = \sum_{i=0}^{r-1}\frac{1}{p^i}-1$$

Alors

$$\begin{aligned}(k^\omega*\varphi)(p^r) &= p^r(1-\tfrac{1}{p})+k+kp^r(1-\tfrac{1}{p})\left(\sum_{i=0}^{r-1}\tfrac{1}{p^i}-1\right)\\ &= p^r(1-\tfrac{1}{p})+k+kp^r(1-\tfrac{1}{p})\left(\tfrac{1-\frac{1}{p^r}}{1-\frac{1}{p}}-1\right)\\ &= p^r(1-\tfrac{1}{p})+k+kp^r(1-\tfrac{1}{p})\left(\tfrac{1-\frac{1}{p^r}-1+\frac{1}{p}}{1-\frac{1}{p}}\right)\\ &= p^r(1-\tfrac{1}{p})+k+kp^r\left(\tfrac{1}{p}-\tfrac{1}{p^r}\right)\\ &= p^r(1-\tfrac{1}{p})+k+kp^{r-1}-k\\ &= p^r(1-\tfrac{1}{p})+\tfrac{1}{p}kp^r\\ &= p^r(1-\tfrac{1}{p}+\tfrac{k}{p})\\ &= p^r(1+\tfrac{k-1}{p})\\ &= \varphi_k(p^r)\end{aligned}$$

Il en résulte que pour tout naturel $n\geq 1$, on a : $(k^\omega*\varphi)(n)=\varphi_k(n)$.
D'où $\varphi_k=k^\omega*\varphi$. □

Proposition 1.11. *(Formule d'inversion de Möbius)*
Soit f une fonction arithmétique. $\forall n\in\mathbb{N}^*$, on a :

$$g(n)=\sum_{d|n}f(n) \quad ssi \quad f(n)=\sum_{d|n}\mu(d)g\left(\frac{n}{d}\right)$$

Démonstration. Supposons que $g(n) = \sum_{d|n} f(d)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$; alors

$$\begin{aligned} g(n) &= \sum_{d|n} f(d)\mathbb{1}\left(\frac{n}{d}\right) \\ &= (f * \mathbb{1})(n) \end{aligned}$$

Donc $g = f * \mathbb{1}$

Par conséquent, $g * \mathbb{1}^{-1} = f$

$$\begin{aligned} i.e \quad g * \mu &= f \\ i.e \quad f(n) &= (g * \mu)(n), \forall n \in \mathbb{N}^* \\ &= \sum_{d|n} \mu(d) g\left(\frac{n}{d}\right) \end{aligned}$$

D'où $f(n) = \sum_{d|n} \mu(d) g\left(\frac{n}{d}\right)$

Réciproquement, supposons que $f(n) = \sum_{d|n} \mu(d) g\left(\frac{n}{d}\right), \forall n \in \mathbb{N}^*$;

alors $f(n) = (\mu * g)(n)$

Par conséquent, $f = \mu * g$

$$\begin{aligned} ou \quad \mu^{-1} * f \quad &= g \\ ou \ \ encore \quad \mathbb{1} * f \quad &= g \end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*, g(n) &= (\mathbb{1} * f)(n) \quad = \sum_{d|n} f(d)\mathbb{1}\left(\frac{n}{d}\right) \\ &= \sum_{d|n} f(d) \end{aligned}$$

D'où $g(n) = \sum_{d|n} f(d)$ □

Remarque 1.1.

Les fonctions arithmétiques suivantes sont additives :

i) $\log n$

ii) $\wedge(n) = \begin{cases} \log p \quad si \quad n = p^r, r \geq 1 \\ 0 \quad sinon \end{cases}$ *où* $\wedge(n)$ *est la fonction de Von Mongoldt.*

On vérifie sans peine que $\mu * \log g = \wedge$

1.3 Fonction sommatoire associée à une fonction arithmétique

Définition 1.8. *Soit f une fonction arithmétique et x un réel ≥ 1. On appelle "fonction sommatoire de f", la fonction $S_f(x)$ définie par $S_f(x) = \sum_{n\leq x} f(n)$.*

Définition 1.9.

.On appelle fonction « logarithme intégral » et fonction d'« écart intégral », les fonctions réelles à variable réelle respectivement définies par

$$l_i(x) = \int_0^x \frac{dt}{\log t} \quad et \quad L_i(x) = l_i(x) - l_i(2) = \int_2^x \frac{dt}{\log t}$$

Exemple 1.1.

1 . La fonction $\pi(x)$: Pour $x \geq 1$, on désigne par $\pi(x)$ le nombre des nombres premiers inférieurs ou égaux à x.

$$\begin{aligned} \pi(x) &= card\{p \in \mathbb{N} : \ p \ premier \ et \ p \leq x\} \\ &= \sum_{p\leq x} 1 \end{aligned}$$

2 . La fonction $\theta(x)$ [15]. Pour tout $x \geq 1$, on définit la première fonction de Tchebychev $\theta(x)$ par $\theta(x) = \sum_{p\leq x} \log p$.

3 . La fonction $\psi(x)$ [15]. Pour tout $x \geq 1$, on définit la deuxième fonction de Tchebychev $\psi(x)$ par $\psi(x) = \sum_{1\leq r\leq \frac{\log x}{\log p}} \theta(x^{\frac{1}{r}})$.

4 . La fonction sommatoire de la fonction $\mathbb{1}$.
C'est la fonction notée $\sum_{n\leq x} 1$ et on a : $\sum_{n\leq x} 1 = \lfloor x \rfloor = x - \{x\}$

5 . La fonction sommatoire de μ^2 .
Elle a pour estimation $\sum_{n\leq x} \mu^2(n) = \frac{6}{\pi^2}x + O(\sqrt{x})$ [15]

Proposition 1.12. *[15] $\pi(x) = \frac{x}{\log x} + o(\frac{x}{(\log x)^2})$. (TNP)*

Corollaire 1.3. $\pi(x) \underset{x\to\infty}{\sim} \frac{x}{\log x}$.

En théorie des nombres, un des problèmes majeurs est l'estimation de la fonction sommatoire.

Pour estimer les fonctions sommatoires, on peut utiliser le lemme d'intégration par parties énoncé sous forme de proposition 1.13 ci-dessous.

Proposition 1.13. *[24] (Lemme d'Abel). Soient* (a_n), $n \geq 1$, *une suite de nombres complexes et* f *une fonction dérivable sur l'intervalle* $[1, x]$. *Si on pose* $A(x) = \sum\limits_{n \leq x} a_n$, *alors on a :*

$$\sum_{n \leq x} a_n f(n) = A(x)f(x) - \int_1^x A(t)f'(t)dt$$

Démonstration. En posant

$$S(x) = \sum_{n \leq x} a_n f(n),$$

et en évaluant le membre de gauche , nous obtenons

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n \leq x} (A(n) - A(n-1)f(n) \\ &= \sum_{n \leq x} A(n)f(n) - \sum_{n \leq x-1} A(n)f(n+1) \\ &= \sum_{n \leq x-1} A(n)(f(n) - f(n+1)) + A(\lfloor x \rfloor f(\lfloor x \rfloor) \quad \text{où } \lfloor x \rfloor \textit{ est la partie entière de } x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n \leq x-1} A(n) \int_n^{n+1} f^{'}(t)dt + A(x)f(\lfloor x \rfloor) \\ &= \sum_{n \leq x-1} \int_n^{n+1} f^{'}(t)dt + A(x)f(\lfloor x \rfloor) - f(x) + A(x)f(x) \\ &= -\int_1^{\lfloor x \rfloor} A(x)f^{'}(t)dt - \int_{\lfloor x \rfloor}^x A(t)f^{'}(t)dt + A(x)f(x) \\ &= A(x)f(x) - \int_1^x A(t)f^{'}(t)dt. \end{aligned}$$

□

Comme application à cette proposition, on a le corollaire suivant

Corollaire 1.4. *[24] Pour* $x \geq 1$, *on a* $\sum\limits_{n \leq x} \frac{1}{n} = \log x + \gamma + O(x^{-1})$,

où $\gamma = 1 - \displaystyle\int_1^\infty \frac{\{t\}}{t} dt = 0,577\cdots$ *est la constante d'Euler.*

Démonstration. On applique la proposition 1.12 en posant $a(n) = 1$ et $f(x) = \frac{1}{x}$. On obtient alors

$$\begin{aligned}\sum_{n\leq x}\tfrac{1}{n} &= A(x)f(x) - \int_1^x A(t)f'(t)dt \\ &= \tfrac{\lfloor x\rfloor}{x} + \int_1^x \frac{\lfloor x\rfloor}{t^2}dt \\ &= 1 - \tfrac{\{x\}}{x} + \int_1^x \frac{dt}{t} - \int_1^x \frac{\{t\}}{t}dt \\ &= \log x + \gamma + O(x^{-1})\end{aligned}$$

□

Proposition 1.14. *(Méthode de convolution)[15] Soient f et g deux fonctions arithmétiques et x un réel $x \geq 1$. On pose $F(x) = \sum_{n\leq x} f(n)$ et $G(x) = \sum_{n\leq x} g(n)$; alors on a :*

$$\begin{aligned}\sum_{n\leq x}(f*g)(n) &= \sum_{n\leq x} f(n)G(\tfrac{x}{n}) \\ &= \sum_{n\leq x} g(n)F(\tfrac{x}{n})\end{aligned}$$

Remarque 1.2. *La méthode de convolution est utilisée pour estimer la fonction arithmétique issue de la convolution de deux autres fonctions arithmétiques,la fonction sommatoire de l'une d'elles étant supposée connue. [29].*

On établie la proposition suivante :

Proposition 1.15. *[24] (La méthode de l'hyperbole) Soient f et g deux fonctions arithmétiques et x un réel $x \geq 1$. On pose $F(x) = \sum_{n\leq x} f(n)$, $G(x) = \sum_{n\leq x} g(n)$ et $H(x) = \sum_{n\leq x}(f*g)(n)$, où $f*g$ est le produit de convolution de f et g ; alors*

$$\begin{aligned}H(x) &= \sum_{n\leq x}(f*g)(x) \\ &= \sum_{1\leq d\leq a} f(d)G(\tfrac{x}{d}) + \sum_{1\leq a\leq b}(g)(a)F(\tfrac{x}{a}) - F(a)G(b)\end{aligned}$$

où a, $b \in \mathbb{R}^+$.

Démonstration. Soit $S = \{(d,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* : dq \leq x\}$; alors S comprend tous les points qui sont au-dessus de l'hyperbole $y = x$. Si (d,q) satisfait $dq \leq x$ tel que $ab = x$, alors $d \leq x$ ou $q \leq b$. En effet, si $d \geq a$, on a $q \leq \frac{x}{d} \leq \frac{a}{d} = b$.
On pose $S = A \cup B$ tel que

$$\begin{aligned}A &= \{(d,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* : dq \leq x, d \leq a\} \quad \textit{et} \\ B &= \{(d,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* : dq \leq x, q \leq b\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{d,q \\ dq\leq x}} f(d)g(d) &= \sum_{(d,q)\in A\cup B} f(d)g(q) \\
&= \sum_{(d,q)\in A} f(d)g(d) + \sum_{(d,q)\in B} f(d)g(d) - \sum_{(d,q)\in A\cap B} f(d)g(d) \\
&= \sum_{d\leq aq\leq \frac{x}{d}} f(d)g(d) + \sum_{q\leq bd\leq \frac{x}{d}} f(d)g(d) - \sum_{d\leq aq\leq b}\sum f(d)g(d) \\
&= \sum_{d\leq a} f(d) \sum_{q\leq \frac{x}{d}} g(q) + \sum_{q\leq b} g(q) \sum_{d\leq \frac{x}{q}} f(d) - \sum_{d\leq x} f(d) \sum_{q\leq d} g(d) \\
&= \sum_{d\leq a} f(d)G(\tfrac{x}{d}) + \sum_{q\leq b} g(q)F(\tfrac{x}{q}) - F(a)G(b)
\end{aligned}$$

□

Proposition 1.16. *[15] La fonction sommatoire de τ, notée $D(x)$, vérifie pour tout nombre réel $x \geq 1$, $D(x) = x\log x + (2\gamma - 1)x + O(\sqrt{x})$.*

Démonstration. Nous savons que $\tau = \mathbb{1} * \mathbb{1}$. □

Par conséquent,

$$\sum_{n\leq x} \tau(n) = \sum_{n\leq x}\sum_{d|n} 1 = \sum_{n\leq x}\sum_{ab\leq x} 1$$

Donc,

$$\begin{aligned}
\sum_{n\leq x} \tau(n) &= \sum_{1\leq d\leq\sqrt{x}} \sum_{n\leq \frac{x}{d}} 1 + \sum_{1\leq q\leq\sqrt{n}} \sum_{n\leq \frac{x}{q}} 1 - \sum_{n\leq\sqrt{x}} 1 \sum_{n\leq\sqrt{x}} 1 \\
&= \sum_{1\leq d\leq\sqrt{x}} \lfloor \frac{x}{d} \rfloor + \sum_{1\leq q\leq\sqrt{n}} \lfloor \frac{x}{q} \rfloor - \lfloor \sqrt{x} \rfloor^2 \\
&= 2\sum_{1\leq d\leq\sqrt{x}} (\frac{x}{d} - \{\frac{x}{d}\}) - (\sqrt{x} - \{\sqrt{x}\})^2 \\
&= 2x\sum_{1\leq d\leq\sqrt{x}} \frac{1}{d} - \sum_{1\leq d\leq\sqrt{x}} \{\frac{x}{d}\} - x + O(\sqrt{x})
\end{aligned}$$

Or, d'après le corollaire 1.4, $\displaystyle\sum_{1\leq d\leq\sqrt{x}} \frac{1}{d} = \log\sqrt{x} + \gamma + O(\frac{1}{\sqrt{x}})$.

Donc $D(x) = xlogx + (2\gamma - 1)x + O(\sqrt{x})$

Une autre méthode qu'on peut suivre pour estimer la fonction $S_f(x)$ est la méthode analytique via les séries de Dirichlet.

1.4 Série de Dirichlet associée à une fonction arithmétique

1.4.1 Définition

Définition 1.10. *[24] : La série de Dirichlet associée à une fonction arithmétique f est la série définie par*

$$D_f(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(n)}{n^s}, \text{ avec } Re(s) > 1 \tag{1.2}$$

où $s = \sigma + it$ est un nombre complexe.

Les réels $f(n)$ sont souvent appelées les coefficients de la série de Dirichlet. Si la série converge dans un domaine de convergence, on écrit $D_f(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(n)}{n^s}$ telle que $D_f(s)$ représente une fonction holomorphe dans le demi-plan de convergence absolue.

Si f(n)=1, alors $D_f(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$ est par définition la fonction de zêta de Riemann. On note $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$

Définition 1.11. *Soit $D_f(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(n)}{n^s}$ une série de Dirichlet. L'abscisse de convergence absolue de cette série est définie comme étant le plus petit nombre réel σ_a tel que si $\sigma > \sigma_a$, alors $\sum_{n\geq 1} |f(n)|n^{-\sigma}$ converge. Donc $\sigma_a = inf \left\{ \sigma : \sum_{n\geq 1} |f(n)|n^{-\sigma} < +\infty \right\}$.*

1.4.2 Séries de Dirichlet et produit eulérien

Le résultat suivant montre qu'une série de Dirichlet associée à une fonction arithmétique multiplicative admet une représentation en produit infini sur son démi-plan de convergence absolue. Cette représentation qui fait intervenir un produit portant uniquement sur les nombres premiers est fondamentale en arithmétique.

Proposition 1.17. *[24] Soit f une fonction arithmétique multiplicative et σ_a l'abscisse de convergence absolue de la série de Dirichlet $D_f(s) = \sum_{n\geq 1} f(n)n^{-s}$; alors pour tout $s \in \mathbb{C}$ tel que $D_f(s)$ converge absolument pour $Res(s) > \sigma_a$, on a :*

$$D_f(s) = \prod_p \left(\sum_{r=0}^{+\infty} \frac{f(p^r)}{p^{r^s}} \right).$$

Corollaire 1.5. *Soient f une fonction arithmétique complètement multiplicative et σ_a*

l'abscisse de convergence absolue de la série de Dirichlet, on a

$$\sum_{n\geq 1} f(n)n^{-s} = \prod_p \left(1 - \frac{f(p)}{p^s}\right)^{-1}$$

Démonstration. Comme $f(p^r) = (f(p))^r$ alors on a : $\sum_{n=1}^{m} \frac{f(n)}{n^s} = \prod_p \sum_{r=0}^{+N} \left(\frac{f(p)}{p^r}\right)^r$. Puisque le membre de gauche est fini, alors le membre de droite l'est aussi. Ainsi, pour tout nombre premier p, la série $\sum_r^{+\infty} \left(\frac{f(p)}{p^s}\right)^r$ converge. Donc nécessairement, on a $|f(p)| < |p^s|$ et on obtient que $\sum_{r=0}^{+\infty} \left(\frac{f(p)}{p^s}\right)^r = \prod_p \left(1 - \frac{f(p)}{p^s}\right)^{-1}$, ce qui donne le résultat. □

Un exemple de série de Dirichlet est la fonction zêta de Riemann, notée $\zeta(s)$; celle-ci est l'une des séries de Dirichlet les plus étudiées. Pour Re(s)>1, $\zeta(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s}$.

Ainsi, d'après le corollaire 1.5, $\zeta(s) = \prod_p (1 - \frac{1}{p^s})^{-1}$.

Cette dernière représentation est utilisée pour démontrer que $\zeta(s) \neq 0$ et Re(s)>1. En outre, elle est utilisée pour établir analytiquement le théorème des nombres premiers.

1.4.3 Une autre représentation de la fonction Zêta de Riemann

Il est immédiat de vérifier que la série de Dirichlet $\sum_{n\geq 1} n^{-s}$ converge absolument pour $\mathrm{Re}(s) > 1$. Ainsi, d'après la proposition 1.16, la fonction $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$ est analytique dans le demi-plan $\mathrm{Re}(s) > 1$. Une étude détaillée de cette fonction est founie dans [7] et [29].

Le résultat suivant permet de prolonger la fonction $\zeta(s)$ dans le domaine $0 <$ Re(s) < 1.

Proposition 1.18. *[24] Si 0 < Re(s) < 1, on a* $\zeta(s) = \frac{s}{s-1} - s \int_1^{+\infty} \frac{\{t\}}{t^{s+1}}$.

Démonstration. Le lemme d'Abel implique

$$\begin{aligned}
\zeta(s) &= \frac{\lfloor x \rfloor}{x^s} + s \int_1^x [t] t^{-(s+1)} dt \\
&= \frac{\lfloor x \rfloor}{x^s} + s \int_1^x t^{-s} ds - s \int_1^x \frac{t}{t^{s+1}} dt \\
&= \frac{1}{x^{s-1}} - \frac{\{x\}}{x^s} + s \left(\frac{1}{(1-s)x^{s-1}} - \frac{1}{1-s}\right) + \cdots \\
&= \frac{s}{s-1} - s \int_1^{+\infty} \frac{t}{t^{s+1}} dt.
\end{aligned}$$

□

1.4.4 Les séries de Dirichlet associées aux fonctions $\tau,\ \varphi,\ k^{\omega},\ \varphi_k$, μ^2, σ, et μ

.

Proposition 1.19. *Les séries de Dirichlet associées aux fonctions ci-dessus sont données par [24] :*

$$i) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} = \frac{1}{\zeta(s)},\ \ Re(s) > 1 \tag{1.3}$$

$$ii) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varphi(n)}{n^s} = \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)},\ \ Re(s) > 2 \tag{1.4}$$

$$iii) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\tau(n)}{n^s} = \zeta^2(s),\ \ Re(s) > 1 \tag{1.5}$$

$$iv) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mu^2(n)}{n^s} = \frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)},\ \ Re(s) > 1 \tag{1.6}$$

$$v) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sigma(n)}{n^s} = \zeta(s)\zeta(s-1),\ \ Re(s) > 2 \tag{1.7}$$

$$vi) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\psi_k(n)}{n^s} = \zeta(s-1)\prod_p \left(1 - \frac{1-k}{p^s}\right),\ \ Re(s) > 2 \tag{1.8}$$

$$vii) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{k^{\omega(n)}}{n^s} = \frac{\zeta^k(s)}{\zeta(ks)},\ \ Re(s) > 1 \tag{1.9}$$

Démonstration. Pour démontrer cette proposition, on utilise le produit eulérien via la convolution. □

Après les généralités sur les fonctions arithmétiques et les séries de Dirichlet associées, nous entamons le chapitre 2.Ce chapitre est consacré à l'étude des fonctions sommatoires des fonctions moyennes d'une classe de fonctions arithmétiques.

Chapitre 2

Propriétés et fonctions sommatoires de quelques fonctions moyennes

2.1 Introduction

Nous rappelons qu'un nombre entier strictement positif est dit « sans facteur carré » s'il n'est divisible par aucun carré d'entier autre que 1, [2].

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'étude d'une catégorie de fonctions arithmétiques dont la plus part d'entre elles portent sur les entiers sans facteur carré. Les fonctions arithmétiques considérées sont celles définies respectivement par

$$f_1(n) = \frac{1}{\tau(n)} \sum_{d|n} f(d), \tag{2.1}$$

$$f_2(n) = \frac{1}{2^{\omega(n)}} \sum_{\substack{d|n \\ (d,\frac{n}{d})=1}} f(d) \tag{2.2}$$

$$f_3(n) = \frac{1}{2^{\omega(n)}} \sum_{d|n} \mu^2(d) f(d) \tag{2.3}$$

$$f_4(n) = \frac{1}{\tau(n)} \sum_{d|n} \mu^2(d) \tag{2.4}$$

$$f_5(n) = \frac{1}{\tau(n)} \sum_{d|n} \mu^2(d) f(d) \tag{2.5}$$

$$f_6(n) = \frac{1}{2^{\omega(n)}} \sum_{\substack{d|n \\ (d,\frac{n}{d})=1}} \mu^2(d) \tag{2.6}$$

$$f_7(n) = \frac{1}{2^{\omega(n)}} \sum_{\substack{d|n \\ (d,\frac{n}{d})=1}} \mu^2(d) f(d) \tag{2.7}$$

où f est une fonction arithmétique.

Les propriétés de ces fonctions ont été suffisamment étudiées dans [4], [14] et [29].
Ces fonctions vérifient un certain nombre de propriétés de base et s'interprètent comme des moyennes des valeurs moyennes de la fonction f sur des sous-ensembles de diviseurs d'un entier n.

Pour faciliter la compréhension de la suite de ce chapitre, nous l'avons subdivisé en trois sections :
- L'étude des propriétés de la fonction $f_i,\ i \leq i \leq 7$

- L'estimation des fonctions sommatoires $S_{f_i}(x)$ de $f_i,\ 1 \leq i \leq 5$, dans le cas où f est additive.
- L'estimation de la valeur moyenne des fonctions f_i dans le cas où f est multiplicative.

2.2 Quelques propriétés des fonctions $f_i,\ 1 \leq i \leq 7$

Les trois premières fonctions vérifient les relations données dans les propositions 2.1 et 2.2. Ces relations sont démontrées dans [4], [14].

Proposition 2.1. *Soit f une fonction arithmétique. Si f est additive, alors pour tout nombre entier $n \geq 1$, on a :*

i) $f_1(n) = \sum_{p^\alpha | n} \frac{1}{\alpha+1} \sum_{r=1}^{\alpha} f(p^r)$

ii) $f_2(n) = \frac{1}{2} \sum_{p|n} f(p)$

iii) $f_3(n) = \frac{1}{2} f(n)$

Corollaire 2.1. *Soit f une fonction arithmétique et n un nombre entier ≥ 1*

i) si f est complètement additive, alors $f_1(n) = f_2(n) = \frac{1}{2} f(n)$

ii) si f est fortement additive, alors $f_3(n) = \sum_{p^\alpha | n} \frac{\alpha}{\alpha+1} f(p)$

Démonstration. On utilise la proposition 2.1 et le caractère « complètement additive » ou « fortement additive » de la fonction f. □

Proposition 2.2. *Soit f une fonction arithmétique. Si f est multiplicative, alors pour tout nombre entier $n \geq 1$, on a :*

i) $f_1(n) = \frac{1}{\tau(n)} \prod_{p^\alpha || n} \left(1 + \sum_{r=1}^{\alpha} f(p^r)\right)$

ii) $f_2(n) = \frac{1}{2^{\omega(n)}} \prod\limits_{p^\alpha | n} (1 + f(p))$

iii) $f_3(n) = \frac{1}{2^{\omega(n)}} \prod\limits_{p^\alpha || n} (1 + f(p^\alpha))$

Corollaire 2.2. *Soit f une fonction arithmétique et n un nombre entier ≥ 1.*

i) Si f est fortement multiplicative, alors

$$f_1(n) = \frac{1}{\tau(n)} \prod_{p^\alpha || n} (1 + \alpha f(p)) \ \ et \ f_2(n) = f_3(n) = \frac{1}{2^{\omega(n)}} \prod_{p^\alpha | n} (1 + f(p))$$

ii) Si f est complètement multiplicative, alors

$$f_3(n) = \frac{1}{2^{\omega(n)}} \prod_{p^\alpha | n} (1 + (f(p))^\alpha) \, .$$

Démonstration. On utilise la proposition 2.2 et la condition « fortement multiplicative » ou « complètement multiplicative » . □

Des propositions 2.1 et 2.2, nous déduisons le corollaire 2.3 suivant :

Corollaire 2.3.

i) Si $f(n) = \Omega(n)$, alors $f_1(n) = f_3(n) = \frac{1}{2}\Omega(n)$ et $f_2(n) = \frac{1}{2}\left(\Omega o \gamma\right)(n)$, où γ est la fonction noyau définie par

$$\gamma(n) = \begin{cases} 1 \quad si \quad n = 1 \\ \prod\limits_{p|n} p \quad si \quad n \geq 2. \end{cases}$$

ii) Si f est la fonction indicatrice φ d'Euler, alors $f_1(n) = \frac{n}{\tau(n)}$, $f_2(n) = \frac{1}{2^{\omega(n)}}\gamma(n)$ et $f_3(n) = \frac{1}{2^{\omega(n)}} \prod\limits_{p^\alpha || n} (p^\alpha - p^{\alpha-1} + 1)$

iii) Si $f(n) = \sigma(n)$, alors $f_1(n) = \frac{1}{\tau(n)} \prod\limits_{p^\alpha || n} \left(1 + \sum\limits_{r=1}^{\alpha} \frac{p^{r+1}-1}{p-1}\right)$, $f_2(n) = \frac{1}{2^{\omega(n)}} \prod\limits_{p^\alpha || n} (p + 2)$ et $f_3(n) = \frac{1}{2^{\omega(n)}} \prod\limits_{p^\alpha || n} \frac{p^{\alpha+1}+p-2}{p-1}$

Démonstration. i) Comme Ω est additive, alors d'après la proposition 2.1, on a :

$$\begin{aligned} f_1(n) &= \sum_{p^\alpha | n} \frac{1}{\alpha+1} \sum_{i=1}^{\alpha} \Omega(p^i) \\ &= \sum_{p^\alpha | n} \frac{1}{\alpha+1} \sum_{i=1}^{\alpha} i \\ &= \sum_{p^\alpha | n} \frac{\alpha(\alpha+1)}{2(\alpha+1)} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{p^\alpha | n} \alpha \\ &= \frac{1}{2} \Omega(n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_3(n) &= \frac{1}{2} \Omega(n) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{p | n} \Omega(p) \\ &= \frac{1}{2} \omega(n) \end{aligned}$$

ii) et iii) se démontrent de façon analogue. □

Proposition 2.3. *[14] Soit f une fonction arithmétique et p un nombre premier.*

i) Si f est multiplicative ou additive et $f(p) = 1$, alors f_6 est multiplicative et $f_6(n) = 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$

ii) Si f est multiplicative et $\forall \alpha \in \mathbb{N}^*,\ f(p^\alpha) = \alpha$, alors f_7 est multiplicative

Remarque 2.1.

- C'est possible que f soit additive sans que f_6 et f_7 le soient.

- Les fonctions f_6 et f_7 jouent un rôle capital en théorie des nombres et en cryptographie car elles sont liées à la factorisation d'un entier en produit de facteurs différents ; ce qui est un des points forts de la théorie élémentaire des nombres [29].

La démonstration des propositions 2.1 et 2.2 découle du caractère (additif ou multiplicatif) de la fonction f.

- Comme nous l'avons signalé au début de ce mémoire,les fonctions ci-dessus définies s'interprètent comme des moyennes de valeurs de la fonction arithmétique f sur les sous ensembles des diviseurs de n (diviseurs ordinaires, sans facteur carré, unitaires).

La connaissance des propriétés de ces fonctions sur un entier $n \geq 1$ peut servir à l'étude des valeurs moyennes sur les entiers y-friables et de leurs séries de Dirichlet, voir dans [29].

Contrairement aux fonctions f_1, f_2 et f_3, les fonctions f_6 et f_7 ne présentent pas l'additivité mais présentent plutôt la multiplicativité pour une certaine classe de fonctions f comme, par exemple, lorsque $f(p) = 1$, pour tout nombre premier p. Il est connu que, en théorie des nombres, l'estimation des sommes partielles (fonctions sommatoires) des fonctions arithmétiques peut faciliter la connaissance de la densité des sous-ensembles de n voir dans [32]. Ceci nous incite à estimer les fonctions sommatoires des fonctions f_i, lorsque $1 \leq i \leq 5$. Même si nous n'aurons pas besoin de ces résultats dans la suite, nous les établissons pour montrer les propriétés particulières de $\omega(n)$ et $\Omega(n)$.

2.3 Fonctions sommatoires de quelques fonctions moyennes

Dans ce paragraphe, nous estimons les fonctions sommatoires des fonctions f_i, pour $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, lorsque f est une fonction additive.

Théorème 2.1. *[32] (Théorème de Mertens) Pour tout nombre réel $x \geq 2$, on a :*

$$\sum_{p \leq x} \frac{\log p}{p} = \log x + O(1). \tag{2.8}$$

De plus, il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} = \log \log x + c + O\left(\frac{1}{\log x}\right). \tag{2.9}$$

En particulier, les séries $\sum\limits_{p \in \mathbb{P}} \frac{\log p}{p}$ et $\sum\limits_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p}$ divergent.

Démonstration. Pour démontrer la relation 2.8, on va calculer $\log(\lfloor x \rfloor !)$ de deux manières. Tout d'abord, on utilise le lemme d'Abel (proposition 1.13) , avec $a(n) = 1,\ n \geq 1$, $f(t) = \log t$ et $x > 1$. On vérifie immédiatement que $A(t) = \lfloor t \rfloor$; ce qui donne

$$\log(\lfloor x \rfloor !) = \sum_{n \leq \lfloor x \rfloor} \log n = \lfloor x \rfloor \log x - \int_1^x \lfloor t \rfloor \frac{dt}{t}$$

En introduisant $\{t\} = t - \lfloor t \rfloor$, la partie fractionnaire du réel t, on obtient

$$\begin{aligned} \log(\lfloor x \rfloor !) &= (x - \{x\}) \log x - \int_1^x \frac{t - \{t\}}{t} dt \\ &= x \log x - \{x\} \log x - (x - 1) + \int_1^x \frac{\{t\}}{t} dt \end{aligned}$$

Comme $0 \leq \{t\} < 1$, on a

$$\left|\int_1^x \frac{\{t\}}{t} dt\right| \leq \int_1^x \frac{dt}{t} = \log x.$$

D'où, on en déduit

$$\log(\lfloor x \rfloor !) = x \log x - x + O(\log x). \tag{2.10}$$

D'autre part, en écrivant

$$\begin{aligned}\log(\lfloor x \rfloor !) &= \log\left(\prod_{p \leq x} p^{v_p(\lfloor x \rfloor !)}\right)\\ &= \sum_{p \leq x} v_p(\lfloor x \rfloor !) \log p,\end{aligned}$$

et en utilisant la formule de Legendre (proposition 1.7), on obtient

$$\log(\lfloor x \rfloor !) = \sum_{p \leq x} \log p \sum_{m \geq 1} \left\lfloor \frac{\lfloor x \rfloor}{p^m} \right\rfloor.$$

Or, on vérifie immédiatement que

$$\left\lfloor \frac{\lfloor x \rfloor}{p^m} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{p^m} \right\rfloor.$$

D'où

$$\begin{aligned}\log(\lfloor x \rfloor !) &= \sum_{p \leq x} \sum_{m \geq 1} \left\lfloor \frac{x}{p^m} \right\rfloor \log p\\ &= \sum_{p \leq x} \left\lfloor \frac{x}{p} \right\rfloor \log p + \sum_{p \leq x} \sum_{m \geq 2} \left\lfloor \frac{x}{p^m} \right\rfloor \log p\\ &= x \sum_{p \leq x} \frac{\log p}{p} - \sum_{p \leq x} \left\{\frac{x}{p}\right\} \log p + \sum_{p \leq x} \sum_{m \geq 2} \left\lfloor \frac{x}{p^m} \right\rfloor \log p.\end{aligned}$$

Remarquons que

$$\sum_{p \leq x} \left\{\frac{x}{p}\right\} \log p \leq \sum_{p \leq x} \log p = \Theta(x) \leq (2 \log 2) x.$$

De plus,

$$\begin{aligned}\sum_{p\leq x}\sum_{m\geq 2}\left\lfloor\frac{x}{p^m}\right\rfloor\log p &\leq x\sum_{p\leq x}\sum_{m\geq 2}\frac{\log p}{p^m}\\ &= x\sum_{p\leq x}\log p\left(\frac{1}{p^2}\frac{1}{1-\frac{1}{p}}\right)\\ &= x\sum_{p\leq x}\frac{\log p}{p(p-1)}.\end{aligned}$$

Comme la série $\sum\limits_{n}\frac{\log n}{n(n-1)}$ converge, on en déduit que

$$\sum_{p\leq x}\sum_{m\geq 2}\left\lfloor\frac{x}{p^m}\right\rfloor\log p = O(x)$$

Ce qui entraîne que

$$\log(\lfloor x\rfloor!) = x\sum_{p\leq x}\frac{\log p}{p} + O(x). \tag{2.11}$$

En comparant (2.10) et (2.11), on en déduit finalement la formule (2.8).

Pour prouver l'estimation (2.9), on introduit la fonction

$$R(x) = \sum_{p\leq x}\frac{\log p}{p} - \log x,$$

et on applique la formule d'Abel à $f(t) = \frac{1}{\log t}$ et

$$a(n) := \begin{cases}\frac{\log p}{p} & \text{si n=p}\\ 0 & \text{si non}\end{cases}$$

On vérifie aisément que

$$A(x) = \sum_{n\leq x}a(n) = \sum_{p\leq x}\frac{\log p}{p} = R(x) + \log x,$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}\sum_{p\leq x}\frac{1}{p} = \frac{1}{2} + \sum_{2\leq p\leq x}\frac{1}{p} &= \frac{1}{2} + \frac{A(x)}{\log(x)} - \frac{A(2)}{\log 2} - \int_2^x A(t)f'(t)dt\\ &= \frac{1}{2} + \frac{R(x)}{\log x} - \frac{R(2)}{\log 2} + \int_2^x\frac{R(t)}{t(\log t)^2}dt + \int_2^x\frac{dt}{t\log t}dt\\ &= \log\log x - \log\log 2 + \frac{1}{2} - \frac{R(2)}{\log 2} + \frac{R(x)}{\log x} + \int_2^x\frac{R(t)}{t(\log t)^2}dt.\end{aligned}$$

Remarquons tout d'abord que $R(2) = \frac{\log 2}{2} - \log 2 = -\frac{1}{2} log\ 2$, d'où

$$\sum_{p \le x} \frac{1}{p} = \log\log x + 1 - \log\log 2 + \frac{R(x)}{\log x} + \int_2^x \frac{R(t)}{t(\log t)^2} dt.$$

D'autre part, d'après (2.8), on a $R(t) = O(1)$; ce qui implique, en particulier, que l'intégrale

$$\int_2^{+\infty} \frac{R(t)}{t(\log t)^2} dt$$

converge et si on note A sa valeur, on obtient

$$\begin{aligned}\sum_{p \le x} \frac{1}{p} &= \log\log x + 1 - \log\log 2 + A + \frac{R(x)}{\log x} - \int_x^{+\infty} \frac{R(t)}{t(\log t)^2} dt \\ &= \log\log x + c + \frac{R(x)}{\log x} - \int_x^{+\infty} \frac{R(x)}{t(\log t)^2} dt,\end{aligned}$$

où $c = 1 - \log\log 2 + A$. Il reste à remarquer, en notant $R = \underset{t \ge 2}{sup} |R(t)|$, que

$$\left| \frac{R(x)}{\log x} - \int_x^{+\infty} \frac{R(t)}{t(\log t)^2} dt \right| \le \frac{R}{\log x} + R \int_x^{+\infty} \frac{dt}{t(\log t)^2}$$

et

$$\int_x^{+\infty} \frac{dt}{t(\log t)^2} = \left[-\frac{1}{\log t} \right]_x^{+\infty} = \frac{1}{\log x}.$$

D'où

$$\left| \frac{R(x)}{\log x} - \int_x^{+\infty} \frac{R(t)}{t(\log t)^2} dt \right| \le \frac{2R}{\log x},$$

Ce qui implique l'estimation (2.9) et achève la démonstration du théorème. □

Du lemme d'intégration par parties et du théorème 2.1, on déduit le corollaire suivant

Corollaire 2.4. *[4] Pour tout nombre réel $x \ge 1$, on a :*

$$\sum_{n \le x} \omega(n) = x \log\log x + c_1 x + O\left(\frac{x}{\log x} \right),$$

où

$$c_1 = \gamma + \sum_p \left(\log\left(1 - \frac{1}{p}\right) + \frac{1}{p} \right)$$

et

$$\gamma = 1 - \int_1^{+\infty} \frac{\{u\}}{u^2} du = - \int_0^{+\infty} \frac{\log u}{e^u} du \simeq \ 0,5772115664000 \quad \textit{est la constante d'Euler.}$$

Démonstration. Par définition de $\omega(n)$, on a

$$\begin{aligned}\sum_{n\leq x}\omega(n) &= x\sum_{n\leq x}\sum_{p|n} 1\\ &= \sum_{n\leq x}\lfloor\frac{x}{p}\rfloor.\end{aligned}$$

D'après le théorème 2.1, on a

$$\sum_{p\leq x}\frac{1}{p} = \log\log x + c + O\left(\frac{1}{\log x}\right)$$

Mais $\lfloor\frac{x}{p}\rfloor = \frac{x}{p} - \left\{\frac{x}{p}\right\}$. Donc $\sum\limits_{n\leq x}\omega(n) = x\log\log x + cx + O\left(\frac{x}{\log x}\right)$ car $\sum_{p\leq x} 1 << \frac{x}{\log x}$

□

Le résultat suivant est un résultat préparatoire de la proposition 2.4. Il est établi dans [4].

Lemme 2.1. *Soit f une fonction additive constante sur l'ensemble des nombres premiers $\mathcal{P}$ et que $f(p^\alpha)-f(p^{\alpha-1})$ est borné pour tout $\alpha \geq 2$; alors les expressions $f_1(p^\alpha)-f_1(p^{\alpha-1})$, $f_2(p^\alpha)-f_2(p^{\alpha-1}$ et $f_3(p^\alpha)-f_3(p^{\alpha-1})$ sont également bornées sur $\mathcal{P}$ et $\alpha \geq 2$. De plus, les fonctions f_1, f_2 et f_3 sont constantes sur $\mathcal{P}$.*

Démonstration. La démonstration de ce lemme découle de l'additivité de la fonction f et de la condition $f(p^\alpha - f(p^{\alpha-1}) = O(1)$. □

Utilisant le lemme 2.1, J M. De Konnick et J. Grah [4] ont démontré la proposition suivante :

Proposition 2.4. *[4] Soit f une fonction additive, x un réel ≥ 1. Il existe des constantes $c_1,\ c_2$ et c_3 telles que :*

i)

$$\sum_{n\leq x} f_1(n) = \frac{c_1}{2}x\log\log x + xD_{f_1}(1) + O\left(\frac{x}{\log x}\right)$$

ii)

$$\sum_{n\leq x} f_2(n) = \frac{c_2}{2}x\log\log x + \frac{1}{2^s}xD_{f_2}(1) + O\left(\frac{x}{\log x}\right)$$

iii)

$$\sum_{n\leq x} f_3(n) = \frac{c_3}{2}\log\log x + \frac{1}{2^s} x D_{f_3}(1) + O\left(\frac{x}{\log x}\right)$$

Avant d'aborder les fonctions sommatoires des fonctions f_i, $1 \leq i \leq 5$, lorsque f est multiplicative, nous établissons un lemme intermédiaire utile pour la suite.

Lemme 2.2. *[32] Pour tout nombre réel $x \geq 1$, on a :*

$$\sum_{n\leq x} \mu^2(n) = \frac{6}{\pi^2}x + O(\sqrt{x}).$$

Démonstration. Posons $M(x) = \sum_{n\leq x} \mu^2(n)$. Par définition de $\mu^2(n)$, on a :

$$\begin{aligned}
M(x) &= \sum_{n\leq x}\sum_{d^2|n}\mu(d) \\
&= \sum_{d\leq\sqrt{x}} \mu(d)\lfloor\frac{x}{d^2}\rfloor \\
&= \sum_{d\leq\sqrt{x}} \mu(d)\left(\frac{x}{d^2} - \{\frac{x}{d^2}\}\right) \\
&= x\sum_{d=1}^{+\infty}\frac{\mu(d)}{d^2} - x\sum_{d>\sqrt{x}}\frac{\mu(d)}{d^2} + O\left(\sum_{d\leq\sqrt{x}}|\mu(d)|\right) \\
&= x\prod_p(1-\frac{1}{p^2}) - x\sum_{d>\sqrt{x}}\frac{\mu(d)}{d^2} + O\left(\sum_{d\leq\sqrt{x}}1\right) \\
&= \frac{x}{\zeta(2)} - x\sum_{d>\sqrt{x}}\frac{\mu(d)}{d^2} + O(x^{\frac{1}{2}})
\end{aligned}$$

Comme $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$, alors

$$M(x) = \frac{6x}{\pi^2} - x\sum_{d>\sqrt{x}}\frac{\mu(d)}{d^2} + O(x^{\frac{1}{2}})$$

Or,

$$\begin{aligned}|\sum_{d>\sqrt{x}} \frac{\mu(d)}{d^2}| &\leq \sum_{d>\sqrt{x}} \frac{|\mu(d)|}{d^2} \\ &\leq \sum_{d>\sqrt{x}} \frac{1}{d^2} \\ &\leq \int_{\sqrt{x}}^{+\infty} \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{\sqrt{x}}\end{aligned}$$

Donc $|x \sum_{d>\sqrt{x}} \frac{\mu(d)}{d^2}| << \sqrt{x}$.

Par conséquent,

$$M(x) = \frac{6}{\pi^2}x + O(x^{\frac{1}{2}}).$$

□

Lemme 2.3. *Soit α un réel > 0 et f une fonction multiplicative dont la série de Dirichlet $D_f(s) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{f(n)}{n^s}$ converge absolument pour $Re(s) > \alpha$ et soit $h = \mu^2 * f$;alors on a : $\sum\limits_{n\leq x} h(n) = \frac{6}{\pi^2} x D_f(1) + O\left(x^\theta\right)$, où $\theta = \max(\frac{1}{2}, \alpha)$.*

Démonstration. En posant $M(x) = \sum\limits_{n\leq x} \mu^2(n)$, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{n\leq x} h(n) &= \sum_{n\leq x} (\mu^2 * f)(n) \\ &= \sum_{n\leq x} f(n) M\left(\frac{x}{n}\right)\end{aligned}$$

D'après le lemme 2.2, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{n\leq x} h(n) &= \frac{6}{\pi^2} x \sum_{n\leq x} \frac{f(n)}{n} + O\left(\sum_{n\leq x} \frac{|f(n)|}{\sqrt{n}} \sqrt{x}\right) \\ &= \frac{6}{\pi^2} x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(n)}{n} - \frac{6x}{\pi^2} \sum_{n>x} \frac{f(n)}{n} + O\left(\sum_{n\leq x} \frac{|f(n)}{\sqrt{n}} \sqrt{x}\right)\end{aligned}$$

Pour estimer le second terme du second membre, on écrit $n = n^{1-\alpha} n^\alpha$

Comme $n > x, alorsona :$ $\frac{1}{n^{1-\alpha}} < \frac{1}{x^{1-\alpha}}$;

$$x \sum_{n\geq x} \frac{f(n)}{n} << x^\alpha \sum_{n\geq x} \frac{f(n)}{n^\alpha} << x^\alpha$$

Pour le troisième terme, on a

$$\frac{f(n)}{\sqrt{n}} = \frac{f(n)}{n^{\alpha} n^{\frac{1}{2}+\alpha}}$$

1^{er} cas : $\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1$

Comme $n \leq x$ et que $\alpha - \frac{1}{2} \geq 0$, on a $n^{\alpha-\frac{1}{2}} \leq x^{\alpha-\frac{1}{2}}$

D'où

$$\sum_{n\leq x} \frac{f(n)}{\sqrt{n}} \sqrt{x} << x^{\alpha} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(n)}{n^{\alpha}} << x^{\alpha}$$

$2^{è}$ cas : $0 < \alpha < \frac{1}{2} \Rightarrow n^{\alpha} \leq n^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} \Rightarrow \frac{1}{n^{\alpha}}$

Donc

$$\sum_{n\leq x} \frac{|f(n)|}{\sqrt{n}} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|f(n)|}{n^{\alpha}} << 1$$

□

Avant de présenter les estimations des fonctions sommatoires de f_i $(4 \leq i \leq 7)$(avec f multiplicative), nous présentons les séries de Dirichlet associées à ces fonctions.

Proposition 2.5. *[29] Pour $Re(s) > 1$, les séries de Dirichlet respectivement associées aux fonctions f_4, f_5, f_6 et f_7 sont données par les relations suivantes :*

i) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{f_4(n)}{n^s} = \zeta_2(s) G_4(s)$

ii) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{f_5(n)}{n^s} = \zeta_2(s) G_5(s)$

iii) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{f_6(n)}{n^s} = \zeta_2(s) G_6(s)$

iv) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{f_7(n)}{n^s} = \zeta_2(s) G_7(s)$

où on a posé $\zeta_2(s) = \prod_p \left(1 + \frac{1}{p^s}\right)$, $Re(s) > 1$ et

$$G_4(s) = \prod_p \left(\frac{-p^s - 2p^{2s} \log\left(1 - \frac{1}{p^s}\right)}{p^s + 1} \right),$$

$$G_5(s) = \prod_p \left(1 + \frac{f(p)-1}{2(p^s+1)} + \frac{f(p)+1}{(p^s+1)} \left(-p^{2s} \log\left(1 - \frac{1}{p^s}\right)\right) - p^s - \frac{1}{2}\right)$$

$$G_6(s) = \prod_p \left(1 + \frac{1}{2(p^{2s}+1)}\right) \quad \text{et}$$

$$G_7(s) = \prod_p \left(1 + \frac{f(p)-1}{2(p^s+1)} + \frac{1}{2(p^{2s}+1)}\right)$$

Démonstration. La démonstration de cette proposition est une conséquence de la représentation de la série de Dirichlet en produit eulérien de la définition des fonctions f_i et du lemme suivant.

Lemme 2.4. *Pour tout nombre premier p, et pour tout* $s \in \mathbb{C}$, $|\frac{1}{p^s} < 1|$ *on a*

$$i) \quad \log(1 - \frac{1}{p^s}) = -\frac{1}{p^s} - \frac{1}{2p^{2s}} + O(\frac{1}{p^{3\sigma}}),$$

$$ii) \quad \sum_{r=2}^{+\infty} \frac{1}{p^{rs}} = \frac{1}{p^s(p^s-1)},$$

$$iii) \quad \sum_{r=0}^{+\infty} \frac{1}{(r+1)p^{rs}} = -p^s \log(1 - \frac{1}{p^s}).$$

Démonstration. On montre les relations précédentes en utilisant respectivement la formule de Mac-Laurin à l'ordre 2 à la fonction $\log(1-x)$ au voisinage de zéro et des relations

$$\sum_{n=k}^{+\infty} x^n = \frac{x^k}{1-x} \qquad |x| < 1,$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} x^n = -\frac{1}{x} \log(1-x).$$

□

Revenons maintenant à la démonstration de la proposition 2.5

Pour Re(s)>1, on peut écrire

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{f_4(n)}{n^s}=\prod_p\left(1+\sum_{r=1}^{+\infty}\frac{1}{r+1}\frac{\sum\limits_{i=0}^{r}\mu^2(p^i)}{p^{rs}}\right),$$

or

$$\sum_{r=1}^{+\infty}\frac{1}{(r+1)p^{rs}}\sum_{i=0}^{r}\mu^2(p^i)=\frac{1}{p^s}+2\sum_{r=2}^{+\infty}\frac{1}{(r+1)p^{rs}}.$$

La relation (iii) du lemme (2.4) implique que

$$\sum_{r=1}^{+\infty}\frac{1}{(r+1)p^{rs}}\sum_{i=0}^{r}\mu^2(p^i)=\frac{1}{p^s}+2\left(-p^s\log(1-\frac{1}{p^s})-1-\frac{1}{2p^s}\right).$$

Nous avons

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{f_4(n)}{n^s} &= \zeta_2(s)\prod_p\left(1+\frac{-2p^{2s}\log(1-\frac{1}{p^s})-2p^s-1}{p^s+1}\right)\\ &= \zeta_2(s)\prod_p\left(\frac{-p^s-2p^{2s}\log(1-\frac{1}{p^s})}{p^s+1}\right)\\ &= \zeta_2(s)G_4(s).\end{aligned}$$

Pour la relation (ii), on a

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{f_5(n)}{n^s} &= \prod_p\left(1+\sum_{r=1}^{+\infty}\frac{1}{r+1}\frac{\sum\limits_{i=0}^{r}\mu^2(p^i)f(p^i)}{p^{rs}}\right)\\ &= \prod_p\left(1+\frac{1}{2p^s}\left(f(p)+1\right)+\sum_{r=2}^{+\infty}\frac{1}{(r+1)p^{rs}}(1+f(p))\right)\\ &= \prod_p\left(1+\frac{1}{p^s}+\frac{f(p)-1}{2p^s}+(f(p)+1)\sum_{r=2}^{+\infty}\frac{1}{(r+1)p^{rs}}\right)\\ &= \zeta_2(s)\prod_p\left(1+\frac{f(p)-1}{2(p^s+1)}+\frac{p^s(f(p)+1)}{p^s+1}\sum_{r=2}^{+\infty}\frac{1}{(r+1)p^{rs}}\right)\\ &= \zeta_2(s)\prod_p\left(1+\frac{f(p)-1}{2(p^s+1)}+\frac{(f(p)+1)}{p^s+1}\left(-p^{2s}\log(1-\frac{1}{p^s})-p^s-\frac{1}{2}\right)\right)\\ &= \zeta_2(s)G_5(s).\end{aligned}$$

Pour la relation (iii), on a

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f_6(n)}{n^s} &= \prod_p \left(1 + \sum_{r=1}^{+\infty} \frac{1}{2} \frac{\sum_{i=0}^{r} \mu^2(p^i)}{p^{rs}} \right) \\
&= \prod_p \left(1 + \frac{1}{p^s} + \sum_{r=2}^{+\infty} \frac{1}{2p^{rs}} \right) \\
&= \prod_p \left(1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{2p^s(p^s-1)} \right) \\
&= \zeta_2(s) \prod_p \left(1 + \frac{1}{2(p^{2s}-1)} \right) \\
&= \zeta_2(s) G_6(s).
\end{aligned}$$

Pour la relation (iv), on a

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f_7(n)}{n^s} &= \prod_p \left(1 + \sum_{r=1}^{+\infty} \frac{1}{2} \frac{\sum_{i=0}^{r} \mu^2(p^i) f(p^i)}{p^{rs}} \right) \\
&= \prod_p \left(1 + \frac{f(p)+1}{2p^s} + \sum_{r=2}^{+\infty} \frac{1}{2p^{rs}} \right) \\
&= \prod_p \left(1 + \frac{1}{p^s} + \frac{f(p)-1}{2p^s} + \frac{1}{2(p^s(p^s-1)} \right) \\
&= \zeta_2(s) \prod_p \left(1 + \frac{1}{p^s} + \frac{f(p)-1}{2(p^s+1)} + \frac{1}{2(p^{2s}-1)} \right) \\
&= \zeta_2(s) G_7(s).
\end{aligned}$$

□

L'apparition de la série de Dirichlet de ζ_2(s) dans les séries précédentes montre le lien entre les entiers sans facteurs carrés et les entiers liés aux fonctions moyennes.

Utilisant la formule de Taylor de $\log(1-x)$ au voisinage de zéro, les relations $\sum_{n=k}^{+\infty} z^n = \frac{z^k}{1-z}, avec\ |z| < 1$, $\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{z^n}{n+1} = \frac{1}{z} \log(1-z)$ et la condition $\sum_p \frac{(f(p)-1)}{p^\delta} < +\infty$, où $0 < \delta < 1$, on montre que les fonctions $G_4(s)$, $G_5(s)$, $G_6(s)$ et $G_7(s)$ convergent absolument pour $Re(s) > \frac{1}{2}$.

De la proposition 2.5, nous déduisons le théorème 2.2 suivant :

Théorème 2.2. *[29] Soit un réel $\epsilon > 0, 0 < \epsilon < \frac{1}{2}$, et un x réel plus grand que 1. On a :*

i) $\displaystyle \sum_{n \le x} f_4(n) = \frac{6}{\pi^2} G_4(1) x + O\left(x^{\frac{1}{2}+\epsilon}\right)$, *ii)* $\displaystyle\sum_{n\le x} f_5(n) = \frac{6}{\pi^2}G_5(1)x + O\left(x^{\frac{1}{2}+\epsilon}\right),$

iii) $\displaystyle\sum_{n\le x} f_6(n) = \frac{6}{\pi^2}G_6(1)x + O\left(x^{\frac{1}{2}+\epsilon}\right),$

iv) $\displaystyle\sum_{n\le x} f_7(n) = \frac{6}{\pi^2}G_7(1)x + O\left(x^{\frac{1}{2}+\epsilon}\right).$

Démonstration. La démonstration de ce théorème découle directement du lemme 2.3 et de la proposition 2.5.

□

Chapitre 3

Etude de la fonction f_g

L'objectif de ce chapitre est d'étudier les propriétés arithmétiques de la fonction f_g définie par $f_g(n) = \frac{1}{h(n)}\sum_{d|n} g(d)f(d)$, d'une part et d'autre part, d'estimer la fonction sommatoire $\sum_{n\leq x} f_g(n)$, où $h = g * \mathbb{1}$ et f et g sont des fonctions arithmétiques vérifiant les conditions initiales c_1 et c_2 suivantes :

c_1. g est multiplicative, positive et telle que pour tout nombre premier p et pour tout nombre entier $r \geq 2$, $g(p^r) = 0$;

c_2. f est positive et vérifiant d'autres hypothèses selon la nature de f.

Comme application, nous considérerons $g(n) = \mu^2(n)(k-1)^{\omega(n)}$ et $f(n)$ est un élément de l'ensemble $\left\{\frac{\sigma(n)}{n}, \frac{n}{\varphi(n)}, \frac{\varphi_\ell(n)}{n}\right\}$ pour f multiplicative et comme un élément de $\{\omega(n), \log\tau(n)\}$ pour f additive.

3.1 Quelques propriétés de la fonction f_g

Le théorème suivant montre que les propriétés de f_g dépendent de celles de f.

Théorème 3.1. *Soit f une fonction arithmétique. Si f est additive (respectivement multiplicative), alors la fonction f_g est additive (respectivement multiplicative).*

Démonstration. Considérons d'abord le cas où f est additive. D'après la définition de f_g, si deux entiers non nuls m et n sont premiers entre-eux ; alors

$$f_g(mn) = \frac{1}{h(mn)}\sum_{d|mn} g(d)f(d).$$

Puisque $h(n) = \sum_{d|n} g(d)$, on a

$$f_g(mn) = \frac{1}{\sum\limits_{d_1d_2|mn} g(d_1d_2)} \sum_{d_1|m;d_2|n} g(d_1d_2)f(d_1d_2).$$

Comme f est additive et g multiplicative, alors on a :

$$f_g(mn) = \frac{1}{\sum\limits_{d_1|m;\ d_2|n} g(d_1)g(d_2)} \sum_{d_1|m;\ d_2|n} g(d_1)g(d_2)\left[f(d_1) + f(d_2)\right]$$

Cela s'écrit encore

$$f_g(mn) == \frac{1}{\sum\limits_{d_1|m} g(d_1) \sum\limits_{d_2|n} g(d_2)} \left[\sum_{d_1|m} g(d_1)f(d_1) \sum_{d_2|n} g(d_2) + \sum_{d_1|m} g(d_1) \sum_{d_2|n} g(d_1)f(d_2)\right]$$

ou encore

$$f_g(mn) = \frac{1}{\sum\limits_{d_1|m} g(d_1) \sum\limits_{d_2|n} g(d_2)} \sum_{d_1|m} g(d_1)f(d_1) \sum_{d_2|n} g(d_2) + \frac{1}{\sum\limits_{d_1|m} g(d_1) \sum\limits_{d_2|n} g(d_2)} \sum_{d_1|m} g(d_1) \sum_{d_2|n} g(d_2)f(d_2)$$

En fin,

$$f_g(mn) = \frac{1}{\sum\limits_{d_1|m} g(d_1)} \sum_{d_1|m} g(d_1)f(d_1) + \frac{1}{\sum\limits_{d_2|n} g(d_2)} \sum_{d_2|n} g(d_2)f(d_2)$$

Par conséquent,

$$f_g(mn) = \frac{1}{h(m)} \sum_{(d_1)|m} g(d_1)f(d_1) + \frac{1}{h(n)} \sum_{(d_2)|n} g(d_2)f(d_2)$$

D'où $f_g(mn) = f_g(m) + f_g(n)$ □

On conclut alors que f_g est additive.

Lorsque f est multiplicative, on a

$$f_g(mn) = \frac{1}{h(mn)} \sum_{d|mn} g(d)f(d)$$

On peut alors écrire

$$f_g(mn) = \frac{1}{\sum\limits_{d_1d_2|mn} g(d_1d_2)} \sum_{d_1d_2|mn} g(d_1d_2)f(d_1d_2)$$

Comme f et g sont multiplicatives, alors nous avons

$$f_g(mn) = \frac{1}{\sum\limits_{d_1d_2|mn} g(d_1)g(d_2)} \sum_{d_1d_2|mn} g(d_1)g(d_2)f(d_1)f(d_2)$$

Ce qui donne

$$f_g(mn) = \frac{1}{\sum\limits_{d_1|n} g(d_1) \sum\limits_{d_2|m} g(d_2)} \sum_{d_1|m} g(d_1)f(d_1) \sum_{d_2|n} g(d_2)f(d_2)$$

Donc

$$f_g(mn) = \left[\frac{1}{\sum\limits_{d_1|m} g(d_1)} \sum_{d_1|m} g(d_1)f(d_1)\right] \cdot \left[\frac{1}{\sum\limits_{d_2|n} g(d_2)} \sum_{d_2|n} g(d_2)f(d_2)\right]$$

Par conséquent,

$$f_g(mn) = \frac{1}{h(m)} \sum_{d_1|m} g(d_1)f(d_1) . \frac{1}{h(n)} \sum_{d_2|n} g(d_2)f(d_2)$$

Par suite,

$$f_g(mn) = f_g(m).f_g(n)$$

Cela montre que f_g est multiplicative.

Le théorème ci-après montre que la fonction f_g est fortement multiplicative.

Théorème 3.2. *Soit f et g des fonctions arithmétiques vérifiant les conditions c_1 et c_2 . Alors pour tout nombre premier p et pour tout entier $r \geq 2$, $f_g(p^r) = f_g(p)$, avec $f_g(p) = \frac{1+g(p)f(p)}{1+g(p)}$.*

Démonstration. Considérons le cas où f est multiplicative. On a

$$f_g(p^r) = \frac{1}{h(p^r)} \sum_{d|p^r} g(d)f(d)$$

or

$$h(p^r) = \sum_{i=0}^{r} g(p^i) = 1 + g(p),$$

étant donné que pour tout entier

$$r \geq 2, \ \ g(p^r) = 0$$

On a donc

$$\sum_{d|p^r} g(d)f(d) = \sum_{i=0}^{r} g(p^i)f(p^i) = 1 + g(p)f(p). \tag{3.1}$$

Par suite,

$$f_g(p^r) = \frac{1 + g(p)f(p)}{1 + g(p)}.$$

□

Dans le paragraphe qui suit, nous nous intéressons a la série de Dirichlet associée à la fonction f_g

3.2 Série de Dirichlet associée à la fonction f_g

Dans ce paragraphe, nous présentons le produit eulérien de la série de Dirichlet associée à la fonction f_g lorsque f est multiplicative. Ce produit eulérien est lié à quelques résultats qu'il convient de présenter au préalable.

Théorème 3.3. *Soit f et g des fonctions arithmétiques vérifiant les conditions c_1 et c_2. Dans le demi-plan $Res > 1$, la série de Dirichlet associée à la fonction f_g s'écrit*

$$F_g(s) = \zeta_2(s)G_1(s) \tag{3.2}$$

où

$$G_1(s) = \prod_p \left(1 + \frac{g(p)(f(p) - 1))}{(1 + g(p)(p^s + 1)} + \frac{1 + g(p)f(p)}{(1 + g(p))(p^{2s} - 1)}\right)$$

Démonstration. Elle découle du lemme suivant et de la représentation en produit eulérien d'une série de Dirichlet. □

Lemme 3.1. *Pour $Re s > 1$, on a*

$$\sum_{r=2}^{+\infty} \frac{1}{p^{rs}} = \frac{1}{p^s(p^s - 1)}$$

Ce lemme découle de la relation

$$\sum_{n=k}^{+\infty} z^n = \frac{z^k}{1-z}$$

pour tout nombre complexe z, avec $|z| < 1$.

Révenons à la démonstration du théorème 3.3

Par définition de $F_g(s)$, on a

$$F_g(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f_g(n)}{n^s} \tag{3.3}$$

Sous forme de produit eulérien, $F_g(s)$ s'écrit

$$F_g(s) = \prod_p \left(1 + \frac{1 + g(p)f(p)}{(1 + g(p))p^s} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{f_g(p^r)}{p^{rs}}\right)$$

Donc pour $Re(s) > 1$ et en utilisant le lemme 3.1, on a

$$F_g(s) = \prod_p \left(1 + \frac{1 + g(p)f(p)}{(1 + g(p))p^s} + \frac{1 + g(p)f(p)}{(1 + g(p))} \frac{1}{p^s(p^s - 1)}\right)$$

car

$$f_g(p^r) = \frac{1 + g(p)f(p)}{1 + g(p)}.$$

Ainsi,

$$F_g(s) = \prod_p \left(1 + \frac{1 + g(p) + g(p)(f(p) - 1)}{(1 + g(p))p^s} + \frac{1 + g(p)f(p)}{(1 + g(p))} \frac{1}{p^s(p^s - 1)}\right)$$

ou encore

$$F_g(s) = \prod_p \left(1 + \frac{1}{p^s} + \frac{g(p)(f(p) - 1)}{(1 + g(p))p^s} + \frac{1 + g(p)f(p)}{(1 + g(p))} \frac{1}{p^s(p^s - 1)}\right)$$

On a, finalement,

$$F_g(s) = \prod_p \left[\left(1 + \frac{1}{p^s}\right) \left(1 + \frac{g(p)(f(p)-1)}{(1+g(p))(p^s+1)} + \frac{1+g(p)f(p)}{(1+g(p))} \frac{1}{p^{2s}-1}\right)\right]$$

Par conséquent

$$F_g(s) = \prod_p \left(1 + \frac{1}{p^s}\right) \prod_p \left(1 + \frac{g(p)(f(p)-1)}{(1+g(p))(p^s+1)} + \frac{1+g(p)f(p)}{(1+g(p))} \frac{1}{p^{2s}-1}\right)$$

Par suite,

$$F_g(s) = \zeta_2(s) G_1(s) \tag{3.4}$$

avec $G_1(s) = \prod\limits_p \left(1 + \frac{g(p)(f(p)-1))}{(1+g(p))(p^s+1)} + \frac{1+g(p)f(p)}{(1+g(p))(p^{2s}-1)}\right)$

Corollaire 3.1. *Le produit eulérien $G_1(s)$ converge absolument dans le demi-plan Re(s) $> max(\frac{1}{2}, \delta)$ lorsque $\sum\limits_{p\geq 2} \frac{|f(p)-1|}{p^\delta}$ converge, pour $\delta \in]0,1[$.*

Démonstration. On peut écrire

$$\frac{1+g(p)f(p)}{1+g(p)} = 1 + \frac{g(p)(f(p)-1)}{1+g(p)}$$

Donc

$$\frac{1+g(p)f(p)}{(1+g(p))(p^{2s}-1)} = \frac{1}{p^{2s}-1} + \frac{g(p)(f(p)-1)}{(1+g(p))(p^{2s}-1)};$$

Les séries

$$\sum_p \frac{g(p)(f(p)-1)}{(1+g(p))(p^{2s}-1)} \quad \text{et} \quad \sum_p \frac{1}{p^{2s}-1}$$

convergent respectivement pour $Re(s) > \delta$ et pour $Re(s) > \frac{1}{2}$.

En effet, $\sum\limits_{p\geq 2} \frac{1}{p^{2s}-1}$ converge absolument si $Re(s) > \frac{1}{2}$.

Puisque $\sum\limits_{p\geq 2} \left|\frac{f(p)-1}{p^{2s}-1}\right| \ll \sum\limits_{p\geq 2} \frac{|f(p)-1|}{p^\delta p^{2\sigma-\delta}}$,

Cela montre que $\sum\limits_{p\geq 2} \frac{|f(p)-1|}{p^{2\sigma}}$ converge si $\sigma > \frac{1}{2}$.

Comme $\sigma > \max(\frac{1}{2}, \delta)$, on a $\sigma > \delta > \frac{1}{2}$.

De même, la série

$$\sum_{p\geq 2}\frac{g(p)(f(p)-1)}{(1+g(p))(p^{\sigma}+1)}$$

converge si $\sigma > \delta$.

Ainsi, $G_1(s)$ converge absolument si $Res > \max(\frac{1}{2}, \delta)$.

□

Corollaire 3.2. *Du théorème 3.3, on déduit que* $f_g = \mu^2 * g_1$, g_1 *étant une fonction arithmétique dont le produit eulérien associé est* $G_1(s)$.

Démonstration. Il est connu que le produit de deux séries de Dirichlet est celui de la convolution de deux fonctions [12]. Pour conclure, on utilise le lemme 2.3. □

3.3 Fonction sommatoire et valeur moyenne de la fonction f_g

Comme nous l'avons signalé dans l'introduction, l'estimation des fonctions sommatoires joue un rôle particulier en théorie des nombres.
En effet, on peut l'utiliser, par exemple, pour étudier les propriétés de certains sous ensembles de diviseurs d'un entier n [4] ou pour établir des résultats classiques de la théorie des nombres comme, par exemple, les résultats liés au TNP.

Passons alors à l'estimation la fonction

$$S_{fg}(x) = \sum_{n\leq x} f_g(n). \tag{3.5}$$

Pour estimer cette fonction, nous allons distinguer deux cas :

1^{er}cas : f additive et constante sur l'ensemble des nombres premiers.

$2^{\text{è}}$cas : f multiplicative et vérifiant la condition $\displaystyle\sum_{n\leq x}\frac{|f(p)-1|}{p^{\delta}} < +\infty$, où $\delta \in]0,1[$.

3.3.1 Estimation de la fonction sommatoire de f_g lorsque f est additive

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons à la valeur moyenne de la fonction f_g lorsque f et g sont constantes sur l'ensemble des nombres premiers et f est, en outre, additive, g

étant toujours supposée multiplicative. On a le théorème suivant :

Théorème 3.4. *Soient f et g deux fonctions arithmétiques vérifiant les conditions initiales c_1 et c_2 et constantes sur l'ensemble des nombres premiers. Si f est additive, alors* $\sum\limits_{n\leq x} f_g(x) = c_1(f,g)x\log\log x + c_2(f,g)x + O(\frac{x}{logx})$.

Démonstration. Elle découle du théorème de Mertens (théorème 2.1) et du lemme suivant □

Lemme 3.2. *[18] Soit x un réel ≥ 2 ; alors* $\int_2^x \frac{dt}{\log^n t} << \frac{x}{\log^n x}$

Démonstration. En appliquant la règle de l'Hospital, on a

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\frac{\int_2^x \frac{dt}{\log^n t}}{\frac{x}{\log^n x}} &= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{\log^n x}}{\frac{1}{\log^n x}-\frac{n}{\log^{n+1} x}}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{1-\frac{n}{\log x}}\\
&= 1
\end{aligned}$$

Par suite, $\int_2^x \frac{dt}{\log^n t} \sim \frac{x}{\log^n t}$. D'où $\int_2^x \frac{dt}{\log^n t} << \frac{x}{\log^n t}$ □

Démonstration. Du théorème 3.4. Soient f et g deux fonctions arithmétiques vérifiant les hypothèses de ce théorème. Comme f est additive, alors on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{n\leq x} f_g(n) &= \sum_{n\leq x}\sum_{p^r||n} f_g(p^r)\\
&= \sum_{n\leq x}\left(\sum_{p||n} f_g(p) + \sum_{p^r||n} f_g(p^r)\right), \quad r\geq 2\\
&= \sum_{n\leq x}\sum_{p||n} f_g(p) + \sum_{n\leq x}\sum_{p^r||n} f_g(p^r)
\end{aligned}$$

Posons $S_1 = \sum\limits_{n\leq x}\sum\limits_{p||n} f_g(p)$ et $S_2 = \sum\limits_{n\leq x}\sum\limits_{\substack{p^r||n\\ r\geq 2}} f_g(p^r)$

La première somme s'écrit

$$S_1 = \sum_{n=pm\leq x}\sum_{p||n} f_g(p)$$

ou encore

$$S_1 = \sum_{p\leq x} f_g(p)\sum_{m\leq\frac{x}{p}} 1$$

Donc

$$S_1 = \sum_{p\leq x} \frac{f(p)g(p)}{1+g(p)} \sum_{m\leq \frac{x}{p}} 1$$

Posons $c_f = f(p)$, $c_g = g(p)$
Puisque

$$\sum_{m\leq \frac{x}{p}} 1 = \sum_{p\leq x} \lfloor \frac{x}{p} \rfloor,$$

on a :

$$S_1 = \frac{c_f.c_g}{1+c_g} \sum_{p\leq x} \left(\frac{x}{p} - \left\{ \frac{x}{p} \right\} \right)$$

ou encore

$$S_1 = \frac{c_f.c_g}{1+c_g} x \sum_{p\leq x} \frac{1}{p} - \frac{c_f.c_g}{1+c_g} \sum_{p\leq x} \left\{ \frac{x}{p} \right\}$$

Or, d'après le théorème de Mertens (théorème 2.1), on a

$$\sum_{p\leq x} \frac{1}{p} = \log\log x + c + 0\left(\frac{1}{\log x} \right). \tag{3.6}$$

où

$$c = \gamma + \sum_{p} \left(\log\left(1 - \frac{1}{p}\right) + \frac{1}{p} \right)$$

De plus,

$$\sum_{p\leq x} \{ \frac{x}{p} \} << \sum_{p\leq x} 1 = \pi(x) << \frac{x}{\log x}, \tag{3.7}$$

Donc

$$S_1 = \frac{c_f.c_g}{1+c_g} x \log\log x + \frac{c_f.c_g}{1+c_g} cx + 0\left(\frac{x}{\log x} \right)$$

Estimons ensuite S_2. On a :

$$S_2 = \sum_{n\leq x} \sum_{p^r || n} f_g(p^r)$$

Ce qui peut encore s'écrire

$$S_2 = \frac{c_f.c_g}{1+c_g} x \sum_{\substack{p\le x \\ 2\le r\le \frac{\log x}{\log p}}} \frac{1}{p^r} - \frac{c_f.c_g}{1+c_g} \sum_{\substack{p\le x \\ 2\le r\le \frac{\log x}{\log p}}} \left\{\frac{x}{p^r}\right\}$$

ou encore

$$S_2 = \frac{c_f.c_g}{1+c_g} x \left(\sum_{p\le x} \sum_{r\ge 2} \frac{1}{p^r} - \sum_{\substack{p\le x \\ r\ge \frac{\log x}{\log p}}} \frac{1}{p^r} \right) - \frac{c_f.c_g}{1+c_g} \sum_{\substack{p\le x \\ 2\le r\le \frac{\log x}{\log p}}} \left\{\frac{x}{p^r}\right\}$$

Ce qui donne

$$S_2 = \frac{c_f.c_g}{1+c_g} x \left(\sum_{p\le x} \frac{1}{p^2-p} - \sum_{\substack{p\le x \\ r\ge \frac{\log x}{\log p}}} \frac{1}{p^r} \right) - \frac{c_f.c_g}{1+c_g} \sum_{\substack{p\le x \\ 2\le r\le \frac{\log x}{\log p}}} \left\{\frac{x}{p^r}\right\}$$

La somme $S_{21} = x \sum_{p\le x} \frac{1}{p^2-p}$ peut encore s'écrire $S_{21} = x \sum_{p\ge 2} \frac{1}{p^2-p} - x \sum_{p\ge x} \frac{1}{p^2-p}$

Comme

$$x \sum_{p\ge x} \frac{1}{p^2-p} \ll \frac{1}{x} \ll \frac{x}{\log x}$$

on conclut que

$$S_{21} = x \sum_{p\ge 2} \frac{1}{p^2-p} c_f + O\left(\frac{x}{\log x}\right)$$

On a aussi

$$\begin{aligned} x \sum_{\substack{p\le x \\ r\ge \frac{\log x}{\log p}}} \frac{1}{p^r} &\ll x \sum_{p\le x} e^{-\frac{\log x}{\log p}\log p} \\ &\ll \sum_{p\le x} 1 \\ &\ll \frac{x}{\log x} \end{aligned}$$

Pour la somme

$$S_{22} = \sum_{\substack{p^r \leq x \\ r \geq 2}} \left\{ \frac{x}{p^r} \right\},$$

on a

$$\sum_{\substack{p^r \leq x \\ r \geq 2}} \left\{ \frac{x}{p^r} \right\} << \sum_{\substack{p^r \leq x \\ 2 \leq r \leq \frac{\log n}{\log p}}} \left\{ \frac{x}{p^r} \right\} << \sum_{p \leq x} \sum_{r \leq \frac{\log x}{\log p}} 1$$

Donc

$$\sum_{\substack{p^r \leq x \\ r \geq 2}} \left\{ \frac{x}{p^r} \right\} << \sum_{p \leq x} \frac{\log x}{\log p}.$$

Soit

$$\sum_{\substack{p^r \leq x \\ r \geq 2}} \left\{ \frac{x}{p^r} \right\} << \log x \sum_{p \leq x} \frac{1}{\log p}$$

En utilisant le lemme d'intégration par parties (proposition 1.12), la somme $\sum_{p \leq x} \frac{1}{\log p}$ s'écrit

$$\sum_{p \leq x} \frac{1}{\log p} = \frac{\pi(x)}{\log x} + \int_2^x \frac{\pi(t)}{t \log^2 t} dt$$

ou

$$\sum_{p \leq x} \frac{1}{\log p} << \frac{x}{\log^2 x} + \int_2^x \frac{dt}{\log^3 t}.$$

D'après le lemme 3.2, on a

$$\int_2^x \frac{dt}{\log^n t} << \frac{x}{\log^n x}$$

En particulier, on a

$$\int_2^x \frac{dt}{\log^3 t} << \frac{x}{\log^3 x}$$

Par conséquent,

$$\sum_{p \leq x} \frac{1}{\log p} << \frac{x}{\log^2 x}$$

Ainsi

$$\sum_{p^r \leq x} \left\{ \frac{x}{p^r} \right\} << \frac{x}{\log x}$$

Finalement,

$$S_2 = \frac{c_f c_g}{1+c_g} x \sum_{p\geq 2} \frac{1}{p^2-p} + O\left(\frac{x}{\log x}\right)$$

Dès lors, la fonction sommatoire $S_{f_g}(x)$ de f_g s'écrit

$$\sum_{n\leq x} f_g(n) = \frac{c_f c_g}{1+c_g} x \log\log x + \frac{c_f c_g}{1+c_g}(c + \sum_{p\geq 2}\frac{1}{p^2-p})x + O\left(\frac{x}{\log x}\right)$$

Ce qui s'écrit aussi

$$\sum_{n\leq x} f_g(n) = c_1(f,g) x \log\log x + c_2(f,g)x + O\left(\frac{x}{\log^2 x}\right)$$

$$\text{où} \quad c_1(f,g) = \frac{c_f c_g}{1+c_g} \ \text{ et } c_2(f,g) = \left(\frac{c_f c_g}{1+c_g}(c+c_1)\right),$$

$$c_1 = \sum_{p\geq 2}\frac{1}{p^2-p} \text{et } c = \gamma + \sum_p \left(\log(1-\frac{1}{p}) + \frac{1}{p}\right)$$

□

Corollaire 3.3. *Soit k un nombre entier ≥ 2, f et g des fonctions arithmétiques telles que $f(n) \in \{\omega(n), \log\tau(n)\}$ et $g(n) = \mu^2(n)(k-1)^{\omega(n)}$. Alors*

i) $\sum_{n\leq x} w_f(n) = \frac{k-1}{k} x\log\log x + \frac{k-1}{k}(c + \sum_{p\geq 2}\frac{1}{p^2-p})x + O\left(\frac{x}{\log x}\right)$

ii) $\sum_{n\leq x} f_g(n) = \frac{k-1}{k} x \log 2(\log\log x) + \frac{k-1}{k}\log 2(c + \sum_{p\geq 2}\frac{1}{p^2-p})x + O\left(\frac{x}{\log x}\right)$,
où $f(n) = \log\tau(n)$, $c = \gamma + \sum_p \left(\log p\left(1-\frac{1}{p}\right) + \frac{1}{p}\right)$ *et*
$\gamma = 1 - \int_1^{+\infty}\frac{\{t\}}{t}dt = 0,577$ *est la constante d'Euler.*

Démonstration. Elle découle du théorème 3.4, en posant $g(n) = \mu^2(n)(k-1)^{\omega(n)}$ et successivement $f(n) = \omega(n)$ et $f(n) = \log\tau(n)$. □

3.3.2 Estimation de la fonction sommatoire de f_g lorsque f est multiplicative

Nous estimons maintenant $S_{f_g}(x)$ si f est multiplicative.

Théorème 3.5. *Soit f et g des fonction arithmétiques vérifiant les conditions initiales c_1 et c_2 et telles que f est multiplicative et vérifiant la condition $\sum_{n\leq x}\frac{|f(p)-1|}{p^\delta} < +\infty$, $\delta \in]0,1[$. Posons $c(f,g) = \frac{6}{\pi^2}\prod_p\left(1 + \frac{g(p)(f(p)-1)}{(1+g(p))(p+1)} + \frac{1+g(p)f(p)}{(1+g(p))(p^2-1)}\right)$. Il existe* *un réel* $\theta \in \left]\max(\frac{1}{2}, \delta), 1\right[$ *tel que la fonction sommatoire* $S_{fg}(x)$ *de la fonction arithmétique* f_g *puisse s'écrire sous la forme*

$$S_{fg}(x) = c(f,g)x + O(x^{\theta})$$

Démonstration. D'après le lemme 2.3 et la relation $f_g = \mu^2 * g_1$, où g_1 est déduite de la relation (3.5), on a :

$$\begin{aligned} S_{fg}(x) &= \sum_{n\leq x} \left(\mu^2 * g_1\right)(n) \\ &= \frac{6}{\pi^2} D_{g_1}(1)x + O(x^{\theta}), \text{ où } \theta > max(\frac{1}{2}, \delta), \text{ et } 0 < \delta < 1 \end{aligned}$$

D'après le lemme 2.3, on a :

$$\sum_{n\geq 1}^{+\infty} \frac{g_1(n)}{n^s} = G_1(s) \quad \text{pour } Re(s) > max(\frac{1}{2}, \delta).$$

Donc $D_{g_1}(1) = G_1(1)$.

Or

$$G_1(1) = \prod_p \left(1 + \frac{g(p)(f(p)-1)}{(1+g(p))(p+1)} + \frac{1+g(p)f(p)}{(1+g(p))(p^2-1)}\right).$$

Nous avons alors :

$$\sum_{n\leq x} f_g(n) = \frac{6}{\pi^2}\prod_p \left(1 + \frac{g(p)(f(p)-1)}{(1+g(p)(p+1)} + \frac{1+g(p)f(p)}{(1+g(p))(p^2-1)}\right) x + O(x^{\theta})$$

Finalement,

$$c(f,g) = \frac{6}{\pi^2}\prod_p \left(1 + \frac{g(p)(f(p)-1)}{(1+g(p)(p+1)} + \frac{1+g(p)f(p)}{(1+g(p))(p^2-1)}\right)$$

et

$$\sum_{n\leq x} f_g(n) = c(f,g)x + 0(x^{\theta})$$

□

Corollaire 3.4. *Soit* k *un entier naturel* ≥ 2, $f(n) \in \left\{\frac{\sigma(n)}{n}, \frac{n}{\varphi(n)}, \frac{\varphi_k(n)}{n}\right\}$ *et* g *la* *fonction arithmétique définie par* $g(n) = \mu^2(n)(k-1)^{\omega(n)}$*. En notant la fonction* f_g *respectivement par* σ_g*,* φ_g *et* φ_k*, il existe une constante* $\theta > max(\frac{1}{2}, \delta)$ *telle que*

i) $\sum\limits_{n\leq x} \sigma_g(n) = \frac{6}{\pi^2}c_1 x + O(x^\theta)$

ii) $\sum\limits_{n\leq x} \varphi_g(n) = \frac{6}{\pi^2}c_2 x + O(x^\theta)$

iii) $\sum\limits_{n\leq x} \varphi_{lg}(n) = \frac{6}{\pi^2}c_3 x + O(x^\theta)$,

où

$$\begin{aligned} c_1 &= \prod_p \left(+\frac{k-1}{k}.\frac{1}{p(p+1)} + \frac{k(p+1)-1}{k}.\frac{1}{p(p^2-1)}\right) \\ c_2 &= \prod_p \left(1+\frac{k-1}{k}.\frac{1}{p^2-1} + \frac{1}{k}.\frac{k-1}{(p-1)(p^2-1)}\right) \quad et \\ c_3 &= \prod_p \left(1+\frac{k-1}{k}.\frac{l-1}{p(p+1)} + \frac{p+kp+\ell-1)}{kp(p^2-1)}\right) \end{aligned}$$

sont des constantes réelles.

Démonstration. On utilise le théorème 3.5 moyennant les expressions c(f,g).
En effet, comme $g(n) = \mu^2(n)(k-1)^{\omega(n)}$, alors on a

$$g(p) = \mu^2(p)(k-1)^{\omega(p)} = k-1$$

et

$$1 + g(p) = k$$

Donc, d'après la définition de $c(f,g)$, on a

$$c(f,g) = \frac{6}{\pi^2}\prod_p \left(1 + \frac{(k-1)(f(p)-1)}{k(p+1)} + \frac{(k-1)f(p)}{k(p^2-1)}\right).$$

D'où

$$c(f,g) = \frac{6}{\pi}\prod_p \left(1 + \frac{(k-1)(f(p)-1)}{k(p+1)} + \frac{1+(k-1)f(p)}{k(p^2-1)}\right)$$

Ainsi,

i) Si $f(n) = \frac{\sigma(n)}{n}$, alors $f(p) = \frac{\sigma(p)}{p} = \frac{1+p}{p}$ et

$$
\begin{aligned}
c(f,g) &= \frac{6}{\pi^2}\prod_p \left(1 + \frac{(k-1)(\frac{1+p}{p})}{k(p+1)} + \frac{1+(k-1).\frac{1+p}{p}}{k(p^2-1)}\right)\\
&= \frac{6}{\pi^2}\prod_p \left(1 + \frac{k-1}{k}.\frac{1}{p(p+1)} + \frac{p+k(p+1)-p-1}{kp(p^2-1)}\right)\\
&= \frac{6}{\pi^2}\prod_p \left(1 + \frac{k-1}{k}.\frac{1}{p(p+1)} + \frac{k(p+1)-1}{k}.\frac{1}{p(p^2-1)}\right)
\end{aligned}
$$

ii) Si $f(n) = \frac{n}{\varphi(n)}$, alors $f(p) = \frac{p}{p-1}$ et

$$
\begin{aligned}
c(f,g) &= \frac{6}{\pi^2}\prod_p \left(1 + \frac{(k-1)(\frac{p}{p-1}-1)}{k(p+1)} + \frac{1+(k-1)\frac{p}{p-1}}{k(p^2-1)}\right)\\
&= \frac{6}{\pi^2}\prod_p \left(1 + \frac{(k-1)(p-p+1)}{k(p-1)(p+1)} + \frac{p-1+(k-1)p}{k(p-1)(p^2-1)}\right)\\
&= \frac{6}{\pi^2}\prod_p \left(1 + \frac{k-1}{k}.\frac{1}{p^2-1} + \frac{1}{k}.\frac{kp-1}{(p-1)(p^2-1)}\right)
\end{aligned}
$$

iii) Si $f(n) = \frac{\varphi_l(n)}{n}$, alors $f(p) = \frac{p+l-1}{p}$ et

$$
\begin{aligned}
c(f,g) &= \frac{6}{\pi^2}\prod_p \left(1 + \frac{(k-1)(\frac{p+\ell-1}{p}-1)}{k(p+1)} + \frac{1+(k-1)\frac{p+\ell-1}{p}}{k(p^2-1)}\right)\\
&= \frac{6}{\pi^2}\prod_p \left(1 + \frac{(k-1)(p+\ell-1-p)}{kp(p+1)} + \frac{p+(k-1)(p+\ell-1)}{kp(p^2-1)}\right)\\
&= \frac{6}{\pi^2}\prod_p \left(1 + \frac{(k-1)(\ell-1)}{kp(p+1)} + \frac{p+(kp+\ell-1)}{kp(p^2-1)}\right).
\end{aligned}
$$

$\square$

Conclusion générale

Cette étude a porté sur la fonction $f_g(n) = \frac{1}{h(n)}\sum\limits_{d|n} g(d)f(n)$, une fonction qui généralise certaines des fonctions ayant fait l'objet d'étude par S.GABOURY [14].
Il a précisément été question d'étudier les propriétés arithmétiques de la fonction f_g ainsi que sa valeur moyenne, en utilisant les méthodes élémentaires et les méthodes analytiques.

Les résultats obtenus concernent une certaine classe des fonctions f, g et h comme leurs positivités et le fait que $h = g * \mathbb{1}$ et $g(p^r) = 0,\ r \geq 2$.

Parmi les résultats obtenus, il y a la conservation du caractère additif ou multiplicatif de f. En outre, si f est additive et f et g sont constantes sur l'ensemble $\mathcal{P}$ des nombres premiers, alors f_g est aussi constante sur l'ensemble des nombres premiers et, de plus,

$$\sum_{n\leq x} f_g(n) = c_1(f,g)x\log\log x + c_2(f,g)x + O(\frac{x}{logx}). \tag{3.8}$$

où $c_1(f,g) = \frac{c_f c_g}{1+c_g}$, $c_2(f,g) = c_1(f,g) + c$, $c = \gamma + \sum\limits_p \left(\log(1-\frac{1}{p}) - \frac{1}{p}\right) + \sum\limits_p \frac{1}{p^2-p}$ et γ est la constante d'Euler.
En fin, si f est multiplicative et vérifie la condition $\sum\limits_{p\geq 2} \frac{|f(p)-1|}{p^\delta} < +\infty$, avec $\delta \in]0,1[$, alors Il existe un réel $\theta \in \left]\max(\frac{1}{2},\delta), 1\right[$ tel que

$$\sum_{n\geq 1} f_g(n) = \frac{6}{\pi^2}c(f,g)x + O(x^\theta) \tag{3.9}$$

où $c(f,g) = \frac{6}{\pi^2}\prod\limits_p \left(1 + \dfrac{g(p)(f(p)-1)}{(1+g(p))(p+1)} + \dfrac{1+g(p)f(p)}{(1+g(p))(p^2-1)}\right)$.
Cette étude n'a pas la prétention d'être exhaustive. Des recherches à venir pourraient, par exemple :

1. Améliorer le terme d'erreur $O\left(\frac{x}{\log x}\right)$ sous la forme $O\left(\frac{x}{(\log x)^r}\right), r \geq 2$

2. Etudier les fonctions moyennes sur les entiers friables ou criblés [32].

3. Etudier la fonction sommatoire de f_g en utilisant la méthode de Délange [32].

Bibliographie

[1] T. M. Apostol : Introduction to analytic number theory. *Springer-Verlag, New York*, 10:978 –1, 1976.

[2] M.-E. Cloutier : Les parties puissante et libre de carrés d'un entier. *Springer science*, 2013.

[3] A. Congera et S. Nyandwi : Moyenne de la fonction plitz sur les entiers sans facteur premier dans un intervalle. *Annales Univ.Sci.Budapest.,Sect.Comp*, 2020.

[4] J.-M. De Koninck et J. Grah : Moyennes sur certains ensembles de diviseurs d'un entier. *l'enseignement mathématique*, 42:97–124, 1996.

[5] J.-M. De Koninck et F. Luca : *Analytic number theory : Exploring the anatomy of integers*, vol. 134. American Mathematical Soc., 2012.

[6] H. Delange : Sur les fonctions arithmétiques multiplicatives. *In Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, vol. 78, p. 273–304, 1961.

[7] H. Delange : Un théorème sur les fonctions arithmétiques multiplicatives et ses applications. *In Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, vol. 78, p. 1–29, 1961.

[8] A. Derbal : Ordre maximum d'une fonction liée aux diviseurs d'un nombre entier. *Integers*, 12:A44, 2012.

[9] P. D. Elliott : *Probabilistic number theory I : Mean-value theorems*, vol. 239. Springer Science & Business Media, 2012.

[10] P. Erdös : Some problems and results in elementary number theory. *In Proc. Cambridge Phil. Soc*, vol. 33, p. 6–12, 1937.

[11] P. Erdos : On the distribution function of additive functions. *Annals of Mathematics*, p. 1–20, 1946.

[12] O. R. et Pierrine Berment : Estimation de l'ordre moyen d'une fonction arithmétique par la méthode de convolution. *CNRS,Lille*, 2009.

[13] M. Filaseta et O. Trifonov : On gaps between squarefree numbers. *In Analytic Number Theory*, p. 235–253. Springer, 1990.

[14] S. Gaboury : Sur les convolutions de fonctions arithmétiques. *Publ. Math. Orsay*, 2007.

[15] G.Tenenbaum : Introduction to analytic and probabilistic number theory. *Cambridge University*, 1995.

[16] J. Hadamard : Sur la distribution des zéros de la fonction $\zeta(s)$ et ses conséquences arithmétiques. *Bulletin de la Societé mathematique de France*, 24:199–220, 1896.

[17] A. Hildebrand et G. Tenenbaum : Integers without large prime factors. *Journal de théorie des nombres de Bordeaux*, 5(2):411–484, 1993.

[18] G. Hurst : Solutions to introduction to analytic number theory tom m. apostol.

[19] A. Ivić et P. Shiu : The distribution of powerful integers. *Illinois Journal of Mathematics*, 26(4):576–590, 1982.

[20] A. Ivić et G. Tenenbaum : Local densities over integers free of large prime factors. *The Quarterly Journal of Mathematics*, 37(4):401–417, 1986.

[21] I. Kátai : On distribution of arithmetical functions on the set prime plus one. *Compositio Mathematica*, 19(4):278–289, 1968.

[22] V.-A. Le Besgue : *Introduction à la théorie des nombres*. Mallet-Bachelier, 1862.

[23] A. Mercier : Comportement asymptotique de. *Canadian Mathematical Bulletin*, 30(3):309–317, 1987.

[24] M.KARRAS : Sur les fonctions arithmétiques multiplicatives et leurs séries de dirichlet associées, thèse de doctorat. *Ecole Normale Supérieure Kouba-Alger*, 2017.

[25] M. Naimi : Les entiers sans facteurs carré$\leq x$ dont leurs facteurs premiers $\leq y$, groupe de travail en théorie analytique et élémentaire des nombres. *Publ. Math. Orsay*, 1986–1987.

[26] D. Redmond : *Number Theory : an introduction*. CRC Press, 2020.

[27] G. Robin : Estimation de la fonction de tchebychef θ sur le k-ième nombre premier et grandes valeurs de la fonction ω (n) nombre de diviseurs premiers de n. *Acta Arithmetica*, 42(4):367–389, 1983.

[28] J. B. Rosser et L. Schoenfeld : Approximate formulas for some functions of prime numbers. *Illinois Journal of Mathematics*, 6(1):64–94, 1962.

[29] S.Nyandwi et al. : Fonction de répartition et valeurs moyennes d'une classe de fonctions arithmétiques sur les entiers friables et sans facteur carré. *Revue de l'Université du Burundi, Vol.28*, 2022.

[30] H. Stark : Hans rademacher, topics in analytic number theory. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 81(4):663–672, 1975.

[31] J. Steuding : Probabilistic number theory. *The Pennsylvania State University Cite-SeerX Archives, doi*, 10(1.118):4755, 2002.

[32] G. Tenenbaum : *Introduction to analytic and probabilistic number theory*, vol. 163. American Mathematical Soc., 2015.

[33] G. Tenenbaum et J. Wu : Moyennes de certaines fonctions multiplicatives sur les entiers friables. *J. reine angew. Math., 564 :119–166*, 2003.

[34] J. Verwee : *Théorèmes d'Erdös-Wintner effectifs.* Thèse de doctorat, Université de Lorraine ; Technische Universität (Vienne), 2020.