

2024-03

Modélisation spatio-temporelle de la pollution de l'air.

Irakoze, Elvis

UB, FS

<https://repository.ub.edu.bi/handle/123456789/2013>

Téléchargé depuis le dépôt institutionnel officiel de l'Université du Burundi

UNIVERSITE DU BURUNDI
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
CENTRE DE RECHERCHE EN MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE



**MODELISATION SPATIO-TEMPORELLE DE LA
POLLUTION DE L'AIR**

Par :

IRAKOZE Elvis

Mémoire présenté et défendu publiquement en vue de l'obtention du
Diplôme de Master en Mathématiques fondamentales et appliquées.
Option : MATHÉMATIQUES FONDAMENTALES ET APPLIQUÉES

Sous la direction de :

Dr Denis NKURUNZIZA

Bujumbura, Mars 2024

Les membres du Jury

Dr Menus NKURUNZIZA : Président

Dr Janvier Pesser NTAHOMVUKIYE : Secrétaire

Prof Servat NYANDWI : Membre

Dr Denis NKURUNZIZA : Directeur

Dédicace

A mes parents ;

A mes frères et sœurs ;

A la famille Rémy GAHUNGU ;

A mes amis ;

A tous ceux qui me sont chers ;

Je dédie ce mémoire.

Remerciements

Avant tout, je voudrais signaler que ce travail n'est pas le fruit de mes seuls efforts raison pour laquelle je voudrais présenter mes sentiments de reconnaissances à toute personne qui a contribué à sa réalisation. Mes vifs remerciements sont adressés à Dr Denis NKURUNZIZA, de l'Université du Burundi, qui malgré ses multiples obligations, a accepté de diriger ce mémoire. Ses précieux conseils, ses disponibilités, son rigueur scientifiques et ses suggestions m'ont été d'une grande utilité. Qu'ils trouvent ici l'expression de ma profonde et respectueuse gratitude. Je remercie également tous les membres du jury pour le temps qu'ils ont consacré à lire ce travail ; leurs précieux commentaires pour son amélioration me seront d'une importance capitale.

Mes sentiments de reconnaissance vont également à l'endroit de tous ceux qui ont contribué à ma formation depuis l'école primaire jusqu'à l'Université du Burundi et plus particulièrement aux Professeurs de la Faculté des Sciences surtout ceux du Département de Mathématiques. Qu'ils reçoivent ici ma profonde gratitude pour m'avoir doté d'une formation tant humaine que scientifique. J'exprime vivement ma reconnaissance envers ma famille et plus particulièrement à mon père, à ma mère, à mes frères et soeurs, à ma famille du coeur de Rémy GAHUNGU , à mon ami Msc Egide NDAMUZI pour leur amour, leur patience, leur confiance, leur encouragement, leurs conseils ainsi que pour leur soutien inconditionnel depuis l'école primaire à nos jours. Voyez à travers ce travail le fruit de vos efforts.

Résumé

L'objectif de ce mémoire de Master est d'exploiter un modèle mathématique qui détermine la concentration d'un polluant au point et au moment donnés suivant les phénomènes de transport d'advection et de diffusion. L'équation d'advection-diffusion que nous avons utilisée a été discrétisée avec la méthode des volumes finis afin de la résoudre numériquement. La simulation numérique est réalisée avec PYTHON. Les résultats obtenus sont conformes et vérifient les informations de la bibliographie. Cependant, ce travail peut être amélioré en variant les paramètres et en tenant compte du terme source de l'équation.

Mots clés : Advection, Diffusion, Équation d'advection-diffusion, volumes finis.

Abstract

The aim of this Master's thesis is to exploit a mathematical model that determines the concentration of a pollutant at a given point and time, based on advection and diffusion transport phenomena. Concentration of a pollutant at a given point and time according to the advection and diffusion transport phenomena. The advection-diffusion equation used was discretised using the finite volume method in order to solve it numerically. The numerical simulation was carried out using PYTHON.

The results obtained are consistent with and verify the information in the bibliography. However, this work can be further improved by varying the parameters and taking into account the source term of the equation.

Key words : Advection, Diffusion, Advection-diffusion equation, finite volumes.

Table des matières

Les membres du Jury	i
Dédicace	ii
Remerciements	iii
Résumé	iv
Abstract	v
Table des matières	vi
Liste des tableaux	ix
Liste des figures	x
Liste des sigles et Abréviations	xi
Avant-propos	xii
Introduction Générale	1
0.1 Problématique	4
0.2 Objectif général	5
0.3 Objectifs Spécifiques	5
0.4 Intérêt du travail	5
0.5 Méthodologie du travail	6

1	Revue de la littérature	8
1.1	Généralités	8
1.2	Concentration d'une substance dans un fluide	9
1.3	Flux	9
1.3.1	Flux d'advection	10
1.3.2	Flux de la diffusion	10
1.4	L'advection	11
1.4.1	Définition d'advection	11
1.4.2	Types d'advection	11
1.5	La diffusion	12
1.5.1	Définition de la diffusion	12
1.5.2	Types de diffusion	13
1.6	Comparaison entre l'advection et la diffusion	14
1.7	Applications des phénomènes d'advection-diffusion	15
1.8	Aspect théorique d'advection- diffusion :	15
1.8.1	Définition	15
1.8.2	Equation d'advection - diffusion	15
1.8.3	Advection pure	16
1.8.4	Diffusion pure	16
1.9	Méthodes numériques pour la résolution de l'équation d'advection-diffusion	17
1.9.1	Méthode des différences finies	17
1.9.2	Méthode des volumes finis	18
1.9.3	Méthode des éléments finis	19
1.10	Les avantages et les inconvénients des différentes méthodes :	20
2	Approche de volumes finis et par la méthode des différences finis au problème d'advection-diffusion	21
2.1	Introduction	21
2.2	Avantages de volumes finis	22
2.3	Mallaige et discrétisation par la méthode des volumes finis	23
2.4	Discrétisation de l'équation d'advection et de diffusion par la méthode des différences finis	31

3 Résultats et Discussions	34
4 Conclusion et recommandations	40
Bibliographie	42
A Approximation par les schémas aux différences finis de l'équation d'advection diffusion	46
A.1 Problème continu	46
A.2 Existence et unicité de la solution	47
A.3 Principe du maximum	47
A.4 Problème discret	47
A.4.1 Discrétisation	47
A.4.2 Schéma explicite décentré	48
A.4.3 Schéma explicite centré	52

Liste des tableaux

1	Les polluants de l'air	4
1.1	Le tableau de comparaison des méthodes numériques	20

Liste des figures

1.1	Schéma simplifié du transport des polluants [Guidotti Sylvie, 2018]	10
1.2	Advection des fumées par le vent [Deo Mwelwa, 2020].	11
1.3	Diffusion positive [Karima and seddik Leila, 2022].	12
1.4	Diffusion negative [Karima and seddik Leila, 2022]	12
1.5	Diffusion moléculaire [William, 1904].	13
2.1	Maillage [Somia, 2018]	23
3.1	Variation spatiale $Pe=0.5(MVF)$	35
3.2	Variation temporelle pour $Pe=0.5(MVF)$	35
3.3	Variation spatiale $Pe=12.5(MVF)$	36
3.4	Variation temporelle pour $Pe=12.5(MVF)$	36
3.5	Variation temporelle pour $Pe=2(MVF)$	37
3.6	Variation temporelle pour $Pe=2(MVF)$	37
3.7	Variation de concentration par MDF	39
3.8	Variation de concentration par MDF	39

Liste des sigles et abréviations

- AVC : Accident Vasculaire Cérébral
AD : Advection et Diffusion
BPCO : Bronchopneumopathie Chronique Obstructive
CFL : Courant-Friedrichs-Lewy
EDP : Equations Aux Dérivées Partielles
HAP : Hydrocarbures Aromatique Polycyclique
MDF : Méthodes des Différences Finis
MEF : Méthodes des Eléments Finis
MVF : Méthodes des Volumes Finis
OMS : Organisation Mondiale de la Santé
ppb : parties par billion
ppm : parties par million
VC : Volume de Contrôle
WHO : World Health Organization

Avant-propos

Ce mémoire est un travail de fin d'étude de master en sciences mathématiques fondamentales et appliquées. Il est centré sur l'exploitation du modèle mathématique qui détermine la concentration d'un polluant au point et au moment donnés suivant les phénomènes de transport d'advection et de diffusion, son objectif est de résoudre numériquement, de simuler en langage python l'équation d'advection-diffusion par la méthode des volumes finis et de faire une interprétation des résultats de simulations numériques. Ce travail contribue à améliorer non seulement l'espérance de vie, mais aussi la qualité de vie et le bien-être des individus. De plus ce travail nous aide de prendre des mesures adéquates sur le transfert des polluants. Il doit donc à la fois permettre de mieux qualifier et quantifier la pollution atmosphérique (quels polluants, dans quelle proportion, quelle répartition géographique, etc) comme de mieux comprendre ses effets sur nos organismes. Ce travail s'articule autour de quatre chapitres principaux. Le premier chapitre présente un état de l'art sur l'équation d'advection-diffusion et les différentes méthodes numériques employées pour sa résolution, notamment les volumes finis, les différences finies et les éléments finis. Le deuxième chapitre se concentre sur la résolution numérique de l'équation d'advection-diffusion par deux méthodes distinctes : la méthode des volumes finis et la méthode des différences finies. Les résultats obtenus par simulation numérique seront ensuite présentés et analysés en détail dans le troisième chapitre. Le quatrième et dernier chapitre synthétise les conclusions de ce travail et propose des recommandations pour des recherches futures.

Introduction Générale

La pollution de l'air a un impact majeur sur le processus d'évolution des planètes en empêchant la photosynthèse dans de nombreux cas, avec des graves conséquences sur la purification de l'air que nous respirons. L'accumulation de gaz dans l'atmosphère génère des problèmes environnementaux aux conséquences tristement connues : pluies acides, diminution de couche d'Ozone, réchauffement climatiques, effet de serre etc. La pollution de l'air a des nombreuses conséquences sur l'environnement et elle est responsable de la détérioration de la santé humaine [Perez, 2020]. Environ 2,4 milliards de personnes dans le monde (soit environ un tiers de la population mondiale) font la cuisine à l'aide de foyers ouverts ou de fourneaux inefficaces utilisant du pétrole, de la biomasse (bois, déjections animales, résidus agricoles) et du charbon, ce qui engendre une pollution nocive à l'intérieur des habitations [Héroux, 2012].

La pollution de l'air à l'intérieur des habitations a été responsable d'environ 3,2 millions de décès par an, en 2020, dont plus de 237 000 décès d'enfants de moins de 5 ans [Héroux, 2012]. La pollution de l'air à l'intérieur des habitations entraîne des maladies non transmissibles, notamment :[WHO, 2022]

- l'accident vasculaire cérébral (AVC),
- la cardiopathie ischémique,
- la bronchopneumopathie chronique obstructive (BPCO),
- le cancer du poumon.

Les femmes et les enfants, généralement responsables des tâches ménagères telles que la cuisine, la collecte du bois de chauffage, supportent la plus forte charge pour la santé émanant de l'utilisation de combustibles et de technologies polluants dans les maisons [WHO, 2022]. En 2019, on estimait à 4,2 millions le nombre de décès prématurés provoqués par la pollution de l'air ambiant (extérieur) dans le monde. Les effets combinés de la pollution de l'air ambiant et de la pollution de l'air intérieur sont associés à 6,7 millions de décès prématurés par an [Héroux, 2012].

En 2019, la région africaine a enregistré environ 639000 décès imputables à la pollution de l'air à l'intérieur des habitations (123 décès pour 100 000 habitants), dont 47 % de femmes

et 25 % d'enfants de moins de cinq ans. Sur ces 639 000 décès, plus de 50 % étaient dus à des infections des voies respiratoires inférieures, 21% à des cardiopathies ischémiques et 20 % à des accidents vasculaires cérébraux. Les effets combinés de la pollution de l'air ambiant et de la pollution de l'air à l'intérieur des habitations sont associés à environ 834 000 décès prématurés par an dans la région africaine. Selon les estimations, la pollution de l'air ambiant (extérieur) aurait causé environ 339 000 décès prématurés dans la région africaine en 2019 [iAHO, 2023]. L'on estime de même que la pollution de l'air à l'intérieur des habitations a causé environ 639 000 décès dans la région africaine la même année. Environ 80 % de la population de la Région africaine cuisine à l'aide de feux ouverts ou de fourneaux inefficaces alimentés au kérosène, à la biomasse (bois, déjections animales et déchets agricoles) et au charbon, créant une pollution nocive de l'air à l'intérieur des habitations [Pezzolo and Nefussi, 1971].

Au Burundi, la pollution atmosphérique constitue l'un des plus grands risques pour la santé liée à l'environnement. En réduisant les niveaux de pollution atmosphérique, les pays peuvent réduire le fardeau des maladies dues aux accidents vasculaires cérébraux, aux maladies cardiaques, au cancer du poumon et aux maladies respiratoires chroniques et aiguës, y compris l'asthme. Des politiques et des investissements en faveur de transports plus propres, de logements, d'une production d'électricité et d'activités industrielles écoénergétiques, et d'une meilleure gestion des déchets municipaux réduiraient les principales sources de pollution de l'air ambiant [iAHO, 2023]. L'accès à une énergie domestique propre réduirait aussi considérablement la pollution de l'air ambiant dans la Région. Le Burundi comme d'autres pays dans le monde est affecté par l'incidence de la pollution de l'air sur la santé de la population et sur l'environnement. D'après la Politique Nationale d'Assainissement du Burundi, la pollution d'origine domestique est la plus importante et la plus dangereuse pour la santé de la population. Dans le monde, la pollution domestique entraîne environ 3,8 millions de décès prématurés chaque année, la grande majorité d'entre eux dans les pays en développement [Amegah and Jaakkola, 2016].

Au Burundi, un tiers de la population burundaise vit quotidiennement en contact d'une atmosphère saturée de mauvaises odeurs et contenant des germes et d'autres éléments pathogènes liés à l'inexistence ou au non-respect des normes sanitaires et environnementales. Les conséquences se chiffrent en milliers de décès par an. La Politique Nationale d'Assainissement du Burundi précise les sources de la pollution en général. Elles sont surtout d'origine domestique. Ce sont les combustibles de biomasse et du bois, la bouse de vache, les résidus agricoles, ainsi que le charbon employé pour la cuisson et le chauffage. D'après l'Organisation Mondiale de la Santé (OMS), le Burundi fait partie des 21 pays dans le monde les plus touchés par la pollution de l'air à l'intérieur des habitations, qui est à

l'origine de près de 5 % de la mortalité et de la morbidité. La pollution de l'air est un tueur silencieux qui rase à petit feu la population . Il est de fait primordial que tous les concernés conjuguent les efforts pour limiter voire éliminer les sources de la pollution de l'air et de la pollution domestique en particulier [Shairsingh et al., 2023]. Les particules fines, les Oxydes d'azote, le Dioxyde de soufre, l'ozone, Monoxyde de carbone, Composés organique volatils, hydrocarbures aromatique polycyclique(HAP) et les Métaux(le plomb, l'arsenic, le cadmium et le nickel) liées aux phénomènes d'éruptions volcaniques, aux feux de forêts, à l'érosion des sols, aux émissions de pollens, et aux transports transfrontaliers de particules désertiques, le transport engendre la combustion des matières fossiles comme le charbon, le pétrole, les sables bitumineux, les schistes bitumineux, l'industries, le bâtiment et les travaux publics engendrent la combustion de matières fossiles, l'incinération de déchets, les carrières, les cimenteries, la métallurgie ou bien le passage des véhicules sur des chaussées empoussiérées, le résidentiel et le tertiaire avec le chauffage au bois, l'agriculture avec les travaux de labours, de récolte, la production et la distribution d'énergie avec les centrales thermiques sont les principaux sources de pollution de l'air [Mardonez Balderrama, 2023].

TABLEAU 1 – Les polluants de l'air

Gaz Toxique	Coefficient de Diffusion $D(m^2/s)$	Quantité minimale toxique	Effets sur la santé
Particules fines	$2.0 * 10^{-6} m^2/s$	$25 \mu g/m^3$	aggravation de l'asthme et d'autres maladies respiratoires, augmentation du risque de cancer du poumon
Dioxydes d'azote	$1.96 * 10^{-5} m^2/s$	1 ppm	-irritation des yeux, du nez et de la gorge, -difficultés respiratoires
Dioxyde de soufre	$1,46 * 10^{-5} m^2/s$	5 ppm (parties par million)	-Troubles cardiaques ; -Augmentation du risque ; de bronchite chronique ; -Difficultés respiratoires
Ozone(O_3)	$1.62 * 10^{-5} m^2/s$	100 ppb (Partie par billion)	irritation des yeux, du nez et de la gorge, difficultés respiratoires
Dioxyde de carbone	$1.56 * 10^{-5} m^2/s$	5 000 ppm	maux de tête, vertiges, nausées, fatigue
Composés organiques volatils : -Méthane (CH_4) -Éthane (C_2H_6)	$1,96 * 10^{-5} m^2/s$ $1,38 * 10^{-5} m^2/s$		-Dommages au foie et aux reins -Maux de tête -Fatigue
-Benzène (C_6H_6) Monoxyde de carbone (CO)	$0,81 * 10^{-5} m^2/s$ $1.97 * 10^{-5} m^2/s$	1 ppm 35 ppm	maux de tête, vertiges, nausées, fatigue, perte de conscience

[Li, 2020], [De Merten, 2020]

0.1 Problématique

La pollution de l'air est induite par la présence dans l'atmosphère des substances toxiques, principalement produites par les activités humaines et naturelles (Éruptions volcaniques, Feux de forêt, Émissions de poussière, Émissions naturelles de gaz). Ces substances et produits chimiques génèrent une quantité de phénomène et conséquences pour les écosystèmes et les êtres vivants qui peuplent notre planète. La pollution de l'air touche tout le monde et tous les secteurs : les animaux, les cultures, les villes, les forêts, les écosystèmes aquatiques, etc. La pollution de l'air a des nombreuses conséquences sur l'environnement et sur la santé humaine. Elle peut notamment causer des problèmes cardiovasculaires, des allergies, des maladies des bronches, des cancers du poumon ou de la peau, des problèmes de vision, des maladies du sang, des problèmes dans le développement mental de l'enfant etc.

0.2 Objectif général

L'objectif général de ce travail est d'exploiter un modèle mathématique pour déterminer la concentration d'un polluant au point et au moment donnés.

0.3 Objectifs Spécifiques

Les Objectifs spécifiques du travail sont :

-résoudre numériquement l'équation d'advection-diffusion par la méthode des volumes finis.

-simuler en langage python l'équation d'advection-diffusion par la méthode des volumes finis.

-valider les résultats de simulations numériques.

0.4 Intérêt du travail

Ce travail a comme intérêt d'établir des prévisions de l'évolution du temps, il est également appliquée dans la prévision de la qualité de l'air ou de plusieurs risques naturels d'origine atmosphérique. Il nous permet de comprendre la nature et le monde dans lequel nous vîmes. Ce travail a une importance de prédire des faits et des phénomènes. Il nous aidera aussi dans la prise de décisions dans notre vie personnelle et dans le domaine public. Ce travail contribue à améliorer non seulement l'espérance de vie, mais aussi la qualité de vie et le bien-être des individus. De plus ce travail nous aide de prendre des mesures adéquates sur le transfert des polluants. Il doit donc à la fois permettre de mieux qualifier et quantifier la pollution atmosphérique (quels polluants, dans quelle proportion, quelle répartition géographique, etc.) comme de mieux comprendre ses effets sur nos organismes. Si la population n'est pas informée afin pour prendre des mesures adéquates sur le transfert des polluants, il y aura beaucoup de conséquences dans différents domaines :

- l'économie et le social : Un exemple pour comprendre. Quelqu'un brule ses déchets à l'air libre, en campagne, proche d'habitations c'est interdit, mais c'est un sport national chez nous si des enfants de moins de 5ans doivent aller chez le médecin parce qu'il est malade à cause de la pollution de l'air, et bien les dépenses de santé seront payées par l'Etat et non par celui qui a brulé ses déchets. S'il se peut qu'une de ces personnes soit malade au point de ne pas pouvoir aller travailler dans son entreprise, c'est cette dernière qui va en partie en subir les conséquences.

- la santé : la pollution de l'air est responsable de la détérioration de la santé humaine. Elle peut notamment causer des problèmes cardiovasculaires, des allergies, des maladies des bronches, des cancers du poumon ou de peau, des problèmes de vision, des maladies du sang, des problèmes dans le développement mental de l'enfant.
- l'environnement : L'accumulation de gaz dans l'atmosphère génère des problèmes environnementaux aux conséquences tristement connues : pluies acides, diminution de couche d'Ozone, réchauffement climatiques, effet de serre, etc. La pollution de l'air contribue à la formation de la pluie acides, des précipitations atmosphériques sous forme de pluie, de gel, de neige ou brouillard, qui sont libérées lors de la combustion de combustibles fossiles et transformées par contact avec la vapeur d'eau dans l'atmosphère. Les pluies acides modifient la qualité de produits chimiques présents dans les sols et l'eau dure, affectant ainsi les chaînes alimentaires.

0.5 Méthodologie du travail

Différents phénomènes sont responsables du transport de la matière. La matière peut être transportée par le mouvement du fluide (transport advectif), par diffusion de zones concentrées vers des zones de concentrations plus faibles (transport diffusif) ou par d'autres phénomènes.

L'advection est toujours associée à un mouvement macroscopique des particules fluides. C'est très différent de la diffusion qui est un mouvement microscopique à l'échelle des atomes et des molécules. D'où une intensité de transfert beaucoup plus importante pour l'advection que pour la diffusion [Sebei, 2013].

Exemple :

Tous les matins, la seule solubilisation du morceau de sucre dans votre tasse de café met en œuvre différents mécanismes de transfert de matière qui font que la dissolution du morceau de sucre est plus ou moins rapide. On peut attendre que le café soit sucré par le simple fait de la diffusion qui dans ce cas est isotropique. Les particules du sucre vont dans toutes les directions avec la même intensité. Il n'y a pas de raison pour qu'une direction soit privilégiée par rapport à une autre (sauf près des parois solides). Mais si on entre en action avec une petite cuillère, le café sera sucré beaucoup plus rapidement et le transport des particules va suivre la direction de l'écoulement. D'où la particularité des schémas d'advection. Ils sont étroitement liés à la direction de l'écoulement [Abdelaaziz, 2016].

C'est ce qui rend par exemple le schéma 'upwind' très stable bien qu'il est seulement de

premier ordre en termes de précision. Il utilise l'information qui vient de la direction de l'écoulement et c'est très logique, puisqu'avec l'écoulement, cette valeur arrivera au point P dans un laps de temps. Par contre, le schéma centré, bien qu'il soit plus précis, peut donner des valeurs non réalistes. Ce qui influe sur la stabilité du schéma. Il faut garder dans l'esprit le fait que s'il y a un courant d'air qui vient de votre gauche et que dans cette direction il y a une source de pollution, vous serez inévitablement polluer par cette source. Alors que si l'air vient de droite vous serez épargné. Donc si vous voulez prédire votre situation dans un laps de temps, il faut prendre en considération l'information dans la direction inverse de celle de l'écoulement. Tous les autres schémas sont basés sur ce principe tout en utilisant des recettes de cuisine pour proposer des schémas plus ou moins précis et/ou stable. On considère une cimenterie qui dégage une poussière toxique, qui va se transporter avec le vent. On cherche à modéliser l'impact des phénomènes d'advection et de diffusion dû à la propagation du polluant dans l'espace (plan 2D), et le temps [Bassouidi et al., 2022].

Chapitre 1

Revue de la littérature

Ce chapitre consiste à explorer les travaux déjà effectués dans ce domaine pour pouvoir montrer la contribution de notre recherche pour les phénomènes d'advection et de diffusion de la concentration d'un polluant dans un écoulement permanent bidimensionnel par la méthode numérique. En termes simples, la mécanique des fluides de l'environnement est l'étude des processus naturels qui modifier les concentrations. Les phénomènes de transport, tels que les transferts de chaleur et de masse, jouent un rôle très important dans la vie humaine [Elharchaoui, 2018]. Les gaz et les liquides nous entourent, les flux à l'intérieur de notre corps, et ont une influence profonde sur l'environnement dans lequel nous vivons. Les fluides s'écoulent et produisent des vents, des pluies, des inondations et des ouragans. Les processus de transport sont responsables des variations de température et du transport des polluants dans l'air, l'eau et le sol. Lorsqu'il s'agit du transport de polluants, on distingue généralement deux processus, l'advection et la diffusion.

1.1 Généralités

Tout d'abord, reprenons les définitions simples. Les transports d'un point à un autre se font soit par advection soit par diffusion.

Imaginons des poissons dans une rivière. Le mouvement général de l'eau assure le transport advectif des poissons.

Le mouvement des poissons par rapport à l'eau est le transport diffusif (figure 2.1).

L'advection fait référence au processus où la substance se déplace dû au mouvement du fluide porteur comme le vent, les principales composantes du vent sont horizontales.

Le vent est d'ailleurs, et de loin, la source essentielle du transport horizontal des polluants. Tandis que la diffusion est le transport aléatoire de la matière des zones de hautes concentrations vers les zones plus faibles.

De façon générale, l'advection est le transport de chaleur, de matière, etc à la vitesse du

milieu environnant et la diffusion est le transport relatif par rapport au milieu environnant en mouvement [Djafer, 2016].

1.2 Concentration d'une substance dans un fluide

La quantité d'intérêt fondamental en matière d'environnement mécanique des fluides est la concentration. Dans l'usage commun, le terme concentration exprime une mesure de la quantité d'une substance dans un fluide. Mathématiquement, la concentration U est le rapport de la masse M d'une substance au volume du fluide [Mwelwa et al., 2020] :

$$U = \frac{\text{Masse de la substance}}{\text{Volume du fluide}} = \frac{M}{V} (\text{Kg/m}^3) \quad (1.1)$$

1.3 Flux

En modélisation de la pollution de l'air, le flux est utilisé pour décrire le mouvement des polluants dans l'atmosphère. Les polluants peuvent être émis par des sources naturelles, telles que les volcans ou les feux de forêt, ou par des sources anthropiques, telles que les activités industrielles, les transports ou le chauffage domestique.

Les modèles de flux de pollution de l'air utilisent des équations différentielles partielles pour décrire le mouvement des polluants dans l'atmosphère. Ces équations prennent en compte les facteurs suivants :

- Les sources d'émissions de polluants
- Les forces qui agissent sur les polluants, telles que la gravité, le vent et la turbulence
- Les processus chimiques et physiques qui affectent les polluants, tels que la dispersion, la transformation et la sédimentation.

Les modèles de flux de pollution de l'air sont utilisés pour une variété d'applications, notamment :

- La prévision de la qualité de l'air
- L'évaluation de l'impact des politiques de réduction de la pollution
- L'identification des zones à risque de pollution de l'air

Les modèles de flux de pollution de l'air sont des outils puissants qui peuvent être utilisés pour comprendre et gérer la pollution de l'air. Ils permettent de prédire la distribution

des polluants dans l'atmosphère, d'évaluer l'impact de la pollution sur la santé humaine et l'environnement, et d'identifier les mesures les plus efficaces pour réduire la pollution [Bokil and Gibson, 2007].

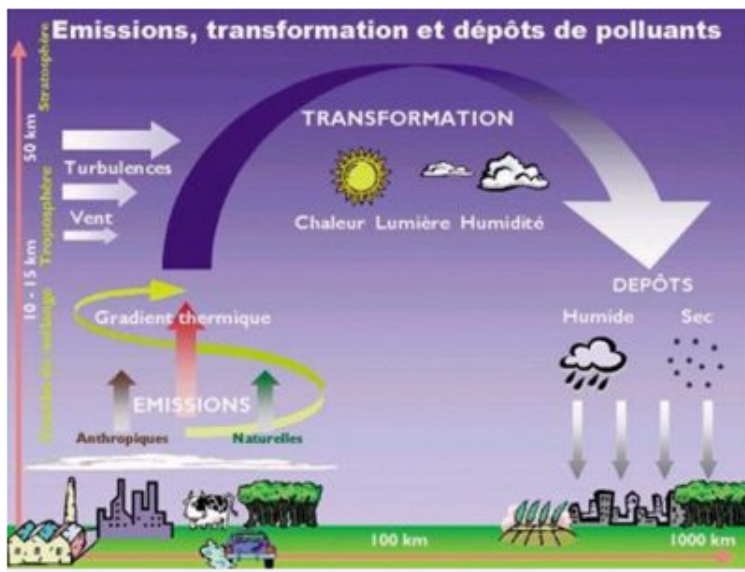


FIGURE 1.1 – Schéma simplifié du transport des polluants [Guidotti Sylvie, 2018]

1.3.1 Flux d'advection

Le flux d'advection est un terme utilisé en physique et en modélisation pour décrire le transport d'une propriété d'un fluide (comme la chaleur, la masse, la concentration d'un contaminant) par le mouvement du fluide lui-même. Imaginez une rivière transportant des sédiments en aval ; le flux d'advection, dans ce cas, serait le mouvement des sédiments avec le courant de la rivière. La vitesse de l'advection est donc la vitesse locale de la matière. Le flux advectif est le contenu en chaleur de la masse transportée par le matériel advecté par unité de temps, c'est à dire le produit de la vitesse d'advection par le contenu en chaleur de l'élément de volume.

1.3.2 Flux de la diffusion

Le flux conductif de la chaleur est indépendant du mouvement :

il est proportionnel au gradient de température (loi de Fourier ou, pour la diffusion la loi de Fick). Le flux total de chaleur est la somme du flux conductif et du flux advectif.

J'ai ignoré bien sûr partout le transfert radiatif [Kilic et al., 2021]. Je trouve très lumineuse l'idée simple que la vitesse est le flux advectif de volume, ce qui se démontre aisément : le flux de masse devient le flux de volume fois la masse volumique, le flux

advectif de chaleur devient le flux de masse fois la quantité de chaleur par unité de masse, etc.

1.4 L'advection

1.4.1 Définition d'advection

L'advection est le transfert d'une quantité (scalaire ou vecteur) d'un élément donné (par exemple, chaleur, énergie interne, élément chimique, charge électrique) à travers le mouvement (donc la vitesse) du milieu environnant entrainer par une vitesse U . Nous prenons comme exemple : le transfert des fumées émises par l'usine à l'aide d'air (vent) et le polluant est dispersé par le mouvement de l'air (figure 2.3), c'est une advection due au mouvement de l'air.

Voici des exemples concrets qui expliquent la diffusion :

- Les particules de pollution de l'air transportées par le vent.
- Les polluants de l'eau transportés par les courants océaniques.
- Les particules de poussière transportées par les vents de sable.

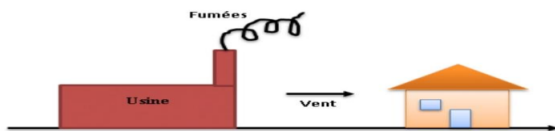


FIGURE 1.2 – Advection des fumées par le vent [Deo Mwelwa, 2020].

1.4.2 Types d'advection

1.4.2.1 Advection positive

La figure (2.4) ci-dessous montre une advection positive, où des valeurs plus élevées d'une variable (la température dans ce cas) sont transformées vers des valeurs plus basses. L'effet net de l'advection positive est d'augmenter la valeur variable de la direction du vent.

1.4.2.2 Advection negative

La figure(2.5) montre une advection négative, car les valeurs inférieures d'une variable (la température dans ce cas) sont transformées vers les valeurs supérieures de la même

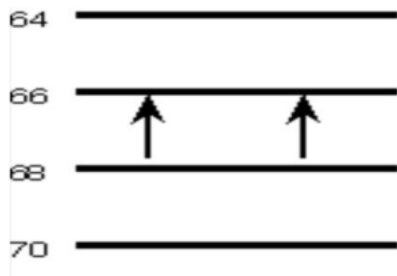


FIGURE 1.3 – Diffusion positive [Karima and seddik Leila, 2022].

variable. L'effet net de l'advection négative est de réduire la valeur variable de la direction du vent.

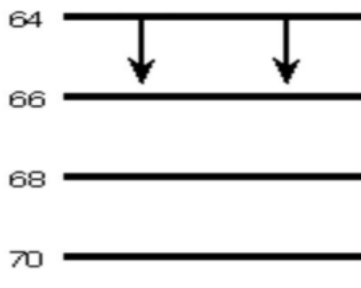


FIGURE 1.4 – Diffusion negative [Karima and seddik Leila, 2022]

1.5 La diffusion

1.5.1 Définition de la diffusion

C'est un phénomène microscopique de nature aléatoire complètement différent de l'advection. Il détermine la direction naturelle du système figure 5 Un exemple connu est la diffusion d'un parfum dans une chambre vide. Si une bouteille de parfum est ouverte et laissée évaporer dans l'air, rapidement on va sentir ce parfum dans la chambre entière. Il est également considéré comme le processus de transfert fondamental dans la mécanique des fluides environnementale [Philibert et al., 2002].

Voici des exemples concrets qui expliquent l'advection :

- La fumée d'une cigarette qui se disperse dans l'air.
- Le parfum d'une fleur qui se répand dans une pièce.
- Les odeurs d'un feu de forêt qui se propagent dans la région.

La diffusion a deux principales propriétés :

- une nature aléatoire.
- Le transport est de la région de fortes concentrations vers les faibles concentrations.

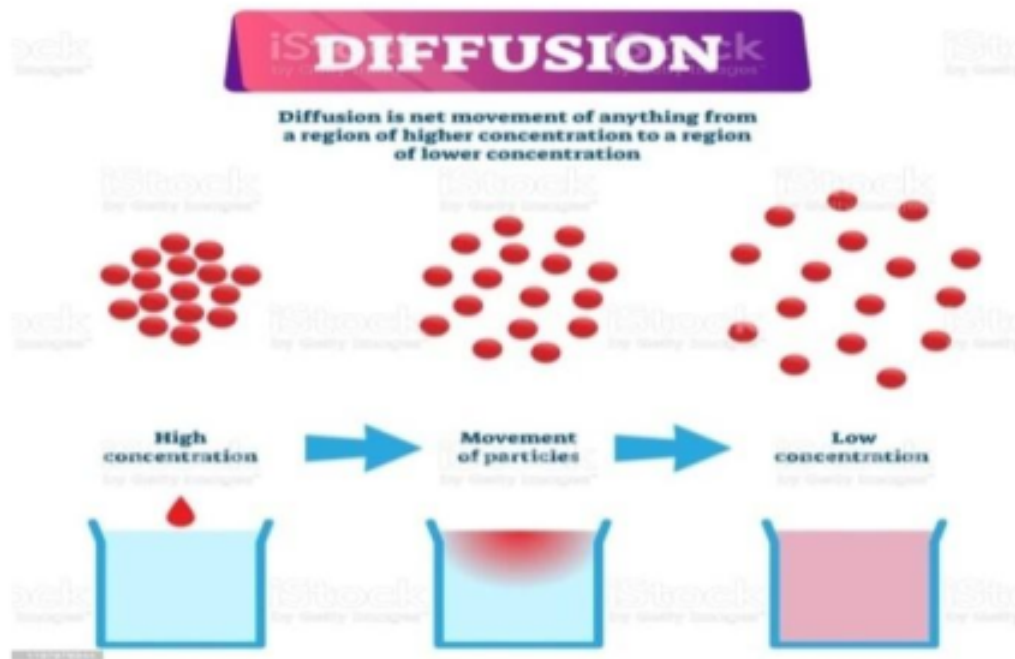


FIGURE 1.5 – Diffusion moléculaire [William, 1904].

1.5.2 Types de diffusion

1.5.2.1 Diffusion simple

C'est le mouvement des molécules le long d'un gradient de concentration sans la participation directe d'autres molécules. Cela peut impliquer la propagation de matériaux à travers un milieu ou le transport de particules à travers des membranes [Speedy et al., 1989].

1.5.2.2 Diffusion facilitée

Comme le terme l'indique, faciliter la diffusion nécessite la présence d'une autre molécule (le promoteur) pour que la diffusion se produise, facilitation de la diffusion est nécessaire pour le mouvement des macromolécules ou des molécules polaires à travers la bicouche lipidique hydrophobe [Bonnet, 2007].

1.6 Comparaison entre l'advection et la diffusion

Les deux processus advection et diffusion déplacent la substance d'un endroit à un autre, mais chacun accomplit l'autre. Les différences essentielles ces deux processus sont suivants :

- L'advection va dans un sens (dépend du sens de courant).
- La diffusion va dans les deux sens (indépendamment du sens du courant). Cela se voit dans les expressions mathématiques respectives [Bassouidi et al., 2022] :
 - L'advection $\frac{\partial u}{\partial x}$ est une dérivée partielle du premier ordre ; ce qui signifie que si(x)est remplacé par (-x) le terme change de signe (antisymétrie).
 - La diffusion $D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ est une dérivée partielle du deuxième ordre ; ce qui signifie que si (x) est remplacé par (-x), le terme ne change pas de signes (symétrie). Suivant les différences entre ces deux processus, cité ci-dessus, une question importante se pose :
 - Si l'advection et la diffusion sont toutes deux capables de déplacer les substances à quelle condition l'une est-elle plus efficace que l'autre ?
 - Autrement dit, pouvons-nous avoir des cas d'advection rapide et de diffusion relativement faible et d'autres cas de diffusion rapide et d'advection négligeable ?

Pour répondre à cette question, il faut comparer les deux processus en formant le rapport de leurs échelles :

$$\frac{\text{Advection}}{\text{Diffusion}} = \frac{\text{Vitesse} \times \text{Longueur}}{\text{Coefficient de diffusion}} = Pe, \quad (1.2)$$

ce rapport est évidemment sans dimension et traditionnellement est appelé le nombre de Peclet [Drouhin, 1967].

- Si $Pe \ll 1$ (en pratique, si $Pe \leq 0.5$) : le terme d'advection est significativement plus petit que le terme de diffusion. Dans ce cas, la diffusion domine et l'advection est négligeable. Les solutions établies avec la diffusion seule étaient basées sur une telle simplification et sont donc valable tant que $Pe \ll 1$.

- Si $Pe \gg 1$ (en pratique, si $Pe \geq 12.5$) : le terme d'advection est significativement plus grand que le terme de diffusion. Donc, l'advection domine et la diffusion est négligeable, et les substances étant simplement déplacées par l'écoulement.

-Les phénomènes d'advection – diffusion si $Pe \approx 1$ (en pratique, si $0,5 \leq Pe \leq 12.5$) : les termes d'advection et de diffusion ne sont pas significativement différents, et aucun processus ne domine l'autre. Aucune approximation de l'équation ne peut

être justifiée et l'équation d'advection-diffusion complète doit être utilisée.
[Huysmans and Dassargues, 2005].

1.7 Applications des phénomènes d'advection-diffusion

Les phénomènes d'advection- diffusion ont de larges applications, cela se voit en :

- Physique : le mouvement des électrons et des photons...etc.
- Génie biomédical : thermorégulation, perfusion et micro-fluidique...etc.
- Chimie : diffusion moléculaire (transfert de masse)
- Biologie : bactéries, virus...etc.
- Météorologie : vapeur d'eau, la combustion...etc.

1.8 Aspect théorique d'advection- diffusion :

1.8.1 Définition

L'advection-diffusion est une équation qui décrit des phénomènes physiques dans lesquels des particules, de l'énergie ou des quantités physiques sont transférées dans un système physique par les processus d'advection et de diffusion. C'est une combinaison d'équations d'advection et de diffusion [Bassouidi et al., 2022].

1.8.2 Equation d'advection - diffusion

L'équation d'advection - diffusion combine de l'équation d'advection et de diffusion, elle décrit des phénomènes physiques, où les particules, l'énergie, ou d'autres grandeurs physiques sont transférés dans un système physique en raison de deux processus : advection et diffusion. De la définition ci-dessus, il s'ensuit que l'équation d'advection - diffusion combine à la fois des équations paraboliques (diffusion) et hyperboliques (advection) aux dérivées partielles. En cas de : coefficient de diffusion constant, la vitesse d'écoulement constante, l'équation en 2D peut être écrite sous la forme suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \left(\alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial u}{\partial y}\right) - D\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = f \quad (1.3)$$

Les deux termes sur le côté gauche représentent les différents processus physiques : le premier correspond à l'advection tandis que le second décrit la diffusion normale. le terme

f n'est pas toujours présent dans l'équation d'advection-diffusion. Dans le cas où la quantité physique n'est pas produite ni consommée, le terme f est nul. Dans le cas contraire, le terme f peut être positif ou négatif.

- u : est la variable de concentration (concentration de l'espèce de transfert de masse).

-La constante D est la diffusivité pour la masse.

- $\alpha; \beta$: les composantes de la vitesse de l'écoulement selon les axes ($x; y$) respectivement.

- f : La source (Le terme de source représente le flux de matière ou d'énergie entrant ou sortant du système.)

[Hutomo et al., 2019]

1.8.3 Advection pure

La notion d'advection pure, signifie le transport d'une propriété par un seul processus qui est l'advection et sans l'intervention d'aucun autre processus comme la diffusion. L'équation de l'advection pure s'écrit comme suit :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (\alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial u}{\partial y}) = f \quad (1.4)$$

le terme f n'est pas toujours présent dans l'équation d'advection. Dans le cas où la quantité physique est en équilibre, le terme f est nul. Dans le cas où la quantité physique n'est pas en équilibre, le terme f peut être positif ou négatif.

1.8.4 Diffusion pure

La notion de diffusion pure, signifie le transport d'une propriété par un seul processus qui est la diffusion et sans l'intervention d'aucun autre processus comme l'advection. L'équation de la diffusion pure s'écrit comme suit :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - D(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}) = f \quad (1.5)$$

De même le terme f n'est pas toujours présent dans l'équation de diffusion. Dans le cas où la quantité physique est en équilibre, le terme f est nul. Dans le cas où la quantité physique n'est pas en équilibre, le terme f peut être positif ou négatif.

1.9 Méthodes numériques pour la résolution de l'équation d'advection-diffusion

Les problèmes physiques que nous voyons (transport de polluants, écoulement dans les pipelines, modélisation de la pollution atmosphérique, etc.) sont décrits par des équations aux dérivées partielles fortement couplées et non linéaires. En général, ces équations ne permettent pas de solutions analytiques sauf dans des cas très simplifiés. C'est pourquoi des méthodes numériques sont nécessaires. Il existe plusieurs méthodes numériques :

- Méthode des différences finies.
- Méthode des éléments finis.
- Méthode des volumes finis.

Chaque méthode de résolution numérique de problèmes continus consiste en une étape de maillage et une étape de discrétisation. La phase de maillage consiste à découper le domaine d'étude en petits volumes appelés volumes de contrôle. L'étape de discrétisation transforme un problème continu en un problème discret. Les équations et les conditions aux limites sont approchées par des équations et des conditions discrètes [Da Silva, 2007].

1.9.1 Méthode des différences finies

Définition

La méthode des différences finies est une technique courante pour trouver des solutions approchées aux équations aux dérivées partielles, qui consiste à résoudre un système de relations (schémas numériques) qui relient les valeurs d'une fonction inconnue en certains points suffisamment proches les uns des autres. A première vue, cette approche semble être la plus facile à mettre en œuvre, car elle procède en deux temps : d'une part la discrétisation par différences finies des opérateurs dérivées/différentielles, et d'autre part, lorsque la distance entre points diminue [Bassoudi et al., 2022].

Principe général

Pour la méthode des différences finies, une grille est un ensemble de points isolés (appelés nœuds) qui se situent dans le domaine d'une fonction contrainte par des équations aux dérivées partielles, où la grille aux nœuds uniques définit des inconnues qui correspondent à des valeurs approximatives de ces fonctions. La discrétisation des opérateurs différentiels

(dérivées non partielles telles que le premier ordre, le second ordre, etc.) peut être obtenue par la formule de Taylor. [Chen and Falconer, 1992].

1.9.2 Méthode des volumes finis

Définition

En analyse numérique, la méthode des volumes finis est utilisée pour résoudre numériquement des équations aux dérivées partielles, telles que la méthode des différences finies et la méthode des éléments finis. Contrairement aux méthodes des différences finies, qui impliquent des approximations dérivées, les méthodes des volumes finis et des éléments finis utilisent des approximations d'intégrales. Cependant la méthode volumes finis est basée directement sur la forme dite forte de l'équation à résoudre, alors que la méthode des éléments finis est basée sur la forme variationnelle de l'équation (que nous appelons aussi la forme faible) [Chen and Falconer, 1992]. En modélisation de la pollution de l'air, la méthode des volumes finis est une approche couramment utilisée pour résoudre les équations aux dérivées partielles (EDP) qui gouvernent la propagation de la pollution dans l'atmosphère. Ces équations comprennent généralement une équation de convection pour décrire le transport de la pollution par le vent, une équation de diffusion pour décrire la dispersion de la pollution par les turbulences atmosphériques.

Principe général

En principe : Résoudre approximativement des équations aux dérivées partielles à l'aide d'un maillage constitué de volumes finis, qui sont de petits volumes disjoints (en 3D, surfaces en 2D, segments en 1D), qui forment ensemble le domaine d'étude. Un volume fini peut être construit autour des points du maillage initial, mais ce n'est pas obligatoire. Les méthodes de volumes finis ont été développées à l'origine pour les lois de conservation hyperboliques, mais les développements récents permettent maintenant de les utiliser pour les équations elliptiques et paraboliques. Ces équations aux dérivées partielles contiennent un terme de divergence. En utilisant le théorème de divergence de flux, convertissez les intégrales de volume des termes de divergence en intégrales de surface, puis évaluez ces termes de flux à l'interface entre les volumes finis. Les fonctions de flux numériques sont utilisées pour approximer le flux à l'interface. Le flux entrant dans un volume donné étant égal au flux sortant du volume adjacent, ces méthodes sont conservatrices et donc adaptées à la résolution des lois de conservation [Chen and Falconer, 1992].

1.9.3 Méthode des éléments finis

Définition

La méthode des éléments finis est utilisée pour résoudre numériquement des équations aux dérivées partielles. En analyse numérique, la méthode des éléments finis (MEF) est utilisée pour résoudre numériquement des équations aux dérivées partielles. Concrètement, représenter systèmement cela analytiquement physiques permet par le (mécanique, exemple de calculer numériquement le comportement d'objets même très complexes, à condition qu'ils soient continus et décrits par des équations aux dérivées partielles linéaires : le mouvement de bascule d'une extrémité d'une corde, le comportement de fluides atteignant des obstacles à haute vitesse, Déformation des structures métalliques, etc [Chen and Falconer, 1992].

Principe général

La méthode des éléments finis peut résoudre discrètement des équations aux dérivées partielles qui recherchent des solutions approchées "suffisamment" fiables. Typiquement, cette équation aux dérivée partielle (EDP) est liée à une fonction F définie sur le domaine. Il inclut des conditions aux limites pour assurer l'existence et l'unicité de la solution. Sauf cas particuliers, la discrétisation passe par la redéfinition et l'approximation de la géométrie, on considère donc les problèmes posés par la géométrie approximée par des champs polygonaux ou polyédriques. Une fois la géométrie approchée, il faut choisir un espace pour approximer la solution du problème, dans méthode des éléments finis (MEF), cet espace est défini à l'aide de la grille du domaine (ce qui explique aussi pourquoi la géométrie doit être approchée). Le maillage du domaine peut définir des pavés, où les pavés sont des éléments finis. L'élément fini est la donnée de l'élément de base et la fonction de base de l'espace approximatif supporté par l'élément, et est défini par interpolation. Bien qu'il existe de nombreux logiciels qui tirent parti de cette approche et peuvent "résoudre" des problèmes dans divers domaines, il est important que l'utilisateur ait une bonne compréhension de ce qu'il fait, notamment en ce qui concerne le choix des maillages et des types qui doivent être adaptés aux éléments proposés du problème : Aucun logiciel ne fera tout pour l'utilisateur, et vous devez toujours être critique des solutions approximatives. A cette fin, il existe des indicateurs d'erreur et des estimateurs d'erreur qui permettent d'ajuster différents paramètres [Chen and Falconer, 1992].

1.10 Les avantages et les inconvénients des différentes méthodes :

TABLEAU 1.1 – Le tableau de comparaison des méthodes numériques

La méthode	Les avantages	Les inconvénients
Méthode différences finies	-grande simplicité d'écriture. - faible coût de calcul.	-limitation à des géométries simples. - difficultés de prise en compte des conditions au type Neumann.
Méthode des volumes finies	- traitement possible de géométries complexes. - Nombreux résultats théoriques sur la convergence.	- complexité de mise en œuvre. - Grand coût en temps de calcul et mémoire.
Méthode éléments finis	- traitement possible de géométries complexes - Nombreux résultats théoriques sur la convergence.	- complexité de mise en œuvre. - Grand coût en temps de calcul et mémoire

Chapitre 2

Approche de volumes finis et par la méthode des différences finis au problème d'advection-diffusion

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, on donne une approche de discrétisation de l'équation d'advection-diffusion(2.3). Elle sert à résoudre les problèmes de transport. Parce que c'est un problème d'écoulement de diffusion et d'advection, on utilise la méthode des volumes finis très adaptée pour la mécanique des fluides. La méthode des volumes finis se base sur l'intégration des équations écrites sous forme de loi de conservation (établissement du bilan des flux sur des volumes de contrôle). La méthode se sert directement des lois de conservation de la mécanique des fluides. Le domaine de calcul doit être complètement couvert de volumes de contrôle. Les nœuds de calcul sont définis aux centres de gravité des volumes de contrôle. Les variables sur les frontières des volumes de contrôle sont interpolées des variables des centres de gravité. L'approximation des formulations d'intégrale de surfaces et de volumes apparaissant dans les équations se fait avec l'aide des formules de quadratures. C'est parce que la définition des volumes de contrôle peut être choisie librement, que la méthode n'est pas limitée seulement à des géométries simples comme c'est le cas de la méthode des différences finies. Le succès de la méthode se base sur plusieurs propriétés : la méthode est simple, conservative, permet de traiter des géométries complexes avec des volumes de forme quelconque (applicable à des géométries complexes), la détermination plus naturelle des conditions aux limites de type Neumann ou mixte et les termes apparaissant dans les équations écrites sous forme intégrale possèdent des significations physiques. Les qualités conservatives de la méthode sont basées sur le fait que l'établissement du bilan se fait sur chaque volume de contrôle : flux convectives et diffusives entre les volumes de

contrôle sur les bords communs sont identiques. Elle fournit ainsi de manière naturelle des approximations discrètes conservatives [Bokil and Gibson, 2007].

2.2 Avantages de volumes finis

La méthode des volumes finis (MVF) est une méthode de discrétisation des équations aux dérivées partielles (EDP) qui est couramment utilisée en modélisation de la pollution de l'air. Elle est préférée aux méthodes des différences finies (MDF) et des éléments finis (MEF) pour plusieurs raisons :

- **Stabilité** : La MVF est généralement plus stable que la MDF et la MEF pour les problèmes à vitesse de convection élevée. En effet, la MDF et la MEF peuvent conduire à des instabilités numériques si la vitesse de convection est trop élevée.
- **Précision** : La MVF est généralement aussi précise que la MEF pour les problèmes à vitesse de convection faible. En effet, la MVF et la MEF prennent en compte les valeurs de la fonction inconnue aux points voisins du point de discrétisation [Clain et al., 1993].
- **Efficacité** : La MVF est généralement plus efficace que la MEF pour les problèmes à géométrie complexe. En effet, la MVF ne nécessite pas de construire une triangulation de la géométrie, ce qui peut être coûteux pour les géométries complexes.

En modélisation de la pollution de l'air, la vitesse du vent peut être élevée, en particulier dans les zones urbaines. Il est donc important d'utiliser une méthode de discrétisation qui est stable pour les problèmes à vitesse de convection élevée. La MVF répond à ce critère, ce qui explique pourquoi elle est préférée aux méthodes des différences finies et des éléments finis. Dans la modélisation de la pollution de l'air, la MVF

- permet de résoudre des problèmes à vitesse de convection élevée, tels que la pollution de l'air urbain.
- permet de résoudre des problèmes à géométrie complexe, tels que la pollution de l'air autour d'obstacles.
- est généralement plus efficace que la MEF pour les problèmes à géométrie complexe.

La MVF est une méthode puissante et polyvalente qui est bien adaptée à la modélisation de la pollution de l'air. Elle offre un bon compromis entre stabilité, précision et efficacité [Zine, 2004].

2.3 Mallaige et discrétisation par la méthode des volumes finis

Comme dans la méthode des éléments finis, une partition du domaine connue sous le nom de maille où vit la variable d'espace est indispensable. Nous intégrons l'équation différentielle partielle modélisant la pollution de l'air, pour notre cas de l'équation d'advection et de diffusion [Ansanay-Alex, 2009].

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \left(\alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial u}{\partial y}\right) - D\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = f. \quad (2.1)$$

sur un petit intervalle $[t, t + \Delta t]$ et sur chaque volume de contrôle (VC), c'est-à-dire sur chaque élément du maillage, on obtient une équation d'équilibre. L'ensemble des équations d'équilibre est ensuite discrétisé par rapport à un ensemble d'inconnues discrètes. Pour que le MVF soit efficace, les flux numériques sont généralement conservateurs et cohérents. L'équation 2.1 peut être réécrite sous la forme ci-dessous

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla(\nu u) - \nabla \cdot (D \nabla u) = \mathbf{f} \quad (2.2)$$

où ν est le vecteur de la vitesse du vent, pour notre cas $\nu_x = \alpha$ et $\nu_y = \beta$. Par conséquent, pour le cas du MVF, le problème principal est donc la discrétisation des flux aux limites de chaque volume de contrôle. Comme pour notre cas, on a pris l'espace en deux dimensions, nous subdivisons le domaine en un nombre fini de volumes de contrôle qui sont alors constitués d'éléments de surface réguliers. Soient P le point nodal principal de notre maillage et ses voisins, les noeuds à l'ouest, à l'est, au sud et au nord donnés par W, E, S et N respectivement.

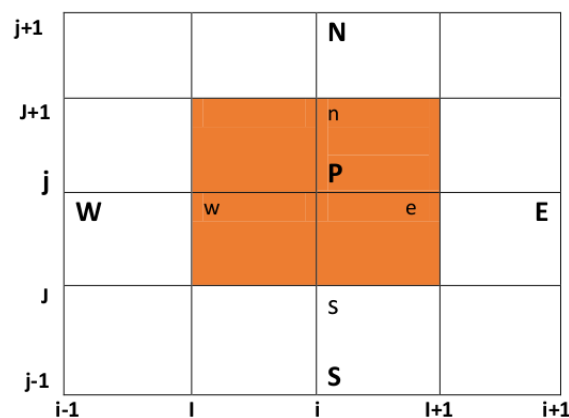


FIGURE 2.1 – Maillage [Somia, 2018]

Comme le montre la **Figure 3.1**, la face ouest du VC est désignée par w, la face est du VC est désignée par e, la face sud du VC est désignée par s et la face nord du VC est désignée par n. Dans la suite, nous considérons i comme l'indice de discrétisation le long de l'axe x, j l'indice de discrétisation le long de l'axe y et le temps est indexé par l. De la **Figure 3.1**, nous identifions la distance entre les noeuds W et P, P et E, N et P, P et S par δx_{WP} , δx_{PE} , δy_{SP} et δy_{PN} respectivement. De la même manière, la distance entre la face w et P, P et e, n et P, P et s sont identifiées par δx_{wP} , δx_{Pe} , δy_{sP} et δy_{Pn} respectivement. Le VC coloré sur la **Figure 3.1** a des pas de taille $\Delta x = \delta x_{we}$ et $\Delta y = \delta y_{sn}$. Cependant, pour réduire l'équation générale continue en un ensemble d'équations linéaires discrètes qui peuvent ensuite être résolues pour obtenir la valeur de la variable dépendante à chaque centre de VC, l'équation 2.2 est discrétisée en utilisant l'intégration sur un petit intervalle $[t, t + \Delta t]$ et un VC, puis en effectuant des approximations appropriées pour les flux à travers la frontière de chaque VC

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_V \left[\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot (\nu u) - \nabla \cdot (D \nabla u) \right] dV ds = \int_t^{t+\Delta t} \int_V f dV ds. \quad (2.3)$$

Ensuite, l'intégration du terme transitoire (évolutif) de l'équation 2.2 (c'est-à-dire le taux d'augmentation de u par rapport au temps) sur un petit intervalle $[t, t + \Delta t]$ et un VC arbitraire donne

$$\int_V \left[\int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial u}{\partial t} ds \right] dV = (u_P - u_P^*) \Delta V, \quad (2.4)$$

où u_P représente la valeur moyenne de u dans un VC centré sur un noeud P et l'exposant (*) se réfère à la concentration de polluant au temps t et les concentrations de polluant au niveau de temps $t + \Delta t$ ne sont pas indiquées en exposant et la valeur ΔV est le volume de la VC. Par la suite, les termes de convection et de diffusion sont discrétisés à l'aide du théorème de divergence qui transforme l'intégrale sur le volume VC en une intégrale sur la surface A où A est l'aire de la section transversale de la face de la VC.

Théorème de Gauss

Le théorème de Gauss (le théorème de flux-divergence) transforme l'intégrale de volume du terme de divergence en intégrale de surface [Trova, 2013].

$$\int_V \text{div } \vec{u} d\Omega = \int_A \vec{u} \cdot \vec{ds} = \int_A \vec{\Phi} \cdot \vec{n} ds \quad \text{où } \vec{n} \text{ le vecteur normal extérieur V} \quad (2.5)$$

Ainsi donc, si l'on considère que $A_e = A_w = \Delta y$ et $A_n = A_s = \Delta x$, la discrétisation du terme de diffusion dans l'équation 2.2 est donnée par

$$\int_t^{t+\Delta t} \left[\int_V \frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial u}{\partial x} \right) dV \right] ds + \int_t^{t+\Delta t} \int_V \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(D \frac{\partial u}{\partial y} \right) dV \right] ds = \int_t^{t+\Delta t} \left[\left(DA \frac{\partial u}{\partial x} \right)_e - \left(DA \frac{\partial u}{\partial x} \right)_w \right] ds + \int_t^{t+\Delta t} \left[\left(DA \frac{\partial u}{\partial y} \right)_n - \left(DA \frac{\partial u}{\partial y} \right)_s \right] ds \quad (2.6)$$

où A dans l'équation 2.6 représente la surface du volume de contrôle. Par conséquent, les termes de flux diffusif dans le côté gauche de cette équation sont alors évalués dans l'équation 2.7

$$\begin{aligned} \left(DA \frac{\partial u}{\partial x} \right)_e &= D_e A_e \frac{u_E - u_P}{\delta x_{PE}} \quad ; \quad \left(DA \frac{\partial u}{\partial x} \right)_w = D_w A_w \frac{u_P - u_W}{\delta x_{WP}} \\ \left(DA \frac{\partial u}{\partial y} \right)_n &= D_n A_n \frac{u_N - u_P}{\delta y_{PN}} \quad ; \quad \left(DA \frac{\partial u}{\partial y} \right)_s = D_s A_s \frac{u_P - u_S}{\delta y_{SP}} \end{aligned} \quad (2.7)$$

La substitution de l'équation 2.7 dans l'équation 2.6 nous donne

$$\begin{aligned} &\int_t^{t+\Delta t} \left[\int_V \frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial u}{\partial x} \right) dV \right] ds + \int_t^{t+\Delta t} \int_V \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(D \frac{\partial u}{\partial y} \right) dV \right] ds \\ &= \int_t^{t+\Delta t} \left[D_e A_e \frac{u_E - u_P}{\delta x_{PE}} - D_w A_w \frac{u_P - u_W}{\delta x_{WP}} \right] ds + \int_t^{t+\Delta t} \left[D_n A_n \frac{u_N - u_P}{\delta y_{PN}} - D_s A_s \frac{u_P - u_S}{\delta y_{SP}} \right] ds \end{aligned} \quad (2.8)$$

En effet, une hypothèse sur la variation de u_P , u_W , u_E , u_S et u_N est nécessaire pour évaluer le côté droit de l'équation 2.8. Ainsi, nous définissons un paramètre de poids $\theta \in [0, 1]$ et le calcul de l'intégrale temporelle est basé sur l'utilisation de la concentration au temps t (nous avons la concentration à l'ancien niveau de temps t , c'est-à-dire $\theta = 0$) ou au temps $t + \Delta t$ (nous avons la concentration au niveau de temps $t + \Delta t$, c'est-à-dire $\theta = 1$). L'autre alternatif consiste à la combinaison des concentrations à l'instant t et à l'instant $t + \Delta t$ (les concentrations sont équipondérées, c'est-à-dire que $\theta = 1/2$). D'une manière générale, l'intégrale I_u des concentrations en fonction du temps peut être donnée par la formule suivante

$$I_u = \int_t^{t+\Delta t} u_P ds = [\theta u_P + (1 - \theta) u_P^*] \Delta t, \quad (2.9)$$

En appliquant cette procédure à l'équation 2.8 et en prenant $\theta = 1$, c'est-à-dire le cas du schéma complet implicite, on a

$$\begin{aligned}
& \int_t^{t+\Delta t} \left[\int_V \frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial u}{\partial x} \right) dV \right] ds + \int_t^{t+\Delta t} \int_V \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\eta \frac{\partial u}{\partial x} \right) dV \right] ds \\
&= \frac{D_e A_e}{\delta x_{PE}} [(\theta u_E) \Delta t] + \frac{D_w A_w}{\delta x_{WP}} [(\theta u_W) \Delta t] + \frac{D_n A_n}{\delta y_{PN}} [(\theta u_N) \Delta t] + \frac{D_s A_s}{\delta y_{SP}} [(\theta u_S) \Delta t] \\
&\quad - \left(\frac{D_e A_e}{\delta x_{PE}} + \frac{D_w A_w}{\delta x_{WP}} + \frac{D_n A_n}{\delta y_{PN}} + \frac{D_s A_s}{\delta y_{SP}} \right) \theta u_P \Delta t
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Avant l'application de la même technique pour discrétiser le terme d'advection, parlons d'abord du schéma aux différences centrées et du schéma de différence décentrée communément appelé *schéma upwind*

Différences entre le schéma upwind et le schéma aux différences centrées

Comme nous l'avons parlé ci-haut, la modélisation de la pollution de l'air par la méthode des volumes finis consiste à résoudre l'équation d'advection-diffusion avec source. Cette équation décrit la propagation d'une quantité conservatrice, telle que la concentration d'un polluant, dans un fluide en mouvement. L'équation d'advection-diffusion avec source peut être discrétisée par différents schémas. Deux schémas couramment utilisés sont le schéma upwind et le schéma centré [Khaled, 2012].

Le schéma upwind est un schéma de première ordre qui prend en compte la direction de l'écoulement. Il consiste à approximer la dérivée d'advection par la valeur de la quantité conservatrice au point le plus proche en amont du point où la dérivée est calculée. Il est également relativement simple à implémenter. Cependant, le schéma upwind peut générer des oscillations lorsque la vitesse de l'écoulement est élevée. Ces oscillations sont dues au fait que le schéma upwind ne prend pas en compte la diffusion.

Le schéma centré est un schéma de deuxième ordre qui ne prend pas en compte la direction de l'écoulement. Il consiste à approximer la dérivée d'advection par la moyenne des valeurs de la quantité conservatrice aux points les plus proches du point où la dérivée est calculée. L'avantage du schéma upwind est qu'il est plus précis que le schéma centré (cfr l'Annexe). Il est également moins susceptible de générer des oscillations. Cependant, le schéma centré peut être moins stable que le schéma upwind. Il est également plus complexe à implémenter.

Le choix du schéma à utiliser pour la modélisation de la pollution de l'air par la méthode des volumes finis dépend de plusieurs facteurs, notamment :

- La précision souhaitée,
- La stabilité souhaitée,

- La présence ou non d'oscillations,
- La complexité d'implémentation

En général, le schéma upwind est un bon choix lorsque la précision n'est pas critique et que la stabilité est importante. Le schéma centré est un bon choix lorsque la précision est importante et que les oscillations doivent être évitées [Chhay et al., 2007]. Dans le cas de la modélisation de la pollution de l'air, le schéma upwind est généralement utilisé pour des problèmes où la vitesse de l'écoulement n'est pas élevée. Le schéma centré est généralement utilisé pour des problèmes où la vitesse de l'écoulement est élevée ou où les oscillations doivent être évitées. C'est pourquoi les schémas upwind sont utilisés dans la méthode des volumes finis pour discrétiser les équations d'advections. Ils sont importants car ils permettent de résoudre les équations d'advection de manière stable et précise, même si la vitesse du vent est élevée. Dans le cas de la modélisation de la pollution de l'air, la vitesse du vent peut être élevée, en particulier dans les zones urbaines. Les schémas upwind sont donc essentiels pour obtenir des résultats fiables dans ces conditions. Les schémas upwind fonctionnent en calculant les différences finies des équations d'advections en utilisant les valeurs de la fonction inconnue dans la direction de la propagation du vent. Les schémas upwind sont plus stables que les schémas centré pour les problèmes à vitesse d'advection élevée. En effet, les schémas centré peuvent conduire à des instabilités numériques si la vitesse de convection est trop élevée. Cependant, la discrétisation du terme d'advection est alors

$$\begin{aligned}
 & \int_t^{t+\Delta t} \left[\int_V \frac{\partial}{\partial x} (\nu u) dV \right] ds + \int_t^{t+\Delta t} \left[\int_V \frac{\partial}{\partial y} (\nu u) dV \right] ds \\
 & = \int_t^{t+\Delta t} \{ [\nu Au|_e - \nu Au|_w] + [\nu Au|_n - \nu Au|_s] \} ds \quad .
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

Dans le paragraphe précédent, on a vu que l'utilisation du schéma de différences centrées présente l'inconvénient de ne pas permettre l'identification de la direction du flux. Sur l'axe des x, la valeur de la propriété u à la face ouest de la cellule est toujours influencée à la fois par u_P et u_W dans le schéma de différences centrées. De la même manière, dans l'axe y, la valeur de la propriété u à la face sud de la cellule est toujours influencée à la fois par u_P et u_S . Dans un flux fortement advectif de l'ouest (sud) à l'est (nord) respectivement, le traitement ci-dessus est inadapté car la face ouest (sud) de la cellule devrait recevoir une influence beaucoup plus forte du nœud W (S) que du nœud P. Dans ce cas, la valeur de la propriété u est toujours influencée par u_P et u_S . que du nœud P. On a montré aussi que l'alternative est alors l'utilisation du schéma de différence amont qui prend en compte la direction du flux lors de la détermination de la valeur de la cellule. La direction du flux lors de la détermination de la valeur à une face de cellule. Le schéma upwind combine souvent les directions positives et négatives. Cependant, pour évaluer l'équation 2.5, on

utilise un schéma de **différentiation hybride** (c'est-à-dire en tenant compte du schéma de différences centrées et du schéma de différence amont) qui a été recommandé en raison de sa stabilité en tant que méthode préférée pour le traitement des termes d'advection [Versteeg and W., 1995].

Prenons le flux :

$$\vec{\Phi} = \begin{pmatrix} \Phi_x \\ \Phi_y \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

Où Φ_x, Φ_y sont les composantes du vecteur des flux $\vec{\Phi}$:

$$\sum_m \int_{\partial\Omega=\partial s} \vec{\Phi} \cdot \vec{dS} = [\Phi_{x,e} \cdot \Delta y - \Phi_{x,w} \cdot \Delta y] + [\Phi_{y,n} \cdot \Delta x - \Phi_{y,s} \cdot \Delta x] \quad (2.13)$$

$$= \left(\alpha u - D \frac{\partial u}{\partial x} \right)_e \cdot \Delta y - \left(\alpha u - D \frac{\partial u}{\partial x} \right)_w \cdot \Delta y + \left(\beta u - D \frac{\partial u}{\partial y} \right)_n \cdot \Delta x - \left(\beta u - D \frac{\partial u}{\partial y} \right)_s \cdot \Delta x \quad (2.14)$$

Approximation des flux d'advection et de diffusion :

$$\left(\alpha u - D \frac{\partial u}{\partial x} \right)_e = \alpha \frac{u_{i+1,j}^n + u_{i,j}^n}{2} - D \frac{u_{i+1,j}^n - u_{i,j}^n}{\Delta x} \quad (2.15)$$

$$\left(\alpha u - D \frac{\partial u}{\partial x} \right)_w = \alpha \frac{u_{i-1,j}^n + u_{i,j}^n}{2} - D \frac{u_{i,j}^n - u_{i-1,j}^n}{\Delta x} \quad (2.16)$$

$$\left(\beta u - D \frac{\partial u}{\partial y} \right)_n = \beta \frac{u_{i,j+1}^n + u_{i,j}^n}{2} - D \frac{u_{i,j+1}^n - u_{i,j}^n}{\Delta y} \quad (2.17)$$

$$\left(\beta u - D \frac{\partial u}{\partial y} \right)_s = \beta \frac{u_{i,j-1}^n + u_{i,j}^n}{2} - D \frac{u_{i,j}^n - u_{i,j-1}^n}{\Delta y} \quad (2.18)$$

D'où :

$$\sum_m \int_{\partial\Omega=\partial s} \vec{\Phi} \cdot \vec{dS} = \left(\alpha \frac{u_{i+1,j}^n + u_{i,j}^n}{2} - D \frac{u_{i+1,j}^n - u_{i,j}^n}{\Delta x} \right) \cdot \Delta y - \left(\alpha \frac{u_{i-1,j}^n + u_{i,j}^n}{2} - D \frac{u_{i,j}^n - u_{i-1,j}^n}{\Delta x} \right) \cdot \Delta y \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned}
& +(\beta \frac{u_{i,j+1}^n + u_{i,j}^n}{2} - D \frac{u_{i,j+1}^n - u_{i,j}^n}{\Delta y})\Delta x - (\beta \frac{u_{i,j-1}^n + u_{i,j}^n}{2} - D \frac{u_{i,j}^n - u_{i,j-1}^n}{\Delta y})\Delta x \\
& = \alpha \frac{u_{i+1,j}^n + u_{i,j}^n}{2} \Delta y - D \frac{u_{i+1,j}^n - u_{i,j}^n}{\Delta x} \cdot \Delta y - \alpha \frac{u_{i-1,j}^n + u_{i,j}^n}{2} \Delta y + D \frac{u_{i,j}^n - u_{i-1,j}^n}{\Delta x} \cdot \Delta y \quad (2.20)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\beta \frac{u_{i,j+1}^n + u_{i,j}^n}{2} \Delta x - D \frac{u_{i,j+1}^n - u_{i,j}^n}{\Delta y} \Delta x - \beta \frac{u_{i,j-1}^n + u_{i,j}^n}{2} \Delta x + D \frac{u_{i,j}^n - u_{i,j-1}^n}{\Delta y} \Delta x \\
& = \alpha \Delta y \frac{u_{i+1,j}^n + u_{i,j}^n - u_{i-1,j}^n - u_{i,j}^n}{2} - D \Delta y \frac{u_{i+1,j}^n - u_{i,j}^n - u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n}{\Delta x} \quad (2.21) \\
& \quad +\beta \Delta x \frac{u_{i,j+1}^n + u_{i,j}^n - u_{i,j-1}^n - u_{i,j}^n}{2} - D \Delta x \frac{u_{i,j+1}^n - u_{i,j}^n - u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n}{\Delta y}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& = \alpha \Delta y \frac{u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n}{2} - D \Delta y \frac{u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n}{\Delta x} \quad (2.22) \\
& \quad +\beta \Delta x \frac{u_{i,j+1}^n - u_{i,j-1}^n}{2} - D \Delta x \frac{u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n}{\Delta y}
\end{aligned}$$

Après manipulation des résultats des intégrations (terme temporel, terme source, terme des flux), on obtient

pour l'équation d'advection-diffusion la relation suivante :

$$\begin{aligned}
& \Delta x \cdot \Delta y \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} + \alpha \Delta y \frac{u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n}{2} - D \Delta y \frac{u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n}{\Delta x} \quad (2.23) \\
& \quad +\beta \Delta x \frac{u_{i,j+1}^n - u_{i,j-1}^n}{2} - D \Delta x \frac{u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n}{\Delta y} = (\Delta x \cdot \Delta y) f_{i,j}
\end{aligned}$$

Après division par $(\Delta x \cdot \Delta y)$, on obtient l'équation discrète suivante :

$$\begin{aligned}
& \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} + \alpha \frac{u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n}{2\Delta x} - D \frac{u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} \quad (2.24) \\
& \quad +\beta \frac{u_{i,j+1}^n - u_{i,j-1}^n}{2\Delta y} - D \frac{u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} = f_{i,j}
\end{aligned}$$

On note que :

$$u_{i,j}^n = u_P^n, u_{i+1,j}^n = u_E^n, u_{i-1,j}^n = u_W^n, u_{i,j+1}^n = u_N^n, u_{i,j-1}^n = u_S^n, f_{i,j} = f_P \quad (2.25)$$

$$\frac{u_P^{n+1} - u_P^n}{\Delta t} + \alpha \frac{u_E^n - u_W^n}{2\Delta x} - D \frac{u_E^n - 2u_P^n + u_W^n}{\Delta x^2} + \beta \frac{u_N^n - u_S^n}{2\Delta y} - D \frac{u_N^n - 2u_P^n + u_S^n}{\Delta y^2} = f_P \quad (2.26)$$

$$\Leftrightarrow \frac{u_P^{n+1} - u_P^n}{\Delta t} = -\alpha \frac{u_E^n - u_W^n}{2\Delta x} + D \frac{u_E^n - 2u_P^n + u_W^n}{\Delta x^2} - \beta \frac{u_N^n - u_S^n}{2\Delta y} + D \frac{u_N^n - 2u_P^n + u_S^n}{\Delta y^2} + f_P \quad (2.27)$$

En multipliant par Δt :

$$u_P^{n+1} - u_P^n = -\alpha \frac{u_E^n - u_W^n}{2\Delta x} \Delta t + D \frac{u_E^n - 2u_P^n + u_W^n}{\Delta x^2} \Delta t - \beta \frac{u_N^n - u_S^n}{2\Delta y} \Delta t + D \frac{u_N^n - 2u_P^n + u_S^n}{\Delta y^2} \Delta t + f_P \Delta t \quad (2.28)$$

En mettant en évidence les termes semblable on a :

$$\begin{aligned} U_P^{n+1} - u_P^n &= \left(\frac{-\alpha \Delta t}{2\Delta x} + \frac{D \Delta t}{\Delta x^2} \right) u_E^n + \left(\frac{\alpha \Delta t}{2\Delta x} + \frac{D \Delta t}{\Delta x^2} \right) u_W^n + \left(\frac{-2D \Delta t}{\Delta x^2} + \frac{-2D \Delta t}{\Delta y^2} \right) u_P^n \\ &\quad + \frac{-\beta \Delta t}{2\Delta y} + \frac{D \Delta t}{\Delta y^2} u_N^n + \left(\frac{\beta \Delta t}{2\Delta y} + \frac{D \Delta t}{\Delta y^2} \right) u_S^n + f_P \Delta t \end{aligned} \quad (2.29)$$

D'où :

$$\begin{aligned} u_P^{n+1} &= \left(\frac{-\alpha \Delta t}{2\Delta x} + \frac{D \Delta t}{\Delta x^2} \right) u_E^n + \left(\frac{\alpha \Delta t}{2\Delta x} + \frac{D \Delta t}{\Delta x^2} \right) u_W^n + \left(1 + \frac{-2D \Delta t}{\Delta x^2} + \frac{-2D \Delta t}{\Delta y^2} \right) u_P^n \\ &\quad + \left(\frac{-\beta \Delta t}{2\Delta y} + \frac{D \Delta t}{\Delta y^2} \right) u_N^n + \left(\frac{\beta \Delta t}{2\Delta y} + \frac{D \Delta t}{\Delta y^2} \right) u_S^n + f_P \Delta t \end{aligned} \quad (2.30)$$

Finalement l'équation discrète d'advection-diffusion en 2D peut être écrite sous la forme :

$$u_P^{n+1} = a_E \cdot u_E^n + a_W \cdot u_W^n + a_P \cdot u_P^n + a_N \cdot u_N^n + a_S \cdot u_S^n + f_P \cdot \Delta t \quad (2.31)$$

Avec :

$$a_E = \left(\frac{-\alpha \Delta t}{2\Delta x} + \frac{D \Delta t}{\Delta x^2} \right); \quad (2.32)$$

$$a_W = \left(\frac{\alpha \Delta t}{2\Delta x} + \frac{D \Delta t}{\Delta x^2} \right); \quad (2.33)$$

$$a_P = \left(1 + \frac{-2D\Delta t}{\Delta x^2} + \frac{-2D\Delta t}{\Delta y^2}\right); \quad (2.34)$$

$$a_N = \left(\frac{-\beta\Delta t}{2\Delta y} + \frac{D\Delta t}{\Delta y^2}\right); \quad (2.35)$$

$$a_S = \left(\frac{\beta\Delta t}{2\Delta y} + \frac{D\Delta t}{\Delta y^2}\right) \quad (2.36)$$

la relation 2.30 peut réécrire

$$\mathbf{a}_P u_P^n = \mathbf{a}_E u_E^n + \mathbf{a}_W u_W^n + \mathbf{a}_N u_N^n + \mathbf{a}_S u_S^n + \mathbf{b}_P \quad (2.37)$$

Avec la **Figure 3.1**, on peut réécrire l'équation 2.37

$$\mathbf{a}_P \mathbf{u}_{i,j}^n = u_P^{n+1} \quad (2.38)$$

$$\mathbf{b}_p = a_P \cdot u_P^n + f_P \cdot \Delta t \quad (2.39)$$

2.4 Discrétisation de l'équation d'advection et de diffusion par la méthode des différences finis

Considérons l'équation d'advection et diffusion :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \left(\alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial u}{\partial y}\right) - D \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = f. \quad (2.40)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_{i,j}^{k+1} - u_{i,j}^k}{\Delta t} \quad (2.41)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{i,j}^k - u_{i-1,j}^k}{\Delta x} \quad (2.42)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{u_{i,j}^k - u_{i,j-1}^k}{\Delta y} \quad (2.43)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{i-1,j}^k - 2u_{i,j}^k + u_{i+1,j}^k}{\Delta x^2} \quad (2.44)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{u_{i,j-1}^k - 2u_{i,j}^k + u_{i,j+1}^k}{\Delta y^2} \quad (2.45)$$

$$\begin{aligned} & \frac{u_{i,j}^{k+1} - u_{i,j}^k}{\Delta t} + \alpha \left(\frac{u_{i,j}^k - u_{i-1,j}^k}{\Delta x} \right) + \beta \left(\frac{u_{i,j}^k - u_{i,j-1}^k}{\Delta y} \right) \\ & - D \left(\frac{u_{i-1,j}^k - 2u_{i,j}^k + u_{i+1,j}^k}{\Delta x^2} + \frac{u_{i,j-1}^k - 2u_{i,j}^k + u_{i,j+1}^k}{\Delta y^2} \right) = f \end{aligned} \quad (2.46)$$

$$\begin{aligned} & \frac{u_{i,j}^{k+1}}{\Delta t} - \frac{u_{i,j}^k}{\Delta t} + \alpha \frac{u_{i,j}^k}{\Delta x} - \alpha \frac{u_{i-1,j}^k}{\Delta x} + \beta \frac{u_{i,j}^k}{\Delta y} - \beta \frac{u_{i,j-1}^k}{\Delta y} - D \frac{u_{i-1,j}^k}{\Delta x^2} \\ & + 2D \frac{u_{i,j}^k}{\Delta x^2} - D \frac{u_{i+1,j}^k}{\Delta x^2} - D \frac{u_{i,j-1}^k}{\Delta y^2} + 2D \frac{u_{i,j}^k}{\Delta y^2} - D \frac{u_{i,j+1}^k}{\Delta y^2} = f \end{aligned} \quad (2.47)$$

Multiplions membre à membre par Δt

$$\begin{aligned} & u_{i,j}^{k+1} - u_{i,j}^k + \alpha \frac{u_{i,j}^k}{\Delta x} - \alpha \Delta t \frac{u_{i-1,j}^k}{\Delta x} + \beta \Delta t \frac{u_{i,j}^k}{\Delta y} - \beta \Delta t \frac{u_{i,j-1}^k}{\Delta y} - D \Delta t \frac{u_{i-1,j}^k}{\Delta x^2} \\ & + 2D \Delta t \frac{u_{i,j}^k}{\Delta x^2} - D \Delta t \frac{u_{i+1,j}^k}{\Delta x^2} - D \Delta t \frac{u_{i,j-1}^k}{\Delta y^2} + 2D \Delta t \frac{u_{i,j}^k}{\Delta y^2} - D \Delta t \frac{u_{i,j+1}^k}{\Delta y^2} = f \Delta t \end{aligned} \quad (2.48)$$

$$\begin{aligned} & u_{i,j}^{k+1} = u_{i,j}^k - \alpha \Delta t \frac{u_{i,j}^k}{\Delta x} + \alpha \Delta t \frac{u_{i-1,j}^k}{\Delta x} - \beta \Delta t \frac{u_{i,j}^k}{\Delta y} + \beta \Delta t \frac{u_{i,j-1}^k}{\Delta y} + D \Delta t \frac{u_{i-1,j}^k}{\Delta x^2} \\ & - 2D \Delta t \frac{u_{i,j}^k}{\Delta x^2} + D \Delta t \frac{u_{i+1,j}^k}{\Delta x^2} + D \Delta t \frac{u_{i,j-1}^k}{\Delta y^2} - 2D \Delta t \frac{u_{i,j}^k}{\Delta y^2} + D \Delta t \frac{u_{i,j+1}^k}{\Delta y^2} + f \Delta t \end{aligned} \quad (2.49)$$

$$\begin{aligned} & u_{i,j}^{k+1} = \left(1 - \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x} - \frac{\beta \Delta t}{\Delta y} - 2D \frac{\Delta t}{\Delta x^2} - 2D \frac{\Delta t}{\Delta y^2} \right) u_{i,j}^k + \left(\frac{\alpha \Delta t}{\Delta x} + \frac{D \Delta t}{\Delta x^2} \right) u_{i-1,j}^k \\ & + \left(\frac{\beta \Delta t}{\Delta y} + \frac{D \Delta t}{\Delta y^2} \right) u_{i,j-1}^k + \frac{D \Delta t}{\Delta x^2} u_{i+1,j}^k + \frac{D \Delta t}{\Delta y^2} u_{i,j+1}^k + f \Delta t \end{aligned} \quad (2.50)$$

Posons :

$$a = \left(1 - \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x} - \frac{\beta \Delta t}{\Delta y} - 2D \frac{\Delta t}{\Delta x^2} - 2D \frac{\Delta t}{\Delta y^2} \right) \quad (2.51)$$

$$r = \left(\frac{\alpha \Delta t}{\Delta x} + \frac{D \Delta t}{\Delta x^2} \right) \quad (2.52)$$

$$p = \left(\frac{\beta \Delta t}{\Delta y} + \frac{D \Delta t}{\Delta y^2} \right) \quad (2.53)$$

$$q = \frac{D\Delta t}{\Delta x^2} \quad (2.54)$$

$$s = \frac{D\Delta t}{\Delta y^2} \quad (2.55)$$

$$b = f\Delta t \quad (2.56)$$

L'équation devient

$$u_{i,j}^{k+1} = au_{i,j}^k + ru_{i-1,j}^k + pu_{i,j-1}^k + qu_{i+1,j}^k + su_{i,j+1}^k + b \quad (2.57)$$

Chapitre 3

Résultats et Discussions

Dans ce chapitre, nous réservons numériquement l'équation d'advection et diffusion en deux dimensions en utilisant le langage de programmation PYTHON. Les codes sont écrites sur base de la méthode des volumes finis et nous faisons la discussion des résultats cas par cas. L'interprétation est basée sur la valeur de diffusivité, le coefficient d'advection et sur la source. Nous avons aussi simulé cette équation par la méthode des différences finis pour voir la précision et la fiabilité des résultats de la simulation.

La résolution analytique de l'équation d'advection-diffusion n'est pas facile sauf dans le cas simplifié(en négligeant certains termes de l'équation) [Esmail, 2011]. Nous ne sommes donc pas capable de comparer la solution analytique et la solution numérique pour pouvoir conclure sur la fiabilité de la méthode numérique. Ainsi, nous avons résolu l'équation d'advection-diffusion par la Méthode des Volumes Finis(MVF) et par la Méthode des Différences Finis (MDF) afin de pouvoir comparer les résultats et les erreurs afin de pouvoir conclure sur la véracité de la solution et la précision de la Méthode des Volumes Finis.

Le Tableau ci-dessous montre la comparaison des erreurs numériques entre la méthode des volumes finis et la méthode des différences finis

Méthode des volumes finis	Méthode des différences finis
0.4232770377006187	1.99432227109156
0.0000069121701637	0.00069064737159
0.00000001106191	0.000000243547625781
0.00000000000001725316	0.0000000000851116989386

Comme on a trouvé que les erreurs des résultats numériques par la méthode des volumes finis sont très faibles par rapport aux résultats par la méthode des différences finis, cela nous a permis de conclure que dans la simulation de la concentration des polluants de

l'air par la méthode des volumes finis offre généralement une meilleure précision et elle est fiable que la méthode des différences finies.

Nombre de pécelet = 0.5

[Léger, 2022]

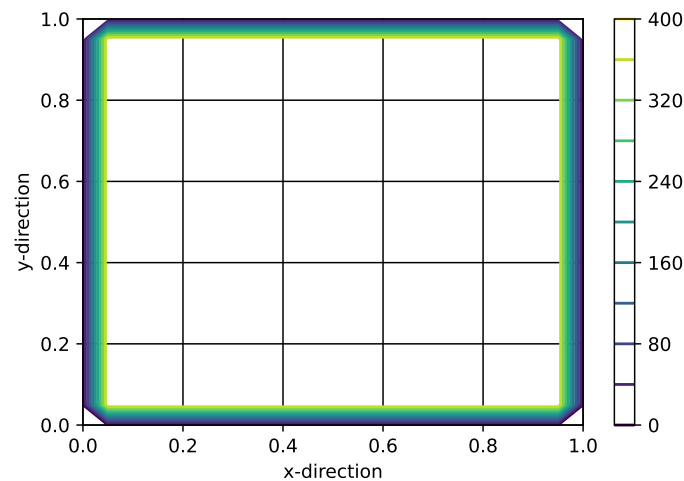


FIGURE 3.1 – Variation spatiale $Pe=0.5$ (MVF)

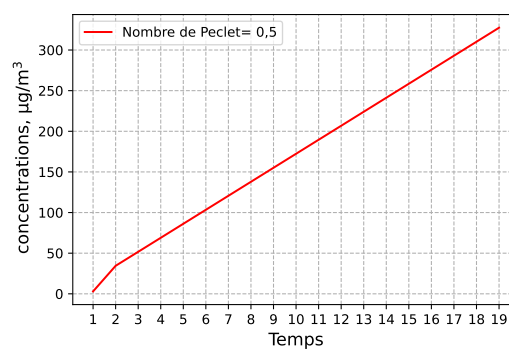


FIGURE 3.2 – Variation temporelle pour $Pe=0.5$ (MVF)

Un nombre de Péclet (Pe) de 0,5 indique que la diffusion domine l'advection dans la dispersion des polluants. Ce cas est représenté par la Figure 3.1. C'est le cas où la source de pollution se trouve au centre et elle n'est pas permanente. Par conséquent, les polluants se dispersent et s'éloignent de la source de pollution.

La Figure 3.2 montre que la concentration des polluants augmente avec le temps au point éloigné de la source. Au temps $t=0$, au point qui se trouve loin de la source la concentration est presque nulle mais avec le temps la concentration augmente à ce point.

Nombre de pécelet = 12.5

[Hsu, 1968]

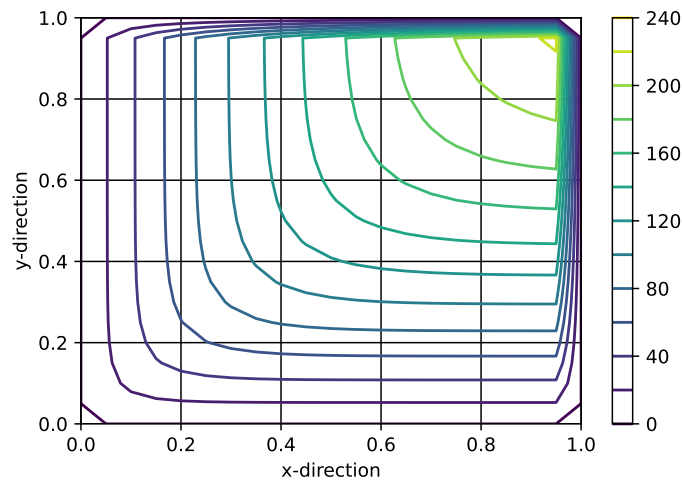


FIGURE 3.3 – Variation spatiale $Pe=12.5(MVF)$

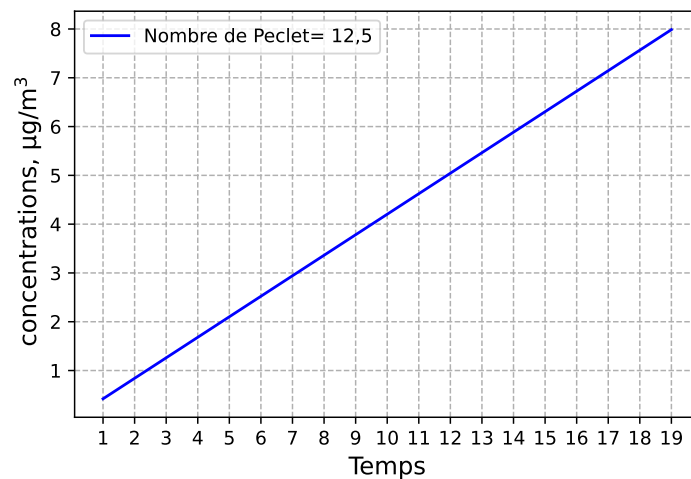


FIGURE 3.4 – Variation temporelle pour $Pe=12.5(MVF)$

On a un nombre de Péclet (Pe) de 12,5 dans le cas où l'advection est plus importante que la diffusion. Donc le mouvement des polluants est principalement dû à l'advection. Les polluants se déplacent dans la direction de la vitesse d'advection et la concentration diminue avec le temps tout près de la source de pollution tandis que elle augmente avec le temps au point éloigné de la source de pollution.

La Figure 3.4 est presque similaire à la Figure 3.2 ce qui montre que la concentration augmente avec le temps au point éloigné de la source.

Nombre de pécelet = 2

[Hsu, 1968]

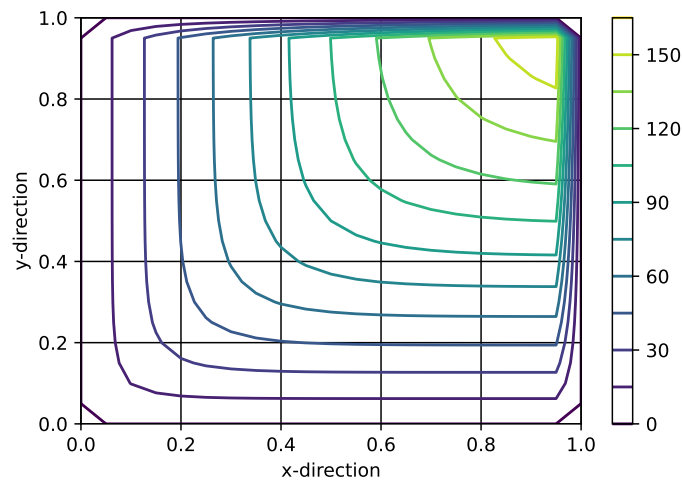


FIGURE 3.5 – Variation temporelle pour $Pe=2$ (MVF)

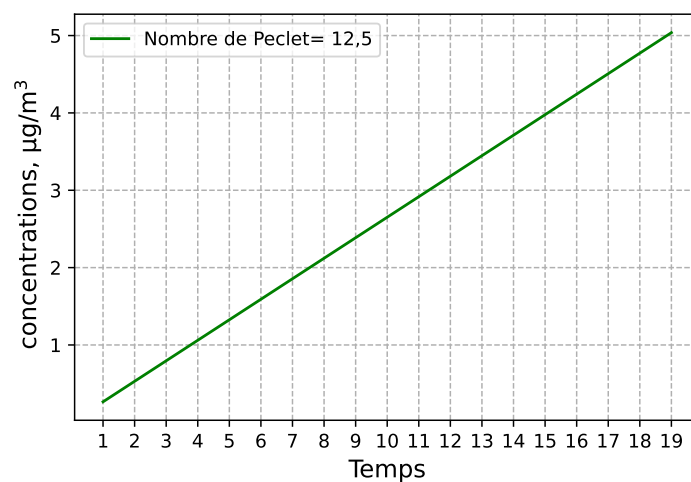


FIGURE 3.6 – Variation temporelle pour $Pe=2$ (MVF)

Quand le nombre de Péclet (Pe) est égal à 2 l'advection est légèrement plus importante que la diffusion. Par conséquent, les polluants se dispersent plus rapidement que dans le cas où Pe est égal à 0,5 représentée par la Figure 3.1 mais moins rapidement que dans le cas d'un Pe de 12,5.

Les zones de concentration de polluants peuvent se former à proximité des sources d'émission, mais leur taille et leur intensité seront réduites par rapport au cas où on a un Pe égal à 0,5. La modification des chiffres sur la légende des Figures Fig : 3.1, 3.3 et 3.5 montre que la concentration des polluants est dû à la diminution ou à l'augmentation de l'advection et de la diffusivité. La diminution de l'advection et de la diffusivité entraîne

une augmentation de la concentration dans la zone source et l'augmentation de la diffusivité et de l'advection entraîne une diminution de la concentration dans la zone source comme le montre sur les figures ci-dessus.

Pour obtenir d'autres résultats, nous avons varié les données et avons remarqué que les résultats changent avec le changement des données comme le montre les figures trouvées. A l'aide du logiciel, nous avons obtenu les différents résultats des simulations. Voici quelques exemples de modifications que nous pouvons apporter au problème pour obtenir les différentes courbes :

- Changement du point source : En changeant le point source, nous obtenons d'autres formes de courbes qui montrent l'évolution de la concentration.
- Changement de la vitesse de diffusion : Par changement de la vitesse de diffusion, nous changeons la vitesse à laquelle le polluant se diffuse. Par exemple, si nous augmentons la vitesse de diffusion, le polluant se diffusera plus rapidement et la courbe de concentration va changer plus rapidement. Dans ce cas, la zone de contaminée va augmenter très rapidement.
- Changement de la concentration initiale : Par changement de la concentration initiale, nous changeons la concentration maximale du polluant atteinte au temps initial. Cela se manifeste quand l'étude commence lorsque le polluant est déjà en place.

On remarque que :

- La concentration du polluant est plus élevée près de la source et diminue avec l'augmentation de la distance à partir de la source au début de l'émission du contaminant. La concentration est également plus élevée dans la direction du vent que dans la direction opposée. Les figures montrent comment les polluants se diffusent dans un domaine rectangulaire avec une source ponctuelle et un écoulement advectif. La distribution de la concentration est affectée par le coefficient de diffusion, la vitesse d'advection et la position de la source.

Les figures ci-dessous montrent les résultats de la simulation de l'équation d'advection-diffusion par la Méthode des Différences Finis.

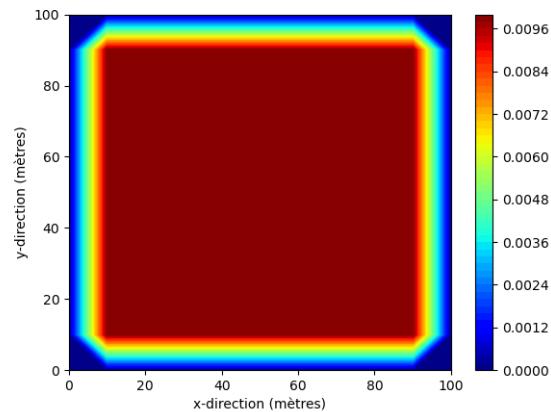


FIGURE 3.7 – Variation de concentration par MDF

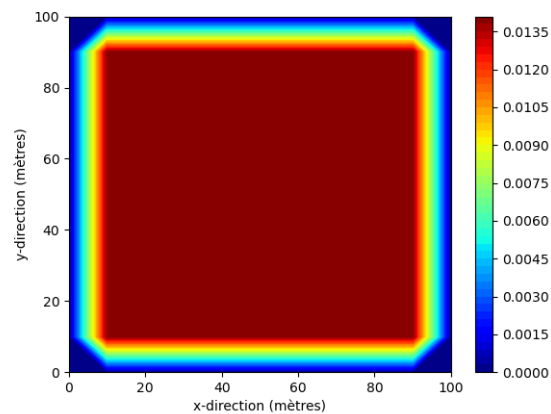


FIGURE 3.8 – Variation de concentration par MDF

Les images ci-dessus montrent la concentration des polluants de l'air. Les chiffres à gauche indiquent les valeurs de la concentration. La zone centrale correspond à la zone de pollution la plus élevée, cela est dû à la présence des sources d'émission importantes, tandis que les zones extrêmes indiquent des concentrations plus faibles. On observe un gradient de concentration décroissant de la zone centrale vers les zones extrêmes. La zone polluée abrite une source ponctuelle de pollution. La Figure 3.8 a une augmentation de la concentration avec une valeur maximale de 0.0135, cela est dû à la diminution de l'advection et de la diffusivité, tandis que celle de 3.7 a une diminution de la concentration avec une valeur maximale de 0.0096, cela est dû à l'augmentation de l'advection et de la diffusivité.

Chapitre 4

Conclusion et recommandations

Notre travail a porté sur la pollution de l'air par advection et diffusion. Nous avons pu simuler numériquement les phénomènes d'advection et de diffusion de la concentration d'un polluant en deux dimensions à l'aide d'une approche dite volumes finis. La base de cette méthode repose sur l'établissement du bilan des flux sur des volumes de contrôle. Le domaine de calcul doit être complètement couvert de volumes de contrôle. Les nœuds de calcul sont définis aux centres de gravité des volumes de contrôle. Les variables sur les frontières des volumes de contrôle sont interpolées des variables des centres de gravité. La variation du coefficient d'advection, du coefficient de diffusion et du source permettent d'obtenir différents résultats. Cependant, notre travail n'est pas exhaustif. Dans les recherches futures, nous pourrions travailler sur ce sujet pour améliorer nos recherche. Les expérimentations et les résultats du laboratoire nous permettraient des informations complémentaires.

A partir des différents éléments qui ont été soulevés dans ce travail et des objectifs visés, nous aimerions émettre quelques recommandations au gouvernement du Burundi et autres décideurs de prendre quelques mesures :

- Mesures de réduction des émissions : ces mesures visent à réduire la quantité de polluants émis dans l'atmosphère. Elles peuvent être mises en oeuvre par les entreprises, les gouvernements ou les particuliers.
- Mesures de protection de la santé : ces mesures visent à protéger les populations exposées à la pollution de l'air. Elles peuvent inclure des recommandations pour réduire l'exposition à la pollution, telles que limiter les activités extérieures pendant les périodes de pollution élevée, ou porter un masque de protection.
- Mesures de surveillance de la qualité de l'air : ces mesures visent à suivre l'évolution

de la concentration des polluants dans l'air et à identifier les zones les plus touchées. Elles sont essentielles pour la mise en oeuvre des mesures efficaces de réduction de la pollution.

La mise en oeuvre des recommandations ci-dessus contribuera dans l'amélioration de la qualité de l'air et à protéger la santé publique. En travaillant ensemble, nous pouvons améliorer la qualité de l'air ; créer un environnement plus sain pour tous et à protéger la santé publique.

Bibliographie

- [Abdelaaziz, 2016] Abdelaaziz, S. (2016). Méthode des volumes finis pour l'équation de convection-diffusion, Mémoire de Master, Université Sidi Mohamed Ben Abdellah.
- [Amegah and Jaakkola, 2016] Amegah, A. K. and Jaakkola, J. J. (2016). Household air pollution and the sustainable development goals. *Bulletin of the World Health Organization*, 94(3) :215.
- [Ansanay-Alex, 2009] Ansanay-Alex, G. (2009). *Un schéma éléments finis non-conformes/volumes finis pour l'approximation en maillages non-structurés des écoulements à faible nombre de Mach*. PhD thesis, Université de Provence-Aix-Marseille I.
- [Bassouidi et al., 2022] Bassouidi, K., Khelladi, M. F., et al. (2022). *Etude Numérique des phénomènes d'advection-diffusion*. PhD thesis, Université Ahmed Drata-Adrar.
- [Bokil and Gibson, 2007] Bokil, V. A. and Gibson, N. L. (2007). Finite difference, finite element and finite volume methods for the numerical solution of Partial Differential Equations. *Oregon State University Corvallis*.
- [Bonnet, 2007] Bonnet, I. (2007). *Mécanismes de diffusion facilitée de l'enzyme de restriction EcoRV*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie-Paris VI.
- [Chen and Falconer, 1992] Chen, Y. and Falconer, R. A. (1992). Advection-diffusion modelling using the modified quick scheme. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 15(10) :1171–1196.
- [Chhay et al., 2007] Chhay, M., Hamdouni, A., and Sagaut, P. (2007). Schémas numériques symétrisés pour les équations de transfert. In *CFM 2007-18ème Congrès Français de Mécanique*. AFM, Maison de la Mécanique, 39/41 rue Louis Blanc-92400 Courbevoie.
- [Clain et al., 1993] Clain, S., Rappaz, J., Swierkosz, M., and Touzani, R. (1993). Numerical modeling of induction heating for two-dimensional geometries. *Mathematical models and methods in applied sciences, World Scientific*, 3(06) :805–822.
- [Da Silva, 2007] Da Silva, E. G. (2007). *Méthodes et analyse numériques*. Ecole d'ingénieur. Institut Polytechnique de Grenoble pp.99 <cel-00556967>.
- [De Merten, 2020] De Merten, P. (2020). La non-acceptabilité de la zone de basses émissions (lez) de la région de bruxelles-capitale : étude des résistances des personnes concer-

- nées face à une mesure contraignant la mobilité automobile, Mémoire de Master, Université Libre de Bruxelles.
- [Deo Mwelwa, 2020] Deo Mwelwa, D. I. (2020). Higher education opportunity in africa. <https://www.researchgate.net/scientific-contributions/Jean-Paul-Katond-Mbay-2171188539>.
- [Djafer, 2016] Djafer, A. (2016). Polycopié : Notions aux phénomènes de transfert, université hassiba ben bouali - chef faculté de technologie département génie des procédés.
- [Drouhin, 1967] Drouhin, R. (1967). Rapport vii. e-1. similitude physique et analogie en génie chimique, persée-portail des revues scientifiques en shs. *Journées de l'hydraulique*, 9(1) :1–14.
- [Elharchaoui, 2018] Elharchaoui, Mr Mimoun et à la Examinateur, P. (2018). En vue de l'obtention du diplôme Master en modélisation et Calcul Scientifique, Université Mohammed Département de Mathématiques et Informatique.
- [Esmail, 2011] Esmail, S. F. H. (2011). *Assessment of concentration of air pollutants using analytical and numerical solution of the atmospheric diffusion equation*. PhD thesis, Faculty of Science, Zagazig University.
- [Guidotti Sylvie, 2018] Guidotti Sylvie, P. M. (2018). Pollution de l'air extérieur. <https://www.encyclopedie-environnement.org/air/pollution-air-exterieur-informer-prevenir/>.
- [Héroux, 2012] Héroux, M.-E. (2012). Recommandations de l'organisation mondiale de la santé en matière de qualité de l'air ambiant. *Pollution Atmosphérique*, 1.
- [Hsu, 1968] Hsu, C.-J. (1968). Exact solution to entry-region laminar heat transfer with axial conduction and the boundary condition of the third kind. *Chemical Engineering Science*, 23(5) :457–468.
- [Hutomo et al., 2019] Hutomo, G., Kusuma, J., Ribal, A., Mahie, A., and Aris, N. (2019). Numerical Solution of 2-d advection-diffusion equation with variable coefficient using du-fort frankel method. In *Journal of Physics : Conference Series*, volume 1180, page 012009. Iop Publishing.
- [Huysmans and Dassargues, 2005] Huysmans, M. and Dassargues, A. (2005). Review of the use of pecllet numbers to determine the relative importance of advection and diffusion in low permeability environments. *Hydrogeology Journal*, 13 :895–904.
- [iAHO, 2023] iAHO (2023). Pollution atmosphérique : le tueur invisible. https://files.aho.afro.who.int/afahobckpcontainer/production/files/iAHO_Air-Pollution_Regional_Factsheet-FR.pdf.
- [Karahan, 2007] Karahan, H. (2007). A third-order upwind scheme for the advection–diffusion equation using spreadsheets. *Advances in Engineering Software*, 38(10) :688–697.

- [Karima and seddik Leila, 2022] Karima, B. and seddik Leila, B. (2022). Etude numérique des phénomènes d'advection- diffusion, Mémoire de Master, Université Ahmed Draia-Adrar.
- [Khaled, 2012] Khaled, B. (2012). *Modélisation de la convection naturelle dans une enceinte avec une paroi d'un bloc*. PhD thesis, Université de Ouargla-Kasdi Merbah.
- [Kilic et al., 2021] Kilic, D., Rivière, A., Wang, S., Gallois, N., and Flipo, N. (2021). *Développement du transport de chaleur au sein de la plateforme de modélisation des hydrosystèmes CaWaQS*. PhD thesis, Piren Seine phase 8.
- [Léger, 2022] Léger, M. (2022). *Formation des réseaux karstiques : Rôle des hétérogénéités structurales, hydrodynamiques et minérales*. PhD thesis, Université de Montpellier.
- [Li, 2020] Li, W.-W. (2020). Air pollution, air quality, vehicle emissions, and environmental regulations. In *Traffic-Related Air Pollution*, pages 23–49. Elsevier.
- [Mardonez Balderrama, 2023] Mardonez Balderrama, V. P. (2023). *La pollution atmosphérique dans des villes de haute altitude : La Paz et El Alto*. PhD thesis, Université Grenoble Alpes.
- [Mwelwa et al., 2020] Mwelwa, D., Ilunga, D., and Mbay, J.-P. K. (2020). Simulation de la dégradation de la concentration d'un polluant en écoulement permanent bidimensionnel par la méthode des éléments finis, Université de Lubumbashi, Faculté Polytechnique.
- [Perez, 2020] Perez, J. (2020). Les conséquences de la pollution de l'air. <https://www.omepe.org/les-consequences-de-la-pollution-de-lair/>.
- [Pezzolo and Nefussi, 1971] Pezzolo, A. and Nefussi, N. (1971). Intermunicipal commission for the control of air and water pollution. In *Proceedings of the Second International Clean Air Congress*, pages 104–107. Academic Press.
- [Philibert et al., 2002] Philibert, J., Vignes, A., Bréchet, Y., and Combrade, P. (2002). Métallurgie : du minerai au matériau 2nde édition. *Edité par Dunod, Paris*, pages 1–1177.
- [Roussel et al., 2002] Roussel, G., Ternisien, E., and Benjelloun, M. (2002). Estimation d'un modèle stationnaire de dispersion et localisation de source. application à la surveillance de la pollution. *Revue du Traitement du Signal*, 19(1) :37–48.
- [Sebei, 2013] Sebei, H. (2013). *Etude des interactions de polluants minéraux et organiques avec des matrices phosphocalciques*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Toulouse-INPT.
- [Shairsingh et al., 2023] Shairsingh, K., Ruggeri, G., Krzyzanowski, M., Mudu, P., Malkawi, M., Castillo, J., da Silva, A. S., Saluja, M., Martínez, K. C., Mothe, J., et al. (2023). WHO air quality database : relevance, history and future developments. *Bulletin of the World Health Organization*, 101(12) :800.

- [Somia, 2018] Somia, S. (2018). Etude numérique d'une Convection naturelle en 2D par la méthode de volumes finis, Mémoire de Master, Université Mohamed Boudiafde M'Sila.
- [Speedy et al., 1989] Speedy, R., Prielmeier, F., Vardag, T., Lang, E., and Lüdemann, H.-D. (1989). Diffusion in simple fluids. *Molecular Physics*, 66(3) :577–590.
- [Trova, 2013] Trova, A. (2013). *Gravité des systèmes verticalement homogènes : applications aux disques astrophysiques*. PhD thesis, Université Sciences et Technologies-Bordeaux I.
- [Velauthapillai, 2020] Velauthapillai, K. (2020). *Characterizing the patterns and predictors of exposure to urban air pollution and environmental noise among retired adults in Bucaramanga, Colombia*. McGill University (Canada).
- [Versteeg and W., 1995] Versteeg, H. and W., M. (1995). *An introduction to computational fluid dynamics, the finite volume method*. Longman Scientific Technical.
- [Versteeg and Malalasekera, 2007] Versteeg, H. K. and Malalasekera, W. (2007). *An introduction to computational fluid dynamics : The Finite Volume Method*. Pearson Education.
- [WHO, 2022] WHO (2022). Pollution de l'air à l'intérieur des habitations. <https://www.who.int/fr/news-room/fact-sheets/detail/household-air-pollution-and-health>.
- [William, 1904] William, S. (1904). A Dynamical Theory of Diffusion for Non-electrolytes and Molecular Mass of Albumin. *The Philosophical Magazine and Journal of Science*, 9 :p. 781–785.
- [Zine, 2004] Zine, A. (2004). *Détermination du champ de températures dans une cavité pleine en utilisant la méthode mixte volumes finis et élément finis*. PhD thesis, Université de Ouargla.

Annexe A

Approximation par les schémas aux différences finis de l'équation d'advection diffusion

Dans ce chapitre, on va étudier quelques schémas aux différences finis, dans le but de la discrétisation du problème continu d'advection-diffusion pour avoir notre problème approché et faire l'étude de la consistance, stabilité et la convergente du schémas étudié.

A.1 Problème continu

Domaine borné :

Le problème d'advection-diffusion est donné par :

Trouver $u : [0, L] \times [0, T] \rightarrow [0, L]$, vérifie

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \alpha \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} - \beta \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0 & x \in [0, L], t \in [0, T] \\ u(x, 0) = u_0(x) & C.I; \\ u(0, t) = u(L, t) & C.L \end{cases}$$

Remarque

Dans le domaine non borné, ce problème consiste à chercher :

$$u : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(P) \begin{cases} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \alpha \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} - \beta \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0 \\ u(x,0) = u_0(x) : CI \quad x \in \mathbb{R}, t > 0 \end{cases}$$

A.2 Existence et unicité de la solution

Théorème : Si, $u_0 \in L^\infty(\Omega)$. Le problème (Pe) admet une solution unique u , tel que $u \in ([0, L] \times [0, T])$ de plus u vérifie :

$$\|u\|_{L^\infty([0, L] \times [0, T])} \leq \|u_0\|_{L^2([0, L])}$$

Remarque

Si v est une solution de l'EDP de la chaleur

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \beta \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

alors la solution v de (Pe) est définie par :

$$u(t, x) = v(t, x - \alpha t)$$

A.3 Principe du maximum

Soit $f \in C^0([0, L])$ et $u \in C^{20}([0, L])$ solution de (Pe) alors on a :

- $(f \geq 0) \Rightarrow (u \geq 0)$ sur Ω
- $(f \leq 0) \Rightarrow (u \leq 0)$ sur Ω
- Si $f = 0$ alors : $\inf u \leq u \leq \sup u$.

A.4 Problème discret

A.4.1 Discrétisation

Plaçons nous dans le cas monodimensionnel d'une corde de longueur L . Pour simplifier, on choisit une discrétisation régulier de $[0, L] \in \mathbb{R}$ en intervalles de longueur Δx tels que $L = N\delta x$ et une discrétisation de l'intervalle de temps $[0, T] \in \mathbb{R}$ en pas de temps de longueur Δt tels que $T = M\Delta t$. Notons x_i le point $i\Delta x$ et t^n le temps $u\Delta t$. Notons un i la valeur de la solution approchée au point x_i et au temps t^n .

A.4.2 Schéma explicite décentré

Le problème continu (Pe) s'écrit en utilisant le schéma explicite décentré sous la forme suivante :

$$(Pu) \begin{cases} \frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{\Delta t} + \alpha \frac{u_i^k - u_{i-1}^k}{\Delta x} - \beta \frac{u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k}{\Delta x^2} = 0 \\ u_i = u_0(x, t); i \in \{1, \dots, N\} \\ u_0^k = u_{N+1}^k = 0, k \in \{0, \dots, M\} \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

où :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x_i, t^n)}{\partial t} &= \frac{\partial u_i^{k+1} - u_i^k}{\Delta t} \\ \frac{\partial u(x_i, t^n)}{\partial t} &= \frac{u_i^k - u_{i-1}^k}{\Delta x} \\ \frac{\partial^2 u(x_i, t^n)}{\partial x^2} &= \frac{u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k}{\Delta x^2} \end{aligned}$$

C'est un schéma explicite qui calcule la valeur inconnue u_i^{k+1} à l'étape t^{n+1} en fonction des valeurs comme $\{u_{i-1}^k, u_i^k, u_{i+1}^k\}$ à l'étape t^n .

C'est un schéma explicite en temps et décentré (arrière) en espace alors :

$$u_i^{k+1} = \left(\alpha \frac{\Delta t}{\Delta x} + \beta \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \right) u_{i-1}^k + \left(-\alpha \frac{\Delta t}{\Delta x} - 2\beta \frac{\Delta t}{\Delta x^2} + 1 \right) u_i^k + \beta \frac{\Delta t}{\Delta x^2} u_{i+1}^k$$

Posons :

$$\begin{aligned} \lambda_a &= \left(\alpha \frac{\Delta t}{\Delta x} + \beta \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \right) \\ \lambda_b &= \left(-\alpha \frac{\Delta t}{\Delta x} - 2\beta \frac{\Delta t}{\Delta x^2} + 1 \right) \\ \lambda_c &= \beta \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \end{aligned}$$

alors sous forme matricielle on obtient :

$$U^{k+1} = AU^k$$

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_b & \lambda_c & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \lambda_a & \lambda_b & \lambda_c & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_a & \lambda_b & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \lambda_c \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_a & \lambda_b \end{pmatrix}$$

• **Consistance** Par définition, l'erreur de consistance en (x_i, t^n) s'écrit :

On s'intéresse ici à l'ordre du schéma au sens des différences finies. L'erreur de consistance en $x_i t^n$ est définie par :

$$R_i = \frac{1}{\Delta} (u_i^{k+1} - u_i^k) + \frac{\alpha}{\Delta x} (u_i^k - u_{i-1}^k) - \frac{\beta}{\Delta x^2} (u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k) \quad (\text{A.2})$$

En utilisant des développements de Taylor :

$$u_i^{k+1} = u(x_i, t^n) + \Delta t \frac{\partial u(x_i, t^n)}{\partial t} + \frac{\Delta t^2 \partial^2 u}{2 \partial t^2}(x_i, \xi_1); \quad \xi_1 \in [t^n, t^{n+1}]; \quad (\text{A.3})$$

$$u_{i-1}^k = u(x_i, t^u) - \Delta x \frac{\partial u(x_i, t^u)}{\partial x} + \frac{\Delta x^2 \partial^2 u}{2 \partial x^2}(\xi_2, t^u); \quad \xi_2 \in [x_{i-1}, x_i]; \quad (\text{A.4})$$

$$u_{i-1}^k = u(x_i, t^u) - \Delta x \frac{\partial u(x_i, t^u)}{\partial x} + \frac{\Delta x^2 \partial^2 u(x_i, t^u)}{2 \partial x^2} - \frac{\Delta x^3 \partial^3 u(x_i, t^u)}{6 \partial x^3} + \frac{\Delta x^4 \partial^4 u(\xi_3, t)}{24 \partial x^4}, \quad (\text{A.5})$$

$$\xi_3 \in [x_{i-1}, x_i]$$

$$u_{i+1}^k = u(x_i, t^u) + \Delta x \frac{\partial u(x_i, t^u)}{\partial x} + \frac{\Delta x^2 \partial^2 u}{2 \partial x^2}(x_i, t^u) + \frac{\Delta x^3 \partial^3 u(x_i, t^u)}{6 \partial x^3} + \frac{\Delta x^4 \partial^4 u(\xi_4, t^u)}{24 \partial x^4}, \quad (\text{A.6})$$

$$\xi_4 \in [x_i, x_{i+1}]$$

et on en déduit :

$$\begin{aligned} \frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{\Delta t} &= \frac{\partial u(x_i, t^n)}{\partial t} + \frac{\Delta t \partial^2 u(x_i, \xi_2)}{2 \partial t^2}; \\ \frac{u_i^k - u_{i-1}^k}{\Delta x} &= \frac{\partial u(x_i, t^n)}{\partial x} + \frac{\Delta x \partial^2 u}{2 \partial x^2}(\xi_2, t^n); \\ \frac{u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k}{\Delta x^2} &= \frac{\partial^2 u(x_i, t^n)}{\partial x^2} + \frac{\Delta x^2 \partial^4 u(\xi_3, t^n)}{12 \partial x^4}(\xi_4, t^u); \end{aligned}$$

On note :

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u(x_i, \xi_1)}{\partial t^2}; \\ C_2 &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u(\xi_2, t^u)}{\partial x^2}; \\ C_3 &= \frac{1}{12} \sup \left| \frac{\partial^4}{\partial x^4} (u(\xi_3, t^u), u(\xi_4, t^u)) \right| \end{aligned}$$

Alors l'erreur de consistance :

$$\begin{aligned} |R_i| &\leq C_1\Delta t + \alpha C_2\Delta x - \beta C_3\Delta x^3 \\ &\leq Cu(\Delta t + \alpha\Delta x - \beta\Delta x^2); \end{aligned}$$

tels que :

$$\begin{aligned} Cu &= \max(C_1, C_2, C_3) \\ &\leq C_4(\Delta t + \Delta x(\alpha - \beta\Delta x)) \\ &\leq C_4\Delta t + C_4(\alpha - \beta\Delta x)\Delta x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow |R_i| &\leq C_5(\Delta t + \Delta x) \\ C_5 &= \max(C_4, C_u(\alpha - \beta\Delta x)) \end{aligned}$$

• **Stabilité en norme L^∞**

On va étudier la stabilité en norme L^∞ .

$$u_i^{k+1} = \left(-\alpha \frac{\Delta t}{\Delta x} - 2\beta \frac{\Delta t}{\Delta x^2} + 1 \right) u_i^k + \beta \frac{\Delta t}{\Delta x^2} u_{i+1}^k + \left(\alpha \frac{\Delta t}{\Delta x} + \beta \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \right) u_{i-1}^k$$

Pour avoir la combinaison convexe

$$-\alpha \frac{\Delta t}{\Delta x} - 2\beta \frac{\Delta t}{\Delta x^2} + 1 + \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x} + \beta \frac{\Delta t}{\Delta x^2} + \beta \frac{\Delta t}{\Delta x^2} = 1$$

et que :

$$\beta \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \geq 0, \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x} + \beta \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \geq 0$$

Il reste à vérifier que

$$1 - \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x} - 2\beta \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \geq 0.$$

Pour cela, il faut que

$$\alpha \frac{\Delta t}{\Delta x} + 2\beta \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \leq 1.$$

Cette condition s'écrit encore :

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x^2}{\alpha\Delta x + 2\beta} \tag{A.7}$$

$$u^{k+1} \leq \left(1 - \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x} - 2\beta \frac{\Delta t}{\Delta x^2} + \beta \frac{\Delta t}{\Delta x^2} + \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x} + \beta \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \right) u^k;$$

en norme L^∞ : $\|u^{k+1}\|_\infty \leq \|u^k\|_\infty$.

On a de même : $\|u^k\|_\infty \leq \|u^{k-1}\|_\infty$

⋮

$$\|u^1\|_\infty \leq \|u^0\|_\infty$$

Par récurrence, on obtient : $\|u^u\|_\infty \|u^0\|_\infty$. Donc sous la condition de $\Delta t \leq \frac{\Delta x^2}{\alpha \Delta x + 2\beta}$, on a :

$$\|u^{k+1}\|_\infty \leq \|u^k\|_\infty \text{ et donc } \|u^k\|_\infty \|u^0\|_\infty, \text{ pour tout } n = 1 \cdots N.$$

Convergence D'après le théorème de Lax, on obtient la convergence (consistance et stabilité cyclique).

- Estimation d'erreur :

$$|e_i^k(u)| = |u(x_i, t^n) - u_i^k|$$

$u(x_i, t^n)$ solution exacte. u_i^n solution approchée.

En retranchant l'égalité (A.1) et (A.2), on obtient l'équation suivante sur e_i^k :

$$\frac{1}{\Delta t} (e_i^{k+1} - e_i^k) + \frac{\alpha}{\Delta x} (e_i^k - e_{i-1}^k) - \frac{\beta}{\Delta x^2} (e_{i+1}^k - 2e_i^k + e_{i-1}^k) = R_i,$$

Ce qu'on peut encore écrire :

$$e_i^{k+1} = \left(\alpha \frac{\Delta t}{\Delta x} + \beta \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \right) e_{i-1}^k + \left(1 - \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x} - 2\beta \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \right) e_i^k + \beta \frac{\Delta t}{\Delta x^2} e_{i+1}^k + \Delta t R_i, \quad (\text{A.8})$$

Sous la condition de stabilité, on obtient donc :

$$\begin{aligned} \|e_\infty^{k+1}\|_\infty &\leq \|e^k\|_\infty + C_5(\Delta t + \Delta x)\Delta t, \\ \|e^k\|_\infty &\leq \|e^{k-1}\|_\infty + C_5(\Delta t + \Delta x)\Delta t, \\ &\vdots \\ \|e^1\|_\infty &\leq \|e^0\|_\infty + C_5(\Delta t + \Delta x)\Delta t. \end{aligned}$$

Puisque $e^0 = 0$, alors on déduit des égalités précédentes que $\|e^k\|_\infty \leq C_5 T(\Delta t + \Delta x)$, pour tout $u \in \mathbb{N}$, avec $u\Delta t = T$. Le schéma est donc convergent.

A.4.3 Schéma explicite centré

Le problème continue (Pe) s'écrit en utilisant le schéma explicite centré sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{\Delta t} + \alpha \frac{u_{i+1}^k - u_{i-1}^k}{2\Delta x} - \beta \frac{u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k}{\Delta x^2} = 0 \\ u_i = u_0(x_i); i \in \{1, \dots, N\} \\ u_0^k = u_{N+1}^k = 0; k \in \{0, \dots, M\} \end{cases}$$

où :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x_i, t^n)}{\partial t} &= \frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{\Delta t} \\ \frac{\partial u(x_i, t^n)}{\partial x} &= \frac{u_{i+1}^k - u_{i-1}^k}{2\Delta x} \\ \frac{\partial^2 u(x_i, t^n)}{\partial x^2} &= \frac{u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k}{\Delta x^2} \end{aligned}$$

C'est un schéma explicite qui calcule la valeur inconnue u_i^{k+1} à l'étape t^{k+1} en fonction des valeurs comme $\{u_{i-1}^k; u_i^k; u_{i+1}^k\}$ à l'étape t^k .

C'est un schéma explicite en temps et centré en l'espace ; alors :

$$u_i^{k+1} = \left(\alpha \frac{\Delta t}{2\Delta x} + \beta \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \right) u_{i-1}^k + \left(1 - 2\beta \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \right) u_i^k + \left(-\alpha \frac{\Delta t}{2\Delta x} + \beta \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \right) u_{i+1}^k;$$

Posons :

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \left(\alpha \frac{\Delta t}{2\Delta x} + \beta \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \right) \\ \lambda_2 &= \left(1 - 2\beta \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \right) \\ \lambda_3 &= \left(-\alpha \frac{\Delta t}{2\Delta x} + \beta \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \right) \end{aligned}$$

Alors sous forme matricielle on obtient :

$$U^{k+1} = Au^k$$

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_2 & \lambda_3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & \lambda_2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \lambda_3 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

• Consistance :

En utilisant les développements de Taylor :

$$\begin{aligned} u_{i-1}^k &= u_1^k - \Delta x \frac{\partial u(x_i, t^k)}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t^k) - \frac{\Delta x^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(\xi_5, t^k), \xi_5 \in [x_{i-1}, x_i] \\ u_{i+1}^k &= u_i^k + \Delta x \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t^k) + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t^k) + \frac{\Delta x^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(\xi_6, t^k), \xi_6 \in [x_i, x_{i+1}] \end{aligned}$$

On obtient maintenant :

$$|R_i| \leq C_1 \Delta t + \alpha C_6 \Delta x^2 - \beta C_3 \Delta x^2.$$

où

$$C_6 = \alpha \frac{1}{3} \sup \left| \frac{\partial^3}{\partial x^3} (u(\xi_5, t^k), u(\xi_6, t^k)) \right|$$

On en déduit que :

$$|R_i| \leq M(\Delta t + \Delta x^2);$$

où $M = \max(C_1, C_3, C_6)$ l'erreur de consistance est d'ordre 1 en temps et d'ordre 2 en espace.

Stabilité en norme L^∞

On va étudier la stabilité en norme L^∞ .

$$u_i^{k+1} = \left(\alpha \frac{\Delta t}{2\Delta x} + \beta \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \right) u_{i-1}^k + \left(1 - 2\beta \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \right) u_i^k + \left(-\alpha \frac{\Delta t}{2\Delta x} + \beta \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \right) u_{i+1}^k.$$

Remarquons que l'on a bien :

$$1 - 2\beta \frac{\Delta t}{\Delta x^2} - \alpha \frac{\Delta t}{2\Delta x} + \beta \frac{\Delta t}{\Delta x^2} + \alpha \frac{\Delta t}{2\Delta x} + \beta \frac{\Delta t}{\Delta x^2} = 1$$

Pour que u_i^{k+1} soit combinaison convexe de u_i^k, u_{i+1}^k et u_{i-1}^k , il suffit que

$$1 - 2\beta \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \geq 0, \beta \frac{\Delta t}{\Delta x^2} - \alpha \frac{\Delta t}{2\Delta x} \geq 0 \text{ et } \alpha \frac{\Delta t}{2\Delta x} + \beta \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \geq 0$$

$$\alpha \frac{\Delta t}{2\Delta x} + \beta \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \geq 0$$

est toujours vérifiée. Les deux conditions qui doivent être vérifiées par Δt et Δx s'écrivent donc :

1. $1 - 2\beta \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \geq 0$, cette condition s'écrit encore :

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x^2}{2\beta} \quad (\text{A.9})$$

2. $\beta \frac{\Delta t}{\Delta x^2} - \alpha \frac{\Delta t}{2\Delta x} \geq 0$, soit encore :

$$\Delta x \leq \frac{2\beta}{\alpha} \quad (\text{A.10})$$

$$u^{k+1} \leq \left(1 - 2\beta \frac{\Delta t}{\Delta x^2} - \alpha \frac{\Delta t}{2\Delta x} + \beta \frac{\Delta t}{\Delta x^2} + \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x^2} + \alpha \frac{\Delta t}{2\Delta x} + \beta \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \right) u^k$$

en norme L^∞ : $\|u^{k+1}\|_\infty \leq \|u^k\|_\infty$.

On a de même :

$$\begin{aligned} \|u^k\| &\leq \|u^{k-1}\|_\infty \\ \|u^1\| &\leq \|u^0\|_\infty \end{aligned}$$

Par récurrence, on obtient :

$$\|u^k\| \leq \|u^0\|_\infty.$$

Le schéma centré est donc stable sous les deux conditions (A.9) et (A.10) donc :

$$\|u^k\|_\infty \leq \|u^0\|_\infty, \quad \forall n = 1, \dots, N.$$

Convergence

On vient de voir que le schéma est consistant à l'ordre 1 en temps et l'ordre 2 en espace, de plus le schéma est stable au sens de von-Neumann. Donc le schéma est convergent.