UNIVERSITÉ DU BURUNDI

GRENIER DU SAVOIR DU BURUNDI

Dépôt institutionnel officiel

https://repository.ub.edu.bi

Equations d’évolution sur les espaces de randers

Niyonizigiye, Pasteur; Sous la direction de : Pr Nibaruta Gilbert

2024-07

UB, ENS

https://repository.ub.edu.bi/handle/123456789/2019

Document téléchargé depuis le **Grenier du Savoir du Burundi** — https://repository.ub.edu.bi

INSTITUT DE PEDAGOGIE APPLIQUEE ET ECOLE NORMALE SUPERIEURE

DEPARTEMENT DES SCIENCES NATURELLES

MASTER CONJOINT EN DIDACTIQUE DES SCIENCES

OPTION : MATHEMATIQUES

EQUATIONS D'EVOLUTION SUR LES ESPACES DE RANDERS

Par :

NIYONIZIGIYE Pasteur

Mémoire présenté et défendu publiquement en vue de l'obtention du grade de Master en Didactique des Sciences Mathématiques.

Sous la direction de :

Pr NIBARUTA Gilbert

Bujumbura, Juillet 2024

COMPOSITION DU JURY

Dr MBAZUMUTIMA Vianney (*Président du Jury*)

Pr NDAYIRUKIYE Domitien (*Secrétaire du Jury*)

Pr NIBARUTA Gilbert (*Directeur de Mémoire*)

DEDICACE

A ma famille;

A mes parents;

A mes frères et sœurs;

A mes oncles et tantes ;

A tous mes amis et connaissances.

REMERCIEMENTS

Mes sincères remerciements vont d'abord à l'endroit du tout puissant pour m'avoir guidé et assisté durant mon parcours d'études.

Ma reconnaissance s'adresse plus particulièrement à mon encadreur Pr Gilbert NIBARUTA, enseignant à l'Ecole Normale Supérieure, qui a accepté de diriger ce mémoire de Master. Il m'a fait découvrir le sens de la recherche en Mathématiques. Ses précieux conseils, sa disponibilité permanente, surtout sa rigueur au travail et ses remarques m'ont été sans reproche dans la rédaction de ce mémoire.

De plus j'adresse mes sentiments de gratitude à l'ensemble des enseignants ayant contribué à ma formation durant mes études et à la direction Générale de l'Ecole Normale Supérieure ainsi qu'au décanat de l'Institut de Pédagogie Appliquée pour l'autorisation d'effectuer mon travail de recherche.

Je tiens également à remercier tous les membres du jury pour leur présence et pour leur lecture attentive de mon mémoire.

Enfin,que toute personne qui m'a aidé d'une manière ou d' une autre à la réussite de ce mémoire accepte mes remerciements.

RESUME

Soit $g(t)$ une solution de flot de Yamabe non normalisé à un paramètre t avec $\frac{\partial g(t)}{\partial t} = -Sg(t)$ où S est la courbure scalaire et g une métrique finslérienne à un paramètre t définie sur les espaces de Randers M. Dans ce mémoire, nous étudions les équations d'évolution des courbures finslériennes d'abord sous le flot de Yamabe non normalisé et puis sous la déformation de courbures de l'espace-temps définies sur les espaces de Randers.

Les résultats sont calculés et écrits localement.

Les mots clés : Espace de Randers, courbure de l'espace-temps, le flot de Yamabe non normalisé.

ABSTRACT

Let $g(t)$ be a one-parameter t non normalized Yamabe flow solution with $\frac{\partial g(t)}{\partial t} = -Sg(t)$ where S is the scalar curvature and g a one-parameter t finslerian metric defined on Randers spaces M.

Key words : Randers space,curvature of space-time,the non-normalized Yamabe flow.

Table des matières

COMPOSITION DU JURY i

DEDICACE ii

REMERCIEMENTS iii

RESUME iv

ABSTRACT v

TABLE DE MATIERES vi

AVANT-PROPOS viii

INTRODUCTION GENERALE 1

1 NOTIONS DE BASE SUR LES ESPACES DE RANDERS 2

1.1 Introduction 2

1.2 Les variétés finslériennes 2

1.2.1 Métrique Finslérienne 3

1.2.2 Exemples 3

1.2.3 Propriétés 3

1.2.4 Connexion de Finsler-Ehresmann et relèvement vertical et horizontal 4

1.2.5 Champ de Tenseurs Finslériens 5

1.2.6 Espaces de Randers 5

1.3 Le fibré vectoriel π^*TM pulled back et objets associés 6

1.3.1 Construction de fibré vectoriel π^*TM 6

1.3.2 Tenseur fondamental et tenseur de Cartan 7

1.4 Connexions finslériennes 7
1.4.1 Connexion non linéaire sur le Slit tangent bundle $TM \setminus \{0\}$ 7
1.4.2 Connexion de Chern sur le fibré π^*TM 9

2 EQUATIONS D'EVOLUTION DES COURBURES FINSLERIENNES SOUS LE FLOT DE YAMABE 10

2.1 Courbure totale finslérienne 10
2.2 Courbure de l'espace-temps finslérien et sa trace 14
2.3 Equations d'évolution des courbures finslériennes sous le flot de Yamabe non normalisé 14

3 EQUATIONS D'EVOLUTION SUR LES ESPACES DE RANDERS SOUS UNE DEFORMATION DE COURBURE DE L'ESPACE-TEMPS 20

3.1 Evolution de la métrique de Randers 21
3.2 Evolution de la courbure totale sur les espaces de Randers 27
3.3 Evolution de la courbure d'espace-temps sur les espaces de Randers 33
3.4 Evolution de la courbure scalaire dans les espaces de Randers 35

CONCLUSION GENERALE 37

BIBLIOGRAPHIE 38

AVANT-PROPOS

Ce mémoire rentre dans le cadre de l'obtention du diplôme de Master en Didactique des Sciences option Mathématiques.Il étudiera les équations d'évolution sur les espaces de Randers.

L'idée de ce mémoire de recherche est venue aux idées des autres qui ont développé les équations d'évolution sur les espaces de berwald.

Effet d epuis 1 982,Hamilton a é tudié l 'équation d 'évolution d es c ourbures Riemanniennes sous le flot Ricci.

Le but de mon mémoire est d'étudié les équations d'évolution des courbures finslériennes sous le flot de Yamabe non normalisée ainsi que sous la déformation des courbures d'espace-temps.ce travail se veut être une contribution dans les modélisation des systemes complexes,dans la prédiction des comportements futurs,dans le développement des nouvelles technologies et dans la résolution des problèmes du monde réel.Ainsi,des solutions proposée sont d'étudier l'existence et l'unicité des solutions de ces équations d'évoluton sur les espaces de Randers.

INTRODUCTION GENERALE

Une équation d'évolution sur les espaces de Randers sous la déformation de courbure de l'espace-temps est très importante dans les domaines de mathématiques et de physique [2]. Cette dernière est utilisée pour modéliser des systèmes complexes, prédire les comportements futurs, développer des nouvelles technologies et résoudre des problèmes du monde réel.

L'équation d'évolution des courbures Riemanniennes sous le flux de Ricci a été étudiée par Hamilton [3] en 1982. La méthode hamiltonienne consiste en partant d'une métrique initiale g quelconque sur une variété, à lui associer une famille $t \mapsto g(t)$ de métrique qui est solution, dite maintenant de Hamilton-Ricci :

$$\frac{\partial g(t)}{\partial t} = -2Ric_{g(t)}$$

de donnée initiale $g(0) = g$. De cette équation, $Ric_{g(t)}$ est la courbure de l'espace-temps sur la métrique $g(t)$.

L'existence et l'unicité de la solution du flot de Ricci-Finsler sont développées par Azami et Razavi [2] en 2013. L'existence des solutions par la méthode de flot de type Yamabe est développée dans [10],[11] et [12].

Dans ce travail, l'objectif général est d'établir les équations d'évolution des courbures finslériennes sur les espaces de Randers premièrement sous le flot de Yamabe non normalisé et deuxièmement sous la déformation de courbure de l'espace-temps.

Ce mémoire est organisé comme suit : Dans le premier chapitre, nous donnons quelques notions de base sur les variétés finslériennes permettant de travailler sur les espaces de Randers. Les équations d'évolution des courbures finslériennes sous le flot de Yamabe non normalisé sont développées dans le second chapitre. Dans le dernier chapitre nous établissons les évolutions des courbures finslériennes définies sur les espaces de Randers sous une déformation de courbure de l'espace-temps. Une conclusion générale est dégagée à la fin.

Chapitre 1

NOTIONS DE BASE SUR LES ESPACES DE RANDERS

1.1 Introduction

Dans ce premier chapitre, nous définissons les notions de base sur les variétés finslériennes en donnant quelques outils qui permettent de travailler sur les espaces de Randers.

Soit M une variété différentielle de classe C^∞ et de dimension n, on désigne par :

1. x : un point de M
2. $\{x^i\}_{i=1,\cdots,n}$: les coordonnées locales de x
3. U : un ouvert de M
4. TM : le fibré tangent de M
5. T_xM : l'espace tangent en x à M
6. (x, y) : un point de TM avec $y \in T_xM$
7. (x^i, y^i) : les coordonnées locales dans TM
8. $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}_{i=1,\cdots,n}$: sections de base induite par $\{x^i\}$
9. $\{\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial y^i}\}$: section de base pour TM
10. $\pi : TM \to M : (x, y) \mapsto x$: une projection naturelle
11. $\pi^{-1}(U)$: un ouvert de TM
12. $TM \setminus \{0\}$: fibré tangent privé de la section nulle.

1.2 Les variétés finslériennes

Soit M une variété différentiable de classe C^∞ à n dimension.

1.2.1 Métrique Finslérienne

Définition 1.1. *Une métrique finslérienne sur M est une application $F : TM \to [0, +\infty[$ satisfaisant aux propriétés suivantes :*

(i) $F(x, \lambda y) = \lambda F(x, y) \ \ \forall \lambda > 0$ *c'est-à-dire que F est positivement homogène de degré 1 sur TM ;*

(ii) $F(x, y)$ *est de classe* C^∞ *sur* $TM \setminus \{0\}$ *;*

(iii) La hessienne $\left(g_{ij}(x, y)\right)$ *d'éléments*

$$g_{ij}(x, y) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F^2(x, y)}{\partial y^i \partial y^j} \tag{1.1}$$

est définie positive en tout point (x, y) de TM.

Une variété différentielle muni d'une métrique finslérienne est appelée variété finslérienne.

1.2.2 Exemples

1. **Variété riemannienne** : Une variété riemannienne est la donnée du couple (M, g) où M est une variété différentiable de dimension n, $g = \{g_x\}_{x \in M}$ est une famille de produit scalaire g sur chaque espace tangent en x.
   En d'autres termes g_x est une matrice carrée d'ordre n dont ses composantes sont liées à la métrique de Finsler comme suit :
   $$g_{ij}(x, y) = g_{ij}(x).$$
2. **variété Minkowskienne et lcolement Minkowskienne** :une variété finslerienne (M, g) est dite localement minkowskienne si les composantes liées à la métrique de Finsler sont indépendant de x.
   $$g_{ij}(x, y) = g_{ij}(y).$$

Remarque 1.1. *1. Si $y = 0$ alors $F(x, y) = 0$.*

2. Si $y \neq 0$ alors $F(x, y) \neq 0$.

3. Il arrive des fois où $F(x, \lambda y) = |\lambda| F(x, y)$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, dans ce cas F est réversible. Dans la suite nous supposons que F n'est pas réversible.

1.2.3 Propriétés

Proposition 1.1. *[1] Soient V un espace vectoriel réel et $f : V \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ une application c^∞ sur $V \setminus \{0\}$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $f(cy) = c^r f(y)$, *f est une fonction homogène de degré r*

(ii) $y^i \frac{\partial}{\partial y^i} f(y) = r f(y)$.

1.2.4 Connexion de Finsler-Ehresmann et relèvement vertical et horizontal

Considérons l'application différentielle π_* de la submersion $\pi : TM \setminus \{0\} \to M$ définie par $\pi_* : T(TM \setminus \{0\}) \to TM$.

Définition 1.2. *Le sous espace vertical V de $T(TM \setminus \{0\})$ est défini par $V = Ker(\pi_*)$ .Il est localement engendré par l'ensemble $\{F\frac{\partial}{\partial y^i}, 1 \leq i \leq n\}$ sur chaque $\pi^{-1}(U) \subset TM \setminus \{0\}$.*

Définition 1.3. *Un sous espace horizontal H de $T(TM \setminus \{0\})$ est par définition le complémentaire de V dans $T(TM\{0\})$. Les fibrés H et V donnent un découpage lisse de*

$$T(TM \setminus \{0\}) = H \oplus V. \tag{1.2}$$

Définition 1.4. *Une connexion d'Ehresmann est une sélection d'un sous espace horizontal H de $T(TM \setminus \{0\})$. H peut être définie canoniquement à partir de l'équation des géodésiques [4] suivante :*

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} + 2G^i(x, \frac{dx}{dt}) = 0, \quad avec\ G^i = \frac{1}{4}g^{il}\left\{2\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l}\right\}y^j y^k \quad . \tag{1.3}$$

Définition 1.5. *Soit $\pi : TM \setminus \{0\} \to M$ la projection naturelle.*

1) Une connexion d'Ehresmann-Finsler de π est le sous fibré H de $T(TM \setminus \{0\})$ donné par

$$H = Ker\theta, \tag{1.4}$$

où $\theta := T(TM \setminus \{0\}) \to \pi^*TM$ est le morphisme du fibré défini par

$$\theta = \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes \frac{1}{F}(dy^i + N^i_j dx^j). \tag{1.5}$$

2) La forme $\theta : T(TM \setminus \{0\}) \to \pi^*TM$ induit une application linéaire [5]

$$\theta_{(x,y)} : T_{(x,y)}(TM \setminus \{0\}) \to T_xM \tag{1.6}$$

pour chaque point $(x, y) \in TM \setminus \{0\}$ où $x \in M = \pi(x, y)$.

Le relèvement vertical d'une section ξ de π^*TM est une unique section $V(\xi)$ de $T(TM \setminus \{0\})$ telle que $\forall (x, y) \in TM \setminus \{0\}$

$$\pi^*[v(\xi)] = 0_{(x,y)} \ et\ \theta[v(\xi)] = \xi_{(x,y)}. \tag{1.7}$$

3) La forme $\pi_* : T(TM \setminus \{0\}) \to \pi^*TM$ *induit une application linéaire*

$$\pi_{*|(x,y)} : T_{(x,y)}(TM \setminus \{0\}) \to T_xM \tag{1.8}$$

pour chaque point $(x, y) \in TM|\{0\}$ *où* $x \in M = \pi(x, y)$.

Le relèvement horizontal d'une section ξ *de* π^*TM *est l'unique section* $H(\xi)$ *de* $T(TM \setminus \{0\})$ *telle que* $\forall (x, y) \in TM \setminus \{0\}$,

$$\pi^*[h(\xi)]_{|(x,y)} = \xi_{(x,y)} \quad et \quad \theta[h(\xi)] = 0_{(x,y)}. \tag{1.9}$$

1.2.5 Champ de Tenseurs Finslériens

Définition 1.6. *Un champ de tenseur finslérien* T *de type* (q, o, p_1, p_2)*sur* $TM \setminus \{0\}$ *est une section* C^∞ *du fibré vectoriel*

$$\underbrace{\pi^*T^*M \otimes \cdots \otimes \pi^*T^*M}_{p_1-facteurs} \otimes \underbrace{T^*(T^*M \setminus \{0\}) \otimes \cdots \otimes T^*(T^*M \setminus \{0\})}_{p_2-facteurs} \otimes^q \pi^*TM \tag{1.10}$$

C'est-à-dire que $T : \pi^*T^*M \otimes \cdots \otimes \pi^*T^*M \otimes T^*(TM \setminus \{0\}) \otimes \cdots \otimes T^*(TM \setminus \{0\}) \otimes^q \pi^*TM \to C^\infty(TM \times \cdots \times TM, \mathbb{R})$.

Remarque 1.2. *Dans une carte locale,* $T = T^{k_1 \cdots k_2}_{i_1 \cdots i_p, j_1 \cdots j_{p_2}} \partial_{k_1} \otimes \cdots \otimes \partial_{k_q} \otimes dx^{i_1} \otimes \cdots \otimes d_x^{i_{p_1}} \otimes \varepsilon^{j_1} \otimes \cdots \otimes \varepsilon^{j_{p_1}}$ *où* $\alpha_{x_1} \otimes \cdots \otimes \alpha_{x_2} \otimes dx^{i_1} \otimes \cdots dx^{i_p} \otimes \varepsilon^{j_1} \cdots \otimes \varepsilon^{j_{p_2}}$ *avec* $k \in \{1, \cdots, n\}q$, $i \in \{1 \cdots n\}^{p_1}, j \in \{1, \cdots n\}^{p_2}$ *est une section de base du tenseur et les* $\partial_{k_r} := \frac{\partial}{\partial x^{k_r}}$ *ainsi que* ε^{j_s} *sont respectivement les sections de base pour* π^*TM *et* $T^*(TM \setminus \{0\})$.

Exemple 1.1. *1. Le tenseur fondamental* $g_{(x,y)}$ *est de type* $(0, 0, 2, 0)$.

2. La forme de Finsler-Ehresmann $\theta_{x,y}$ *est de type* $(1, 0, 0, 1)$.

1.2.6 Espaces de Randers

Définition 1.7. *Une variété finslérienne* (M, F) *est dite variété de Randers si* $\forall x, y \in TM$, $F(x, y)$ *est de la forme :*

$$F(x, y) = \alpha(x, y) + \beta(x, y) \tag{1.11}$$

où

$$\begin{cases} \alpha(x, y) = \sqrt{a_{ij}(x)y^i y^j} \\ \beta(x, y) = b_i(x)y^i \end{cases}$$

avec a_{ij} *les composantes d'une métrique Riemannienne* $a = a_{ij}dx^i \otimes dx^j$ *et* b_i *sont les composantes d'une 1-forme* b *sur* M.

Dans ce cas, les composantes g_{ij} de la forme bilinéaire g associée à la métrique de Randers peuvent s'écrire sous la forme [9] :

$$g_{ij}(x,y) = \left(\frac{y_i}{\alpha} + b_i\right)\left(\frac{y_j}{\alpha} + b_j\right) + \frac{F}{\alpha}\left(a_{ij} - \frac{y_i}{\alpha}\frac{y_j}{\alpha}\right) \tag{1.12}$$

où $y_i = a_{ik}y^k$, $y_j = a_{jl}y^l$.
Son inverse

$$g^{ij}(x,y) = \frac{\alpha}{F}a^{ij} + \frac{\alpha^2}{F^2}\frac{\beta + \alpha \parallel b \parallel^2}{F}\frac{y^i}{\alpha}\frac{y^j}{\alpha} - \frac{\alpha^2}{F^2}\left(\frac{y^i}{\alpha}b^j + \frac{y^j}{\alpha}b^i\right) \tag{1.13}$$

où $\parallel b \parallel = b^i b_i,\ b_i = b_i dx^i$.

1.3 Le fibré vectoriel π^*TM pulled back et objets associés

Soient M une variété différentielle de dimension n et $TM \setminus \{0\}$ le slit tangent bundle.

1.3.1 Construction de fibré vectoriel π^*TM

Définition 1.8. *La projection $\pi : TM \setminus \{0\} \to M$ pulls back l'espace π^*TM au dessus de $TM \setminus \{0\}$.*

π^*TM est le fibré vectoriel dont le fibré de base est le fibré $TM \setminus \{0\}$.

π^*TM est appelé fibré tangent pulled-back, et on a :

$$\pi^*TM := \{(x,y,v) : (x,y) \in TM \setminus \{0\} \text{ et } v \in T_{\pi(x,y)}M\}.$$

Les fibrés de π^*TM sont des copies de l'espace vectoriel T_xM. On a $\pi^*TM|_{(x,y)} \cong T_xM$.

Définition 1.9. *Le Pulled-back du fibré cotangent π^*T^*M est un fibré vectoriel dual du fibré π^*TM et dont les fibrés sont des copies de T_x^*M. Précisément, on a :*

$$\pi^*T^*M|_{x,y} \cong T_x^*M$$

Soient $(x^i)_{i=1,\cdots,n}$ les coordonnées sur un ouvert $U \subset M$ et $(x^i, y^i)_{i=1,\cdots,n}$ des coordonnées locales sur un ouvert $\pi^{-1}(U) \subset TM$. Les x^i produisent des sections de bases $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$ et $\{dx^i\}$ respectivement pour TM et pour T^*M.

Puisque les fibres du fibré tangent pulled-back sont identiques à TM pendant que les fibres de π^*T^*M sont identiques à T_x^*M, alors $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$ et $\{dx^i\}$ sont respectivement les sections de bases pour les fibrés π^*TM et π^*T^*M.

Avec les sections de base, on peut définir quelques objets géométriques finslériennes associées au fibré π^*TM et à son dual π^*T^*M.

1.3.2 Tenseur fondamental et tenseur de Cartan

Le fibré vectoriel π^*TM admet une métrique riemannienne naturelle $g := g_{ij}(x,y)dx^i \otimes dx^j$. C'est un tenseur fondamental dont les éléments sont définis dans $(I.1)$. Ce dernier est une section symétrique du fibré $\pi^*T^*M \otimes \pi^*T^*M$.

Un autre objet très important est le tenseur de Cartan A.

$$A := A_{ijk}(x,y)dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k$$

où

$$A_{ijk} = \frac{F}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k}$$

A est une section symétrique de fibré $\pi^*T^*M \otimes \pi^*T^*M$.

Lemme 1.1. *Soit F une métrique de Finsler sur une variété différentiable M, alors :*

1. $\dfrac{\partial g^{ij}}{\partial y^k} = -\dfrac{2}{F}A_k^{ij}$

où g^{ij} sont des composantes de l'inverse de g et $A_k^{ij} = g^{il}g^{jm}A_{lmk}$.

2. $A_{ijk} = A_{jik} = A_{ikj}$.

3. $y^i A_{ijk} = 0$.

Lemme 1.2. *Une métrique de Finsler est riemannienne si le tenseur de Cartan est nul.*

1.4 Connexions finslériennes

Soient g_{ij} les composantes du tenseur fondamentel g.

1.4.1 Connexion non linéaire sur le Slit tangent bundle $TM \setminus \{0\}$

Les composantes g_{ij} du tenseur fondamental g sont des fonctions différentielles sur $TM \setminus \{0\}$.

Elles sont invariantes sous la transformation $y \mapsto cy$. Elles sont utilisées pour définir les symboles de Christoffel de la seconde forme :

$$\gamma^i_{jk} := \frac{1}{2} g^{il} \left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l} \right)$$

Les γ^i_{jk} déterminent les coefficients d'une connexion non linéaire sur $TM \setminus \{0\}$ donnée par :

$$N^i_j = \gamma^i_{jk} y^k - \frac{1}{F} A_{jkl} g^{il} \gamma^k_{rs} y^r y^s; \forall i, j, k, r, s = 1, \cdots, n.$$

Bref, Sur $TM \setminus \{0\}$, les bases qu' on travaille sont $\{\frac{\delta}{\delta x^i}, F\frac{\delta}{\delta y^i}\}$ et son dual $\{dx^i, \frac{\delta y^i}{F}\}_{i=1\cdots n}$ au lieu de $\{\frac{\partial}{\partial x^i}, F\frac{\partial}{\partial y^i}\}_{i=1\cdots n}$ et son dual $\{dx^i, \frac{dy^i}{F}\}_{i=1,\cdots,n}$.

Les facteurs F et $\frac{1}{F}$ sont introduits pour rendre tous les objets géométriques qui sont invariants sous la transformation $y \mapsto cy,\ (c > 0)$.

De plus, le fibré tangent de $TM \setminus \{0\}$ peut se décomposer en une somme directe de la partie horizontale H engendrée par $\{\frac{\delta}{\delta x^i}\}_{i=1\cdots,n}$ et la partie verticale V engendrée par $\{F\frac{\partial}{\partial y^i}\}_{i=1,\cdots,n}$.

En d'autres termes, on a :

$$\begin{aligned} T(TM \setminus \{0\}) &= vect\{\frac{\delta}{\delta x^i}\} \oplus vect\{F\frac{\delta}{\delta y^i}\} \\ &= H \oplus V. \end{aligned}$$

où $\frac{\delta}{\delta x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i} - N^j_i \frac{\partial}{\partial y^j}$.

Avec les coefficients d'une connexion non linéaire N^i_j, on peut définir une forme différentielle θ, comme suit :

$$\begin{aligned} &\theta : \pi^* TM \to T(TM \setminus \{0\}) \ \text{ par :} \\ &\theta := \frac{\delta}{\delta x^i} \oplus \frac{1}{F} \left(dy^i + N^i_j dx^j \right). \end{aligned}$$

A travers la décomposition de $T(TM \setminus \{0\})$, $TM \setminus \{0\}$ admet une connexion non linéaire appelée connexion d'Ehresmann.

1.4.2 Connexion de Chern sur le fibré π^*TM

Définition 1.10. *Une connexion linéaire sur le fibré vectoriel π^*TM au dessus du fibré $TM \setminus \{0\}$ est une application :*

$$\begin{aligned}\bar{\nabla} : \chi(TM \setminus \{0\}) \times \Gamma(\pi^*TM) &\to \Gamma(\pi^*TM)\\ (X, \xi) &\longmapsto \bar{\nabla}_X\xi\end{aligned}$$

telle que $\forall f \in C^\infty(TM \setminus \{0\}, \mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}&(i)\ \bar{\nabla}_{X+Y}\xi = \bar{\nabla}_X\xi + \bar{\nabla}_Y\xi\\ &(ii)\ \nabla_{fX}\xi = f\bar{\nabla}_X\xi\\ &(iii)\ \bar{\nabla}_X(f\xi) = X(f)\xi + f\bar{\nabla}_X\xi\\ &(iv)\ \bar{\nabla}_X(\xi+\eta) = \bar{\nabla}_X\xi + \bar{\nabla}_X\eta.\end{aligned}$$

Remarque 1.3. *1. $\bar{\nabla}_X\xi$ est appelée dérivée covariante de ξ dans la direction de X.*

2. En coordonnées locales $(x^i)_{i=1,\cdots,n}$ sur M, on a :

$$\bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^i} = \Gamma^k_{ij}\frac{\partial}{\partial x^k} \quad \text{où les } \Gamma^k_{ij} \text{ sont des coefficients de } \bar{\nabla}.$$

Lemme 1.3. *Considérons (M, F) une variété finslérienne et g son tenseur fondamental. Il existe une unique connexion de Chern ∇ sur le fibré vectoriel π^*TM tel que pour $X, Y \in \chi(TM \setminus \{0\})$ et $\forall \xi, \eta \in \pi^*TM$, on a les propriétés suivantes :*

1. $\nabla_X\pi_*Y - \nabla_Y\pi_*X = \pi_*[X, Y]$
2. $X(g(\xi,\eta)) = g(\nabla_X\xi, \eta) + g(\xi, \nabla_X\eta) + A(\theta(X), \xi, \eta)$ *où le tenseur* $A = F\frac{\partial}{\partial y^x}g_{ij}dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k$ *est le Cartan.*

On a

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\frac{\partial}{\partial x^k} = \Gamma^i_{jk}\frac{\partial}{\partial x^i},\ \Gamma^i_{jk} := \frac{1}{2}g^{il}\left(\frac{\delta g_{jl}}{\delta x^k} + \frac{\delta g_{kl}}{\delta x^j} - \frac{\delta g_{jk}}{\delta x^l}\right) \tag{1.14}$$

où Γ^i_{jk} est le symbole de Christoffel de la connexion Chern

$$\frac{\delta}{\delta x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i} - N^j_i\frac{\partial}{\partial y^j} = h(\frac{\partial}{\partial x^i})$$

$$\text{avec } N^i_j = \Gamma^i_{jk}y^k.$$

Chapitre 2

EQUATIONS D'EVOLUTION DES COURBURES FINSLERIENNES SOUS LE FLOT DE YAMABE

Dans ce chapitre, nous définisons la courbures totale, la courbure de l'espace-temps finslérien, toutes écrites en coordonnées locales et nous étudions les équations d'évolutions des courbures finslériennes sous le flot de Yamabe non normalisé.

2.1 Courbure totale finslérienne

Définition 2.1. *[7] La courbure totale associée à la connexion de Chern ∇ sur le fibré vectoriel π^*TM sur la variété $TM \setminus \{0\}$ est l'application*

$$\begin{aligned} \phi :&\chi(TM \setminus \{0\}) \times \chi(TM \setminus \{0\}) \times \Gamma(\pi^*TM) \to \Gamma(\pi^*TM) \\ &(X, Y, \xi) \longmapsto \phi(X, Y)\xi = \nabla_X \nabla_Y \xi - \nabla_Y \nabla_X \xi - \nabla_{[X,Y]}\xi \end{aligned} \tag{2.1}$$

Par la relation (1.2), on a :

$$\nabla_X = \nabla_{\hat{X}} + \nabla_{\overset{\vee}{X}};$$

où $X = \hat{X} + \overset{\vee}{X}$ avec $\hat{X} \in \Gamma(H)$ et $\overset{\vee}{X} \in \Gamma(V)$.

On peut définir aussi tenseur de courbure totale de ∇ en utilisant la métrique finslérienne, comme suit :

$$\begin{aligned} \Phi(\xi, \eta, X, Y) &= g(\phi(X, Y)\xi, \eta) \\ &= g(\nabla_X \nabla_Y \xi - \nabla_Y \nabla_X \xi - \nabla_{[X,Y]}\xi, \eta). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Comme $X = \hat{X} + \overset{\vee}{X},\ Y = \hat{Y} + \overset{\vee}{Y}$, $\Phi(\xi, \eta, X, Y)$ devient :

$$\Phi(\xi,\eta,X,Y) = g\Big[(\nabla_{\hat{X}} + \nabla_{\overset{\vee}{X}})(\nabla_{\hat{Y}} + \nabla_{\overset{\vee}{Y}})\xi - (\nabla_{\hat{Y}} + \nabla_{\overset{\vee}{Y}})(\nabla_{\hat{X}} + \nabla_{\overset{\vee}{X}})\xi - \nabla_{\Big[\hat{X}+\overset{\vee}{X},\hat{Y}+\overset{\vee}{Y}\Big]}\xi, \eta\Big]$$

or puisque ∇ est linéaire, on a :

$$\begin{aligned}
\nabla_{\Big[\hat{X}+\overset{\vee}{X},\ \hat{Y}+\overset{\vee}{Y}\Big]}\xi &= \nabla_{\Big(\hat{X}+\overset{\vee}{X}\Big)\Big(\hat{Y}+\overset{\vee}{Y}\Big)-\Big(\hat{Y}+\overset{\vee}{Y}\Big)\Big(\hat{X}+\overset{\vee}{X}\Big)}\xi \\
&= \nabla_{\hat{X}\hat{Y}+\hat{X}\overset{\vee}{Y}+\overset{\vee}{X}\hat{Y}+\overset{\vee}{X}\overset{\vee}{Y}-\hat{Y}\hat{X}-\hat{Y}\overset{\vee}{X}-\overset{\vee}{Y}\hat{X}-\overset{\vee}{Y}\overset{\vee}{X}}\xi \\
&= \nabla_{\overset{\wedge}{[X,Y]}}\xi + \nabla_{\overset{\vee}{[X,Y]}}\xi + \nabla_{\overset{\vee}{[X,Y]}}\xi + \nabla_{\overset{\vee}{[X,Y]}}\xi.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\Phi(\xi,\eta,X,Y) =& g\Big(\nabla_{\hat{X}}\nabla_{\hat{Y}}\xi + \nabla_{\hat{X}}\nabla_{\overset{\vee}{Y}}\xi + \nabla_{\overset{\vee}{X}}\nabla_{\hat{Y}}\xi + \nabla_{\overset{\vee}{X}}\nabla_{\overset{\vee}{Y}}\xi - \nabla_{\hat{Y}}\nabla_{\hat{X}}\xi - \nabla_{\hat{Y}}\nabla_{\overset{\vee}{X}}\xi - \\
& \nabla_{\overset{\vee}{Y}}\nabla_{\hat{X}}\xi - \nabla_{\overset{\vee}{Y}}\nabla_{\overset{\vee}{X}}\xi - \nabla_{\overset{\wedge}{[X,Y]}}\xi - \nabla_{\overset{\wedge}{[X,Y]}}\xi - \nabla_{\overset{\vee}{[X,Y]}}\xi - \nabla_{\overset{\vee}{[X,Y]}}\xi,\ \eta\Big).
\end{aligned}$$

Comme $\phi(X,Y)\xi = \nabla_X\nabla_Y\xi - \nabla_Y\nabla_X\xi - \nabla_{[X,Y]}\xi$,

$$\begin{aligned}
\Phi(\xi,\eta,X,Y) &= g\Big[\phi(\hat{X},\hat{Y})\xi + \phi(\hat{X},\overset{\vee}{Y})\xi + \phi(\overset{\vee}{X},\hat{Y})\xi + \phi(\overset{\vee}{X},\overset{\vee}{Y})\xi, \eta\Big] \\
&= g\Big[\phi(\hat{X},\hat{Y})\xi, \eta\Big] + g\Big[\phi(\hat{X},\overset{\vee}{Y})\xi, \eta\Big] + g\Big[\phi(\overset{\vee}{X},\hat{Y})\xi, \eta\Big] + g\Big[\phi(\overset{\vee}{X},\overset{\vee}{Y})\xi, \eta\Big] \\
&= R(\xi,\eta,X,Y) + P(\xi,\eta,X,Y) + Q(\xi,\eta,X,Y) \qquad (2.3)
\end{aligned}$$

où

$R(\xi,\eta,X,Y) = g\Big[\phi(\hat{X},\hat{Y})\xi, \eta\Big]$ est la première partie de la courbure totale;

$P(\xi,\eta,X,Y) = g\Big[\phi(\hat{X},\overset{\vee}{Y})\xi, \eta\Big] + g\Big[\phi(\overset{\vee}{X},\hat{Y})\xi, \eta\Big]$ est la deuxième partie de la courbure totale;

$Q(\xi,\eta,X,Y) = g\Big[\phi(\overset{\vee}{X},\overset{\vee}{Y})\xi, \eta\Big]$ est la troisième partie de la courbure totale.

En particulier, si ∇ est la connexion de Chern, la Q-courbure s'annule.

En coordonnées locales, la courbure totale est :

$$\begin{aligned}\Phi\left(\partial_i,\ \partial_j,\ \overset{\wedge}{\partial}_k+\overset{\vee}{\partial}_k,\ \overset{\wedge}{\partial}_l+\overset{\vee}{\partial}_l\right) =&R\left(\partial_i,\ \partial_j,\ \overset{\wedge}{\partial}_k+\overset{\vee}{\partial}_k,\ \overset{\wedge}{\partial}_l+\overset{\vee}{\partial}_l\right)+P\left(\partial_i,\ \partial_j,\ \overset{\wedge}{\partial}_k+\overset{\vee}{\partial}_k,\ \overset{\wedge}{\partial}_l+\overset{\vee}{\partial}_l\right)\\ &=\left(\frac{\delta\Gamma^s_{il}}{\delta x^k}-\frac{\delta\Gamma^s_{ik}}{\delta x^l}\right)g_{js}+\left(\Gamma^s_{ik}\Gamma^r_{ls}-\Gamma^s_{il}\Gamma^r_{ks}\right)g_{jr}-F\frac{\partial\Gamma^s_{ik}}{\partial y^l}g_{js}\end{aligned} \tag{2.4}$$

où $\partial_i=\frac{\partial}{\partial x^i}$ et $F=\sqrt{g_{ij}y^iy^j}$.

Lemme 2.1. *[6] L'identité de Bianchi définie sur une variété finslérienne M, $\forall\xi,\eta\in\Gamma(\pi^*TM)$ et $X,Y,Z\in\chi(TM\setminus\{0\})$ est donné par :*

$$\underbrace{(\nabla_Z\Phi)(\xi,\eta,X,Y)}_{(1)}+\underbrace{(\nabla_X\Phi)(\xi,\eta,Y,Z)}_{(2)}+\underbrace{(\nabla_Y\Phi)(\xi,\eta,Z,X)}_{(3)}=0 \tag{2.5}$$

Preuve 2.1. *Calculons :*

$$\begin{aligned}(1)=&Z\Phi(\xi,\eta,X,Y)-\Phi(\nabla_Z\xi,\eta,X,Y)\\ &-\Phi(\xi,\nabla_Z\eta,X,Y)-\Phi(\xi,\eta,\nabla_Z\pi_*X,Y)-\Phi(\xi,\eta,\nabla_Z\pi_*Y).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2)=&X\Phi(\xi,\eta,Y,Z)-\Phi(\nabla_X\xi,Y,Z)-\Phi(\xi,\nabla_X,\eta,Y,Z)\\ &-\Phi(\xi,\eta,\nabla_X\pi_*Y,Z)-\Phi(\xi,\eta,Y,\nabla_X\pi_*Z).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(3)=&Y(\Phi Y,\eta,Z,X)-\Phi(\nabla_Y\xi,\eta,Z,X)-\Phi(\xi,\nabla_Y\eta,Z,X)\\ &-\Phi(\xi,\eta,\nabla_Y\pi_*Z,X)-\Phi(\xi,\eta Z,\nabla_Y\pi_*X).\end{aligned}$$

Par la symétrie de ∇, on a :

$$\begin{aligned}\Phi(\xi,\eta,\nabla_X\pi_*Y,Z)&=-\Phi(\xi,\eta,Z,\nabla_X\pi_*Y)\\ &=-\Phi(\xi,\eta,Z,-\nabla_Y\pi_*X)\\ &=\Phi(\xi,\eta,Z,\nabla_Y\pi_*X).\end{aligned}$$

et la relation(2.5)devient :

$$\begin{aligned}(1)+(2)+(3) &= Z\Phi(\xi,\eta,X,Y)-\Phi(\nabla_Z\xi,\eta,X,Y)-\Phi(\xi,\nabla_Z\eta,X,Y)-\Phi(\xi,\eta,\nabla_Z\pi_*X,Y)\\ &\quad -\Phi(\xi,\eta,X,\nabla_Z\pi_*Y)+X\Phi(\xi,\eta,Y,Z)-\Phi(\nabla_X\xi,\eta,Y,Z)-\Phi(\xi,\nabla_X\eta,Y,Z)\\ &\quad -\Phi(\xi,\eta,\nabla_X\pi_*Y,Z)-\Phi(\xi,\eta,Y,\nabla_X\pi_*Z)+Y\Phi(\xi,\eta,Z,X)-\Phi(\nabla_Y\xi,\eta,Z,X)\\ &\quad -\Phi(\xi,\nabla_Y\eta,Z,X)-\Phi(\xi,\eta,\nabla_Y\pi_*Z,X)-\Phi(\xi,\eta,Z,\nabla_Y\pi_*X)\\ &= Z\Phi(\xi,\eta,X,Y)-\Phi(\nabla_Z\xi,\eta,X,Y)-\Phi(\xi,\nabla_Z\eta,X,Y)+\Phi(\xi,\eta,Y\nabla_Z\pi_*X)\\ &\quad +\Phi(\xi,\eta,X,\nabla_Y\pi_*Z)+X\Phi(\xi,\eta,Y,Z)-\Phi(\nabla_X\xi,\eta,Y,Z)-\Phi(\xi,\nabla_X,\eta,Y,Z)\\ &\quad +\Phi(\xi,\eta,Z,\nabla_X\pi_*Y)+\Phi(\xi,\eta,Y,\nabla_Z\pi_*X)+Y\Phi(\xi,\eta,Z,X)-\Phi(\nabla_y\xi,\eta,Z,X)\\ &\quad -\Phi(\xi,\nabla_Y\eta,Z,X)+\Phi(\xi,\eta,X,\nabla_Y\pi_*Z)+\Phi(\xi,\eta,Z,\nabla_X\pi_*Y)\end{aligned}$$

or $\Phi(\xi,\eta,X,Y)=g(\phi(x,y)\xi,\eta)$

$$\begin{aligned}(1)+(2)+(3) &= Zg(\phi(X,Y)\xi,\eta)-g(\phi(X,Y)\nabla_Z\xi,\eta)-g(\phi(X,Y)\xi,\nabla_Z\eta)\\ &\quad +g(\phi(Y,\nabla_Z\pi_*X)\xi,\eta)+Xg(\phi(Y,Z)\xi,\eta)-g(\phi(Y,Z)\nabla_X\xi,\eta)\\ &\quad -g(\phi(Y,Z)\xi,\nabla_X\eta)+g(\Phi(Z,\nabla_X\pi_*Y)\xi,\eta)+g(\phi(Y,\nabla_Z\pi_*X)\xi,\eta)\\ &\quad +Yg(\phi(Z,X)\xi,\eta)-g(\phi(Z,X)\nabla_Y\xi,\eta)-g(\phi(Z,X)\xi,\nabla_y\eta)\\ &\quad +g(\phi(X,\nabla_y\pi_*Z)\xi,\eta)+g(\phi(Z,\nabla_X\pi_*Y)Y,\eta)\\ &= 2\Big[g(\phi(Z,\nabla_X\pi_*Y)+g(\phi(X,\nabla_Y\pi_*Z)+g(\phi(Y,\nabla_Z\pi_*X)\xi,\eta)\Big]\\ &\quad +Zg(\phi(X,Y)\xi,\eta)-g(\phi(X,Y)\nabla_Z\xi,\eta)-g(\phi(X,Y)\xi,\nabla_Z\eta)\\ &\quad +Xg(\phi(Y,Z)\xi,\eta)-g(\phi(Y,Z)\nabla_X\xi,\eta)-g(\phi(Y,Z)\xi,\nabla_X\eta)+Yg(\phi(Z,X)\xi,\eta)\\ &\quad -g(\phi(Z,X)\nabla_Y\xi,\eta)-g(\phi(Z,X)\xi,\nabla_Y\eta).\end{aligned}$$

D'après l'identité de Jacobi,

$$g(\phi(Z,\nabla_X\pi_*Y)\xi,\eta)+g(\phi(X,\nabla_Y\pi_*Z)\xi,\eta)+g(\phi(y,\nabla_Z\pi_*X)\xi,\eta)=0$$

Puisque ∇ *est la connexion de Chern,*

$$(\nabla_Xg)(\xi,\eta)=Xg(\xi,\eta)-g(\nabla_X\xi,\eta)-g(\xi,\nabla_X\eta)=0.$$

d'où ,l'identité de Bianchi devient :

$$(1)+(2)+(3)=(\nabla_Zg)(\Phi(X,Y)\xi,\eta)+(\nabla_Xg)(\Phi(Y,Z)\xi,\eta)+(\nabla_Yg)(\Phi(Z,X)\xi,\eta)=0.$$

2.2 Courbure de l'espace-temps finslérien et sa trace

D'après la connexion de Chern, on définit le tenseur de Ricci et de la courbure scalaire par :

1. Le tenseur de Ricci de (M, F) est défini par [2] :

$$Ric(\xi, X) := trace\ g[\eta \mapsto R(X, h(\eta) + v(\eta))\xi] \tag{2.6}$$

où h et v sont définies dans la relation (1.9) et (1.7) respectivement.

En coordonnées locales on a :

$$\begin{aligned} Ric(\partial_i,\ \overset{\wedge}{\partial}_k + \overset{\vee}{\partial}_k) &= \frac{\partial \Gamma^l_{il}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^l_{ik}}{\partial x^l} + \Gamma^s_{ik}\Gamma^l_{ls} - \Gamma^s_{il}\Gamma^l_{ks} - F\frac{\partial \Gamma^s_{ik}}{\partial y^l} \\ &= g^{jl}\Phi_{ijkl}, \end{aligned}$$

avec $\Phi_{ijkl} = \Phi\left(\partial_i,\ \partial_j,\ \overset{\wedge}{\partial}_k + \overset{\vee}{\partial}_k,\ \overset{\wedge}{\partial}_l + \overset{\vee}{\partial}_l\right)$ donnée dans la relation (2.4).

2. Sa trace S de (M, F) est définie par :

$$S = traceg(Ric), g := \pi^* g \tag{2.7}$$

Localement, on a :

$$\begin{aligned} S(\partial_i,\ \overset{\wedge}{\partial}_k + \overset{\vee}{\partial}_k) &= Ric_{ik}g^{ik} \\ &= \left(\frac{\partial \Gamma^s_{il}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^s_{ik}}{\partial x^l} + \Gamma^s_{ik}\Gamma^r_{ls} - \Gamma^s_{il}\Gamma^r_{s} - F\frac{\partial \Gamma^s_{ik}}{\partial y^l}\right)g^{ik} \\ &= g^{jl}\Phi_{ijkl}g^{ik} \\ &= g^{jl}g^{ik}\Phi_{ijkl}. \end{aligned} \tag{2.8}$$

2.3 Equations d'évolution des courbures finslériennes sous le flot de Yamabe non normalisé

Définition 2.2. *Soit $g(t)$ une famille à un paramètre $t \in [0, T[$ de métriques finslériennes sur une variété (M, g_0) compacte.*

Désignons par S la courbure scalaire finslérienne. Le flot de Yamabe non normalisé est définie

par :

$$\begin{cases} \frac{\partial g(t)}{\partial t} = -Sg(t) & \text{dans } M \times [0, T[\\ g(x, y, 0) = g(x, y) & \textit{dans } M. \end{cases} \tag{2.9}$$

Remarque 2.1. *Soit $(M, g(0))$ une variété riemannienne. Si on écrit $g(t) = \mu(t)^{\frac{4}{n-2}} g_0$ où $\mu \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ est positive alors le système (2.9) est équivalente à une équation de la chaleur [3]. Hamilton a prouvé l'existence de cette équation.*

Lemme 2.2. *Soit $(M, g(t))$ où $g(t)$ est le tenseur fondamentale d'une variété de Finsler de dimension n. Si $(M, g(t))$ est la solution du flot de Yamabe (2.9) sur $(M, g(0))$ alors l'inverse du tenseur fondamental g^{ij} évolue comme suit :*

$$\frac{\partial g^{ij}}{\partial t} = nSg^{ij}. \tag{2.10}$$

Proposition 2.1. *Soit $(M, g(t))$ où $g(t)$ est le tenseur fondamental d'une variété de Finsler de dimension n. Si $(M, g(t))$ est la solution du flot de Yamabe (2.9) sur $(M, g(0))$ alors les symboles de Christoffel $\Gamma^l_{ij} = \frac{1}{2} g^{kl} \left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right)$ évoluent comme suit :*

$$\frac{\partial \Gamma^k_{ij}}{\partial t} = (n-1) S \Gamma^k_{ij} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial S}{\partial x^i} \delta^k_j + \frac{\partial S}{\partial x^j} \delta^k_i - g^{kl} g_{ij} \frac{\partial S}{\partial x^l} \right). \tag{2.11}$$

Preuve 2.2.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\Gamma^k_{ij} &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left[g^{kl}\left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right) \right] \\
&= \frac{1}{2}\frac{\partial g^{kl}}{\partial t}\left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right) + \frac{1}{2} g^{kl} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right) \\
&= \frac{1}{2} nSg^{kl}\left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right) + \frac{1}{2} g^{kl}\left[\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right) \right] \\
&= \frac{1}{2} nSg^{kl}\left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right) + \frac{1}{2} g^{kl}\left[\frac{\partial}{\partial x^i}(-Sg_{jl}) + \frac{\partial}{\partial x^j}(-Sg_{il}) - \frac{\partial}{\partial x^l}(-Sg_{ij} \right] \\
&= \frac{1}{2} nSg^{kl}\left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right) + \frac{1}{2} g^{kl}\Bigg[-(\frac{\partial}{\partial x^i} S) g_{jl} - S\frac{\partial}{\partial x^i} g_{jl} - (\frac{\partial S}{\partial x^j}) g_{il} \\
&\quad - S\frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} + (\frac{\partial S}{\partial x^l}) g_{ij} + S\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \Bigg] \\
&= \frac{1}{2} nSg^{kl}\left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right) + \frac{1}{2} Sg^{kl}\left(- \frac{\partial g_{il}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right) \\
&\quad + \frac{1}{2} g^{kl}\left(- g_{jl}\frac{\partial S}{\partial x^i} - g_{ij}\frac{\partial S}{\partial x^j} + g_{ij}\frac{\partial S}{\partial x^l} \right) \\
&= (n-1)\frac{1}{2} Sg^{kl}\left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} - \frac{\partial}{\partial g_{ij}} \partial x^l \right) + \frac{1}{2}\left(- g^{kl} g_{jl}\frac{\partial S}{\partial x^i} - g^{kl} g_{il}\frac{\partial S}{\partial x^j} + g^{kl} g_{ij}\frac{\partial S}{\partial x^l} \right)
\end{aligned}$$

$$= (n-1)S\underbrace{\frac{1}{2}g^{kl}\left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i}+\frac{\partial g_{il}}{\partial x^j}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}\right)}_{\Gamma^k_{ij}}-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial S}{\partial x^i}\delta^k_j+\frac{\partial S}{\partial x^j}\delta^k_i-g^{kl}g_{ij}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}\right)$$

$$= (n-1)S\Gamma^k_{ij}-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial S}{\partial x^i}\delta^k_j+\frac{\partial S}{\partial x^j}\delta^k_i-g^{kl}g_{ij}\frac{\partial S}{\partial x^l}\right).$$

Corollaire 2.1. *Soit $(M, g(t))$ une variété de Finsler de dimension de courbure scalaire constante S par rapport à x. Si $(M, g(t))$ est la solution du flot de Yamabe (2.9) sur $(M, g(0))$ alors*

$$\frac{\partial\Gamma^k_{ij}}{\partial t} = (n-1)S\Gamma^k_{ij} \quad . \tag{2.12}$$

En résolvant cette équation on a :

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\Gamma^k_{ij}}{\Gamma^k_{ij}} = (n-1)S\partial t\\
&\Leftrightarrow \ln\Gamma^k_{ij} = (n-1)St + k_1\\
&\Leftrightarrow \Gamma^k_{ij} = e^{(n-1)St+k_1}\\
&\Leftrightarrow \Gamma^k_{ij} = ke^{(n-1)St} \qquad avec\ k = e^{k_1}\ .
\end{aligned}$$

Dans ce cas, les Γ^k_{ij} se comportent comme une courbe exponentielle qui est très utile pour la modélisation des phénomènes dans lesquels une différence constante sur les variables a un rapport constant sur les images.

Proposition 2.2. *Soit $(M, g(t))$ une variété de Finsler de dimension n de courbure scalaire S constante par rapport à x. Si $(M, g(t))$ est la solution du flot de Yamabe (2.9) sur $(M, g(0))$ alors la courbure totale*

$$\Phi_{ijkl} = \left(\frac{\partial\Gamma^s_{il}}{\partial x^k}-\frac{\partial\Gamma^s_{ik}}{\partial x^l}\right)g_{js}+\left(\Gamma^s_{ik}\Gamma^r_{ls}-\Gamma^s_{il}\Gamma^r_{ks}\right)g_{jr}-F\frac{\partial\Gamma^s_{ik}}{\partial y^l}g_{js}$$

évolue selon l'équation suivante :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\Phi_{ijkl}}{\partial t} =& -S\Phi_{ijkl}+(n-1)S\Phi_{ijkl}+(n-1)Sg_{jr}\left(\Gamma^r_{ls}\Gamma^s_{ik}-\Gamma^r_{ks}\Gamma^s_{il}\right)\\
&+S\frac{F}{2}\frac{\partial\Gamma^s_{ik}}{\partial y^l}g_{js}-(n-1)F\Gamma^s_{ik}\frac{\partial S}{\partial y^l}g_{js}.
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Preuve 2.3.

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Phi_{ijkl}}{\partial t} =& \left(\frac{\partial\Gamma^s_{il}}{\partial x^k} - \frac{\partial\Gamma^s_{ik}}{\partial x^l}\right)\frac{\partial g_{js}}{\partial t} + g_{js}\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\frac{\partial\Gamma^s_{il}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x^l}\frac{\partial\Gamma^s_{ik}}{\partial t}\right) + \left(\Gamma^s_{ik}\Gamma^r_{ls} - \Gamma^s_{il}\Gamma^r_{ks}\right)\frac{\partial g_{jr}}{\partial t}\\ &+ g_{jr}\left(\Gamma^s_{ik}\frac{\partial\Gamma^r_{ls}}{\partial t} + \Gamma^r_{ls}\frac{\partial\Gamma^s_{ik}}{\partial t} - \Gamma^s_{il}\frac{\partial\Gamma^r_{ks}}{\partial t} - \Gamma^r_{ks}\frac{\partial\Gamma^s_{il}}{\partial t}\right) - F\frac{\partial\Gamma^s_{ik}}{\partial y^l}\frac{\partial g_{js}}{\partial t} - g_{js}\frac{\partial F}{\partial t}\frac{\partial\Gamma^s_{ik}}{\partial y^l}\\ &- g_{js}F\frac{\partial\left(\frac{\partial\Gamma^s_{ik}}{\partial t}\right)}{\partial y^l}.\end{aligned}$$

En utilisant la relation (2.12) *et l'équation d'évolution*

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{-y^i y^j S g_{ij}}{2\sqrt{g_{ij}y^i y^j}} = -\frac{SF}{2},$$

on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Phi_{ijkl}}{\partial t} =& -Sg_{js}\left(\frac{\partial\Gamma^s_{il}}{\partial x^k} - \frac{\partial\Gamma^s_{ik}}{\partial x^l}\right) + g_{js}\left[\frac{\partial((n-1)S\Gamma^s_{il})}{\partial x^k} - \frac{\partial((n-1)S\Gamma^s_{ik}}{\partial x^l}\right]\\ &- Sg_{jr}\left(\Gamma^s_{ik}\Gamma^r_{ls} - \Gamma^s_{il}\Gamma^r_{ks}\right) + g_{jr}\Big(\Gamma^l_{ls}(n-1)S\Gamma^s_{ik} + \Gamma^s_{ik}(n-1)\Gamma^r_{ls}\\ &- \Gamma^r_{ks}(n-1)S\Gamma^s_{il} - \Gamma^s_{il}(n-1)S\Gamma^r_{ks}\Big) - Fg_{js}\frac{\partial}{\partial y^l}((n-1)S\Gamma^s_{ik}) - g_{js}\frac{\partial\Gamma^s_{ik}}{\partial y^l}\left(-\frac{SF}{2}\right)\\ &+ SFg_{js}\frac{\partial\Gamma^s_{ik}}{\partial y^l}\\ =& -Sg_{js}\left(\frac{\partial\Gamma^s_{il}}{\partial x^k} - \frac{\partial\Gamma^s_{ik}}{\partial x^l}\right) + (n-1)S\left(\frac{\partial\Gamma^s_{il}}{\partial x^k} - \frac{\partial\Gamma^l_{ik}}{\partial x^l}\right)g_{js} - S\left(\Gamma^s_{ik}\Gamma^r_{ls} - \Gamma^s_{il}\Gamma^r_{ks}\right)g_{jr}\\ &+ (n-1)Sg_{jr}\left(\Gamma^r_{ls}\Gamma^s_{ik} + \Gamma^s_{ik}\Gamma^r_{ls} - \Gamma^R_{ks}\Gamma^s_{il} - \Gamma^s_{il}\Gamma^r_{ks}\right) - (n-1)SF\frac{\partial\Gamma^s_{ik}}{\partial y^l}g_{js}\\ &- (n-1)F\Gamma^s_{ik}\frac{\partial S}{\partial y^l}g_{js} + \frac{SF}{2}\frac{\partial\Gamma^s_{ik}}{\partial y^l}g_{js} + SFg_{js}\frac{\partial\Gamma^s_{ik}}{\partial y^l}\\ =& -S\left[\left(\frac{\partial\Gamma^s_{il}}{\partial x^k} - \frac{\partial\Gamma^s_{ik}}{\partial x^l}\right)g_{js} + \left(\Gamma^s_{ik}\Gamma^r_{ls} - \Gamma^s_{il}\Gamma^r_{ks}\right)g_{jr} - F\frac{\partial\Gamma^s_{ik}}{\partial y^l}g_{js}\right]\\ &+ (n-1)S\left[\left(\frac{\partial\Gamma^s_{il}}{\partial x^k} - \frac{\partial\Gamma^s_{ik}}{\partial x^l}\right)g_{js} + \left(\Gamma^s_{ik}\Gamma^r_{ls} - \Gamma^s_{il}\Gamma^r_{ks}\right)g_{jr} - F\frac{\partial\Gamma^s_{ik}}{\partial y^l}g_{js}\right]\\ &+ (n-1)Sg_{jr}\left(\Gamma^r_{ls}\Gamma^s_{ik} - \Gamma^r_{ks}\Gamma^s_{il}\right) - (n-1)F\Gamma^s_{ik}\frac{\partial S}{\partial y^l}g_{js} + \frac{SF}{2}\frac{\partial\Gamma^s_{ik}}{\partial y^l}g_{js}\\ =& -S\Phi_{ijkl} + (n-1)S\Phi_{ijkl} + (n-1)S\left(\Gamma^r_{ls}\Gamma^s_{ik} - \Gamma^r_{ks}\Gamma^s_{il}\right)g_{jr}\\ &- (n-1)F\Gamma^s_{ik}\frac{\partial S}{\partial y^l}g_{js} + \frac{SF}{2}\frac{\partial\Gamma^s_{ik}}{\partial y^l}g_{js}.\end{aligned}$$

Or

$$\Gamma^s_{ik} = \frac{1}{2}g^{Sm}\left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{im}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^m}\right),$$

d'où

$$\frac{\partial \Phi_{ijkl}}{\partial t} = nS\Phi_{ijkl} - 2S\Phi_{ijkl} + (n-1)S\left(\Gamma^r_{ls}\Gamma^s_{ik} - \Gamma^r_{ks}\Gamma^s_{il}\right)g_{jr} - (n-1)\frac{F}{2}\delta^m_j \left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{im}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^m}\right)\frac{\partial S}{\partial y^l} + \frac{SF}{2}\frac{\partial \Gamma^s_{ik}}{\partial y^l}g_{js}. \tag{2.14}$$

Proposition 2.3. *Soit $(M, g(t))$ une variété de Finsler à n dimension de courbures scalaire S. Si $(M, g(t))$ est la solution du flot de Yamabe (2.9) sur $(M, g(0))$, alors la courbure de l'espace-temps*

$$Ric_{ik} = \left(\frac{\partial \Gamma^s_{il}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^s_{ik}}{\partial x^l}\right) + (\Gamma^s_{ik}\Gamma^r_{ls} - \Gamma^s_{il}\Gamma^r_{ks}) - F\frac{\partial \Gamma^s_{ik}}{\partial y^l}$$

évolue selon l'équation suivante :

$$\frac{\partial Ric_{ik}}{\partial t} = (n-1)SRic_{ik} + (n-1)S\left(\Gamma^r_{ls}\Gamma^s_{ik} - \Gamma^r_{ks}\Gamma^s_{il}\right) + (n-1)\left(\Gamma^s_{il}\frac{\partial S}{\partial x^k} - \Gamma^s_{ik}\frac{\partial S}{\partial x^l}\right) - (n-1)F\Gamma^s_{ik}\frac{\partial S}{\partial y^l} + \frac{SF}{2}\frac{\partial \Gamma^s_{ik}}{\partial y^l}. \tag{2.15}$$

Preuve 2.4.

$$\frac{\partial Ric_{ik}}{\partial t} = \left(\frac{\partial}{\partial x^k}\frac{\partial \Gamma^s_{il}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x^l}\frac{\partial \Gamma^s_{ik}}{\partial x^l}\right) + \left(\Gamma^s_{ik}\frac{\partial \Gamma^r_{ls}}{\partial t} + \Gamma^r_{ls}\frac{\partial \Gamma^s_{ik}}{\partial t} - \Gamma^s_{il}\frac{\partial \Gamma^r_{ks}}{\partial t} - \Gamma^r_{ks}\frac{\partial \Gamma^s_{il}}{\partial t}\right) - \frac{\partial F}{\partial t}.\frac{\partial \Gamma^s_{ik}}{\partial y^l} - F\frac{\partial}{\partial y^l}\frac{\partial \Gamma^s_{ik}}{\partial t}.$$

En utilisant la relation (2.12) et l'équation d'évolution $\frac{\partial F}{\partial t} = -\frac{SF}{2}$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Ric_{ik}}{\partial t} &= \frac{\partial\left((n-1)S\Gamma^s_{il}\right)}{\partial x^k} - \frac{\partial\left((n-1)S\Gamma^s_{ik}\right)}{\partial x^l} + (n-1)S\Gamma^s_{ik}\Gamma^r_{ls} + (n-1)S\Gamma^r_{ls}\Gamma^s_{ik} \\
&\quad - (n-1)S\Gamma^s_{il}\Gamma^r_{ks} - (n-1)S\Gamma^r_{kS}\Gamma^s_{il} + \frac{SF}{2}\frac{\partial \Gamma^s_{ik}}{\partial y^l} - F\frac{\partial}{\partial y^l}((n-1)S\Gamma^s_{ik}) \\
&= (n-1)\Gamma^s_{il}\frac{\partial S}{\partial x^k} + (n-1)S\frac{\partial \Gamma^s_{il}}{\partial x^k} - (n-1)\Gamma^s_{ik}\frac{\partial S}{\partial x^l} - (n-1)S\frac{\partial \Gamma^s_{ik}}{\partial x^l} \\
&\quad + (n-1)S\left(\Gamma^s_{ik}\Gamma^r_{ls} - \Gamma^s_{il}\Gamma^r_{ks}\right) \qquad + (n-1)S\left(\Gamma^r_{ls}\Gamma^s_{ik} - \Gamma^r_{ks}\Gamma^s_{il}\right) + \frac{SF}{2}\frac{\partial \Gamma^s_{ik}}{\partial y^l} \\
&\quad - (n-1)F\Gamma^s_{ik}\frac{\partial S}{\partial y^l} - (n-1)FS\frac{\partial \Gamma^s_{ik}}{\partial y^l} \\
&= (n-1)S\left[\left(\frac{\partial \Gamma^s_{il}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^s_{ik}}{\partial x^l}\right) + (\Gamma^s_{ik}\Gamma^r_{ls} - \Gamma^s_{il}\Gamma^r_{ks}) - F\frac{\partial \Gamma^s_{ik}}{\partial y^l}\right] + (n-1) \\
&\left(\Gamma^s_{il}\frac{\partial S}{\partial x^k} - \Gamma^s_{ik}\frac{\partial S}{\partial x^l}\right) + (n-1)S\left(\Gamma^r_{ls}\Gamma^s_{ik} - \Gamma^r_{ks}\Gamma^s_{il}\right) + \frac{SF}{2}\frac{\partial \Gamma^s_{ik}}{\partial y^l} - (n-1)F\Gamma^s_{il}\frac{\partial S}{\partial y^l}
\end{aligned}$$

$$= (n-1)SRic_{ik} + (n-1)S\left(\Gamma^r_{ls}\Gamma^s_{ik} - \Gamma^r_{ks}\Gamma^s_{il}\right) + (n-1)\left(\Gamma^s_{il}\frac{\partial S}{\partial x^k} - \Gamma^s_{ik}\frac{\partial S}{\partial y^l}\right)$$
$$+ \frac{SF}{2}\frac{\partial \Gamma^s_{ik}}{\partial y^l} - (n-1)F\Gamma^s_{ik}\frac{\partial S}{\partial y^l} \quad .$$

Corollaire 2.2. *Soit $\left(M, g(t)\right)$ une variété de Finsler de dimension n de courbure scalaire S constante par rapport à x. Alors :*

$$\frac{\partial Ric_{ik}}{\partial t} = (n-1)SRic_{ik} + (n-1)S\left(\Gamma^r_{ls}\Gamma^s_{rk} - \Gamma^r_{ks}\Gamma^s_{il}\right)$$
$$+ \frac{SF}{2}\frac{\partial \Gamma^s_{ik}}{\partial y^l} - (n-1)F\Gamma^s_{ik}\frac{\partial S}{\partial y^l}.$$

Chapitre 3

EQUATIONS D'EVOLUTION SUR LES ESPACES DE RANDERS SOUS UNE DEFORMATION DE COURBURE DE L'ESPACE-TEMPS

Dans ce chapitre, nous étudions les équations d'évolution de la métrique de Randers, de la courbure totale, de la courbure de l'espace-temps et de sa trace dans les espaces de Randers.

Considérons une variété M, une famille à un paramètre $\{F_t\}_{t\in[0,T[}$ de métriques finslériennes sur M de la courbure drapeau scalaire et $\{g_t\}_{t\in[0,T[}$ la famille des tenseurs fondamentaux associés à $\{F_t\}_{t\in[0,T[}$.

Définition 3.1. *On appelle déformation de Ricci horizontale finslérienne, l'équation d'évolution sur (M, F_t) donnée par [2] :*

$$\frac{\partial g_t}{\partial t} = -2Ric_{F_t} \tag{3.1}$$

avec $F_{t=0} = F$ et g_t est le pull back de g par la submersion $\pi := TM \setminus \{0\} \to M$.

La solution de (3.1) existe dans des cas particuliers notamment dans les espaces de Berwald [2].

3.1 Evolution de la métrique de Randers

Proposition 3.1. *Soit $F(t,x,y) = \alpha(t,x,y) + \beta(t,x,y)$ une métrique de Randers à un paramètre t sur une variété de Randers M où*

$$\begin{cases} \alpha(t,x,y) = \sqrt{a_{ij}(t,x)y^i y^j} \\ \beta(t,x,y) = b_i(t,x)y^i. \end{cases}$$

Alors sous déformation de courbure de l'espace-temps, la métrique de Randers évolue selon l'équation suivante :

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{y^i y^j}{2\alpha}\frac{\partial a_{ij}}{\partial t} + y^i \frac{\partial b_i}{\partial t} \tag{3.2}$$

Preuve 3.1.

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t} &= \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial \beta}{\partial t} \\ &= \frac{\partial \sqrt{a_{ij}(t,x)y^i y^j}}{\partial t} + \frac{\partial b_i(t,x)y^i}{\partial t} \\ &= \frac{y^i y^j \frac{\partial a_{ij}}{\partial t}}{2\sqrt{a_{ij}(t,x)y^i y^j}} + y^i \frac{\partial b_i(t,x)}{\partial t} \\ &= \frac{y^i y^j}{2\alpha}\frac{\partial a_{ij}}{\partial t} + y^i \frac{\partial b_i}{\partial t}. \end{aligned}$$

Corollaire 3.1.

$$\begin{aligned} &a)\ \alpha\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{y^i y^j}{2}\frac{\partial a_{ij}}{\partial t} + \alpha y^i \frac{\partial b_i}{\partial t}. \\ &b)\ \frac{\partial \alpha}{\partial t} = \frac{y^i y^j}{2\alpha}\frac{\partial a_{ij}}{\partial t}. \\ &c)\ F\frac{\partial \alpha}{\partial t} = \frac{y^i y^j}{2}\frac{\partial a_{ij}}{\partial t} + b_i\frac{(y^i)^2 y^j}{2\alpha}\frac{\partial a_{ij}}{\partial t}. \\ &d)\ \frac{\alpha\frac{\partial F}{\partial t} - F\frac{\partial \alpha}{\partial t}}{\alpha^2} = \frac{2\alpha^2 y^i \frac{\partial b_i}{\partial t} - b_i(y^i)^2 y^j \frac{\partial a_{ij}}{\partial t}}{2\alpha^3}. \end{aligned}$$

Proposition 3.2. *Soit $F = \alpha + \beta$ une métrique finslérienne à un paramètre t sur une variété de Randers M où $\alpha = \sqrt{a_{ij}(t,x)y^i y^j}$ et $\beta = b_i(t,x)y^i$. Alors sous une déformation de courbure de l'espace-temps, le tenseur fondamental $g_{ij}(x,y,t)$ associé à F évolue selon l'équation suivante :*

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial t} = \frac{y^i \frac{\partial b_i}{\partial t}}{\alpha}\left(a_{ij} - \frac{a_{ik}y^k}{\alpha}\frac{a_{jl}y^l}{\alpha}\right) - \frac{b_i(y^i)^2 y^j \frac{\partial a_{ij}}{\partial t}}{2\alpha^3}\left(a_{ij} - \frac{a_{ik}y^k}{\alpha}\frac{a_{jl}y^l}{\alpha}\right)$$
$$+ \frac{F}{\alpha}\left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial t} - \frac{y^k y^l \frac{\partial(a_{ik}a_{jl})}{\partial t}}{\alpha^2} + \frac{a_{ik}a_{jl}y^k y^l y^i y^j \frac{\partial a_{ij}}{\partial t}}{\alpha^4}\right) + \left(\frac{a_{ik}y^k}{\alpha} + b_i\right)$$
$$\left(\frac{y^l}{\alpha}\frac{\partial a_{jl}}{\partial t} + \frac{\partial b_j}{\partial t}\right) - \left(\frac{a_{ik}y^k}{\alpha} + b_i\right)\frac{a_{jl}y^l y^i y^j}{2\alpha^3}\frac{\partial a_{ij}}{\partial t} + \left(\frac{a_{jl}y^l}{\alpha} + b_j\right)\left(\frac{y^k}{\alpha}\frac{\partial a_{ik}}{\partial t} + \frac{\partial b_i}{\partial t}\right)$$
$$- \left(\frac{a_{jl}y^l}{\alpha} + b_j\right)\frac{a_{ik}y^k y^l y^j \frac{\partial a_{ij}}{\partial t}}{2\alpha^3}. \tag{3.3}$$

Preuve 3.2.

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{F}{\alpha}\right)\left(a_{ij} - \frac{a_{ik}y^k}{\alpha}.\frac{a_{jl}y^l}{\alpha}\right) + \frac{F}{\alpha}\frac{\partial}{\partial t}\left(a_{ij} - \frac{a_{ik}y^k}{\alpha}.\frac{a_{jl}y^l}{\alpha}\right)$$
$$+ \left(\frac{a_{ik}y^k}{\alpha} + b_i\right)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{a_{jl}y^l}{\alpha} + b_j\right) + \left(\frac{a_{jl}y^l}{\alpha} + b_j\right)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{a_{ik}y^k}{\alpha} + b_i\right)$$
$$= \frac{\alpha\frac{\partial F}{\partial t} - F\frac{\partial \alpha}{\partial t}}{\partial^2}.\left(a_{ij} - \frac{a_{ik}y^k}{\alpha}.\frac{a_{jl}y^l}{\alpha}\right) + \frac{F}{\alpha}\left[\frac{\partial}{\partial t}a_{ij} - \frac{\frac{\partial(a_{ik}a_{jl}y^k y^l)\alpha^2}{\partial t} - 2\alpha a_{ik}a_{jl}y^k y^l \frac{\partial \alpha}{\partial t}}{\alpha^4}\right]$$
$$+ \left(\frac{a_{ik}y^l}{\alpha} + b_i\right)\left(\frac{\alpha y^l \frac{\partial}{\partial t}a_{jl} - a_{jl}y^l\frac{\partial \alpha}{\partial t}}{\alpha^2} + \frac{\partial}{\partial t}b_j\right) + \left(\frac{a_{jl}y^l}{\alpha} + b_j\right)\left(\frac{\alpha y^k \frac{\partial}{\partial t}a_{ik} - a_{ik}y^k\frac{\partial \alpha}{\partial t}}{\alpha^2} + \frac{\partial}{\partial t}b_i\right).$$

En utilisant la relation (3.1) *et le* ***corollaire*** (3.1)*, l'équation devient :*

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial t} = \frac{2\alpha^2 y^i \frac{\partial b_i}{\partial t} - b_i(y^i)^2 y^j \frac{\partial a_{ij}}{\partial t}}{2\alpha^3}.\left(a_{ij} - \frac{a_{ik}y^k}{\alpha}\frac{a_{jl}y^l}{\alpha}\right) + \frac{F}{\alpha}\left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial t} - \frac{y^k y^l \frac{\partial(a_{ik}a_{jl})}{\partial t}}{\alpha^2}\right.$$
$$\left. + \frac{a_{ik}a_{jl}y^k y^l y^i y^j \frac{\partial a_{ij}}{\partial t}}{\alpha^4}\right) + \left(\frac{a_{ik}y^k}{\alpha} + b_i\right) + \left(\frac{y^l \frac{\partial a_{jl}}{\partial t}}{\alpha} + \frac{\partial b_j}{\partial t} - \frac{a_{jl}y^l y^i y^j}{2\alpha^3}\frac{\partial a_{ij}}{\partial t}\right)$$
$$+ \left(\frac{a_{jl}y^l}{\alpha} + b_j\right)\left(\frac{y^k \frac{\partial a_{ik}}{\partial t}}{\alpha} + \frac{\partial b_i}{\partial t} - \frac{a_{ik}y^k y^i y^j \frac{\partial a_{ij}}{\partial t}}{2\alpha^3}\right)$$
$$= \frac{y^i \frac{\partial b_i}{\partial t}}{\alpha}\left(a_{ij} - \frac{a_{ik}y^k}{\alpha}\frac{a_{jl}y^l}{\alpha}\right) - \frac{b_i(y^i)^2 y^j \frac{\partial a_{ij}}{\partial t}}{2\alpha^3}\left(a_{ij} - \frac{a_{ik}y^k}{\alpha}\frac{a_{jl}y^l}{\alpha}\right)$$
$$+ \frac{F}{\alpha}\left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial t} - \frac{y^k y^l \frac{\partial(a_{ik}a_{jl})}{\partial t}}{\alpha^2} + \frac{a_{ik}a_{jl}y^k y^l y^i y^j \frac{\partial a_{ij}}{\partial t}}{\alpha^4}\right) + \left(\frac{a_{ik}y^k}{\alpha} + b_i\right)$$
$$\left(\frac{y^l}{\alpha}\frac{\partial a_{jl}}{\partial t} + \frac{\partial b_j}{\partial t}\right) - \left(\frac{a_{ik}y^k}{\alpha} + b_i\right)\frac{a_{jl}y^l y^i y^j}{2\alpha^3}\frac{\partial a_{ij}}{\partial t} + \left(\frac{a_{jl}y^l}{\alpha} + b_j\right)\left(\frac{y^k}{\alpha}\frac{\partial a_{ik}}{\partial t} + \frac{\partial b_i}{\partial t}\right)$$
$$- \left(\frac{a_{jl}y^l}{\alpha} + b_j\right)\frac{a_{ik}y^k y^l y^j \frac{\partial a_{ij}}{\partial t}}{2\alpha^3}.$$

Proposition 3.3. *Soit $F = \alpha + \beta$ une métrique de Randers à un paramètre t où $\alpha = \sqrt{a_{ij}(t,x)y^i y^j}$ et $\beta = b_i(t,x)y^i$. Alors sous une déformation de courbure de l'espace-temps, l'élément inverse $g^{ij}(x,y,t)$ du tenseur fondamental associé à F évolue selon l'équation sui-*

vante :

$$\begin{aligned}\frac{\partial g^{ij}}{\partial t} &= \frac{a^{ij}y^iy^j}{2\alpha F}\frac{\partial}{\partial t}a_{ij} - \frac{a^{ij}y^iy^j}{2F^2}\frac{\partial}{\partial t}a_{ij} - \frac{\alpha}{F^2}\left(a^{ij}y^i\frac{\partial}{\partial t}b_i + y^i\frac{\partial}{\partial t}b^j + y^j\frac{\partial}{\partial t}b^i\right) + \frac{\alpha}{F}\frac{\partial a^{ij}}{\partial t}\\ &- \frac{1}{F^2}\left(\frac{y^ib^j}{\alpha} + \frac{y^jb^i}{\alpha}\right)y^iy^j\frac{\partial a_{ij}}{\partial t} + \frac{1}{2\alpha F^2}\left((y^i)^2y^jb^j\frac{\partial a_{ij}}{\partial t} + (y^j)^2y^ib^i\frac{\partial a_{ij}}{\partial t}\right)\\ &+ \frac{\beta+\alpha \parallel b \parallel^2}{F^4}\left(\frac{(y^i)^2}{\alpha}\frac{(y^j)^2}{\alpha}\frac{\partial a_{ij}}{\partial t} - \frac{(y^i)^2(y^j)^2}{\alpha}a_{ij} - 2\frac{(y^i)^2}{\alpha}\frac{y^j}{\alpha}\frac{\partial b_i}{\partial t} - (y^i)^2y^j\frac{\partial b_i}{\partial t} - (y^i)^2y^j\frac{\partial b_i}{\partial t}\right)\\ &+ \frac{(y^i)^2y^j}{F^3}\frac{\partial b_i}{\partial t} + \frac{\parallel b \parallel^2}{2\alpha F^3}(y^i)^2(y^j)^2\frac{\partial a_{ij}}{\partial t} + \frac{2\alpha}{F^3} + \frac{2\alpha}{F^3}\Bigg[\parallel b \parallel^2 y^iy^j\frac{\partial \parallel b \parallel}{\partial t} + \left(y^ib^j + y^jb^i\right)\\ &\left(\frac{y^iy^j}{2\alpha}\frac{\partial a_{ij}}{\partial t} + y^i\frac{\partial b_i}{\partial t}\right)\Bigg] - \frac{\beta+\alpha \parallel b \parallel^2}{2\alpha F^4}(y^i)^2(y^j)^2\frac{\partial a_{ij}}{\partial t} - \frac{\beta+\alpha \parallel b \parallel^2}{\alpha^2F^3}(y^i)^2(y^j)^2\frac{\partial a_{ij}}{\partial t}.\end{aligned} \tag{3.4}$$

Preuve 3.3.

$$\begin{aligned}\frac{\partial g^{ij}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\alpha}{F}\right)a^{ij} + \frac{\alpha}{F}\frac{\partial a^{ij}}{\partial t} + \frac{\partial(\frac{\alpha^2}{F^2})}{\partial t}\frac{\beta+\alpha \parallel b \parallel^2}{F}\frac{y^i}{\alpha}\frac{y^j}{\alpha} + \frac{\alpha^2}{F^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\beta+\alpha \parallel b \parallel^2}{F}\frac{y^i}{\alpha}\frac{y^j}{\alpha}\right)\\ &- \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\alpha^2}{F^2}\right)\left(\frac{y^i}{\alpha}\frac{y^j}{\alpha} + \frac{y^jb^i}{\alpha}\right) - \frac{\alpha^2}{F^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{y^ib^j}{\alpha} - \frac{y^jb^i}{\alpha}\right)\\ &= \frac{a^{ij}}{F^2}\left(F\frac{\partial\alpha}{\partial t} - \alpha\frac{\partial F}{\partial t}\right) + \frac{\alpha}{F}\frac{\partial a^{ij}}{\partial t} + \frac{\beta+\alpha \parallel b \parallel^2}{F}\frac{y^i}{\alpha}\frac{y^j}{\alpha}\frac{2\alpha\frac{\partial F^2}{\partial t} - 2\alpha^2F\frac{\partial F}{\partial t}}{F^4}\\ &+ \frac{\alpha^2}{F^2}\Bigg[\frac{\left(\frac{\partial\beta}{\partial t} - \frac{\partial(\alpha \parallel b \parallel^2)}{\partial t}\right)F - \left(\beta+\alpha \parallel b \parallel^2\right)\frac{\partial F}{\partial t}}{F^2}\frac{y^i}{\alpha}\frac{y^j}{\alpha} - 2\left(\frac{\beta+\alpha \parallel b \parallel^2}{F}\right)\frac{y^iy^j\frac{\partial\alpha}{\partial t}}{F^3}\Bigg]\\ &- \left(\frac{y^ib^j}{\alpha} + \frac{y^jb^i}{\alpha}\right)\left(\frac{2\alpha F^2\frac{\partial\alpha}{\partial t} - 2\alpha^2F\frac{\partial F}{\partial t}}{F^4}\right) - \frac{\alpha^2}{F^2}\left(\frac{y^i\alpha\frac{\partial}{\partial t}b^j - y^ib^j\frac{\partial}{\partial t}\alpha}{\alpha^2} + \frac{y^j\alpha\frac{\partial b^i}{\partial t} - y^jb^i\frac{\partial}{\partial t}\alpha}{\alpha^2}\right)\\ &= \frac{a^{ij}y^iy^j\frac{\partial a_{ij}}{\partial t}}{2\alpha F} - \frac{a^{ij}\alpha}{F^2}\left(\frac{y^iy^j\frac{\partial a_{ij}}{\partial t}}{2\alpha} + y^i\frac{\partial b_i}{\partial t}\right) + \frac{\alpha}{F}\frac{\partial a^{ij}}{\partial t} + \frac{2(\beta+\alpha \parallel b \parallel^2}{F}\frac{y^i}{\alpha}\frac{y^j}{\alpha}\\ &\left(\frac{y^iy^j\frac{\partial}{\partial t}a_{ij}}{2F^3} - \frac{\alpha y^iy^j\frac{\partial}{\partial t}a_{ij}}{2F^3} - \frac{y^i\frac{\partial}{\partial t}b_i}{F^3}\right) + \frac{\alpha^2}{F^3}\frac{(y^i)^2}{\alpha}\frac{y^j}{\alpha}\frac{\partial}{\partial t}b_i + \frac{\alpha^2}{F^3} \parallel b \parallel^2\frac{y^iy^j}{2\alpha}\frac{y^i}{\alpha}\frac{y^j}{\alpha}\\ &+ 2\frac{\alpha^3}{F^3} \parallel b \parallel \frac{\partial \parallel b \parallel}{\partial t}\frac{y^i}{\alpha}\frac{y^j}{\alpha} - \frac{\beta+\alpha \parallel b \parallel^2}{F^4}y^iy^j\left(\frac{y^iy^j\frac{\partial}{\partial t}a_{ij}}{2\alpha} + y^i\frac{\partial}{\partial t}b_i\right)\\ &- \frac{1}{\alpha^2F^3}\left(\beta+\alpha \parallel b \parallel^2\right)(y^i)^2(y^j)^2\frac{\partial}{\partial t}a_{ij} - \frac{1}{F^2}\left(\frac{y^ib^j}{\alpha} + \frac{y^jb^i}{\alpha}\right)y^iy^j\frac{\partial}{\partial t}a_{ij}\\ &+ 2\frac{\alpha^2}{F^2}\left(\frac{y^ib^j}{\alpha} + \frac{y^jb^i}{\alpha}\right)\left(\frac{y^iy^j}{2\alpha}\frac{\partial a_{ij}}{\partial t} + y^i\frac{\partial b_i}{\partial t}\right) - \frac{\alpha}{F^2}y^i\frac{\partial b^j}{\partial t} + \frac{y^iy^jb^j\frac{\partial a_{ij}}{\partial t}}{2\alpha F^2}\\ &- \frac{\alpha}{F^2}y^i\frac{\partial b^i}{\partial t} + \frac{(y^j)^2y^ib^i\frac{\partial a_{ij}}{\partial t}}{2\alpha F^2}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{a^{ij}y^iy^j\frac{\partial}{\partial t}a_{ij}}{2\alpha F} - \frac{a^{ij}y^iy^j}{2F^2}\frac{\partial}{\partial t}a_{ij} - \frac{\alpha}{F^2}a^{ij}y^i\frac{\partial}{\partial t}b_i + \frac{\alpha}{F}\frac{\partial}{\partial t}a^{ij} + \frac{\beta+\alpha\parallel b\parallel^2}{F^4}\frac{(y^i)^2}{\alpha}\frac{(y^j)^2}{\alpha}\frac{\partial}{\partial t}a_{ij}\\
&- \frac{\beta+\alpha\parallel b\parallel^2}{F^4}\frac{(y^i)^2(y^j)^2}{\alpha}\frac{\partial\parallel b\parallel}{\partial t} - \frac{2(\beta+\alpha\parallel b\parallel^2)}{F^4}\frac{(y^i)^2}{\alpha}\frac{y^j}{\alpha}\frac{\partial b_i}{\partial t} + \frac{(y^i)^2y^j}{F^3}\frac{\partial b_i}{\partial t}\\
&+ \frac{\parallel b\parallel^2}{2\alpha F^3}(y^i)^2(y^j)^2\frac{\partial a_{ij}}{\partial t} + 2\frac{\alpha}{F^3}\parallel b\parallel y^iy^j\frac{\partial\parallel b\parallel}{\partial t} - \frac{\beta+\alpha\parallel b\parallel^2}{2\alpha F^4}(y^i)^2(y^j)^2\frac{\partial a_{ij}}{\partial t}\\
&- \frac{\beta+\alpha\parallel b\parallel^2}{F^4}(y^i)^2y^j\frac{\partial b_i}{\partial t} - \frac{1}{\alpha^2F^3}\left(\beta+\alpha\parallel b\parallel^2\right)(y^i)^2(y^j)^2\frac{\partial a_{ij}}{\partial t}\\
&- \frac{1}{F^2}\left(\frac{y^ib^j}{\alpha}+\frac{y^jb^i}{\alpha}\right)y^iy^j\frac{\partial a_{ij}}{\partial t} + \frac{2\alpha^2}{F^3}\left(\frac{y^ib^j}{\alpha}+\frac{y^jb^i}{\alpha}\right)\left(\frac{y^iy^j}{2\alpha}\frac{\partial a_{ij}}{\partial t}+y^i\frac{\partial b_i}{\partial t}\right)\\
&- \frac{\alpha}{F^2}y^i\frac{\partial b^j}{\partial t} + \frac{(y^i)^2y^jb^j}{2\alpha F^2}\frac{\partial a_{ij}}{\partial t} - \frac{\alpha}{F^2}y^i\frac{\partial b^i}{\partial t} + \frac{(y^j)^2y^ib^i}{2\alpha F^2}\frac{\partial a_{ij}}{\partial t}\\
&= \frac{a^{ij}y^iy^j}{2\alpha F}\frac{\partial}{\partial t}a_{ij} - \frac{a^{ij}y^iy^j}{2F^2}\frac{\partial}{\partial t}a_{ij} - \frac{\alpha}{F^2}\left(a^{ij}y^i\frac{\partial}{\partial t}b_i + y^i\frac{\partial}{\partial t}b^j + y^j\frac{\partial}{\partial t}b^i\right) + \frac{\alpha}{F}\frac{\partial a^{ij}}{\partial t}\\
&- \frac{1}{F^2}\left(\frac{y^ib^j}{\alpha}+\frac{y^jb^i}{\alpha}\right)y^iy^j\frac{\partial a_{ij}}{\partial t} + \frac{1}{2\alpha F^2}\left((y^i)^2y^jb^j\frac{\partial a_{ij}}{\partial t} + (y^j)^2y^ib^i\frac{\partial a_{ij}}{\partial t}\right)\\
&+ \frac{\beta+\alpha\parallel b\parallel^2}{F^4}\left(\frac{(y^i)^2}{\alpha}\frac{(y^j)^2}{\alpha}\frac{\partial a_{ij}}{\partial t} - \frac{(y^i)^2(y^j)^2}{\alpha}a_{ij} - 2\frac{(y^i)^2}{\alpha}\frac{y^j}{\alpha}\frac{\partial b_i}{\partial t} - (y^i)^2y^j\frac{\partial b_i}{\partial t} - (y^i)^2y^j\frac{\partial b_i}{\partial t}\right)\\
&+ \frac{(y^i)^2y^j}{F^3}\frac{\partial b_i}{\partial t} + \frac{\parallel b\parallel^2}{2\alpha F^3}(y^i)^2(y^j)^2\frac{\partial a_{ij}}{\partial t} + \frac{2\alpha}{F^3} + \frac{2\alpha}{F^3}\Bigg[\parallel b\parallel^2y^iy^j\frac{\partial\parallel b\parallel}{\partial t} + \left(y^ib^j+y^jb^i\right)\\
&\left(\frac{y^iy^j}{2\alpha}\frac{\partial a_{ij}}{\partial t}+y^i\frac{\partial b_i}{\partial t}\right)\Bigg] - \frac{\beta+\alpha\parallel b\parallel^2}{2\alpha F^4}(y^i)^2(y^j)^2\frac{\partial a_{ij}}{\partial t} - \frac{\beta+\alpha\parallel b\parallel^2}{\alpha^2F^3}(y^i)^2(y^j)^2\frac{\partial a_{ij}}{\partial t}.
\end{aligned}
$$

Proposition 3.4. *Soit $F=\alpha+\beta$ une métrique de Randers à un paramètre où $\alpha=\sqrt{a_{ij}(t,x)y^iy^j}$ et $\beta=b_i(t,x)y^i$. Alors sous une déformation de courbure de l'espace-temps, les fonctions de Christoffel Γ^k_{ij} évoluent selon l'équation suivante :*

$$\frac{\partial}{\partial t}\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}g_{jl}+\frac{\partial}{\partial x^j}g_{il}-\frac{\partial}{\partial x^l}g_{ij}\right)\delta_1 + \frac{1}{2}g^{kl}\left(\frac{\partial\delta_2}{\partial x^i}+\frac{\partial\delta_3}{\partial x^j}-\frac{\partial\delta_4}{\partial x^l}\right). \tag{3.5}$$

Avec $\delta_1=\dfrac{\partial g^{kl}}{\partial t}$, $\delta_2=\dfrac{\partial g_{jl}}{\partial t}$, $\delta_3=\dfrac{\partial g_{il}}{\partial t}$, $\delta_4=\dfrac{\partial g_{ij}}{\partial t}$

Preuve 3.4.

$$\frac{\partial\Gamma^k_{ij}}{\partial t} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i}+\frac{\partial g_{il}}{\partial x^j}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}\right)\frac{\partial}{\partial t}g^{kl} + \frac{1}{2}g^{kl}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial g_{jl}}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x^j}\frac{\partial g_{il}}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x^l}\frac{\partial g_{ij}}{\partial t}\right) \tag{3.6}$$

D'après les relations (3.3) *et* (3.4)*, on définit*

$$
\begin{aligned}
a)\frac{\partial}{\partial t}g^{kl} &= \frac{a^{kl}y^k y^l}{2\alpha F}\frac{\partial}{\partial t}a_{kl} - \frac{a^{kl}y^k y^l}{2F^2}\frac{\partial}{\partial t}a_{kl} - \frac{\alpha}{F^2}\left(a^{kl}y^k\frac{\partial}{\partial t}b^k + y^k\frac{\partial}{\partial t}b^l + y^l\frac{\partial}{\partial t}b^k\right) + \frac{\alpha}{F}\frac{\partial}{\partial t}a^{kl} \\
&- \frac{1}{F^2}\left(\frac{y^k b^l}{\alpha} + \frac{y^l b^k}{\alpha}\right)y^k y^l\frac{\partial}{\partial t}a_{kl} + \frac{1}{2\alpha F^2}\left((y^k)^2 y^l b^l\frac{\partial}{\partial t}a_{kl} + (y^l)^2 y^k b^k\frac{\partial}{\partial t}a_{kl}\right) \\
&+ \frac{\beta+\alpha\|b\|^2}{F^4}\left(\frac{(y^k)^2}{\alpha}\frac{(y^l)^2}{\alpha}\frac{\partial}{\partial t}a_{kl} - \frac{(y^k)^2(y^l)^2}{\alpha}\frac{\partial}{\partial t}a_{kl} - 2\frac{(y^k)^2}{\alpha}\frac{y^l}{\alpha}\frac{\partial}{\partial t}b_k - (y^k)^2 y^l\frac{\partial}{\partial t}b_k\right) \\
&+ \frac{(y^k)^2 y^l}{F^3}\frac{\partial}{\partial t}b_k + \frac{\|b\|^2}{2\alpha F^3}(y^k)^2 y^l\frac{\partial}{\partial t}a_{kl} + \frac{2\alpha}{F^3}\Bigg[\|b\|^2 y^k y^l\frac{\partial}{\partial t}\|b\| + \left(y^k b^l + y^l b^k\right) \\
&\left(\frac{y^k y^l}{2\alpha}\frac{\partial}{\partial t}a_{kl} + y^k\frac{\partial}{\partial t}b_k\right)\Bigg] - \frac{\beta+\alpha\|b\|^2}{2\alpha F^4}(y^k)^2 y^l\frac{\partial}{\partial t}a_{kl} - \frac{\beta+\alpha\|b\|^2}{\alpha^2 F^3}(y^k)^2(y^l)^2\frac{\partial}{\partial t}a_{kl}.
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

$$
\begin{aligned}
b)\frac{\partial}{\partial t}g_{jl} &= \frac{y^j\frac{\partial}{\partial t}b_j}{\alpha}\left(a_{jl} - \frac{a_{jk}y^k}{\alpha}\frac{a_{ll}y^l}{\alpha}\right) - \frac{b_j(y^j)^2 y^l}{2\alpha}\frac{\partial}{\partial t}a_{jl}\left(a_{jl} - \frac{a_{jk}y^k}{\alpha}\frac{a_{ll}y^l}{\alpha}\right) + \frac{F}{\alpha}\Bigg(\frac{\partial}{\partial t}a_{jl} \\
&- y^k y^l\frac{\partial}{\partial t}(a_{jl}a_{ll})\Bigg) + \frac{F}{\alpha^5}a_{jk}a_{ll}y^k y^l\frac{\partial}{\partial t}a_{jl} + \left(\frac{a_{jk}y^k}{\alpha} + b_j\right)\left(\frac{y^l\frac{\partial}{\partial t}a_{ll}}{\alpha} + \frac{\partial}{\partial t}b_l\right) \\
&- \left(\frac{a_{jk}b^k}{\alpha} + b_j\right)\left(\frac{a_{ll}y^l y^j y^l}{2\alpha^3}\frac{\partial}{\partial t}a_{jl}\right) + \left(\frac{a_{ll}y^l y^j y^l}{2\alpha^3}\frac{\partial}{\partial t}a_{jl}\right) + \left(\frac{a_{jl}y^l}{\alpha} + b_j\right) \\
&\left(\frac{y^k\frac{\partial}{\partial t}a_{jk}}{\alpha} + \frac{\alpha}{\partial t}b_j\right) - \left(\frac{a_{ll}y^l}{\alpha} + b_l\right)\frac{a_{jk}y^k y^j y^l}{2\alpha^3}\frac{\partial}{\partial t}a_{jl}.
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

$$
\begin{aligned}
c)\frac{\partial}{\partial t}g_{il} &= \frac{y^i\frac{\partial}{\partial t}b_i}{\alpha}\left(a_{il} - \frac{a_{ik}y^k}{\alpha}\frac{a_{ll}y^l}{\alpha}\right) - \frac{b_i(y^i)^2 y^l}{2\alpha}\frac{\partial}{\partial t}a_{il}\left(a_{il} - \frac{a_{ik}y^k}{\alpha}\frac{a_{ll}y^l}{\alpha}\right) \\
&+ \frac{F}{\alpha}\left(\frac{\partial a_{il}}{\partial t} - y^k y^l\frac{\partial(a_{il}a_{ll})}{\partial t}\right) + \frac{F}{\alpha^5}a_{ik}a_{ll}y^k y^l y^i y^l\frac{\partial}{\partial t}a_{il} + \left(\frac{a_{ik}y^k}{\alpha} + b_i\right) \\
&\left(\frac{y^l\frac{\partial}{\partial t}a_{ll}}{\alpha} + \frac{\partial}{\partial t}b_l\right) - \left(\frac{a_{ik}y^k}{\alpha} + b_i\right)\left(\frac{a_{ll}y^l y^i y^l}{2\alpha^3}\frac{\partial}{\partial t}a_{il}\right) + \left(\frac{a_{ll}y^l}{\alpha} + b_l\right)\left(y^k\frac{\partial}{\partial t}a_{ik} + \frac{\partial}{\partial t}b_i\right) \\
&- \left(\frac{a_{ll}y^l}{\alpha} + b_l\right)\frac{a_{ik}y^k y^i y^l}{2\alpha^3}\frac{\partial}{\partial t}a_{il}\ .
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

En posant $\delta_1 =$ (3.7)*,* $\delta_2 =$ (3.8)*,* $\delta_3 =$ (3.9) *et* $\delta_4 =$ (3.3) *et en les remplaçant dans* (3.6)*, on a :*

$$
\frac{\partial}{\partial t}\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}g_{jl} + \frac{\partial}{\partial x^j}g_{il} - \frac{\partial}{\partial x^l}g_{ij}\right)\delta_1 + \frac{1}{2}g^{kl}\left(\frac{\partial\delta_2}{\partial x^i} + \frac{\partial\delta_3}{\partial x^j} - \frac{\partial\delta_4}{\partial x^l}\right).
$$

Corollaire 3.2. *Si α est MINKOWSKI : c'est-à-dire que α dépend de y, alors :*

$$\bullet\frac{\partial\delta_2}{\partial x^i}=\left(a_{jl}-\frac{a_{jk}}{\alpha}y^k\frac{a_{ll}y^l}{\alpha}\right)\frac{y^j}{\alpha}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x^i}b_j-\frac{y^jy^l}{2\alpha}\frac{\partial}{\partial t}a_{jl}\left(a_{jl}-\frac{a_{jk}y^k}{\alpha}\frac{a_{ll}y^l}{\alpha}\right)\frac{\partial}{\partial x^i}b_j$$
$$+\frac{1}{\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial t}a_{jl}-y^ky^l\frac{\partial}{\partial t}(a_{jl}a_{ll})\right)\frac{\partial}{\partial x^i}F+\frac{a_{jk}a_{ll}}{\alpha^5}y^ky^ly^j\frac{\partial}{\partial t}a_{jl}\frac{\partial}{\partial x^i}F$$
$$+\frac{\partial}{\partial x^i}b_j\left(\frac{y^l\frac{\partial}{\partial t}a_{ll}}{\alpha}+\frac{\partial}{\partial t}b_l\right)+\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x^i}b_l\left(\frac{a_{jk}y^k}{\alpha}+b_j\right)-\frac{\partial}{\partial x^i}b_j\left(\frac{a_{ll}(y^l)^2y^j}{2\alpha^3}\frac{\partial}{\partial t}a_{jl}\right)$$
$$+\frac{\partial}{\partial x^i}b_j\left(\frac{y^k\frac{\partial}{\partial t}a_{jk}}{\alpha}+\frac{\partial}{\partial t}b_j\right)+\left(\frac{a_{ll}y^l}{\alpha}+b_j\right)\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x^i}b_j-\frac{\partial}{\partial x^i}b_l\frac{a_{jk}b^ky^jy^l}{2\alpha^3}\frac{\partial}{\partial t}a_{jl}.$$

or

$$\frac{\partial}{\partial x^i}b_j=0\ si\ i\neq j\ et\ i\neq l$$

- $\bullet\ \dfrac{\partial\delta_2}{\partial x^i}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial t}a_{jl}-y^ky^l\dfrac{\partial}{\partial t}(a_{jl}a_{ll})\dfrac{y^i}{\partial x^i}b_i+\dfrac{a_{jk}a_{ll}}{\alpha^5}y^k(y^l)^2y^j\dfrac{\partial}{\partial t}a_{jl}\dfrac{\partial}{\partial x^i}b_i\right.$
- $\bullet\ \dfrac{\partial\delta_3}{\partial x^j}=0\quad si\ j\neq i\ et\ j\neq l$
- $\bullet\ \dfrac{\partial\delta_4}{\partial x^l}=0\ si\ l\neq i\quad et\ l\neq j$
- $\bullet\ \dfrac{\partial}{\partial x^i}g_{jl}=\dfrac{1}{\alpha}\left(a_{jl}-\dfrac{a_{jk}y^k}{\alpha}\dfrac{a_{ll}y^l}{\alpha}\right)y^i\dfrac{\partial}{\partial x^i}b_i$
- $\bullet\ \dfrac{\partial}{\partial x^j}g_{il}=0\quad si\ j\neq i\ et\ j\neq l$
- $\bullet\ \dfrac{\partial}{\partial x^l}g_{ij}=0\quad si\ l\neq i\ et\ l\neq j.$

D'après le corollaire (3.2), on a :

$$\frac{\partial}{\partial t}\Gamma^k_{ij}=\left[\frac{1}{2\alpha}\left(a_{jl}-\frac{a_{jk}y^k}{\alpha}\frac{a_{ll}y^l}{\alpha}\right)y^i\frac{\partial b_i}{\partial x^i}\right]\delta_1+\frac{1}{2}g^{kl}\left(\frac{1}{\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial t}a_{jl}-y^ky^l\frac{\partial}{\partial t}(a_{jl}a_{ll})\right).y^i\frac{\partial}{\partial x^i}b_i\right.$$
$$\left.+\frac{a_{jk}a_{ll}}{\alpha^5}y^k(y^l)^2y^j\frac{\partial}{\partial t}a_{jl}y^i\frac{\partial}{\partial x^i}b_i\right)$$
$$=\frac{y^i}{2\alpha}\frac{\partial}{\partial x^i}b_i.\left(a_{jl}-\frac{a_{jk}y^k}{\alpha}\frac{a_{ll}y^l}{\alpha}\right)\delta_1+\frac{y^i}{2\alpha}g^{kl}\frac{\partial}{\partial x^i}b_i\left(\frac{\partial}{\partial t}a_{jl}-y^ky^l\frac{\partial}{\partial t}(a_{jl}a_{ll})\right)$$
$$+\frac{y^i}{2\alpha^5}g^{kl}a_{jk}a_{ll}y^k(y^l)^2y^j\frac{\partial}{\partial t}a_{jl}\frac{\partial}{\partial x^i}b_i$$
$$=\frac{y^i}{2\alpha}\frac{\partial}{\partial x^i}b_i\left(a_{jl}-\frac{a_{jk}y^k}{\alpha}.\frac{a_{ll}y^l}{\alpha}\right)\left\{\frac{a^{kl}y^ky^l}{2\alpha F}\frac{\partial}{\partial t}a_{kl}-\frac{a^{kl}y^ky^l}{2F^2}\frac{\partial}{\partial t}a_{kl}-\frac{\alpha}{F^2}\left(a^{kl}y^k\frac{\partial}{\partial t}b^k\right.\right.$$
$$\left.\left.+y^k\frac{\partial}{\partial t}b^l+y^l\frac{\partial}{\partial t}b^k\right)+\frac{\alpha}{F}\frac{\partial}{\partial t}a^{kl}-\frac{1}{F^2}\left(\frac{y^kb^l}{\alpha}+\frac{y^lb^k}{\alpha}\right)y^ky^l\frac{\partial}{\partial t}a_{kl}+\frac{1}{2\alpha F^2}\left((y^k)^2y^lb^l\frac{\partial}{\partial t}a_{kl}\right.\right.$$

$$+(y^l)^2y^kb^k\frac{\partial}{\partial t}a_{kl}\Big)+\frac{\beta+\alpha\|b\|^2}{F^4}\Big(\frac{(y^k)^2}{\alpha}\frac{(y^l)^2}{\alpha}\frac{\partial}{\partial r}a_{kl}-\frac{(y^k)^2y^l}{\alpha}\frac{\partial}{\partial t}a_{kl}-2\frac{(y^k)^2}{\alpha}\frac{y^l}{\alpha}\frac{\partial}{\partial t}b_k$$
$$-(y^k)^2y^l\frac{\partial}{\partial t}b_k\Big)+\frac{(y^k)^2y^l}{F^3}\frac{\partial}{\partial t}b_k+\frac{\|b\|^2(y^k)^2(y^l)^2}{2\alpha F^3}\frac{\partial}{\partial t}a_{kl}+\frac{2\alpha}{F^3}\Big[\|b\|^2y^ky^l\frac{\partial}{\partial t}\|b\|+\Big(y^kb^l+y^lb^k\Big)$$
$$\Big(\frac{y^ky^l}{2\alpha}\frac{\partial}{\partial t}a_{kl}+y^k\frac{\partial}{\partial t}b_k\Big)\Big]-\frac{\beta+\alpha\|b\|^2}{2\alpha F^4}(y^k)^2(y^l)^2\frac{\partial}{\partial t}a_{kl}-\frac{\beta+\alpha\|b\|^2}{2\alpha F^4}(y^k)^2(y^l)^2\frac{\partial}{\partial t}a_{kl}$$
$$-\frac{\beta+\alpha\|b\|^2}{\alpha^2F^2}(y^k)^2(y^l)^2\frac{\partial}{\partial t}a_{kl}\Big\}+\frac{y^i}{2}\Big[\frac{\alpha}{F}a^{kl}+\frac{\alpha^2}{F^2}\frac{\beta+\alpha\|b\|^2}{F}\frac{y^k}{\alpha}\frac{y^l}{\alpha}$$
$$-\frac{\alpha^2}{F^2}\Big(\frac{y^kb^l}{\alpha}+\frac{y^lb^k}{\alpha}\Big)\Big]\frac{\partial}{\partial x^i}b_i\Big[\frac{1}{\alpha}\Big(\frac{\partial}{\partial t}a_{jl}-y^ky^l\frac{\partial}{\partial t}(a_{jl}a_{ll})\Big)+\frac{a_{jl}a_{ll}}{\alpha^5}y^k(y^l)^2y^j\frac{\partial}{\partial t}a_{jl}\Big].$$

3.2 Evolution de la courbure totale sur les espaces de Randers

Proposition 3.5. *Soit $F=\alpha+\beta$ une métrique finslérienne à un paramètre t sur une variété de Randers M où $\alpha=\sqrt{a_{ij}(t,x)y^iy^j}$ et $\beta=b_i(t,x)y^i$. Alors sous une déformation de courbure de l'espace-temps, la courbure totale $\Phi_{ijkl}(x,y,t)$ évolue suivant l'équation :*

$$\frac{\partial\Phi_{ijkl}}{\partial t}=g^{js}\Phi_{ijkl}(i)+\left(\Gamma^s_{ik}\Gamma^r_{ls}-\Gamma^r_{il}\Gamma^r_{ks}\right)(ii)-g_{js}\frac{\partial\Gamma^s_{ik}}{\partial y^l}\frac{\partial F}{\partial t}$$
$$+\frac{1}{2}g_{js}\Big(\nabla_k\nabla_ig_{lm}+\nabla_l\nabla_mg_{ik}-\nabla_k\nabla_mg_{il}-\nabla_l\nabla_ig_{km}\Big)$$
$$+\frac{1}{2}g_{js}\left(\nabla_ig_{lm}+\nabla_lg_{im}-\nabla_mg_{il}\right)\frac{\partial\delta_5}{\partial x^k}+\frac{1}{2}g_{js}\frac{\partial g^{sm}}{\partial x^k}\Big(\frac{\partial\delta_6}{\partial x^i}+\frac{\partial\delta_7}{\partial x^l}-\frac{\partial\delta_8}{\partial x^m}\Big)$$
$$+\frac{1}{2}g_{js}\left(\nabla_ig_{km}+\nabla_kg_{im}-\nabla_mg_{ik}\right)\frac{\partial\delta_5}{\partial x^l}-\frac{1}{2}g_{js}\Big(\frac{\partial\delta_9}{\partial x^i}+\frac{\partial\delta_7}{\partial x^k}-\frac{\partial\delta_{10}}{\partial x^m}\Big)\frac{\partial g^{sm}}{\partial x^l}$$
$$+\frac{1}{2}g_{jr}\Gamma^s_{ik}\left(\nabla_lg_{sm}+\nabla_sg_{lm}-\nabla_mg_{ls}\right)\delta_{11}-\frac{1}{2}g_{jr}\Gamma^s_{il}\left(\nabla_kg_{sm}+\nabla_sg_{km}-\nabla_mg_{ks}\right)\delta_5$$
$$-\frac{F}{2}g_{js}\Big[\Big(\frac{\partial}{\partial y^l}\frac{\partial g_{km}}{\partial x^i}+\frac{\partial}{\partial y^l}\frac{\partial g_{im}}{\partial x^k}-\frac{\partial}{\partial y^l}\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^m}\Big)\frac{\partial F}{\partial t}+\left(\nabla_ig_{km}+\nabla_kg_{im}-\nabla_mg_{ik}\right)\frac{\partial^2F}{\partial y^l\partial t}$$
$$+\Big(\frac{\partial\delta_9}{\partial x^i}+\frac{\partial\delta_7}{\partial x^k}-\frac{\partial\delta_{10}}{\partial x^m}\Big)\frac{\partial g^{sm}}{\partial y^l}\Big].\qquad(3.10)$$

Avec $(i)=\frac{\partial g_{js}}{\partial t}$; $(ii)=\frac{\partial g_{jr}}{\partial t}$; $\delta_5=\frac{\partial g^{sm}}{\partial t}$; $\delta_6=\frac{\partial g_{lm}}{\partial t}$; $\delta_7=\frac{\partial g_{im}}{\partial t}$; $\delta_8=\frac{\partial g_{il}}{\partial t}$; $\delta_9=\frac{\partial g_{km}}{\partial t}$; $\delta_{10}=\frac{\partial g_{ik}}{\partial t}$; $\delta_{11}=\frac{\partial g_{ls}}{\partial t}$.

Preuve 3.5.

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Phi_{ijkl}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\frac{\partial\Gamma^s_{il}}{\partial x^k}-\frac{\partial\Gamma^s_{ik}}{\partial x^l}\right)g_{js}+\left(\Gamma^s_{ik}\Gamma^r_{ls}-\Gamma^s_{il}\Gamma^r_{ks}\right)g_{jr}-F\frac{\partial\Gamma^s_{ik}}{\partial y^l}\right]\\ &= \left(\frac{\partial\Gamma^s_{il}}{\partial x^k}-\frac{\partial\Gamma^s_{ik}}{\partial x^l}\right)\frac{\partial g_{js}}{\partial t}+g_{js}\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\Gamma^s_{il}}{\partial x^k}-\frac{\partial\Gamma^s_{ik}}{\partial x^l}\right)\right]+\left(\Gamma^s_{ik}\Gamma^r_{ls}-\Gamma^s_{il}\Gamma^r_{ks}\right)\frac{\partial g_{jr}}{\partial t}\\ &+ g_{jr}\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\Gamma^s_{ik}\Gamma^r_{ls}-\Gamma^s_{il}\Gamma^r_{ks}\right)\right]-\frac{\partial\left(F\frac{\partial\Gamma^s_{ik}}{\partial y^l}\right)}{\partial t}.g_{js}-F\frac{\partial\Gamma^s_{ik}}{\partial y^l}\frac{\partial}{\partial t}g_{js}\\ &= \left(\frac{\partial\Gamma^s_{il}}{\partial x^k}-\frac{\partial\Gamma^s_{ik}}{\partial x^l}\right)\frac{\partial}{\partial t}g_{js}+g_{js}\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\frac{\partial\Gamma^s_{il}}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x^l}\frac{\partial\Gamma^s_{ik}}{\partial t}\right)+\left(\Gamma^s_{ik}\Gamma^r_{ls}-\Gamma^s_{il}\Gamma^r_{ks}\right)\frac{\partial g_{jr}}{\partial t}\\ &+ g_{jr}\left(\Gamma^r_{ls}\frac{\partial\Gamma^s_{ik}}{\partial t}+\Gamma^s_{ik}\frac{\partial\Gamma^r_{ls}}{\partial t}-\Gamma^r_{ks}\frac{\partial\Gamma^s_{il}}{\partial t}-\Gamma^s_{il}\frac{\partial\Gamma^r_{ks}}{\partial t}\right)-\left(F\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\Gamma^s_{ik}}{\partial t}+\frac{\partial\Gamma^s_{ik}}{\partial y^l}\frac{\partial F}{\partial t}\right)g_{js}\\ &- F\frac{\partial\Gamma^s_{ik}}{\partial y^l}\frac{\partial g_{js}}{\partial t}. \end{aligned}\tag{3.11}$$

En utilisant les relations (3.3) *et* (3.6)*, on définit :*

$$\begin{aligned}(i)\ \frac{\partial g_{js}}{\partial t} &= \frac{y^j\frac{\partial b_j}{\partial t}}{\alpha}\left(a_{js}-\frac{a_{jk}y^k}{\alpha}\frac{a_{sl}y^l}{\alpha}\right)-\frac{b_jy^{2j}y^s}{2\alpha^3}\frac{\partial a_{js}}{\partial t}\left(a_{js}-\frac{a_{jk}y^k}{\alpha}\frac{a_{sl}y^l}{\alpha}\right)\\ &+\frac{F}{\alpha}\left(\frac{\partial a_{js}}{\partial t}-\frac{y^ky^l\frac{\partial(a_{jk}a_{sl})}{\partial t}}{\alpha^2}+\frac{a_{jk}a_{sl}y^ky^ly^jy^s}{\alpha^4}.\frac{\partial a_{js}}{\partial t}\right)\\ &+\left(\frac{a_{jk}y^k}{\alpha}+b_j\right)\left(\frac{y^l}{\alpha}\frac{\partial a_{sl}}{\partial t}+\frac{\partial b_j}{\partial t}\right)-\left(\frac{a_{jk}y^k}{\alpha}+b_j\right)\frac{a_{jl}y^ly^jy^s}{2\alpha^3}\frac{\partial a_{js}}{\partial t}\\ &+\left(\frac{a_{sl}y^l}{\alpha}+b_s\right)\left(\frac{y^k}{\alpha}\frac{\partial a_{jk}}{\partial t}+\frac{\partial b_j}{\partial t}\right)-\left(\frac{a_{sl}y^l}{\alpha}+b_s\right)\frac{a_{jk}y^ky^ly^j}{2\alpha^3}\frac{\partial a_{js}}{\partial t}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(ii)\ \frac{\partial g_{jr}}{\partial t} &= \frac{y^j\frac{\partial b_j}{\partial t}}{\alpha}\left(a_{jr}-\frac{a_{jk}y^k}{\alpha}\frac{a_{rl}y^l}{\alpha}\right)-\frac{b_jy^{2j}y^r}{2\alpha^3}\frac{\partial a_{jr}}{\partial t}\left(a_{jr}-\frac{a_{jk}y^k}{\alpha}\frac{a_{rl}y^l}{\alpha}\right)\\ &+\frac{F}{\alpha}\left(\frac{\partial a_{jr}}{\partial t}-\frac{y^ky^l\frac{\partial(a_{jk}a_{rl})}{\partial t}}{\alpha^2}+\frac{a_{jk}a_{rl}y^ky^ly^jy^r}{\alpha^4}.\frac{\partial a_{jr}}{\partial t}\right)+\left(\frac{a_{jk}y^k}{\alpha}+b_j\right)\\ &\left(\frac{y^l}{\alpha}\frac{\partial a_{rl}}{\partial t}+\frac{\partial b_j}{\partial t}\right)-\left(\frac{a_{jk}y^k}{\alpha}+b_j\right).\frac{a_{jl}y^ly^jy^r}{2\alpha^3}.\frac{\partial a_{jr}}{\partial t}+\left(\frac{a_{rl}y^l}{\alpha}+b_r\right)\\ &\left(\frac{y^k}{\alpha}\frac{\partial a_{jk}}{\partial t}+\frac{\partial b_j}{\partial t}\right)-\left(\frac{a_{rl}y^l}{\alpha}+b_r\right)\frac{a_{jk}y^ky^l}{2\alpha^3}.\frac{\partial a_{jr}}{\partial t}.\end{aligned}$$

$$(iii)\ \frac{\partial\Gamma^s_{il}}{\partial t}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{lm}}{\partial x^i}+\frac{\partial g_{im}}{\partial x^l}-\frac{\partial g_{il}}{\partial x^m}\right)\frac{\partial g^{sm}}{\partial t}+\frac{1}{2}g^{sm}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial g_{lm}}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x^m}\frac{\partial g_{im}}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x^m}\frac{\partial g_{il}}{\partial t}\right).$$

$$(iv)\ \frac{\partial\Gamma^s_{ik}}{\partial t}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{km}}{\partial x^i}+\frac{\partial g_{im}}{\partial x^k}-\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^m}\right)\frac{\partial g^{sm}}{\partial t}+\frac{1}{2}g^{sm}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial g_{km}}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x^k}\frac{\partial g_{im}}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x^m}\frac{\partial}{\partial t}g_{ik}\right).$$

$$(v)\ \frac{\partial\Gamma^r_{ls}}{\partial t}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{sm}}{\partial x^l}+\frac{\partial g_{lm}}{\partial x^s}-\frac{\partial g_{ls}}{\partial x^m}\right)\frac{\partial g^{rm}}{\partial t}+\frac{1}{2}g^{rm}\left(\frac{\partial}{\partial x^l}\frac{\partial g_{sm}}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x^s}\frac{\partial}{\partial t}g_{lm}-\frac{\partial}{\partial x^m}\frac{\partial g_{ls}}{\partial t}\right).$$

$$(vi)\ \frac{\partial\Gamma^r_{ks}}{\partial t}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{sm}}{\partial x^k}+\frac{\partial g_{km}}{\partial x^s}-\frac{\partial g_{ks}}{\partial x^m}\right)\frac{\partial g^{rm}}{\partial t}+\frac{1}{2}g^{rm}\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\frac{\partial g_{sm}}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x^s}\frac{\partial g_{km}}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x^m}\frac{\partial g_{ks}}{\partial t}\right).$$

En remplaçant (i), (ii), (iii), (iv), (v) *et* (vi) *dans* (3.11) *on a :*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\Phi_{ijkl}}{\partial t}&=\left(\frac{\partial\Gamma^s_{il}}{\partial x^k}-\frac{\partial\Gamma^s_{ik}}{\partial x^l}(i)+g_{js}\left\{\frac{\partial}{\partial x^k}\left[\frac{\partial g_{lm}}{\partial x^i}+\frac{\partial g_{im}}{\partial x^l}-\frac{\partial g_{il}}{x^m}\right)\frac{\partial g^{sm}}{\partial t}+\frac{1}{2}g^{sm}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial g_{lm}}{\partial t}\right.\right.\right.\\
&\left.\left.\left.+\frac{\partial}{\partial x^l}\frac{\partial g_{im}}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x^m}\frac{\partial g_{il}}{\partial t}\right)\right]-\frac{\partial}{\partial x^l}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{km}}{\partial x^i}+\frac{\partial g_{im}}{\partial x^k}-\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^m}\right)\frac{\partial g^{sm}}{\partial t}\right.\\
&\left.\left.+\frac{1}{2}g^{sm}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial g_{km}}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x^k}\frac{\partial g_{im}}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x^m}\frac{\partial g_{ik}}{\partial t}\right)\right]\right\}+\left(\Gamma^s_{ik}\Gamma^r_{ls}-\Gamma^s_{il}\Gamma^r_{ks}\right)(ii)\\
&+g_{jr}\left\{\Gamma^r_{ls}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{km}}{\partial x^i}+\frac{\partial g_{im}}{\partial x^k}-\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^m}\right)\frac{\partial g^{sm}}{\partial t}+\frac{1}{2}g^{sm}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial g_{km}}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x^m}\frac{\partial g_{ik}}{\partial t}\right)\right]\right.\\
&+\Gamma^s_{ik}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{sm}}{\partial x^l}+\frac{\partial g_{lm}}{\partial x^s}-\frac{\partial g_{ls}}{\partial x^m}\right)\frac{\partial g_{ls}}{\partial t}+\frac{1}{2}g^{rm}\left(\frac{\partial}{\partial x^l}\frac{\partial g_{sm}}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x^s}\frac{\partial g_{lm}}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x^m}\frac{\partial g_{ls}}{\partial t}\right)\right]\\
&\left.-\Gamma^r_{ks}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{lm}}{\partial x^i}+\frac{\partial g_{im}}{\partial x^l}-\frac{\partial g_{il}}{\partial x^m}\right)\frac{\partial g^{sm}}{\partial t}+\frac{1}{2}g^{rm}\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\frac{\partial g_{sm}}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x^s}\frac{\partial g_{km}}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x^m}\frac{\partial g_{ks}}{\partial t}\right]\right\}\right.\\
&-Fg_{js}\frac{\partial}{\partial y^l}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{km}}{\partial x^i}+\frac{\partial g_{im}}{\partial x^k}-\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^m}\right)\frac{\partial g^{sm}}{\partial t}+\frac{1}{2}g^{sm}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial g_{km}}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x^k}\frac{\partial g_{im}}{\partial t}\right.\right.\\
&\left.\left.-\frac{\partial}{\partial x^m}\frac{\partial g_{ik}}{\partial t}\right)\right]-g_{js}\frac{\partial\Gamma^s_{ik}}{\partial y^l}\frac{\partial F}{\partial t}-F\frac{\partial\Gamma^s_{ik}}{\partial y^l}(i)\\
&=\left(\frac{\partial\Gamma^s_{il}}{\partial x^k}-\frac{\partial\Gamma^s_{ik}}{\partial x^l}-F\frac{\partial\Gamma^s_{ik}}{\partial y^l}\right)(i)+\left(\Gamma^s_{ik}\Gamma^r_{ls}-\Gamma^s_{il}\Gamma^r_{ks}\right)(ii)-g_{js}\frac{\partial\Gamma^s_{ik}}{\partial y^l}\frac{\partial F}{\partial t}\\
&+\frac{1}{2}g_{js}\left(\nabla_k\nabla_i g_{lm}+\nabla_k\nabla_l g_{im}-\nabla_k\nabla_m g_{il}\right)\frac{\partial g^{sm}}{\partial t}+\frac{1}{2}g_{js}\left(\nabla_i g_{lm}+\nabla_l g_{im}-\nabla_m g_{il}\right)\\
&\frac{\partial}{\partial x^k}\frac{\partial g^{sm}}{\partial t}+\frac{1}{2}g_{js}g^{sm}\left(\nabla_k\nabla_i\frac{\partial g_{lm}}{\partial t}+\nabla_k\nabla_l\frac{\partial g_{im}}{\partial t}-\nabla_k\nabla_m\frac{\partial g_{il}}{\partial t}\right)+\frac{1}{2}g_{js}\frac{\partial g^{sm}}{\partial x^k}\\
&\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial g_{lm}}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x^l}\frac{\partial g_{im}}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x^m}\frac{\partial g_{il}}{\partial t}\right)-\frac{1}{2}g_{js}\left(\nabla_l\nabla_i g_{km}+\nabla_l\nabla_k g_{im}-\nabla_l\nabla_m g_{ik}\right)\frac{\partial g^{sm}}{\partial t}\\
&-\frac{1}{2}g_{js}\left(\nabla_i g_{km}+\nabla_k g_{im}-\nabla_m g_{ik}\right)\frac{\partial}{\partial x^l}\frac{\partial g^{sm}}{\partial t}-\frac{1}{2}g_{js}g^{sm}\left(\nabla_l\nabla_i\frac{\partial g_{km}}{\partial t}+\nabla_l\nabla_k\frac{\partial g_{im}}{\partial t}\right.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&- \nabla_l \nabla_m \frac{\partial g_{ik}}{\partial t}\Big) - \frac{1}{2} g_{js}\left(\nabla_i \frac{\partial g_{km}}{\partial t} + \nabla_k \frac{\partial g_{im}}{\partial t} - \nabla_m \frac{\partial g_{ik}}{\partial t}\right)\frac{\partial g^{sm}}{\partial x^l}\frac{\partial g^{sm}}{\partial x^l} + \frac{1}{2} g_{jr}\Gamma^r_{ls} \\
&\left[\left(\nabla_i g_{km} + \nabla_k g_{im} - \nabla_m g_{ik}\right)\frac{\partial g^{sm}}{\partial t} + g^{sm}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial g_{km}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^k}\frac{\partial g_{im}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x^m}\frac{\partial g_{ik}}{\partial t}\right)\right] \\
&+ \frac{1}{2} g_{jr}\Gamma^s_{ik}\left[\left(\nabla_l g_{sm} + \nabla_s g_{lm} - \nabla_m g_{ls}\right)\frac{\partial g_{ls}}{\partial t} + g^{rm}\left(\frac{\partial}{\partial x^l}\frac{\partial g_{sm}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^s}\frac{\partial g_{lm}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x^m}\frac{\partial g_{ls}}{\partial t}\right)\right] \\
&- \frac{1}{2} g_{jr}\Gamma^r_{ks}\left[\nabla_i g_{lm} + \nabla_l \nabla_{im} - \nabla_m g_{il}\right)\frac{\partial g^{sm}}{\partial t} + g^{sm}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial g_{lm}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^l}\frac{\partial g_{im}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x^m}\frac{\partial g_{il}}{\partial t}\right)\right] \\
&- \frac{1}{2} g_{jr}\Gamma^s_{il}\left[\left(\nabla_k g_{sm} + \nabla_s g_{km} - \nabla_m g_{ks}\right)\frac{\partial g^{rm}}{\partial t} + g^{rm}\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\frac{\partial g_{sm}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^s}\frac{\partial g_{km}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x^m}\frac{\partial g_{ks}}{\partial t}\right)\right] \\
&- \frac{1}{2} F g_{js}\left[\left(\frac{\partial}{\partial y^l}\frac{\partial g_{km}}{\partial x^i} + \frac{\partial}{\partial y^l}\frac{\partial g_{im}}{\partial x^k} - \frac{\partial}{\partial y^l}\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^m}\right)\frac{\partial g^{sm}}{\partial t} + \left(\nabla_i g_{km} + \nabla_k g_{im} - \nabla_m g_{ik}\right)\frac{\partial}{\partial y^l}\frac{\partial g^{sm}}{\partial t}\right] \\
&- \frac{1}{2} F g_{js} g^{sm}\left(\frac{\partial}{\partial y^l}\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial g_{km}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y^l}\frac{\partial}{\partial x^k}\frac{\partial g_{im}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial y^l}\frac{\partial}{\partial x^m}\frac{\partial g_{ik}}{\partial t}\right) - \frac{1}{2} F g_{js} \\
&\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial g_{km}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^k}\frac{\partial g_{im}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x^m}\frac{\partial g_{ik}}{\partial t}\right)\frac{\partial g^{sm}}{\partial y^l}.
\end{aligned}
\tag{3.12}
$$

En transformant la courbure totale définie dans (2.4) *; on obtient*

$$
\frac{\partial \Gamma^s_{il}}{\partial x^k} - F\frac{\partial \Gamma^s_{ik}}{\partial x^l} - F\frac{\partial \Gamma^s_{ik}}{\partial y^l} = g^{js}\Phi_{ijkl} - \left(\Gamma^s_{ik}\Gamma^r_{ls} - \Gamma^s_{il}\Gamma^r_{ks}\right)g_{jr}g^{js} \quad ,
$$

et en la remplaçant dans (3.12)*, on a :*

$$\frac{\partial\Phi_{ijkl}}{\partial t} = \left[g^{js}\Phi_{ijkl} - \left(\Gamma^s_{ik}\Gamma^r_{ls} - \Gamma^s_{il}\Gamma^r_{ks}\right)g_{jr}g^{js}\right](i) + \left(\Gamma^s_{ik}\Gamma^r_{ls} - \Gamma^s_{il}\Gamma^r_{ks}\right)(ii)$$
$$- g_{js}\frac{\partial\Gamma^s_{ik}}{\partial y^l}\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2}g_{js}\left(\nabla_k\nabla_i g_{lm} + \nabla_k\nabla_l g_{im} - \nabla_k\nabla_m g_{il}\right)\frac{\partial g^{sm}}{\partial t}$$
$$+ \frac{1}{2}g_{js}\left(\nabla_i g_{lm} + \nabla_l g_{im} - \nabla_m g_{il}\right)\frac{\partial}{\partial x^k}\frac{\partial g^{sm}}{\partial t} + \frac{1}{2}g_{js}\frac{\partial g^{sm}}{\partial x^k}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial g_{lm}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^l}\frac{\partial g_{im}}{\partial t}\right.$$
$$\left. - \frac{\partial}{\partial x^m}\frac{\partial g_{il}}{\partial t}\right) - \frac{1}{2}g_{js}\left(\nabla_l\nabla_i g_{km} + \nabla_l\nabla_k g_{im} - \nabla_l\nabla_m g_{ik}\right)\frac{\partial g^{sm}}{\partial t} - \frac{1}{2}g_{js}\left(\nabla_i g_{km}\right.$$
$$\left. + \nabla_k g_{im} - \nabla_m g_{ik}\right)\frac{\partial}{\partial x^l}\frac{\partial g^{sm}}{\partial t} - \frac{1}{2}g_{js}\left(\nabla_i\frac{\partial g_{km}}{\partial t} + \nabla_k\frac{\partial g_{im}}{\partial t} - \nabla_m\frac{\partial g_{ik}}{\partial t}\right)\frac{\partial g^{sm}}{\partial x^l}$$
$$+ \frac{1}{2}g_{jr}\Gamma^s_{ik}\left(\nabla_l g_{sm} + \nabla_s g_{lm} - \nabla_m g_{ls}\right)\frac{\partial g_{ls}}{\partial t} + \frac{1}{2}g_{jr}g^{rm}\Gamma^s_{ik}\left(\frac{\partial}{\partial x^l}\frac{\partial g_{sm}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^s}\frac{\partial g_{lm}}{\partial t}\right.$$
$$\left. - \frac{\partial}{\partial x^m}\frac{\partial g_{ls}}{\partial t}\right) - \frac{1}{2}g_{jr}\Gamma^s_{il}\left(\nabla_m g_{sm} + \nabla_s g_{km} - \nabla_m g_{ks}\right)\frac{\partial g^{rm}}{\partial t} - \frac{1}{2}g_{jr}g^{rm}\Gamma^s_{il}\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\frac{\partial g_{sm}}{\partial t}\right.$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial x^s}\frac{\partial g_{km}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x^m}\frac{\partial g_{ks}}{\partial t}\right) - \frac{1}{2}Fg_{js}\left(\frac{\partial}{\partial y^l}\frac{\partial}{\partial x^i}g_{km} + \frac{\partial}{\partial y^l}\frac{\partial g_{im}}{\partial x^k} - \frac{\partial}{\partial y^l}\frac{\partial}{\partial x^m}g_{ik}\right)\frac{\partial g^{sm}}{\partial t}$$
$$- \frac{1}{2}Fg_{js}\left(\nabla_i g_{km} + \nabla_k g_{im} - \nabla_m g_{ik}\right)\frac{\partial}{\partial y^l}\frac{\partial g^{sm}}{\partial t} - \frac{1}{2}Fg_{js}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial g_{km}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^k}\frac{\partial}{\partial t}g_{im} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial t}\right)$$
$$\frac{\partial g^{sm}}{\partial y^l}$$
$$= \left[g^{js}\Phi_{ijkl} - \left(\Gamma^s_{ik}\Gamma^r_{ls} - \Gamma^s_{il}\Gamma^r_{ks}\right)g_{jr}g^{js}\right](i) + \left(\Gamma^s_{ik}\Gamma^r_{ls} - \Gamma^s_{il}\Gamma^r_{ks}\right)(ii) - g_{js}\frac{\partial\Gamma^s_{ik}}{\partial y^l}\frac{\partial F}{\partial t}$$
$$+ \frac{1}{2}g_{js}\left(\nabla_k\nabla_i g_{lm} + \nabla_l\nabla_m g_{ik} - \nabla_k\nabla_m g_{il} - \nabla_l\nabla_i g_{km}\right)\frac{\partial g^{sm}}{\partial t} + \frac{1}{2}g_{js}\left(\nabla_i g_{lm} + \nabla_l g_{im}\right.$$
$$\left. - \nabla_m g_{il}\right)\frac{\partial}{\partial x^k}\frac{\partial g^{sm}}{\partial t} + \frac{1}{2}g_{js}\frac{\partial g^{sm}}{\partial x^k}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial g_{lm}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^l}\frac{\partial g_{im}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x^m}\frac{\partial g_{il}}{\partial t}\right) - \frac{1}{2}g_{js}$$
$$\left(\nabla_i g_{km} + \nabla_k g_{im} - \nabla_m g_{ik}\right)\frac{\partial}{\partial x^l}\frac{\partial g^{sm}}{\partial t} - \frac{1}{2}g_{js}\left(\nabla_i\frac{\partial g_{km}}{\partial t} + \nabla_k\frac{\partial g_{im}}{\partial t} - \nabla_m\frac{\partial g_{ik}}{\partial t}\right)\frac{\partial g^{sm}}{\partial x^l}$$
$$+ \frac{1}{2}g_{jr}\Gamma^s_{ik}\left(\nabla_l g_{sm} + \nabla_s g_{lm} - \nabla_m g_{ls}\right)\frac{\partial g_{ls}}{\partial t} - \frac{1}{2}g_{jr}\Gamma^s_{il}\left(\nabla_k g_{sm} + \nabla_s g_{km} - \nabla_m g_{ks}\right)\frac{\partial g^{rm}}{\partial t}$$
$$- \frac{F}{2}g_{js}\left(\frac{\partial}{\partial y^l}\frac{\partial g_{km}}{\partial x^i} + \frac{\partial}{\partial y^l}\frac{\partial g_{im}}{\partial x^k} - \frac{\partial}{\partial y^l}\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^m}\right)\frac{\partial g^{sm}}{\partial t} - \frac{F}{2}g_{js}\left(\nabla_i g_{km} + \nabla_k g_{im} - \nabla_m g_{ik}\right)$$
$$\frac{\partial}{\partial y^l}\frac{\partial g^{sm}}{\partial t} - \frac{F}{2}g_{js}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial g_{km}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^k}\frac{\partial g_{im}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x^m}\frac{\partial g_{ik}}{\partial t}\right)\frac{\partial g^{sm}}{\partial y^l}$$

$$
\begin{aligned}
&= g^{js}\Phi_{ijkl}(i) + \left(\Gamma^s_{ik}\Gamma^r_{ls} - \Gamma^s_{il}\Gamma^r_{ks}\right)(ii) - g_{js}\frac{\partial\Gamma^s_{ik}}{\partial y^l}\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2}g_{js}\Bigg(\nabla_k\nabla_i g_{lm} + \nabla_l\nabla_m g_{ik} \\
&- \nabla_k\nabla_m g_{il} - \nabla_l\nabla_i g_{km}\Bigg)\frac{\partial g^{sm}}{\partial t} + \frac{1}{2}g_{js}\left(\nabla_i g_{lm} + \nabla_l g_{im} - \nabla_m g_{il}\right)\frac{\partial}{\partial x^k}\frac{\partial g^{sm}}{\partial t} + \frac{1}{2}g_{js}\frac{\partial g^{sm}}{\partial x^k} \\
&\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial g_{lm}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^l}\frac{\partial g_{im}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x^m}\frac{\partial g_{il}}{\partial t}\right) - \frac{1}{2}g_{js}\left(\nabla_i g_{km} + \nabla_k g_{im} - \nabla_m g_{ik}\right)\frac{\partial}{\partial x^l}\frac{\partial g^{sm}}{\partial t} \\
&- \frac{1}{2}g_{js}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial g_{km}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^k}\frac{\partial g_{im}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x^m}\frac{\partial g_{ik}}{\partial t}\right)\frac{\partial g^{sm}}{\partial x^l} + \frac{1}{2}g_{jr}\Gamma^s_{ik}\left(\nabla_l g_{sm} + \nabla_s g_{lm} - \nabla_m g_{ls}\right)\frac{\partial g_{ls}}{\partial t} \\
&- \frac{1}{2}g_{jr}\Gamma^s_{il}\left(\nabla_k g_{sm} + \nabla_s g_{km} - \nabla_m g_{ks}\right)\frac{\partial g^{rm}}{\partial t} - \frac{F}{2}g_{js}\Bigg[\left(\frac{\partial}{\partial y^l}\frac{\partial g_{km}}{\partial x^i} + \frac{\partial}{\partial y^l}\frac{\partial g_{im}}{\partial x^k} - \frac{\partial}{\partial y^l}\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^m}\right)\frac{\partial g^{sm}}{\partial t} \\
&+ \left(\nabla_i g_{km} + \nabla_k g_{im} - \nabla_m g_{ik}\right)\frac{\partial}{\partial y^l}\frac{\partial g^{sm}}{\partial t} + \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial g_{km}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^k}\frac{\partial g_{im}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x^m}\frac{\partial g_{ik}}{\partial t}\right)\frac{\partial g^{sm}}{\partial y^l}\Bigg].
\end{aligned}
\tag{3.13}
$$

En utilisant les relations (3.3) *et* (3.4)*, on définit les équations*

$$
\frac{\partial g^{sm}}{\partial t},\ \frac{\partial g_{lm}}{\partial t},\ \frac{\partial g_{im}}{\partial t},\ \frac{\partial g_{il}}{\partial t},\ \frac{\partial g_{km}}{\partial t},\ \frac{\partial g_{ik}}{\partial t},\ \frac{\partial g_{ls}}{\partial t}\ \ et\ \frac{\partial g^{rm}}{\partial t}
$$

en notant respectivement ces équations par $\delta_5, \delta_6, \delta_7, \delta_8, \delta_9, \delta_{10}, \delta_{11}, \delta_{12}$.

En les remplaçant ces équations dans (3.13)*, on a :*

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\Phi_{ijkl}}{\partial t} &= g^{js}\Phi_{ijkl}(i) + \left(\Gamma^s_{ik}\Gamma^r_{ls} - \Gamma^r_{il}\Gamma^r_{ks}\right)(ii) - g_{js}\frac{\partial\Gamma^s_{ik}}{\partial y^l}\frac{\partial F}{\partial t} \\
&+ \frac{1}{2}g_{js}\Bigg(\nabla_k\nabla_i g_{lm} + \nabla_l\nabla_m g_{ik} - \nabla_k\nabla_m g_{il} - \nabla_l\nabla_i g_{km}\Bigg) \\
&+ \frac{1}{2}g_{js}\left(\nabla_i g_{lm} + \nabla_l g_{im} - \nabla_m g_{il}\right)\frac{\partial\delta_5}{\partial x^k} + \frac{1}{2}g_{js}\frac{\partial g^{sm}}{\partial x^k}\left(\frac{\partial\delta_6}{\partial x^i} + \frac{\partial\delta_7}{\partial x^l} - \frac{\partial\delta_8}{\partial x^m}\right) \\
&+ \frac{1}{2}g_{js}\left(\nabla_i g_{km} + \nabla_k g_{im} - \nabla_m g_{ik}\right)\frac{\partial\delta_5}{\partial x^l} - \frac{1}{2}g_{js}\left(\frac{\partial\delta_9}{\partial x^i} + \frac{\partial\delta_7}{\partial x^k} - \frac{\partial\delta_{10}}{\partial x^m}\right)\frac{\partial g^{sm}}{\partial x^l} \\
&+ \frac{1}{2}g_{jr}\Gamma^s_{ik}\left(\nabla_l g_{sm} + \nabla_s g_{lm} - \nabla_m g_{ls}\right)\delta_{11} - \frac{1}{2}g_{jr}\Gamma^s_{il}\left(\nabla_k g_{sm} + \nabla_s g_{km} - \nabla_m g_{ks}\right)\delta_5 \\
&- \frac{F}{2}g_{js}\Bigg[\left(\frac{\partial}{\partial y^l}\frac{\partial g_{km}}{\partial x^i} + \frac{\partial}{\partial y^l}\frac{\partial g_{im}}{\partial x^k} - \frac{\partial}{\partial y^l}\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^m}\right)\frac{\partial F}{\partial t} + \left(\nabla_i g_{km} + \nabla_k g_{im} - \nabla_m g_{ik}\right)\frac{\partial^2 F}{\partial y^l\partial t} \\
&+ \left(\frac{\partial\delta_9}{\partial x^i} + \frac{\partial\delta_7}{\partial x^k} - \frac{\partial\delta_{10}}{\partial x^m}\right)\frac{\partial g^{sm}}{\partial y^l}\Bigg].
\end{aligned}
$$

3.3 Evolution de la courbure d'espace-temps sur les espaces de Randers

Proposition 3.6. *Soit $F = \alpha + \beta$ une métrique de Randers à un paramètre t sur une variété de Randers M où $\alpha = \sqrt{a_{ij}(t,x)y^i y^j}$ et $\beta = b_i(t,x)y^i$. Alors sous la déformation de la courbure d'espace-temps, la courbure d'espace-temps : $Ric_{ik} = g^{jl}\Phi_{ijkl}$ évolue suivant l'équation :*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Ric_{ik}}{\partial t} &= g^{jl}g^{js}\Phi_{ijkl}(i) + g^{jl}\left(\Gamma^s_{ik}\Gamma^r_{ls} - \Gamma^s_{il}\Gamma^r_{ks}\right)(ii) - \delta^l_s\frac{\partial\Gamma^s_{ik}}{\partial y^l}\frac{\partial F}{\partial t} \\
&+ \frac{1}{2}\delta^l_s\left(\nabla_k\nabla_i g_{lm} + \nabla_l\nabla_m g_{ik} - \nabla_k\nabla_m g_{il} - \nabla_l\nabla_i g_{km}\right)\delta_5 \\
&+ \frac{1}{2}\delta^l_s\left(\nabla_i g_{lm} + \nabla_l g_{im} - \nabla_m g_{il}\right)\frac{\partial\delta_5}{\partial x^k} + \frac{1}{2}\delta^l_s\frac{\partial g^{sm}}{\partial x^k}\left(\frac{\partial\delta_6}{\partial x^i} + \frac{\partial\delta_7}{\partial x^l} + \frac{\partial\delta_8}{\partial x^m}\right) \\
&+ \frac{1}{2}\delta^l_s\left(\nabla_i g_{km} + \nabla_k g_{im} - \nabla_m g_{ik}\right)\frac{\partial\delta_5}{\partial x^l} - \frac{1}{2}\delta^l_s\left(\frac{\partial\delta_9}{\partial x^i} + \frac{\partial\delta_7}{\partial x^k} - \frac{\partial\delta_{10}}{\partial x^m}\right) \\
&\frac{\partial g^{sm}}{\partial x^l} + \frac{1}{2}\delta^l_r\Gamma^s_{ik}\left(\nabla_l g_{sm} + \nabla_s g_{lm} - \nabla_m g_{ls}\right)\delta_{11} - \frac{1}{2}\delta^l_r\Gamma^s_{il}\Big(\nabla_k g_{sm} + \nabla_s g_{km} \\
&- \nabla_m g_{ks}\Big)\delta_{12} - \frac{F}{2}\delta^l_s\Bigg[\left(\frac{\partial}{\partial y^l}\frac{\partial g_{km}}{\partial x^i} + \frac{\partial}{\partial y^l}\frac{\partial g_{im}}{\partial x^k} - \frac{\partial}{\partial y^l}\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^m}\right)\frac{\partial F}{\partial t} + \Big(\nabla_i g_{km} \\
&+ \nabla_k g_{im} - \nabla_m g_{ik}\Big)\frac{\partial^2 F}{\partial y^l\partial t} + \left(\frac{\partial\delta_9}{\partial x^i} + \frac{\partial\delta_7}{\partial x^k} - \frac{\partial\delta_{10}}{\partial x^m}\right)\frac{\partial g^{sm}}{\partial y^l}\Bigg] + \Phi_{ijkl}\delta_{13}. \qquad (3.14)
\end{aligned}$$

avec $\delta_{13} = \frac{\partial g^{jl}}{\partial t}$.

Preuve 3.6.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Ric_{ik}}{\partial t} &= \frac{\partial(g^{jl}\Phi_{ijkl})}{\partial t} \\
&= g^{jl}\frac{\partial\Phi_{ijkl}}{\partial t} + \Phi_{ijkl}\frac{\partial g^{jl}}{\partial t} \qquad (3.15)
\end{aligned}$$

D'après la relation (3.4) *on définit aussi*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g^{jl}}{\partial t} &= \frac{a^{jl}y^jy^l}{2\alpha F}\frac{\partial a_{jl}}{\partial t} - \frac{a^{jl}y^jy^l}{2F^2}\frac{\partial a_{jl}}{\partial t} - \frac{\alpha}{F^2}\left(a^{jl}y^j\frac{\partial b_j}{\partial t} + y^j\frac{\partial b^l}{\partial t} + y^l\frac{\partial b^j}{\partial t}\right) + \frac{\alpha}{F}\frac{\partial a^{jl}}{\partial t} \\
&- \frac{1}{F^2}\left(\frac{y^jb^l}{\alpha} + \frac{y^lb^j}{\alpha}\right)y^jy^l\frac{\partial a_{jl}}{\partial t} + \frac{1}{2\alpha F^2}\left(y^{2j}y^lb^l\frac{\partial a_{jl}}{\partial t} + y^{2l}y^jb^j\frac{\partial a_{jl}}{\partial t}\right) \\
&+ \frac{\beta+\alpha\|b\|^2}{F^4}\left(\frac{y^{2j}}{\alpha}\frac{y^{2l}}{\alpha}\frac{\partial a_{jl}}{\partial t} - \frac{y^{2j}y^{2l}}{\alpha}\frac{\partial a_{jl}}{\partial t} - 2\frac{y^{2j}}{\alpha}\frac{y^l}{\alpha}\frac{\partial b_j}{\partial t} - y^{2j}y^l\frac{\partial b_j}{\partial t}\right) \\
&+ \frac{y^{2j}y^l}{F^3}\frac{\partial b_j}{\partial t} + \frac{\|b\|^2}{2\alpha F^2}y^{2J}y^{2l}\frac{\partial a_{jl}}{\partial t} + \frac{2\alpha}{F^3}\Bigg[\|b\|^2y^jy^l\frac{\partial\|b\|}{\partial t} + \left(y^jb^l + y^lb^j\right) \\
&\left(\frac{y^jy^l}{2\alpha}\frac{\partial a_{jl}}{\partial t} + y^j\frac{\partial b_j}{\partial t}\right)\Bigg] - \frac{\beta+\alpha\|b\|^2}{2\alpha F^4}y^{2j}y^{2l}\frac{\partial a_{jl}}{\partial t} - \frac{\beta+\alpha\|b\|^2}{\alpha^3F^4}y^{2j}y^{2l}\frac{\partial a_{jl}}{\partial t} \\
&= \delta_{13}
\end{aligned}$$

En substituant δ_{13} *et* (3.11) *dans* (3.15), *on obtient*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Ric_{ik}}{\partial t} &= g^{jl}\Bigg\{g^{js}\Phi_{ijkl}(i) + \left(\Gamma^s_{ik}\Gamma^r_{ls} - \Gamma^s_{il}\Gamma^r_{ls} - \Gamma^s_{il}\Gamma^r_{ks}\right)(ii) - g_{js}\frac{\partial\Gamma^s_{ik}}{\partial y^l}\frac{\partial F}{\partial t} \\
&+ \frac{1}{2}g_{js}\left(\nabla_k\nabla_ig_{lm} + \nabla_l\nabla_mg_{ik} - \nabla_k\nabla_mg_{il} - \nabla_l\nabla_ig_{km}\right)\delta_5 \\
&+ \frac{1}{2}g_{js}\left(\nabla_ig_{lm} + \nabla_lg_{im} - \nabla_mg_{il}\right)\frac{\partial\delta_5}{\partial x^k} + \frac{1}{2}g_{js}\frac{\partial g^{sm}}{\partial x^k}\left(\frac{\partial\delta_6}{\partial x^i} + \frac{\partial\delta_7}{\partial x^l} + \frac{\partial\delta_8}{\partial x^m}\right) \\
&+ \frac{1}{2}g_{js}\left(\nabla_ig_{km} + \nabla_kg_{im} - \nabla_mg_{ik}\right)\frac{\partial\delta_5}{\partial x^l} - \frac{1}{2}g_{js}\left(\frac{\partial\delta_9}{\partial x^i} + \frac{\partial\delta_7}{\partial x^k} - \frac{\partial\delta_{10}}{\partial x^m}\right)\frac{\partial g^{sm}}{\partial x^l} \\
&+ \frac{1}{2}g_{jr}\Gamma^s_{ik}\left(\nabla_lg_{sm} + \nabla_sg_{lm} - \nabla_mg_{ls}\right)\delta_{11} - \frac{1}{2}g_{jr}\Gamma^s_{il}\left(\nabla_kg_{sm} + \nabla_sg_{km} - \nabla_mg_{ks}\right)\delta_{12} \\
&- \frac{F}{2}g_{js}\Bigg[\left(\frac{\partial}{\partial y^l}\frac{\partial g_{km}}{\partial x^i} + \frac{\partial}{\partial y^l}\frac{\partial g_{im}}{\partial x^k} - \frac{\partial}{\partial y^l}\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^m}\right)\frac{\partial F}{\partial t} + \left(\nabla_ig_{km} + \nabla_kg_{im} - \nabla_mg_{ik}\right)\frac{\partial^2F}{\partial y^l\partial t} \\
&+ \left(\frac{\partial\delta_9}{\partial x^i} + \frac{\partial\delta_7}{\partial x^k} - \frac{\partial\delta_{10}}{\partial x^m}\right)\frac{\partial g^{sm}}{\partial y^l}\Bigg]\Bigg\} + \Phi_{ijkl}\delta_{13}
\end{aligned} \tag{3.16}$$

En développant g^{jl} *sur* $\frac{\partial\Phi_{ijkl}}{\partial t}$ *dans* (3.16), *on obtient :*

$$\begin{aligned}\frac{\partial Ric_{ik}}{\partial t} &= g^{jl}g^{js}\Phi_{ijkl}(i) + g^{jl}\left(\Gamma^s_{ik}\Gamma^r_{ls} - \Gamma^s_{il}\Gamma^r_{ks}\right)(ii) - \delta^l_s\frac{\partial\Gamma^s_{ik}}{\partial y^l}\frac{\partial F}{\partial t}\\ &+ \frac{1}{2}\delta^l_s\left(\nabla_k\nabla_i g_{lm} + \nabla_l\nabla_m g_{ik} - \nabla_k\nabla_m g_{il} - \nabla_l\nabla_i g_{km}\right)\delta_5\\ &+ \frac{1}{2}\delta^l_s\left(\nabla_i g_{lm} + \nabla_l g_{im} - \nabla_m g_{il}\right)\frac{\partial\delta_5}{\partial x^k} + \frac{1}{2}\delta^l_s\frac{\partial g^{sm}}{\partial x^k}\left(\frac{\partial\delta_6}{\partial x^i} + \frac{\partial\delta_7}{\partial x^l} + \frac{\partial\delta_8}{\partial x^m}\right)\\ &+ \frac{1}{2}\delta^l_s\left(\nabla_i g_{km} + \nabla_k g_{im} - \nabla_m g_{ik}\right)\frac{\partial\delta_5}{\partial x^l} - \frac{1}{2}\delta^l_s\left(\frac{\partial\delta_9}{\partial x^i} + \frac{\partial\delta_7}{\partial x^k} - \frac{\partial\delta_{10}}{\partial x^m}\right)\\ &\frac{\partial g^{sm}}{\partial x^l} + \frac{1}{2}\delta^l_r\Gamma^s_{ik}\left(\nabla_l g_{sm} + \nabla_s g_{lm} - \nabla_m g_{ls}\right)\delta_{11} - \frac{1}{2}\delta^l_r\Gamma^s_{il}\Big(\nabla_k g_{sm} + \nabla_s g_{km}\\ &- \nabla_m g_{ks}\Big)\delta_{12} - \frac{F}{2}\delta^l_s\Bigg[\left(\frac{\partial}{\partial y^l}\frac{\partial g_{km}}{\partial x^i} + \frac{\partial}{\partial y^l}\frac{\partial g_{im}}{\partial x^k} - \frac{\partial}{\partial y^l}\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^m}\right)\frac{\partial F}{\partial t} + \Big(\nabla_i g_{km}\\ &+ \nabla_k g_{im} - \nabla_m g_{ik}\Big)\frac{\partial^2 F}{\partial y^l\partial t} + \left(\frac{\partial\delta_9}{\partial x^i} + \frac{\partial\delta_7}{\partial x^k} - \frac{\partial\delta_{10}}{\partial x^m}\right)\frac{\partial g^{sm}}{\partial y^l}\Bigg] + \Phi_{ijkl}\delta_{13}.\end{aligned}$$

3.4 Evolution de la courbure scalaire dans les espaces de Randers

Proposition 3.7. *Soit $F = \alpha + \beta$ une métrique de Randers à un paramètre t sur une variété de Randers M où $\alpha = \sqrt{a_{ij}(t,x)y^iy^j}$ et $\beta = b_i(t,x)y^i$. Alors sous la déformation d'espace-temps, la trace de la courbure d'espace-temps $S = Ric_{ik}g^{ik}$ évolue suivant l'équation :*

$$\begin{aligned}\frac{\partial S}{\partial t} =& g^{js}S + Ric_{ik}(\delta_{10}+\delta_{13}) + g^{ik}\Bigg\{g^{jl}\left(\Gamma^s_{ik}\Gamma^r_{ls} - \Gamma^s_{il}\Gamma^r_{ks}\right)(ii) - \delta^l_s\frac{\partial\Gamma^s_{ik}}{\partial y^l}\frac{\partial F}{\partial t}\\ &+ \frac{1}{2}\delta^l_s\left(\nabla_k\nabla_i g_{lm} + \nabla_l\nabla_m g_{ik} - \nabla_k\nabla_m g_{il} - \nabla_l\nabla_i g_{km}\right)\delta_5\\ &+ \frac{1}{2}\delta^l_s\left(\nabla_i g_{lm} + \nabla_l g_{im} - \nabla_m g_{il}\right)\frac{\partial\delta_5}{\partial x^k} + \frac{1}{2}\delta^l_s\frac{\partial g^{sm}}{\partial x^k}\left(\frac{\partial\delta_6}{\partial x^i} + \frac{\partial\delta_7}{\partial x^l} + \frac{\partial\delta_8}{\partial x^m}\right)\\ &+ \frac{1}{2}\delta^l_s\left(\nabla_i g_{km} + \nabla_k g_{im} - \nabla_m g_{ik}\right)\frac{\partial\delta_5}{\partial x^l} - \frac{1}{2}\delta^l_s\left(\frac{\partial\delta_9}{\partial x^i} + \frac{\partial\delta_7}{\partial x^k} - \frac{\partial\delta_{10}}{\partial x^m}\right)\\ &\frac{\partial g^{sm}}{\partial x^l} + \frac{1}{2}\delta^l_r\Gamma^s_{ik}\left(\nabla_l g_{sm} + \nabla_s g_{lm} - \nabla_m g_{ls}\right)\delta_{11} - \frac{1}{2}\delta^l_r\Gamma^s_{il}\Big(\nabla_k g_{sm} + \nabla_s g_{km}\\ &- \nabla_m g_{ks}\Big)\delta_{12} - \frac{F}{2}\delta^l_s\Bigg[\left(\frac{\partial}{\partial y^l}\frac{\partial g_{km}}{\partial x^i} + \frac{\partial}{\partial y^l}\frac{\partial g_{im}}{\partial x^k} - \frac{\partial}{\partial y^l}\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^m}\right)\frac{\partial F}{\partial t} + \Big(\nabla_i g_{km}\\ &+ \nabla_k g_{im} - \nabla_m g_{ik}\Big)\frac{\partial^2 F}{\partial y^l\partial t} + \left(\frac{\partial\delta_9}{\partial x^i} + \frac{\partial\delta_7}{\partial x^k} - \frac{\partial\delta_{10}}{\partial x^m}\right)\frac{\partial g^{sm}}{\partial y^l}\Bigg]\Bigg\}. \qquad (3.17)\end{aligned}$$

Preuve 3.7.

$$\begin{aligned}\frac{\partial S}{\partial t} &= \frac{\partial (Ric_{ik} g^{ik})}{\partial t} \\ &= Ric_{ik}\frac{\partial g^{ik}}{\partial t} + g^{ik}\frac{\partial Ric_{ik}}{\partial t} \quad . \end{aligned} \tag{3.18}$$

En substituant les relations (3.14) *et* δ_{10} *dans* (3.18)*, on a :*

$$\begin{aligned}\frac{\partial S}{\partial t} =& Ric_{ik}\delta_{10} + g^{ik}\Bigg\{ g^{jl}g^{js}\Phi_{ijkl}(i) + g^{jl}\left(\Gamma^s_{ik}\Gamma^r_{ls} - \Gamma^s_{il}\Gamma^r_{ks}\right)(ii) - \delta^l_s\frac{\partial \Gamma^s_{ik}}{\partial y^l}\frac{\partial F}{\partial t} \\ &+ \frac{1}{2}\delta^l_s\left(\nabla_k\nabla_i g_{lm} + \nabla_l\nabla_m g_{ik} - \nabla_k\nabla_m g_{il} - \nabla_l\nabla_i g_{km}\right)\delta_5 \\ &+ \frac{1}{2}\delta^l_s\left(\nabla_i g_{lm} + \nabla_l g_{im} - \nabla_m g_{il}\right)\frac{\partial \delta_5}{\partial x^k} + \frac{1}{2}\delta^l_s\frac{\partial g^{sm}}{\partial x^k}\left(\frac{\partial \delta_6}{\partial x^i} + \frac{\partial \delta_7}{\partial x^l} + \frac{\partial \delta_8}{\partial x^m}\right) \\ &+ \frac{1}{2}\delta^l_s\left(\nabla_i g_{km} + \nabla_k g_{im} - \nabla_m g_{ik}\right)\frac{\partial \delta_5}{\partial x^l} - \frac{1}{2}\delta^l_s\left(\frac{\partial \delta_9}{\partial x^i} + \frac{\partial \delta_7}{\partial x^k} - \frac{\partial \delta_{10}}{\partial x^m}\right) \\ &\frac{\partial g^{sm}}{\partial x^l} + \frac{1}{2}\delta^l_r\Gamma^s_{ik}\left(\nabla_l g_{sm} + \nabla_s g_{lm} - \nabla_m g_{ls}\right)\delta_{11} - \frac{1}{2}\delta^l_r\Gamma^s_{il}\Bigg(\nabla_k g_{sm} + \nabla_s g_{km} \\ &- \nabla_m g_{ks}\Bigg)\delta_{12} - \frac{F}{2}\delta^l_s\Bigg[\left(\frac{\partial}{\partial y^l}\frac{\partial g_{km}}{\partial x^i} + \frac{\partial}{\partial y^l}\frac{\partial g_{im}}{\partial x^k} - \frac{\partial}{\partial y^l}\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^m}\right)\frac{\partial F}{\partial t} + \Bigg(\nabla_i g_{km} \\ &+ \nabla_k g_{im} - \nabla_m g_{ik}\Bigg)\frac{\partial^2 F}{\partial y^l \partial t} + \left(\frac{\partial \delta_9}{\partial x^i} + \frac{\partial \delta_7}{\partial x^k} - \frac{\partial \delta_{10}}{\partial x^m}\right)\frac{\partial g^{sm}}{\partial y^l}\Bigg] + \Phi_{ijkl}\delta_{13}\Bigg\}. \end{aligned}$$

Par développement, on a :

$$\begin{aligned}\frac{\partial S}{\partial t} =& g^{js}S + Ric_{ik}(\delta_{10} + \delta_{13}) + g^{ik}\Bigg\{ g^{jl}\left(\Gamma^s_{ik}\Gamma^r_{ls} - \Gamma^s_{il}\Gamma^r_{ks}\right)(ii) - \delta^l_s\frac{\partial \Gamma^s_{ik}}{\partial y^l}\frac{\partial F}{\partial t} \\ &+ \frac{1}{2}\delta^l_s\left(\nabla_k\nabla_i g_{lm} + \nabla_l\nabla_m g_{ik} - \nabla_k\nabla_m g_{il} - \nabla_l\nabla_i g_{km}\right)\delta_5 \\ &+ \frac{1}{2}\delta^l_s\left(\nabla_i g_{lm} + \nabla_l g_{im} - \nabla_m g_{il}\right)\frac{\partial \delta_5}{\partial x^k} + \frac{1}{2}\delta^l_s\frac{\partial g^{sm}}{\partial x^k}\left(\frac{\partial \delta_6}{\partial x^i} + \frac{\partial \delta_7}{\partial x^l} + \frac{\partial \delta_8}{\partial x^m}\right) \\ &+ \frac{1}{2}\delta^l_s\left(\nabla_i g_{km} + \nabla_k g_{im} - \nabla_m g_{ik}\right)\frac{\partial \delta_5}{\partial x^l} - \frac{1}{2}\delta^l_s\left(\frac{\partial \delta_9}{\partial x^i} + \frac{\partial \delta_7}{\partial x^k} - \frac{\partial \delta_{10}}{\partial x^m}\right) \\ &\frac{\partial g^{sm}}{\partial x^l} + \frac{1}{2}\delta^l_r\Gamma^s_{ik}\left(\nabla_l g_{sm} + \nabla_s g_{lm} - \nabla_m g_{ls}\right)\delta_{11} - \frac{1}{2}\delta^l_r\Gamma^s_{il}\Bigg(\nabla_k g_{sm} + \nabla_s g_{km} \\ &- \nabla_m g_{ks}\Bigg)\delta_{12} - \frac{F}{2}\delta^l_s\Bigg[\left(\frac{\partial}{\partial y^l}\frac{\partial g_{km}}{\partial x^i} + \frac{\partial}{\partial y^l}\frac{\partial g_{im}}{\partial x^k} - \frac{\partial}{\partial y^l}\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^m}\right)\frac{\partial F}{\partial t} + \Bigg(\nabla_i g_{km} \\ &+ \nabla_k g_{im} - \nabla_m g_{ik}\Bigg)\frac{\partial^2 F}{\partial y^l \partial t} + \left(\frac{\partial \delta_9}{\partial x^i} + \frac{\partial \delta_7}{\partial x^k} - \frac{\partial \delta_{10}}{\partial x^m}\right)\frac{\partial g^{sm}}{\partial y^l}\Bigg]\Bigg\}. \end{aligned}$$

CONCLUSION GENERALE

Dans ce travail, nous avons développé les équations d'évolution des courbures associées à une famille des métriques finslériennes $\{g(x, y, t)\}_{t\in[0,T[}$ d'abord sous le flot de Yamabe normalisé et puis sous la déformation de courbure de l'espace-temps sur les espaces de Randers.

Ces équations d'évolution sont les suivantes :

— Equations d'évolution de la courbure totale et de l'espace-temps sous le flot de Yamabe non normalisé, trouvées dans les **Propositions** 2.2 et 2.3 respectivement ;

— Equations d'évolution de la courbure totale,de la courbure d'espace-temps et courbure scalaire sous la déformation de courbure de l'espace-temps, trouvées dans les **Propositions** 3.5, 3.6 et 3.7 respectivement.

Maintenant que nous avons les formes locales des équations d'évolution sur les espaces de Randers, donc dans la suite, nous traiterons l'existence et l'unicité des solutions de ces équations sur les espaces de Randers.

Bibliographie

[1] David Bao, S-S Chern and Zhongmin Shen. *An introduction to Riemann-Finsler geometry*, volume 200. Springer Science & Business Media 2012.

[2] S Azami and A Razavi, *Existence and uniqueness for solution of Ricci flows on finsler manifolds*, Int.J. Geom. Méthods Mod Physics, pp 1-21,2013 (`Https://doi.org/10.1142/S0219887812500910`).

[3] R.S Hamilton, *Three manifolds with positive Ricci curvature*, J. Diff. Geom, 17,no 2,255306,1982.

[4] R. Djelid, *Déformations conformes des variétés de Finsler-Ehresmann*, Thèse numéro 5032, Ecole polytechnique Fédérale de Lausanne, pp.1-103,2011.

[5] G. Catino and C. Mantegazza, *The evolution of the Wegl tensol under the Ricci flow*, Ann. Inst ; Fourier, Grenoble, 61,4,pp 1407-1435,2011

[6] D. Bao,S.S. Chern and Z ; Shern, *An Introduction to Riemannian-finsler Geometry*, Springer-verlang New York. pp. 1-192,2000.

[7] D. Bao and C. Robles, *Ricci and Flog curvatures in finsler Geometry*, MSRI Publication, vol 50, 2004.

[8] Ratiba Djelid. *Déformations conformes des Variétés de Finsler-Ehresmann*. Phd Thesis, very nicht ermittelbar, 2011.

[9] S.S. Chern and Z. Shen, *Riemannian-Finsler Geometry, Nankai Tracts in Mathematics*, word scientific Publishing, Singapore, 6.(2006), 31-63.

[10] P. Guan and G. Wang, *A fully nonlinear conformal flow on locally conformally flat manifolds*, J. reine und angew. Math., 557, (2003), 219-238

[11] Y. Ge and G. Wang, *On fully nonlinear Yamabe problem*, Ann. Sci. Ecole Noramale Sup,. 39 (2006) 569-598

[12] Y. Ge and G. Wang, *On a quotient conformal equation*, to appear in Int. Math. Res Not.IMRN 2007, no.6, art. ID rnmo19, 32 pp.