2024-08

Réalisations symplectiques associées à une classe de groupes de lie de dimension trois

Habimana, Jean Paul

UB, ENS

UNIVERSITE DU BURUNDI - ECOLE NORMALE SUPERIEURE

MASTER CONJOINT EN DIDACTIQUE DES SCIENCES

OPTION : MATHEMATIQUES

REALISATIONS SYMPLECTIQUES ASSOCIEES A UNE CLASSE DE GROUPES DE LIE DE DIMENSION TROIS

Par :

HABIMANA Jean Paul

Mémoire présenté et défendu publiquement en vue de l'obtention du Diplôme de Master en Didactique des Sciences, Option: Mathématiques.

Sous la direction de :

Dr Ancille NGENDAKUMANA

Bujumbura, Août 2024

Réalisations symplectiques associées à une classe de groupes de lie de dimension trois

COMPOSITION DU JURY

Président : Pr. KARIMUMURYANGO Ménédore

Secrétaire : Msc. NZUNOGERA Arthur

Directeur : Dr. NGENDAKUMANA Ancille

DEDICACES

A Dieu Tout Puissant ;

A nos chers parents ;

A toute notre famille ;

A nos frères et sœurs ;

A nos camarades de classe en master I et II ;

Nous dédions ce mémoire.

REMERCIEMENTS

Au terme de ce travail, nous exprimons notre profonde gratitude à Dieu Tout Puissant pour son amour, sa bonté et sa grâce infinie et pour nous avoir gardé en vie dès notre conception jusqu'à maintenant.

Nous remercions respectueusement nos chers parents qui se sont donné corps et âme pour nous montrer le meilleur chemin de l'école sans oublier leurs contributions de toutes sortes.

Que notre Directeur de mémoire Dr Ancille NGENDAKUMANA trouve nos sentiments de gratitude pour avoir accepté de diriger ce mémoire. Sa présence, sa disponibilité, ses conseils, ses remarques et sa rigueur scientifique malgré ses multiples occupations nous ont été d'une grande utilité.

Nous tenons à remercier également nos enseignants depuis l'école primaire jusqu'à l'enseignement supérieur spécialement ceux du Master en didactique des sciences, option Mathématiques pour la formation tant morale que scientifique que nous avons bénéficiée auprès d'eux.

Nous remercions également CIZA Sylvain pour sa contribution tant morale que matérielle depuis l'école primaire jusqu'à nos jours. Nous lui disons merci.

Nous voudrions exprimer nos remerciements aussi à la famille MUCOWERA Jacques pour le soutien moral surtout matériel dans notre parcours académique en Master. Nous la remercions beaucoup.

Enfin, que toute personne qui a contribué d'une façon ou d'une autre à la réalisation de notre travail de mémoire trouve ici nos sentiments de remerciement les plus distingués.

Réalisations symplectiques associées à une classe de groupes de lie de dimension trois

RESUME

Notre travail intitulé : « Réalisations symplectiques associées à une classe de groupes de Lie de dimension trois » construit les orbites coadjointes maximales des groupes de Lie associés à une extension centrale de la classe VI de la classification des algèbres de Lie de dimension trois. Ces structures symplectiques obtenues constituent le cadre géométrique des systèmes dynamiques dont les équations de mouvement ainsi que leurs solutions sont bien élucidées. Les interprétations physiques des paramètres d'extension obtenus ont été faites.

Avant d'utiliser cette méthode dite méthode des orbites coadjointes, nous avons pris le soin de développer de façon détaillée les notions préliminaires nécessaires pour la compréhension du reste du travail. Il s'agit entre autres des notions de groupes de Lie, d'algèbres de Lie, du passage d'un groupe de Lie à l'algèbre de Lie associée, de l'application exponentielle, du passage de l'algèbre de Lie au groupe de Lie associé, des actions adjointe et coadjointe, de l'orbite d'une action coadjointe.

Dans un deuxième temps, la méthode des orbites coadjointes utilisée pour faire ces constructions a été développée de façon détaillée.

En dernier lieu, la méthode des orbites coadjointes a été appliquée à une classe de groupe de Lie. C'est la classe de groupe de Lie associée à la VI$^{\text{ème}}$ classe d'algèbre de Lie dans la classification des algèbres de Lie de dimension trois.

Réalisations symplectiques associées à une classe de groupes de lie de dimension trois

SUMMARY

Our work intitled: “Symplectic realizations associated with a class of Lie groups of three-dimensional” constructs the maximal coadjoint orbits of the Lie groups associated with a central extension of class VI of the classification of three-dimensional Lie algebras. These symplectic structures obtained constitute the geometric framework of the dynamic systems whose equations of motion as well as their solutions are well elucidated. The physical interpretations of the extension parameters obtained have been made.

Before using this method called the coadjoint orbit method, we took care to develop in detail the preliminary notions necessary for understanding the rest of the work. These include, among other things, the notions of Lie group, Lie algebra, the exponential application, the transition from Lie algebra to associated Lie group, of the adjoint and coadjoint actions, of the orbit of a coadjoint action.

Secondly, the coadjoint orbit method used to make these constructions was developed in detail.

Finally, the coadjoint orbit method was applied to a class of Lie groups. It is the Lie group class associated with the VIth Lie algebra class in the classification of three-dimensional Lie algebras.

TABLE DES MATIERES

LISTE DES SIGLES, ABREVIATIONS, NOTATIONS ET LEURS SIGNIFICATIONS

$\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$	: Matrice carrée d'ordre n à coefficient réel ou complex
$\mathbb{R}^n$	: Espace vectoriel réel de dimension n
Ad^*	: Action coadjointe
L_g	: Translation à gauche
R_g	: Translation à droite
T_eG	: Espace tangent au groupe Lie G en l'élément neutre
T_e^*G	: Espace cotangent au groupe de Lie G en l'élément neutre
$\mathcal{G}^*$	: Algèbre de Lie duale
BCH	**:** Baker-Campbell-Hausdorff
G	: Groupe de Lie
Gl	**:** Groupe linéaire
Ad	: Action adjointe
Aut	: Automorphisme
End	: Endomorphisme
e	: Elément neutre
exp	: Application exponentielle
$\mathcal{G}$	: Algèbre de Lie
$\mathbb{K}$	: Corps commutatif réel ou complexe
ϑ	: Orbite

AVANT -PROPOS

Notre travail intitulé : « Réalisation symplectiques associées à une classe de groupes de Lie de dimension trois » construit les orbites coadjointes maximales des groupes de Lie associés à une extension centrale de la classe VI de classification des algèbres de Lie de dimension trois faite par Ganbouri. La méthode des orbites coadjointes a été utilisée pour construire des systèmes dynamiques et la réalisation symplectique nous a permis de trouver les équations de mouvement et leurs solutions.

Dans notre travail, nous avons pris le cas particulier où le paramètre réel λ est égal à 1. Le cas général où ce paramètre sera quelconque pourra faire l'objet d'une étude ultérieure.

Réalisations symplectiques associées à une classe de groupes de lie de dimension trois

INTRODUCTION GENERALE

Le présent travail de recherche intitulé : « Réalisations symplectiques associées à une classe de groupes de Lie de dimension trois » s'inscrit dans le cadre de la géométrie symplectique. La géométrie symplectique quant à elle est une partie de la géométrie différentielle qui étudie les variétés symplectiques. De façon générale, la géométrie est un domaine intéressant qui a beaucoup d'applications aussi bien en mathématiques que dans d'autres sciences et même dans la vie courante comme dans les constructions des bâtiments ou la construction des routes,… C'est pour le cas de la géométrie euclidienne qui étudie les figures du plan et de l'espace.

La géométrie symplectique est un cas particulier de la géométrie différentielle qui se complète avec les autres branches : la géométrie algébrique, la géométrie complexe, la géométrie non commutative, la géométrie non euclidienne, la géométrie arithmétique et la géométrie de contact. C'est le cas par exemple de la géométrie Riemannienne où la courbure joue le rôle d'invariant local de classe C^2. Par sa définition, la géométrie symplectique est un domaine actif de la recherche mathématique, née de la volonté d'une formulation mathématique naturelle de la mécanique classique.

Elle trouve des applications aussi bien en mathématiques qu'en physique tant classique que quantique.

En mathématiques, elle trouve des applications en géométrie algébrique, en géométrie riemannienne et en géométrie de contact. La géométrie symplectique a comme objet l'étude des variétés symplectiques, c'est-à-dire des variétés différentielles munies d'une 2-forme différentielle fermée et non dégénérée.

Dans ce travail, nous avons utilisé la méthode des orbites coadjointes pour construire des structures symplectiques à partir des extensions centrales de groupes de Lie et d'algèbres de Lie.

La méthode des orbites coadjointes est appliquée, dans ce travail, à une classe de groupes de Lie de dimension trois: celle associée à la VIè classe des algèbres de Lie de la classification des algèbres de Lie de dimension trois faite par Ganbouri [1].

Comme nous l'avons déjà annoncé, à travers les réalisations symplectiques sur une extension centrale du groupe de Lie considéré, des structures symplectiques sont obtenues et fournissent le cadre géométrique des systèmes dynamiques associés dont les équations de mouvement ainsi que leurs solutions sont déterminées.

L'analyse dimensionnelle a permis de donner une interprétation physique des nouveaux paramètres d'extension.

Notre travail est subdivisé en trois chapitres.

Le premier chapitre porte sur les notions préliminaires. Il s'agit entre autres des notions de groupes de Lie, d'algèbres de Lie, du passage d'un groupe de Lie à l'algèbre de Lie associée, de l'application exponentielle, du passage de l'algèbre de Lie au groupe de Lie associé, de l'action adjointe et coadjointe et de l'orbite d'une action coadjointe.

Le deuxième chapitre parle de la méthode des orbites coadjointes. Dans ce chapitre, nous verrons la méthode des orbites coadjointes proprement dite, la structure symplectique des orbites coadjointes, le champ vectoriel Hamiltonien et le flot Hamiltonien associé.

Quant au troisième et dernier chapitre qui parle des réalisations symplectiques associées à une classe de groupes de Lie de dimension trois, la présentation du groupe de Lie, la détermination de l'extension centrale de l'algèbre de Lie, l'analyse dimensionnelle, la loi du groupe de Lie étendu, l'action adjointe du groupe de Lie sur l'algèbre de Lie étendue, l'action coadjointe du groupe de Lie sur le dual de l'algèbre de Lie, la détermination de l'orbite coadjointe à travers sa structure symplectique font aussi objet du troisième chapitre. Les nouveaux paramètres d'extension y sont aussi interprétés physiquement. Les réalisations symplectiques, les équations du mouvement des systèmes dynamiques correspondant ainsi que les solutions de ces équations sont les principales notions clés développées de façon détaillée dans ce chapitre.

CHAPITRE I : NOTIONS PRELIMINAIRES

Dans ce chapitre, nous allons développer de façon détaillée certaines notions qui aideront à comprendre le reste du texte. Il s'agit entre autres des notions de groupes de Lie, d'algèbres de Lie, du passage d'un groupe de Lie à l'algèbre de Lie associée, de l'application exponentielle, du passage de l'algèbre de Lie au groupe de Lie associé, de l'action adjointe, de l'action coadjointe et de l'orbite d'une action coadjointe.

1.1. Notions de groupe de Lie

La théorie des groupes de Lie, qui a été fondée dans la période allant du 1870 à 1880 par le mathématicien norvégien Sophus Lie a été considérée comme une partie importante des mathématiques, liée à des problèmes qui touchent les équations différentielles, les équations aux dérivées partielles et la géométrie différentielle. Plus tard, leur étude a mis en évidence un certain nombre d'objets mathématiques particuliers comme les groupes semi-simples, dont on a progressivement découvert le rôle fondamental dans presque toutes les parties des mathématiques modernes.

En outre, les groupes de Lie interviennent de façon de plus en plus profonde dans les conceptions récentes de la physique surtout en théorie de la relativité et en mécanique quantique.

Définition

Un groupe de Lie est une variété différentielle, munie d'une structure de groupe (ou un groupe muni d'une structure de variété différentiable) telle que les applications de multiplication: $G\text{x}G \rightarrow G: (g, h) \rightarrow gh$ et de passage à l'inverse: $G \rightarrow G: g \rightarrow g^{-1}$ soient différentiables. Ces conditions expriment, comme dans le cas des groupes topologiques, la compatibilité qui existe entre la structure de groupe et la structure de variété différentielle. Donc, tout groupe de Lie est en particulier un groupe topologique [2].

Dans la littérature, plusieurs exemples de groupes de Lie sont proposés entre autres des groupes de Lie dits « classiques » comme par exemples : $SO(n), SL(n, \mathbb{R}), U(n), SU(n),$ etc et des groupes de Lie dits « cinématiques » qui apparaissent comme des groupes de symétrie des modèles de la mécanique classique et qui ont donc une « physique » cachée derrière eux. Dans cette deuxième famille de groupes de Lie, nous pouvons citer le groupe de Galilée, le groupe de Poincaré, le groupe de Carroll, le groupe d'Aristote, etc.

Le lecteur soucieux d'approfondir ces notions peut consulter le livre de Thierry Masson [2].

1.2. Notions d'algèbre de Lie

I.2.1.Définition

Soit $\mathbb{K}$ un corps.

Une algèbre de Lie sur un corps $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel $\mathcal{G}$ sur $\mathbb{K}$ muni d'une forme bilinéaire $(X, Y) \mapsto [X, Y]$ de $\mathcal{G}$x $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{G}$ et qui vérifient les propriétés suivantes :

1. $\forall X, Y \in \mathcal{G}$, $[X, Y] = -[Y, X]$. Par conséquent, $[X, X] = 0$. (antisymétrie) (1.1)

2. $\forall X, Y, Z \in \mathcal{G}, \left[X, [Y, Z]\right] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0.$ (1.2)

L'expression (1.2) est appelée identité de Jacobi.

1.2.2. Exemples d'algèbres de Lie

.Tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathcal{G}$ muni du crochet nul, $[X, Y] = 0$ pour tout $X, Y \in \mathcal{G}$ est une algèbre de Lie. Cette algèbre de Lie est dite algèbre de Lie abélienne ou commutative ;

. Les algèbres associatives sont des algèbres de Lie

En effet, considérons une algèbre associative notée $\mathbb{K}$ (A,+,.). Alors A possède une structure d'algèbre de Lie définie par le commutateur :

$[X, Y] = XY - YX \ \forall X, Y \in$AxA.

Si V est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, alors (End(V),+,∘) muni du crochet de Lie ci-dessus est une algèbre de Lie. Cette algèbre de Lie est notée $\mathcal{G}l(V)$;

. L'espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ des matrices carrées d'ordre n muni du crochet de Lie [A,B]=AB-BA est une algèbre de Lie qu'on note le plus souvent par $\mathcal{G}l_n(\mathbb{K})$.

Du point de vue géométrique, une algèbre de Lie est associée à un groupe de Lie par le biais de l'espace tangent en l'élément neutre du groupe de Lie.

1.3. Passage d'un groupe de Lie à l'algèbre de Lie associée.

Il est possible d'associer naturellement à tout groupe de Lie G une algèbre de Lie $\mathcal{G}$. Il existe deux façons différentes d'introduire cette algèbre de Lie. L'une consiste à introduire l'espace des champs de vecteurs sur le groupe de Lie G, l'autre consiste à munir l'espace tangent en l'élément neutre T_eG d'un crochet de Lie, dérivant localement de la loi interne du groupe de Lie G.

1.3.1. Comme algèbre des champs de vecteurs

Considérons un groupe de Lie G de dimension n. Soit g un élément du groupe G.

L'application Lg :$\begin{cases} G \longrightarrow G \\ h \longrightarrow gh \end{cases}$ est un difféomorphisme de la variété réelle ou complexe sous-jacente à G.

L_g : est appelée action à gauche du groupe G.

Un champ de vecteurs X sur le groupe G est invariant à gauche si $\forall g, h \in G,$ on a :

$$(dLg)h(X_h) = X_{gh}$$

Pour toute variété réelle ou complexe M, l'espace vectoriel ou complexe des champs de vecteurs sur M noté I(M) est muni d'une structure naturelle d'algèbre de Lie réelle ou complexe dont le crochet de Lie est le crochet des champs de vecteurs.

Le caractère naturel signifie que tout morphisme $f: M \longrightarrow N$ entre les variétés induit un morphisme d'algèbres de Lie $f^*: I(N) \longrightarrow I(M)$.

En particulier, pour M=N=G, nous avons des morphismes $(Lg)^*$ de l'algèbre de Lie $I(G)$ où l'ensemble des points fixes communs à tous ces automorphismes $(Lg)^*$ est une sous-algèbre de Lie de $I(G)$. Les éléments de ces automorphismes sont des champs de vecteurs invariants à gauche sur G [3].

1.3.2. Comme espace tangent en l'élément neutre

Soit T_eG l'espace tangent en l'élément neutre sur le groupe de Lie G. L'application $\begin{cases} \mathcal{G} \longrightarrow T_e\mathrm{G} \\ X \longrightarrow X_e \end{cases}$ (avec X_e la valeur de X en l'élément neutre) est un isomorphisme linéaire. La structure d'algèbre de Lie se transporte via cet isomorphisme en une structure d'algèbre de Lie sur l'espace vectoriel T_eG et donc $\mathcal{G} \cong T_e$G [4].

1.4. Application exponentielle

L'exponentielle de X est définie comme l'image au temps 1 de l'élément neutre e de G. D'une façon précise, il existe une unique fonction c: $\mathbb{R} \longrightarrow G$ dont sa dérivée est donnée par

$c'(t) = X[c(t)]$ avec $c(0) = e$. Sa propriété remarquable est la suivante :

$c(s+t) = c(s)c(t)$ $\forall s$ et $t \in \mathbb{R}$.

En notant V=X_e, $e^v = c(1)$ une paramétrisation qui inclut la variable t, on montre que

$c(t) = e^{tv}$ et $c'(t) = e^{tv}.v$ [5].

Cette fonction est aussi appelée fonction exponentielle. Elle relie l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ au groupe de Lie G et elle définit un difféomorphisme entre un voisinage de 0 dans $\mathcal{G}$ et un voisinage de e dans G.

En général, l'application exponentielle n'est ni surjective ni injective.

1.4.1. Formule de Baker-Campbell-Hausdorff

La formule de Baker-Campbell-Hausdorff (BCH) [6] est la solution Z de l'équation

$expZ = expX \cdot expY$ avec X, Y, Z des éléments d'une algèbre de Lie $\mathcal{G}$. Ce sont des matrices.

Son expression s'écrit :

$$Z = X + Y + \frac{1}{2}[X,Y] + \frac{1}{12}\left([X,[X,Y]] - [Y,[X,Y]] + \cdots\right)$$

Plus explicitement :

$$expX \cdot expY = \exp(X + Y + \tfrac{1}{2}[X,Y] + \tfrac{1}{12}[X,[X,Y]] + \cdots) \text{ (BCH1).} \qquad (1.3)$$

C'est cette formule dite de Baker- Campbell- Hausdorff que nous utiliserons dans la suite de notre travail pour déterminer la loi d'un groupe de Lie si la structure de Lie de l'algèbre de Lie associée est donnée. De plus, il existe une autre variante de la formule de Baker-Campbell-Hausdorff donnée par :

$\exp(-X)\, expY exp(X) = \exp(Y + [X,Y] + \frac{1}{2!}\big[X,[X,Y]\big] + \cdots)$ (BCH2). (1.4)

Une autre formule reliée à la formule de BCH, est la formule de Zassenhaus:

$$e^{X+Y} = e^X . e^Y e^{-\frac{1}{2}[X,Y]} e^{\frac{1}{6}(2[Y,[X,Y]]+[X,[X,Y]])} e^{-\frac{1}{24}(\big[[[X,Y],X],X\big]+3\big[[[X,Y],X],Y\big]+[[X,Y],Y],Y])} \ldots$$

Dans tous les cas, lorsque X et Y commutent, nous avons: $expX \cdot expY = \exp(X+Y)$, l'application exponentielle usuelle.

Lorsque X et Y commutent avec leur commutateur (c'est- à - dire [X,[X,Y]]=[Y,[X,Y]]=0), le résultat se réduit à la formule de Glauber :$expX. expY = \exp(X + Y + \frac{1}{2}[X,Y])$

Cette formule est souvent utilisée en Physique quantique avec les opérateurs X et P qui sont respectivement l'opérateur position et l'opérateur impulsion.

1.5. Passage de l'algèbre de Lie au groupe de Lie associé

Le passage de l'algèbre de Lie au groupe de Lie se fait en utilisant l'application exponentielle et les formules de BCH en multipliant deux éléments quelconques du groupe de Lie.

En effet, soit G un groupe de Lie et soit $\mathcal{G}$ une algèbre de Lie engendrée par les champs de vecteurs X_i ,$i = 1, \ldots, n = \dim \mathcal{G}$ telle que la structure de Lie soit donnée par les constantes de structure C_{ij}^k avec $\big[X_i, X_j\big]$=$X_k C_{ij}^k$. (1.5)

L'élément général g du groupe G associé à cette algèbre de Lie s'écrit comme un produit d'exponentiels de la forme :

$$g = \prod_{i=1}^{n} \exp(x_i\, X_i)$$

où x_i sont les paramètres du groupe et X_i sont les générateurs de l'algèbre de Lie associée, $\forall i = 1, \ldots, n$ où n est la dimension de $\mathcal{G}$. En multipliant deux éléments quelconques g et g' et en utilisant les formules de BCH, nous obtenons la loi du groupe G comme nous allons le voir dans les constructions que nous allons développer dans les sections suivantes.

1.6. Action adjointe et coadjointe

1.6.1. Action adjointe

En mathématiques, il existe deux notions d'actions coadjointes :

. l'action adjointe d'un groupe de Lie sur l'algèbre de Lie ;

. l'action adjointe d'une algèbre de Lie sur elle-même.

Notons que la première action est une action de groupe de Lie et la seconde est une action d'algèbre de Lie.

Considérons un groupe de Lie G et un élément g de G. Le groupe de Lie G opère sur lui-même par une translation à gauche définie par :

$$L_g: G \longrightarrow G, h \longmapsto gh$$

et par une translation à droite définie par :

$$R_g: G \longrightarrow G, h \longmapsto hg.$$

Par l'associativité de la loi du groupe, nous obtenons les relations suivantes :

$$L_g . L_h = L_{gh};$$

$$R_g . L_h = R_{hg};$$

$$L_{g^{-1}} = L_g^{-1}, R_{g^{-1}} = R_g^{-1}.$$

En particulier, les applications L_g et R_g sont des difféomorphismes de G, c'est-à-dire qu'ils agissent comme des dérivations.

Aussi, grâce à l'associativité de la loi du groupe G, les actions L_g et R_g commutent.

Proposition 1.1

Soit $R_g^{-1} L_g: G \longrightarrow G, h \longmapsto ghg^{-1}$, l'automorphisme intérieur du groupe G. Il laisse l'unité e du groupe fixe, c'est-à-dire que $R_g^{-1} L_g(e) = geg^{-1} = e$.

Nous pouvons définir la dérivée de $R_g^{-1} L_g$ en l'unité e, c'est-à-dire l'application induite des espaces tangents comme suit :

$Ad_g: \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}, \xi \longmapsto \frac{d}{dt} R_g^{-1} L_g(e^{t\xi})|_{t=0}$, où $\mathcal{G} = T_e G$ est l'algèbre de Lie du groupe G ; c'est l'espace tangent à G en son élément neutre e. Cette définition a un sens parce que $R_g^{-1} L_g(e^{t\xi})$ représente une courbe dans $\mathcal{G}$ et passe par l'identité en $t = 0$.

Donc, $g\xi g^{-1} \in \mathcal{G}$.

Il s'en suit la proposition suivante :

Proposition 1.2

Pour tout élément $\xi \in \mathcal{G}$, on a :

$$Ad_g(\xi) = g\xi g^{-1}, g \in G$$

En effet,

$$Ad_g(\xi) = \frac{d}{dt} R_g^{-1} L_g\left(e^{t\xi}\right)|_{t=0}$$

$$= \frac{d}{dt} g e^{t\xi} g^{-1}|_{t=0}$$

$$= \frac{d}{dt} g(\textstyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n \xi^n}{n!}) g^{-1}|_{t=0}$$

$$= \frac{d}{dt} \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} g\xi^n g^{-1}|_{t=0}$$

$$= \frac{d}{dt} \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} g\xi g^{-1}. g\xi g^{-1}. g\xi g^{-1}. g\xi g^{-1} \dots g\xi g^{-1}|_{t=0}$$

$$= \frac{d}{dt} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} (g\xi g^{-1})^n|_{t=0}$$

$$= \frac{d}{dt} e^{t(g\xi g^{-1})}|_{t=0}$$

$$= g\xi g^{-1} \in \mathcal{G}. \tag{1.6}$$

Définition 1.5

L'application $Ad_g : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}, \xi \longmapsto \frac{d}{dt} R_g^{-1} L_g\left(e^{t\xi}\right)|_{t=0} = g\xi g^{-1}$ est appelée action adjointe du groupe G sur son algèbre de Lie $\mathcal{G}$.

L'orbite adjointe de ξ est définie par :

$\vartheta_G(\xi) = \left\{Ad_g(\xi) : g \in G\right\}$

Proposition 1.3

La représentation adjointe

$Ad : G \longrightarrow Aut(\mathcal{G})$ est un morphisme de groupes. C'est-à-dire :

$$Ad_{gh} = Ad_g \circ Ad_h ; \forall g, h \in G.$$

En effet,

Pour tout élément $\xi \in \mathcal{G}$, on a :

$$Ad_{gh}(\xi) = (gh)\xi(gh)^{-1}$$

$$= gh\xi h^{-1}g^{-1}$$

$$= g(Ad_h(\xi))g^{-1}$$

$$= Ad_g(Ad_h(\xi))$$

$$= Ad_g \circ Ad_h(\xi).$$

D'où $$Ad_{gh} = Ad_g \circ Ad_h. \tag{1.7}$$

Nous montrons aussi que :

$$Ad_{gh} = Ad_g . Ad_h.$$

En effet : $$Ad_{gh}(\xi) = gh\xi(gh)^{-1}$$

$$Ad_{gh}(\xi) = gh\xi h^{-1}g^{-1} \tag{1.8}$$

Et $$Ad_g . Ad_h(\xi) = Ad_g(h\xi h^{-1})$$

$$Ad_g . Ad_h(\xi) = gh\xi h^{-1}g^{-1}. \tag{1.9}$$

En comparant (1.8) et (1.9), nous obtenons :

$$Ad_{gh}(\xi) = Ad_g . Ad_h(\xi).$$

D'où $$Ad_{gh} = Ad_g . Ad_h. \tag{1.10}$$

Proposition 1.4

$\forall g \in G,$ l'action de $\mathcal{G}$ est un isomorphisme d'algèbres :

$[Ad_g(\xi_1), Ad_g(\xi_2)] = Ad_g[\xi_{1,}\xi_2], \forall \xi_1, \xi_2 \in \mathcal{G}$(2).

En effet,

$$Ad_g[\xi_1, \xi_2] = Ad_g(\xi_1\xi_2 - \xi_2\xi_1)$$

$$= g(\xi_1\xi_2 - \xi_2\xi_1)g^{-1}$$

$$= g\xi_1\xi_2 g^{-1} - g\xi_2\xi_1 g^{-1}$$

$$= g\xi_1 g^{-1}. g\xi_2 g^{-1} - g\xi_2 g^{-1}. g\xi_1 g^{-1}$$

$$= [g\xi_1 g^{-1}, g\xi_2 g^{-1}]$$

$$= \left[Ad_g(\xi_1), Ad_g(\xi_2)\right]. \tag{1.11}$$

Proposition 1.5

$\forall \boldsymbol{\xi} \in \mathcal{G}, \eta \in End(\mathcal{G})$ et en posant que $Ad_\xi = Ad_{*e}(\xi)$;

Alors $Ad_\xi(\eta) = [\xi, \eta]$

En effet,

$Ad_\xi(\eta) = Ad_{*e}(\xi)(\eta)$

$= \frac{d}{dt} Ad_g(t)(\eta)$

$=\frac{d}{dt}(g(t)\eta g^{-1}(t))|_{t=0}$

$=\dot{g}(t)\eta g^{-1}(t)|_{t=0} + g(t)\eta \dot{g}^{-1}(t)|_{t=0}$

$=\dot{g}(t)\eta g^{-1}(t)|_{t=0} - g(t)\eta g^{-2}(t)\dot{g}(t)|_{t=0}$

$=\dot{g}(t)\eta g^{-1}(t)|_{t=0} - \eta g^{-1}(t)\dot{g}(t)|_{t=0}$

$=\dot{g}(0)\eta - \eta\dot{g}(0)$

$=\xi\eta - \eta\xi$

$=[\xi, \eta]$ avec $\dot{g}(0)= \xi$ et $g^{-1}(0) = I_n$

1.6.2. Action coadjointe

L'action coadjointe ρ d'un groupe de Lie G est l'action naturelle de G sur le dual de son algèbre de Lie $\mathcal{G}$.

Plus explicitement, le groupe de Lie G agit par conjugaison sur l'espace cotangent T_g^* en l'élément neutre e par le morphisme de groupe de Lie :

$\rho: G \longrightarrow End(\mathcal{G}^*)$.

Soit T_g^*G, l'espace cotangent au groupe G en g qui est le dual de l'espace tangent T_gG. Un élément $\rho \in T_g^*G$ est une forme linéaire sur T_gG et sa valeur sur $\eta \in T_gG$ sera désignée par $\rho(\eta) = \langle \rho, \eta \rangle$ (c'est la dualité entre l'espace tangent et l'espace cotangent).

En particulier, soit $\mathcal{G}^* \equiv T_e^*G$, l'espace vectoriel dual de l'algèbre de Lie $\mathcal{G} \equiv T_gG$; c'est l'espace cotangent au groupe G en son élément neutre e.

Définition 1.6

L'opérateur dual $Ad_g^*: \mathcal{G}^* \longrightarrow \mathcal{G}^*$, de Ad_g est défini par $\langle Ad_g^*(\rho), \eta \rangle = \langle \rho, Ad_g\eta \rangle$;

Ad_g^* s'appelle action coadjointe du groupe de Lie G sur le dual de son algèbre de Lie.

Comme nous avons défini l'action adjointe de $\mathcal{G}$ à partir de la représentation adjointe de G, nous pouvons définir l'action coadjointe de G sur le dual de l'algèbre de Lie par :

$Ad^*: \mathcal{G} \longrightarrow L(\mathcal{G}^*), Ad_x^* = \frac{d}{dt} Ad^*_{\exp(tx)} m$ avec $t = 0$ et m un élément de l'algèbre de Lie duale

$= -(Ad_x)^*(m), x \in \mathcal{G}, m \in \mathcal{G}^*$

L'action Ad^* est un objet algébrique sur $\mathcal{G}$.

Proposition 1.6

On a $Ad_{gh}^* = Ad_h^*. Ad_g^*$.

En effet,

Soient $\zeta \in \mathcal{G}^*$et $\eta \in \mathcal{G}$, nous avons :

$\langle Ad_{gh}^*(\zeta), \eta \rangle = \langle \zeta, Ad_{gh}(\eta) \rangle$ en raison de la dualité entre $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}^*$.

En utilisant la relation (1.10), nous avons :

$$\langle Ad_{gh}^*(\zeta), \eta \rangle = \langle \zeta, Ad_h. Ad_g(\eta) \rangle$$
$$\langle Ad_{gh}^*(\zeta), \eta \rangle = \langle \zeta, Ad_h(\eta). Ad_g(\eta) \rangle$$

$$\langle Ad_{gh}^*(\zeta), \eta \rangle = \langle Ad_h^*. Ad_g^*(\zeta), \eta \rangle$$

D'où $$Ad^*_{gh} = Ad^*_h . Ad^*_g. \tag{1.12}$$

Soit $Ad^*_{g,}$ l'application $Ad^*: \mathcal{G} \longrightarrow End(\mathcal{G}^*),\, g \longmapsto Ad^*(g) = Ad^*_{g,}$ et considérons aussi sa dérivée en l'élément neutre du groupe notée $ad^* \equiv (Ad^*)_{*e}: \mathcal{G} \longrightarrow End(\mathcal{G}^*),\, \xi \longmapsto Ad^*_\xi$

Proposition 1.7

Soient $\xi, \eta \in \mathcal{G}$ et $\zeta \in \mathcal{G}^*$.

En posant que $\langle Ad^*_g(\zeta), \eta\rangle = \langle \zeta, [\xi,\eta]\rangle = \langle\{\xi,\zeta\},\eta\rangle$

avec $\{\,.\,,.\}: \mathcal{G}\text{x}\mathcal{G}^* \longrightarrow \mathcal{G}^*, (\xi,\zeta) \longmapsto \{\xi,\zeta\}$ qui est une forme linéaire appelée crochet de Poisson, alors nous avons :

$$ad^*_\xi(\zeta) = \{\xi,\zeta\}.$$

En effet,

$$\langle ad^*_\xi(\zeta),\eta\rangle = \langle (Ad^*)_{*e}(\zeta),\eta\rangle$$

$$= \langle \frac{d}{dt} Ad^*_{e^{t\xi}}(\zeta)|_{t=0}, \eta\rangle, \qquad e^{t\xi}|_{t=0} = e, \frac{d}{dt} e^{t\xi}|_{t=0} = \xi$$

$$\langle Ad^*_\xi(\zeta),\eta\rangle = \frac{d}{dt}\langle Ad^*_{e^{t\xi}}(\zeta),\eta\rangle|_{t=0}$$

$$= \frac{d}{dt}\langle \zeta, Ad_{e^{t\xi}}(\eta)|_{t=0}\rangle$$

$$= \langle \zeta, \frac{d}{dt} Ad_{e^{t\xi}}(\eta)|_{t=0}\rangle$$

$$= \langle \zeta, Ad_\xi \eta\rangle$$

$$= \langle \zeta, [\xi,\eta]\rangle$$

$$= \langle\{\xi,\zeta\},\eta\rangle.$$

D'où $$Ad^*_\xi(\zeta) = \{\xi,\zeta\}. \tag{1.3}$$

1.7. Orbite d'une action coadjointe

Une orbite ϑ d'un élément $\alpha \in \mathcal{G}^*$ sous l'action coadjointe du groupe sur l'algèbre de Lie duale est par définition donnée par: $\vartheta(\alpha) = \{Ad_g^*(\alpha)\}$ où $\alpha \in \mathcal{G}^*, g \in G$, c'est-à-dire l'ensemble des valeurs atteintes par cette action [7].

On sait que l'algèbre de Lie duale $(\mathcal{G}^*, K(x))$, où K(x) est la 2- forme de Kirillov est une variété de Poisson[7].

L'étude des orbites coadjointes joue un rôle important dans la théorie de la représentation. Leur propriété importante est qu'elles sont munies d'une structure de variété symplectique invariante.

Notons aussi que les orbites coadjointes sont des variétés symplectiques comme nous allons le voir dans le chapitre suivant [8].

Rappelons que si M est une variété différentielle de dimension finie :

- une forme symplectique sur M est une 2-forme différentielle ω qui est fermée (c 'est-à-dire dω=0) et partout de rang égal à la dimension de M.

- une variété symplectique (M, ω) est une variété différentielle M munie d'une 2-forme symplectique.

Donnons quelques propriétés des variétés symplectiques :

- Soit (M, ω) une variété symplectique. Pour tout élément x de M, l'espace vectoriel tangent en x noté T_xM muni de la forme bilinéaire $\omega(x)$, est un espace vectoriel symplectique.

- L'espace $\mathbb{R}^{2n}$(de coordonnées $x^1, \dots, x^{2n}$) muni de la 2-forme ω=$\sum_{i=1}^{n} dx^{n+i} \wedge dx^i$ est une variété symplectique.

- Plus généralement, un espace symplectique (V, ω) peut etre considéré comme une variété symplectique, ω étant considéré comme une 2-forme différentielle sur V, fermée et non dégénérée.

En effet, toute base de V correspond à une carte dans laquelle ω possède de composantes, ce qui prouve que dω=0.

-Sur une variété différentielle de dimension $2n$, toute 2-forme différentielle est automatiquement fermée. Par suite, toute variété différentielle de dimension $2n$ peut être munie d'une structure symplectique [5].

En particulier, l'orbite d'une action coadjointe munie de la restriction de la 2-forme de Kirillov à l'orbite a une structure de variété symplectique.

Dans le premier chapitre, nous venons de passer en revue toutes les notions que nous avons jugé indispensables pour la compréhension du reste du travail. Dans le chapitre suivant, nous allons parler de façon détaillée de l'approche de Jean Marie Souriau [9] dite méthode des orbites coadjointes qui permet d'associer à un groupe de Lie une structure symplectique.

CHAPITRE II: METHODE DES ORBITES COADJOINTES

La méthode des orbites coadjointes est l'une des méthodes mathématiques pour la physique et permet de prouver effectivement que la géométrie symplectique est le cadre géométrique de la mécanique classique puisque les orbites coadjointes sont des structures symplectiques associées à des systèmes dynamiques élémentaires. Une orbite coadjointe est munie d'une 2-forme symplectique qui provient elle-même d'une 2-forme antisymétrique appelée 2-forme de Kirillov. Les orbites coadjointes sont caractérisées par des invariants dus à l'action coadjointe. La méthode des orbites coadjointes joue également un rôle important dans la quantification géométrique, ce qui permet de faire correspondre à des observables classiques de la mécanique classique des systèmes quantiques en mécanique quantique.

2.1. La méthode des orbites coadjointes proprement dite

Soient G un groupe de Lie et $\mathcal{G}$ son algèbre de Lie. Soit aussi Ad :⟶Aut($\mathcal{G}$) la représentation adjointe de G sur l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ tel que l'automorphisme intérieur Ad_gqui est associé à g∈ G soit défini par: $Ad_g(X) = gXg^{-1} \forall X \in \mathcal{G}$. (2.1)

Considérons maintenant le dual de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ noté $\mathcal{G}^*$; alors l'action coadjointe de $\mathcal{G}$ sur son dual $\mathcal{G}^*$ est notée $Ad^*: \mathcal{G}^* \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathbb{R}$ et est définie comme le dual de la carte Ad :

$\langle Ad_g^*(\alpha), X\rangle = \langle \alpha, Ad_{g^{-1}}X\rangle, \alpha \in \mathcal{G}^*$.

Pour un élément $\alpha \in \mathcal{G}^*$, les orbites coadjointes à travers α sont obtenues comme images de la carte g→ $Ad_g^*\alpha$ où la notation usuelle est $\vartheta_\alpha = \{Ad_g^*(\alpha), \alpha \in \mathcal{G}^*, g \in G\}$. Considérons la dérivée (push forward) de Ad^* qui est le dual de la dérivée de Ad. Elle définit une carte $(Ad_g)_* = Ad_X: \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}$ tel que $Ad_X Y = [X, Y]$ où X est un élément de l'algèbre de Lie correspondant à g∈ G.

La relation $(Ad_g^*)_* = Ad_X^*$ exprime que :

$\langle Ad_X^*(\alpha), Y\rangle = \langle \alpha, [X, Y]\rangle$. (2.2)

Cette relation exprime la dualité entre l'algèbre de Lie et l'algèbre de Lie duale.

Si $\alpha = e^i \in \mathcal{G}^*, X = e_i X^i, Y = e_i Y^i \in \mathcal{G}$, où e^i *et* e_j sont respectivement base de $\mathcal{G}^*$ et base de $\mathcal{G}$, alors :

$\langle Ad_X^*(\alpha), Y\rangle = K_{ij}(\alpha)X^iY^i$où $K_{ij}(\alpha) = -\alpha_k C_{ij}^k$ est la 2-forme de Kirillov sur $\mathcal{G}^*$, les C_{ij}^k étant définis par la relation $[X_i, Y_j] = X_k C_{ij}^k$, $i, j = 1, \dots, n$, les n^3 constantes C_{ij}^k sont appelées constantes de structure dans $\mathcal{G}$.

L'expression $\rho: \mathcal{G} \longrightarrow F(\mathcal{G}^*)$ de $\mathcal{G}$ sur l'espace des champs de vecteurs sur $\mathcal{G}^*$définie par

$\rho(X_i) = K_{ij}(\alpha)\frac{\partial}{\partial \alpha_j}$ est un homomorphisme d'algèbres de Lie tel que

Ker(K(α))={$f \in C^\infty(\mathcal{G}^*, \mathbb{R})$:$\rho(\alpha)f = 0, \alpha \in \mathcal{G}$}.

Cela signifie que ker(K(α)) est l'ensemble de tous les invariants f de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{G}^*$ qui satisfait la relation suivante :

$$K_{ij}(\alpha)\frac{\partial f}{\partial \alpha_j}=0. \qquad (2.3)$$

L'espace quotient $\vartheta_\alpha = \mathcal{G}^*/\ker(K(\alpha))$ encore appelé orbite de l'action coadjointe de G sur $\mathcal{G}^*$ est une variété symplectique dont la forme symplectique σ^{ij} est obtenue à partir de la restriction de la forme de Kirillov à l'orbite, $\Omega_{ij} = K_{ij}/\vartheta_\alpha$ en coordonnées quelconques x_a.

Dans ce cas, la 2-forme symplectique est donnée par $\omega = (\Omega^{-1})^{ab} dx_b \wedge dx_a$.

En coordonnées canoniques (ou de Darboux), cette expression se note: $\omega = dp_i \wedge dq^i$. On obtient ici la 2-forme symplectique standard de $\mathbb{R}^2$ [10].

Dans la section suivante, nous allons montrer que l'orbite de l'action coadjointe d'un groupe de Lie munie de la 2-forme symplectique σ ainsi définie est une variété symplectique.

2.2. Champ vectoriel Hamiltonien et flot Hamiltonien

Soient une variété symplectique (M, ω) et une fonction lisse $H \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ (appelée fonction Hamiltonienne ou observable classique). On associe à la fonction lisse H un champ vectoriel Hamiltonien X_H défini implicitement par $\omega(X_H, .) = -dH$.

Au champ de vecteurs Hamiltonien X_H, on lui associe un groupe à 1- paramètre de difféomorphismes $\phi^t(H)$.

C'est-à-dire homomorphisme de groupes

$\phi_H: (\mathbb{R}, +) \rightarrow Diff(M)$, qu'on nomme flot Hamiltonien de H.

La définition du champ vectoriel Hamiltonien permet de définir le crochet de Poisson de deux observables classiques $f, g \in C^{\infty}(M, \mathbb{R})$ de la façon suivante :

$$\{f, g\} \coloneqq X_f(g).$$

Nous allons avoir la relation existant entre la forme symplectique ω et le crochet de Poisson de deux observables classiques. Cette relation est donnée par: $\{f, g\} = \omega(X_f, X_g)$.

En se servant de la fermeture de la forme symplectique, le calcul montre que le crochet de Poisson satisfait l'identité de Jacobi :

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0. \tag{2.4}$$

En utilisant cette identité de Jacobi, nous obtenons la relation existant entre le crochet de Lie des champs vectoriels Hamiltoniens et la forme symplectique

$$\{f, g\} = [X_f, X_g].$$

Autrement, le crochet de Poisson de l'algèbre de Poisson des fonctions lisses concorde avec le crochet de Lie des champs vectoriels Hamiltoniens [11].

En cordonnées locales de Darboux $\{p_i, q^i\}_{i=1,\dots,n}$, nous avons explicitement

$$\omega = \sum_i dp_i \wedge dq^i. \tag{2.5}$$

Le champ de vecteurs Hamiltonien est alors dans ce cas :

$$X_f = \sum_i \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial p^i}. \tag{2.6}$$

En particulier, les champs de vecteurs Hamiltoniens associés aux coordonnées canoniques sont :

$$X_{p_i} = \frac{\partial}{\partial q^i}, \tag{2.7}$$

$$X_{q^i} = -\frac{\partial}{\partial p_i}. \tag{2.8}$$

Le crochet de Poisson de deux fonctions Hamiltoniennes (ou de deux observables classiques) est donné par :

$$\{f, g\} = \sum_i \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q^i} - \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p^i}. \tag{2.9}$$

En particulier, le crochet de Poisson des coordonnées canoniques est :

$$\{p_i, q^j\} = \delta_i^j = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si i} \neq \text{j} \end{cases}. \tag{2.10}$$

C'est-à-dire que δ_i^j est le symbole de Kronecker.

Soit $\sigma = K_{ij}(\alpha)/_{\vartheta(\alpha)}$ la restriction de la forme de Kirillov à l'orbite. σ est inversible et son inverse σ^{-1} permet de trouver la 2-forme symplectique ω à travers la relation

$\omega = (dp_i \; dq^i)\Omega^{-1}\begin{pmatrix} dp_i \\ dq^i \end{pmatrix}$ en cordonnées de Darboux.

Localement, nous pouvons conclure qu'une orbite coadjointe d'un groupe de Lie est une variété symplectique dont la 2-forme symplectique ω est obtenue à partir de l'inverse de la restriction de la forme de Kirillov à l'orbite. De nombreux exemples de construction de structures symplectiques à partir d'un groupe de Lie sur le dual de son algèbre de Lie ont été développés. Le lecteur soucieux d'approfondir les notions liées à cette méthode et sa version quantique (quantifications géométriques) peuvent consulter plusieurs autres travaux en l'occurrence :

[9], [10], [11], [12],…

2.3. Réalisations symplectiques

Soit (V, ω) une variété symplectique et soit G un groupe de Lie.

L'application D: G→ $Aut(V)$ est un symplectomorphisme si $D_g^* = \omega$. On l'appelle aussi une réalisation symplectique de G sur (V, ω).

Proposition 2.1

Si X est un élément de G et si $D_{\exp(tX)}$ est un symplectomorphisme de (V, ω), alors, X est un champ vectoriel localement Hamiltonien, avec $exp(tX)$, le sous-groupe à un paramètre de difféomorphisme associé au paramètre t.

En fait, le fait que $D_{\exp(tX)}$ soit un symplectomorphisme de (V, ω) signifie que

$D^*_{\exp(tX)}\omega = \omega$. Il s'en suit que $L_X\omega = 0$, où L_X est la dérivée de Lie dans la direction du champ de vecteur X et tandis que i_X est la contraction ou dérivée intérieur du champ de vecteur X. Donc que $i_X(\omega)$ est fermé, ce qui signifie effectivement que X est localement Hamiltonien.

Comme un champ vectoriel Hamiltonien est localement Hamiltonien, nous pouvons conclure que, à un champ vectoriel Hamiltonien correspond une réalisation symplectique.

En résumé, pour construire une structure symplectique ou une réalisation symplectique à partir d'un groupe de Lie, les principales étapes suivantes sont à retenir :

1) Déterminer l'algèbre de Lie associée au groupe de Lie considéré. Elle est engendrée par les champs de vecteurs invariants à gauche correspondant aux paramètres du groupe de Lie, la structure de Lie étant donnée par les crochets de Lie des champs de vecteurs invariants à gauche obtenus.

2) Déterminer une extension (centrale ou non) de l'algèbre de Lie et faire l'analyse dimensionnelle pour trouver les dimensions physiques des nouveaux paramètres d'extension.

3) Trouver la loi du groupe étendu associé à l'extension (centrale ou non) obtenue en multipliant deux éléments de la composante connexe à l'identité du groupe et en utilisant les formules de BCH.

4) Déterminer l'action adjointe du groupe étendu sur son algèbre de Lie et l'action coadjointe du groupe étendu sur le dual de son algèbre de Lie.

5) Déterminer le(s) invariant(s) de l'action coadjointe (si il(s) existe(nt)) et donner leur(s) interprétation(s) physique(s).

6) Déterminer la 2-forme de Kirillov et la 2-forme symplectique à l'aide de l'inverse de la restriction de la 2-forme de Kirillov à l'orbite coadjointe. L'orbite coadjointe munie de cette 2-forme symplectique est une variété symplectique.

7) Déterminer la réalisation symplectique correspondante, les équations de mouvement du système dynamique correspondant ainsi que les solutions de ces équations de mouvement.

Dans le chapitre suivant, donnons un exemple de construction d'une structure symplectique à partir d'un groupe de Lie en utilisant la méthode des orbites coadjointes décrite précédemment.

CHAPITRE III: REALISATIONS SYMPLECTIQUES ASSOCIEES A UNE CLASSE DE GROUPES DE LIE DE DIMENSION TROIS

Le présent chapitre et le dernier de notre travail porte sur une application de la construction de structures symplectiques et de réalisations symplectiques à partir de groupes de Lie. Plus précisément, en utilisant la méthode des orbites coadjointes telle que décrite de façon détaillée dans le chapitre précédent, nous construisons dans ce chapitre l'orbite coadjointe associée à une classe de groupes de Lie de dimension trois. Cette classe de groupes de Lie est associée à la VI$^{\text{ème}}$ classe des algèbres de Lie réelles de dimension trois telle que donnée dans la classification faite par Ganbouri [1].

La structure symplectique obtenue à partir d'une extension centrale du groupe de Lie correspond à un système dynamique élémentaire d'après la prescription de Souriau [9].

La réalisation symplectique déduite de l'action coadjointe permet de trouver les équations du mouvement correspondant. Nous utilisons les méthodes d'analyse pour trouver les intégrales premières (ou solutions) du système différentiel donné par les équations de mouvement.

Dans ce chapitre, nous utilisons, comme nous l'avons déjà signalé précédemment, l'analyse dimensionnelle pour donner un sens physique aux paramètres d'extension et aux invariants de l'action coadjointe.

3.1. Présentation de la classe de groupes de Lie

La classe de groupes de Lie considérée dans ce travail est celle dont la classe d'algèbre de Lie associée correspond à la classe VI dans la classification des algèbres de Lie de dimension trois faite par Ganbouri[1]. Cette VI$^{\text{è}}$ classe est donnée par la structure de Lie suivante :

[P,H]=0 ; [P,K]=0 et [H,K]=λP où λ est un paramètre réel. Dans ce travail, pour raison de simplification, nous avons considéré le cas particulier où $\lambda = 1$. Considérons sa réalisation concrète définie de la manière suivante :

Posons H, K, P tels que les paramètres associés soient t, v et x, respectivement avec pour dimension physiques une durée, une vitesse et une longueur.

Nous allons chercher la loi de G.

L'élément général du groupe s'écrit comme un produit d'exponentiels comme nous l'avons déjà signalé.

Pour cela, posons que $g=exp(tH)exp(xP)\exp(vK)$.

Comme P et K commutent, nous pouvons écrire que $g = exp(tH)exp(xP + vK)$

Soit aussi $g' = exp(t'H)exp(x'P + v'K)$ un autre élément de G.

En multipliant g par g', on a :

$$gg'=\exp(tH)\exp(xP + vK)\exp(t'H)\exp(x'P + v'K) \qquad (3.1)$$

Insérons l'élément neutre $\exp(t'H)\exp(-t'H)$ dans l'expression (3.1), nous obtenons:

$$gg' = \exp(tH)\exp(t'H)\exp(-t'H)\exp(xP + vK)\exp(t'H)\, exp(x'P + v'K)$$

Donc, $gg' = \exp\big((t + t')H\big)\, exp(-t'H)exp(xP + vK)exp(t'H)exp(x'P + v'K)$ (3.2)

Dans la relation (3.2), posons $I_1 = exp(-t'H)exp(xP + vK)exp(t'H)$ (3.3)

et calculons l'expression (3.3).

Nous allons nous servir de la deuxième formule de Baker-Campbell-Hausdorff (1.4) c'est-à-dire de la forme :

$$exp(-A)expBexpA = exp(B + [A, B] + \tfrac{1}{2}\big[A, [A, B]\big] + \cdots). \qquad (3.4)$$

On a: $I_1 = exp(-t'H)exp(xP + vK)exp(t'H)$

$$I_1 = \exp(xP + vK + [-t'H, xP + vK] + \tfrac{1}{2}[-t'H, [-t'H, xP + vK]])$$

$$I_1 = \exp(xP + vK - \mathrm{t'x[H,P]} - t'v[H, K] + \tfrac{1}{2}[-t'H, [-t'H, xP + vK]])$$

$$I_1 = \exp(xP + vK - \mathrm{t'vP} + \frac{1}{2}[-t'H, -t'vP])$$

$$I_1 = \exp(xP + vK - \mathrm{t'vP} + \frac{1}{2}t'^2v[H, P])$$

$$I_1 = \exp(xP + vK - \mathrm{t'vP})$$

La relation (3.1) devient :

$$gg' = \exp((t+t')H)exp(xP + vK - t'vP)exp(x'P + v'K) \qquad (3.5)$$

Dans la relation (3.5), posons $I_2 = \exp(xP + vK - t'vP)\exp(x'P + v'K)$.

D'après la formule de BCH1 (1.3) qui est de la forme suivante:

$$expAexpB = exp\left(A + B + \frac{1}{2}[A,B] + \cdots\right)$$

Nous avons:

$$I_2 = \exp(xP + vK - t'vP + x'P + v'k + \tfrac{1}{2}[xP + vK - t'vP, x'P + v'K] + \ldots)$$

$$I_2 = \exp(xP + vK - t'vP + x'P + v'k + \frac{1}{2}[xP, x'P] + \frac{1}{2}[xP, v'K] + \frac{1}{2}[vK, x'P] + \frac{1}{2}[vK, v'K] - \frac{1}{2}[t'vP, x'P] - \frac{1}{2}[t'vP, v'K] + \cdots)$$

$$I_2 = \exp(xP + vK - t'vP + x'P + v'K)$$

La relation (3.5) devient :

$$gg' = \exp((t+t')H)\ exp(xP + vK - t'vP + x'P + v'K)$$

$$gg' = \exp((t+t')H \exp((v+v')K + (x + x' - t'v)P)$$

ou encore de façon équivalente en posant $g = (t, v, x)$ et $g' = (t', v', x')$, nous aurons :

$$gg' = (t, v, x)(t', v', x') = (t + t', v + v', x + x' - t'v) \qquad (3.6)$$

Nous pouvons vérifier qu'à partir de cette loi du groupe de Lie, nous pouvons retrouver la structure de Lie de l'algèbre de Lie associée.

Déterminons les champs de vecteurs invariants à gauche qui sont donnés par définition par la relation : $X_i^L = \frac{\partial}{\partial x_i'}(gg')^k_{|e}\left(\frac{\partial}{\partial k}\right)$.

Nous allons commencer à déterminer l'élément neutre de cette loi du groupe. Après avoir déterminé les champs de vecteurs invariants à gauche, nous chercherons les crochets de Lie de ces champs de vecteurs et nous savons que les crochets de Lie définissent complétement l'algèbre de Lie.

L'élément neutre est (0,0,0). (3.7)

L'inverse d'un élément g de ce groupe de Lie est $g^{-1} = (-t, -v, -x - tv)$ (3.8)

En posant :

H, le générateur associé au paramètre t ;

K, le générateur associé au paramètre v ;

et P, le générateur associé au paramètre x, nous obtenons les champs de vecteurs invariants à gauche suivants :

$$H=\frac{\partial}{\partial t} - v\frac{\partial}{\partial x},\ K=\frac{\partial}{\partial v} \text{ et } P=\frac{\partial}{\partial x}. \tag{3.9}$$

Ce qui nous permet de retrouver la structure de Lie de l'algèbre de Lie de la classe de groupes de Lie considérée.

Donc, $[P, H] = 0$; $[P, K] = 0$; $[H, K] = P$. (3.10)

La 2-forme de Kirillov du groupe de Lie considéré sera déterminée en utilisant les constantes de structure et on sait que l'algèbre de Lie peut être déterminée par les constantes de structure données par l'expression (1.5).

Par définition, la 2- la forme de Kirillov est donnée par: $K_{ij}(h, k, p) = -X_k C_{ij}^k$ (3.11)

Plus explicitement, $$K_{ij}(h, k, p) = \begin{pmatrix} 0 & -p & 0 \\ p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.12}$$

où h, k, p sont les paramètres conjugués à t, v, x et appartenant à $\mathcal{G}^*$, l'algèbre de Lie duale de $\mathcal{G}$.

La restriction de la forme de Kirillov à l'orbite est donc

$$\Omega(\mathrm{p}) = \begin{pmatrix} 0 & -p \\ p & 0 \end{pmatrix} \tag{3.13}$$

Le déterminant de la matrice Ω(p) est $dét\ \Omega(p) = p^2 \neq 0$

L'inverse de la matrice Ω(p) est $$\Omega^{-1}(p) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{p} \\ -\frac{1}{p} & 0 \end{pmatrix} \tag{3.14}$$

La forme symplectique est donnée par :

$$\omega = (dh \quad dk)\Omega^{-1}(p)\begin{pmatrix} dh \\ dk \end{pmatrix}$$

$$\omega = (dh \quad dk)\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{p} \\ -\frac{1}{p} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} dh \\ dk \end{pmatrix}$$

$$\omega = (dh \quad dk)\begin{pmatrix} \frac{1}{p}dk \\ -\frac{1}{p}dh \end{pmatrix}$$

$$\omega = \frac{1}{p}dh.dk - \frac{1}{p}dk.dh$$

$$\omega = \frac{1}{p}(dh.dk - dk.dh)$$

$$\omega = \frac{1}{p}dh \wedge dk. \qquad (3.15)$$

La relation (3.15) définit la 2-forme symplectique. L'orbite coadjointe munie de cette 2-forme symplectique est une variété symplectique de dimension 2. La méthode des orbites coadjointes appliquée au groupe de Lie considéré nous permet d'obtenir une variété symplectique munie de la 2-forme symplectique standard. Elle est localement isomorphe à $\mathbb{R}^2$.

3.2. Détermination de l'extension centrale de l'algèbre de Lie

L'extension centrale de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ est engendrée par les générateurs H, K, P, A, B tel que [P, H]=A ; [P,K]=B ; [H,K]=P. Les nouveaux générateurs A, B appartiennent au centre c'est- à - dire qu'ils commutent avec les anciens générateurs H, K, P. La nouvelle algèbre de Lie sera effectivement une algèbre de Lie si les générateurs H, K, P, A, B sont tels que toutes les identités de Jacobi possibles soient satisfaites.

[H,[K,P]]+[K,[P,H]]+[P,[H,K]]=0 ?

⟹[H,[K,P]]+[K,[P,H]]+[P,[H,K]]=[H,-B]+[K,A]+[P,P]

Or [H,-B]=0 ; [K,A]=0 ; [P,P]=0

D'où [H,[K,P]]+[K,[P,H]]+[P,[H,K]]=0

Donc, l'introduction des nouveaux générateurs ne posent aucune contrainte pour que la nouvelle algèbre soit une algèbre de Lie. Cela signifie que l'extension centrale existe.

3.3. Analyse dimensionnelle

L'analyse dimensionnelle va nous permettre de trouver la dimension physique des nouveaux générateurs A et B.

Nous allons nous servir de la formule de l'action vue dans le cours de physique. Elle a pour dimension le produit de l'énergie par le temps : [action]=ml^2t^{-1} avec m une masse ; l une longueur et t le temps.

Comme on a posé que A=[P,H], soit α le paramètre conjugué associé à A, nous avons :

$[\alpha]=\frac{\mathrm{m}l^2t^{-1}}{l.t}=mlt^{-2}$.

α est le paramètre conjugué appartenant à l'algèbre de Lie duale et a pour dimension physique une force. Nous pouvons donc poser F(Force), le générateur de l'algèbre de Lie correspondant à α.

De même, comme on a posé également que [P,K]=B, soit β le paramètre conjugué associé à B.

Nous avons :

$[\beta]=\frac{\mathrm{m}l^2t^{-1}}{l.lt^{-1}}=m$.

Donc, β a la dimension physique d'une masse. Donc, nous posons M le générateur de l'algèbre de Lie correspondant à β.

Par la suite, nous allons poser que [P,H]=F ; [P,K]=M ; [H,K]=P est la structure de Lie de l'extension centrale de l'algèbre de Lie.

3.4. Loi du groupe étendu

Comme nous l'avons vu, les nouveaux générateurs F et M commutent avec les anciens générateurs, ils génèrent le centre de l'algèbre de Lie étendue. La loi du groupe étendue que nous allons déterminer nous aidera à trouver les orbites coadjointes, de faire les réalisations symplectiques et de trouver à partir de ces réalisations symplectiques, les équations du mouvement et leurs solutions.

Soient pour cela F, M, H, K, P, les champs de vecteurs de l'algèbre de Lie étendue associés respectivement aux paramètres η, ψ, t, v, x tels que [P,H]=F, [P,K]=M et [H,K]=P soit la structure de Lie de l'algèbre de Lie étendue, η et ψ étant les nouveaux paramètres du groupe de Lie étendu.

Nous écrivons que $g = exp(tH)exp(xP + vK)$ et l'élément général de la composante connexe à l'identité $\tilde{G}$ (ou groupe étendu de G) $\tilde{g}$ s'écrit :

$\tilde{g} = \exp(\eta F)\exp(\psi M)\exp(tH)\exp(xP + vK)$.

Prenons $\widetilde{g'} = \exp(\eta' F)\exp(\psi' M)\exp(t'H)\exp(x'P + v'K)$ un autre élément de $\tilde{G}$.

Pour trouver la loi de $\tilde{G}$, multiplions les deux éléments $\tilde{g}$ et $\widetilde{g'}$.

$$\tilde{g}\widetilde{g'} = \exp(\eta F)\exp(\psi M)\exp(tH)\exp(xP + vK)\exp(\eta' F)\exp(\psi' M)\exp(t'H)\exp(x'P + v'K)$$

$$\tilde{g}\,\widetilde{g'} = \exp((\eta + \eta')F)\exp((\psi + \psi')\,M) exp(tH)\exp(xP + vK)\exp(t'H)\exp(x'P + v'K)$$

En insérant l'élément neutre $\exp(t'H)\exp(-t'H)$, on a :

$$\tilde{g}\widetilde{g'} = \exp((\eta + \eta')F)\exp((\psi + \psi')\,M) exp(tH)\exp(t'H)\exp(-t'H)\exp(xP + vK)\exp(t'H)\exp(\mathrm{x'P + v'K}))$$

$$\tilde{g}\widetilde{g'} = \exp((\eta + \eta')F)\exp((\psi + \psi')\,M)\exp((t + t')H) exp(-t'H)\exp(xP + vK)\exp(t'H)\exp(x'P + vK) \tag{3.16}$$

Dans la relation (3.16), posons que $I_1 = exp(-t'H)\exp(xP + vK)\exp(t'H)$.

Calculons I_1en utilisant la formule de (3.4). Nous avons :

$$I_1 = xp(-t'H)\exp(xP + vK)\exp(t'H).$$

$$I_1 = \exp(xP + vK + [-t'H, xP + vK] + \tfrac{1}{2}\big[-t'H, [-t'H, xP + vK]\big] + \cdots)$$

$$I_1 = \exp(xP + vK - t'x[H, P] - t'v[H, K] + \tfrac{1}{2}[-t'H, [-t'H, xP + vK] + \cdots)$$

$$I_1 = \exp(xP + vK + t'xF - t'vP + \frac{1}{2}[-t'H, t'xF - t'vP] + \cdots)$$

$$I_1 = \exp(xP + vK + t'xF - t'vP - \frac{1}{2}[t'H, t'xF] + \frac{1}{2}[t'H, t'vP] + \cdots)$$

$$I_1 = \exp(xP + vK + t'xF - t'vP - \frac{1}{2}t'^2x[H, F] + \frac{1}{2}t'^2v[H, P])$$

$$I_1 = \exp(xP + vK + t'xF - t'vP - \frac{1}{2}t'^2vF) \quad (3.17)$$

La relation (3.16) devient :

$$\tilde{g}\widetilde{g'} = \exp((\eta + \eta')F)\exp((\psi + \psi')M)\exp((t + t')H)exp(xP + vK + t'xF - t'vP - \frac{1}{2}t'^2vF)\exp(x'P + v'K) \quad (3.18)$$

Dans l'expression (3.18), posons $I_2 = exp(xP + vK + t'xF - t'vP - \frac{1}{2}t'^2vF)\exp(x'P + v'K)$.

En utilisant l'expression (1.3), nous avons :

$$I_2 = exp(xP + vK + t'xF - t'vP - \frac{1}{2}t'^2vF)exp(x'P + v'K)$$

$$I_2 = \exp(xP + vK + t'xF - t'vP - \frac{1}{2}t'^2vF + x'P + v'K + \frac{1}{2}\left[xP + vK + t'xF - t'vP - \frac{1}{2}t'^2vF, x'P + v'K\right] + \cdots)$$

$$I_2 = \exp(xP + vK + t'xF - t'vP - \frac{1}{2}t'^2vF + x'P + v'K + \frac{1}{2}[xP, x'P] + \frac{1}{2}[xP, v'K] + \frac{1}{2}[vK, x'P] + \frac{1}{2}[vK, v'K] + \frac{1}{2}[t'xF, x'P] + \frac{1}{2}[t'xF, v'K] - \frac{1}{2}[t'vP, x'P] - \frac{1}{2}[t'vP, v'K] - \frac{1}{2}[t'^2vF, x'P] - \frac{1}{2}[t'^2vF, v'K] + \ldots)$$

$$I_2 = \exp(xP + vK + t'xF - t'vP - \frac{1}{2}t'^2vF + x'P + v'K + \frac{1}{2}xv'M - \frac{1}{2}vx'M - \frac{1}{2}t'vv'M) \quad (3.19)$$

En remplaçant l'expression (3.19) dans (3.18), nous aurons :

$$\tilde{g}\,\widetilde{g'} = \exp((\eta + \eta')F)\exp((\psi + \psi')M)exp((t + t')H)\exp(xP + vK + t'xF - t'vP - \frac{1}{2}t'^2vF + x'P + v'K + \frac{1}{2}xv'M - \frac{1}{2}vx'M - \frac{1}{2}t'vv'M)$$

$$\tilde{g}\,\tilde{g}' = \exp\big((\eta+\eta')F\big)\exp((\psi+\psi')\,M)\exp((t+t')H)exp\Bigg((x+x'-t'v)P+(v+v')K$$
$$+\left(t'x-\frac{1}{2}t'^2v\right)F+\left(\frac{1}{2}xv'-\frac{1}{2}vx'-\frac{1}{2}t'vv'\right)M\Bigg)$$

$$\tilde{g}\,\tilde{g}' = \exp(\left(\eta+\eta'+t'x-\frac{1}{2}t'^2v\right)F)\exp(\left(\psi+\psi'+\frac{1}{2}xv'-\frac{1}{2}vx'\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}t'vv'\right)M)\exp\big((t+t')H)exp((v+v')K\big)\exp\big((x+x'-t'v)P\big).$$

La loi du groupe étendu $\tilde{G}$ est :

$\tilde{g}\,\tilde{g}'$=$(\eta,\psi,t,v,x)(\eta',\psi',t',v',x') = \Big(\eta+\eta'+t'x-\frac{1}{2}t'^2v,\psi+\psi'+\frac{1}{2}xv'-\frac{1}{2}vx'-$
$\frac{1}{2}t'vv',t+t',v+v',x+x'-t'v\Big)$. (3.20)

Dans la suite, nous allons chercher l'action adjointe du groupe $\tilde{G}$ sur l'algèbre de Lie étendue $\hat{\mathcal{G}}$ et nous allons utiliser l'expression (3.20) et l'élément symétrique du groupe de Lie étendu $\tilde{G}.P$our cela, cherchons d'abord l'élément neutre et l'élément symétrique du groupe de Lie étendu $\tilde{G}$.

L'élément neutre est $e = (0,0,0,0,0)$ (3.21)

L'élément symétrique est déduit de la relation :

$\tilde{g}\,\tilde{g}' = e$ où $\tilde{g}'$ est l'élément symétrique de $\tilde{g}$ et e le neutre de G.

D'où :

$$\left(\eta+\eta'+t'x-\frac{1}{2}t'^2v,\psi+\psi'+\frac{1}{2}xv'-\frac{1}{2}vx'-\frac{1}{2}t'vv',t+t',v+v',x+x'-t'v\right)$$
$$=(0,0,0,0,0)$$

$$\begin{cases} \eta+\eta'+t'x-\frac{1}{2}t'^2v=0 \\ \psi+\psi'+\frac{1}{2}xv'-\frac{1}{2}vx'-\frac{1}{2}t'vv'=0 \\ t+t'=0 \\ v+v'=0 \\ x+x'-t'v=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \eta' = -\eta - t'x + \frac{1}{2}t'^2 v \\ \psi' = -\psi - \frac{1}{2}xv' + \frac{1}{2}vx' + \frac{1}{2}t'vv' \\ t' = -t \\ v' = -v \\ x' = -x + t'v \end{cases}$$

$$\begin{cases} \eta' = -\eta + tx + \frac{1}{2}t^2 v \\ \psi' = -\psi + \frac{1}{2}xv + \frac{1}{2}v(-x - tv) + \frac{1}{2}tv^2 \\ t' = -t \\ v' = -v \\ x' = -x - tv \end{cases}$$

$$\begin{cases} \eta' = -\eta + tx + \frac{1}{2}t^2 v \\ \psi' = -\psi + \frac{1}{2}xv - \frac{1}{2}vx - \frac{1}{2}tv^2 + \frac{1}{2}tv^2 \\ t' = -t \\ v' = -v \\ x' = -x - tv \end{cases}$$

$$\begin{cases} \eta' = -\eta + tx + \frac{1}{2}t^2 v \\ \psi' = -\psi \\ t' = -t \\ v' = -v \\ x' = -x - tv \end{cases}$$

L'élément symétrique est $\widetilde{g^{-1}} = \left(-\eta + tx + \frac{1}{2}t^2 v, -\psi, -t, -v, -x - tv\right)$. (3.22)

3.5. Action adjointe du groupe G sur l'algèbre de Lie étendue $\mathcal{G}$

Nous savons que $Ad_{\widetilde{g}}X = \widetilde{g}\,X\widetilde{g^{-1}}$ avec $\widetilde{g^{-1}} = (\eta, \psi, t, v, x)^{-1}$.

En posant $X = (\delta\eta, \delta\psi, \delta t, \delta v, \delta x)$ le champ de vecteurs infinitésimal de $\mathcal{G}$, nous aurons :

$$Ad_{(\eta,\psi,t,v,x)}(\delta\eta, \delta\psi, \delta t, \delta v, \delta x) = (\eta, \psi, t, v, x)(\delta\eta, \delta\psi, \delta t, \delta v, \delta x)\ (\eta, \psi, t, v, x)^{-1}$$

$$= (\eta, \psi, t, v, x)(\delta\eta, \delta\psi, \delta t, \delta v, \delta x)(-\eta + tx + \frac{1}{2}t^2 v, -\psi, -t, -v, -x - tv)$$

$=(\eta, \psi, t, v, x)\left(\delta\eta - \eta + tx + \frac{1}{2}t^2 v - t\delta x - \frac{1}{2}t^2\delta v, \delta\psi - \psi - \frac{1}{2}v\delta x - \frac{1}{2}\delta v(-x - tv) - \frac{1}{2}tv\delta v, \delta t - t, \delta v - v, \delta x - x - tv + t\delta v\right)$

$=(\eta,\psi,t,v,x)\left(\delta\eta-\eta+tx+\frac{1}{2}t^2v-t\delta x-\frac{1}{2}t^2\delta v,\delta\psi-\psi-\frac{1}{2}v\delta x+\frac{1}{2}x\delta v+\frac{1}{2}tv\delta v-\frac{1}{2}tv\delta v,\delta t-t,\delta v-v,\delta x-x-tv+t\delta v\right)$

$=(\eta,\psi,t,v,x)\left(\delta\eta-\eta+tx+\frac{1}{2}t^2v-t\delta x-\frac{1}{2}t^2\delta v,\delta\psi-\psi-\frac{1}{2}v\delta x+\frac{1}{2}x\delta v,\delta t-t,\delta v-v,\delta x-x-tv+t\delta v\right)$

$=(\eta+\delta\eta-\eta+tx+\frac{1}{2}t^2v-t\delta x-\frac{1}{2}t^2\delta v+(\delta t-t)x-\frac{1}{2}(\delta t-t)^2v,\psi+\delta\psi-\psi-\frac{1}{2}v\delta x+\frac{1}{2}x\delta v+\frac{1}{2}x(\delta v-v)-\frac{1}{2}v(\delta x-x-tv+t\delta v)-\frac{1}{2}(\delta t-t)(\delta v-v)v,t+\delta t-t,v+\delta v-v,x+\delta x-x-tv+t\delta v-(\delta t-t)v)$

$=(\delta\eta+tx+\frac{1}{2}t^2v-t\delta x-\frac{1}{2}t^2\delta v+x\delta t-tx-\frac{1}{2}(\delta t^2-2t\delta t+t^2)v,\delta\psi-\frac{1}{2}v\delta x+\frac{1}{2}x\delta v+\frac{1}{2}x\delta v-\frac{1}{2}xv-\frac{1}{2}v\delta x+\frac{1}{2}vx+\frac{1}{2}tv^2-\frac{1}{2}vt\delta v-\frac{1}{2}v\delta t\delta v+\frac{1}{2}v^2\delta t+\frac{1}{2}vt\delta v-\frac{1}{2}tv^2,\delta t,\delta v,\delta x-tv+t\delta v-v\delta t+tv)$

$=(\delta\eta+tx+\frac{1}{2}t^2v-t\delta x-\frac{1}{2}t^2\delta v+x\delta t-tx-\frac{1}{2}v\delta t^2+tv\delta t-\frac{1}{2}t^2v,\delta\psi-\frac{1}{2}v\delta x+\frac{1}{2}x\delta v+\frac{1}{2}x\delta v-\frac{1}{2}xv-\frac{1}{2}v\delta x+\frac{1}{2}vx+\frac{1}{2}tv^2-\frac{1}{2}vt\delta v-\frac{1}{2}v\delta t\delta v+\frac{1}{2}v^2\delta t+\frac{1}{2}tv\delta v-\frac{1}{2}tv^2,\delta t,\delta v,\delta x+t\delta v-v\delta t)$

$$=\left(\delta\eta-t\delta x-\frac{1}{2}t^2\delta v+x\delta t-\frac{1}{2}v\delta t^2+tv\delta t,\delta\psi-v\delta x+x\delta v-\frac{1}{2}v\delta t\delta v+\frac{1}{2}v^2\delta t,\delta t,\delta v,\delta x+t\delta v-v\delta t\right). \tag{3.23}$$

L'expression (3.23) est l'action adjointe du groupe $\tilde{G}$ sur l'algèbre de Lie étendue $\hat{\mathcal{G}}$.

3.6. Action coadjointe du groupe G sur le dual de l'algèbre de Lie

Soient $Ad^*_{(\eta,\psi,t,v,x)}(f,m_0,h,k,p)=(f',m_0',h',k',p')$ où f',m_0',h',k',p' sont des éléments de $\widetilde{\mathcal{G}^*}$ qui sont conjugués aux paramètres η,ψ,t,v,x de $\tilde{G}$

et $Ad_{(\eta,\psi,t,v,x)}(\delta\eta,\delta\psi,\delta t,\delta v,\delta x)=(\delta\eta',\delta\psi',\delta t',\delta v',\delta x')$.

En utilisant la dualité entre l'algèbre de Lie $\hat{\mathcal{G}}$ et son dual $\widetilde{\mathcal{G}^*}$, nous avons :

$$\begin{aligned}&\langle Ad^*_{(\eta,\psi,t,v,x)}(f,m_0,h,k,p),Ad_{(\eta,\psi,t,v,x)}(\delta\eta,\delta\psi,\delta t,\delta v,\delta x)\rangle\\&\qquad=\langle(f',m_0',h',k',p'),(\delta\eta',\delta\psi',\delta t',\delta v',\delta x')\rangle\end{aligned}$$

$$\langle (f',m_0',h',k',p'),(\delta\eta',\delta\psi',\delta t',\delta v',\delta x')\rangle = \langle (f,m_0,h,k,p),(\delta\eta,\delta\psi,\delta t,\delta v,\delta x)\rangle$$

$$\Leftrightarrow f'\delta\eta' + m_0'\delta\psi' + h'\delta t' + k'\delta v' + p'\delta x' = f\delta\eta + m_0\delta\psi + h\delta t + \delta v + p\delta x$$

Or d'après la relation (3.22), on a :

$$\begin{cases} \delta\eta' = \delta\eta - t\delta x - \frac{1}{2}t^2\delta v + x\delta t - \frac{1}{2}v\delta t^2 + tv\delta t \\ \delta\psi' = \delta\psi - v\delta x + x\delta v - \frac{1}{2}v\delta t\delta v + \frac{1}{2}v^2\delta t \\ \delta t' = \delta t \\ \delta v' = \delta v \\ \delta x' = \delta x + t\delta v - v\delta t \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow f'(\delta\eta - t\delta x - \frac{1}{2}t^2\delta v + x\delta t - \frac{1}{2}v\delta t^2 + tv\delta \\ + m_0'\left(\delta\psi - v\delta x + x\delta v - \frac{1}{2}v\delta t\delta v + \frac{1}{2}v^2\delta t\right) + h'\delta t + k'\delta v \\ + p'(\delta x + t\delta v - v\delta t) = f\delta\eta + m_0\delta\psi + h\delta t + k\delta v + p\delta x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow f'\delta\eta - f't\delta x - \frac{1}{2}f't^2\delta v + f'x\delta t - \frac{1}{2}f'v\delta t^2 + f'tv\delta t + m_0'\delta\psi - m_0'v\delta x + m_0'x\delta v \\ - \frac{1}{2}m_0'v\delta t\delta v + \frac{1}{2}m_0'v^2\delta t + h'\delta t + k'\delta v + p'\delta x + p't\delta v - p'v\delta t \\ = f\delta\eta + m_0\delta\psi + h\delta t + k\delta v + p\delta x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow f'\delta\eta + m_0'\delta\psi + \left(f'x + f'tv + \frac{1}{2}m_0'v^2 + h' - p'v\right)\delta t \\ + \left(-\frac{1}{2}f't^2 + m_0'x + k' + p't\right)\delta v + (-f't - m_0'v + p')\delta x - \frac{1}{2}f'v\delta t^2 \\ - \frac{1}{2}m_0'v\delta t\delta v = f\delta\eta + m_0\delta\psi + h\delta t + k\delta v + p\delta x \end{aligned}$$

Par identification, nous avons :

$$\begin{cases} f' = f \\ m_0' = m_0 \\ f'x + f'tv + \frac{1}{2}m_0'v^2 + h' - p'v = h \\ -\frac{1}{2}f't^2 + m_0'x + k' + p't = k \\ -f't - m_0'v + p' = p \end{cases}$$

$$\begin{cases} f' = f \\ {m_0}' = m_0 \\ h' = h - fx - ftv - \frac{1}{2}m_0v^2 + p'v \\ k' = k + \frac{1}{2}ft^2 - m_0x - p't \\ p' = p + ft + m_0v \end{cases}$$

$$\begin{cases} f' = f \\ {m_0}' = m_0 \\ h' = h - fx - ftv - \frac{1}{2}m_0v^2 + (p + ft + m_0v)v \\ k' = k + \frac{1}{2}ft^2 - m_0x - (p + ft + m_0v)t \\ p' = p + ft + m_0v \end{cases}$$

$$\begin{cases} f' = f \\ {m_0}' = m_0 \\ h' = h - fx - ftv - \frac{1}{2}m_0v^2 + pv + ftv + m_0v^2 \\ k' = k + \frac{1}{2}ft^2 - m_0x - pt - ft^2 - m_0vt \\ p' = p + ft + m_0v \end{cases}$$

$$\begin{cases} f' = f \\ {m_0}' = m_0 \\ h' = h - fx + \frac{1}{2}m_0v^2 + pv \\ k' = k - \frac{1}{2}ft^2 - m_0x - m_0vt - pt \\ p' = p + ft + m_0v \end{cases}$$

$$Ad^*_{(\eta,\psi,t,v,x)}(f, m, h, k, p) = \Big(f, m_0, h - fx + \tfrac{1}{2}m_0v^2 + pv\,, k - \tfrac{1}{2}ft^2 - m_0x - m_0vt - pt\,, p + ft + m_0v\Big). \quad (3.24)$$

L'expression (3.24) est l'action coadjointe du groupe $\tilde{G}$ sur le dual de l'algèbre de Lie, f, m_0 sont des invariants immédiats de cette action coadjointe.

3.7. Détermination de l'orbite coadjointe

Soient m_0, f, h, k, p les paramètres conjugués de η, ψ, t, v, x respectivement. La restriction de la forme de Kirillov à l'orbite de l'action coadjointe est donnée par:

$$\omega = k_{ij}(h,k,p)|_{\vartheta(f,m_o)} = \begin{pmatrix} 0 & -p & f \\ p & 0 & m_0 \\ -f & -m_0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

où les invariants immédiats f et m_0 ont été utilisés pour référencer l'orbite coadjointe.

Nous avons une matrice antisymétrique d'ordre 3 (impaire) ; donc d$\acute{e}t(k_{ij}(h,k,p)) = 0$.

Cela nous renseigne qu'il y a un autre invariant que nous allons déterminer.

Recherche de l'autre invariant

Nous allons utiliser la formule suivante :

$$K_{ij}(\propto_k)\frac{\partial}{\partial x_k} = 0 \quad (3.26$$

D'après (3.26), nous avons :

$$\begin{pmatrix} 0 & -p & f \\ p & 0 & m_0 \\ -f & -m_0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial e} \\ \frac{\partial}{\partial k} \\ \frac{\partial}{\partial p} \end{pmatrix} = 0.$$

Posons I l'invariant cherché.

Le système devient :

$$\begin{cases} -p\dfrac{\partial I}{\partial k} + f\dfrac{\partial I}{\partial p} = 0 & (3.27) \\ p\dfrac{\partial I}{\partial e} + m_0\dfrac{\partial I}{\partial p} = 0 & (3.28) \\ -f\dfrac{\partial I}{\partial e} - m_0\dfrac{\partial I}{\partial k} = 0 & (3.29) \end{cases}$$

Posons que $\frac{\partial I}{\partial e} = 1.$ (3.30)

Par intégration, nous obtenons :

$\Leftrightarrow I = e + I(k,p).$

Déterminons ensuite $I(k,p)$.

(3.30) dans (3.28) et (3.29) donne :

$$\begin{cases} p + m_0 \dfrac{\partial I}{\partial p} = 0 \quad (1) & (3.31) \\ -f - m_0 \dfrac{\partial I}{\partial k} = 0 \ \ (2) & (3.32) \end{cases}$$

$(1) \Leftrightarrow m_0 \frac{\partial I}{\partial p} = -p$

$\frac{\partial I}{\partial p} = \frac{-p}{m_0} \, (*)$

Intégrons membre à membre l'équation $(*)$.

$$\Rightarrow \int \partial I = -\int \frac{p}{m_0} dp$$

D'où $I = -\frac{p^2}{2m_0} + I(k)$

De (2)$\Leftrightarrow -m_0 \frac{\partial I}{\partial k} = f$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial I}{\partial k} = -\frac{1}{m_0} f \, (**)$$

De même, intégrons membre à membre la relation $(**)$

$$\int \partial I = -\frac{1}{m_0} f \int dk$$

$$\Leftrightarrow \quad I = -\frac{1}{m_0} fk + c$$

D'où $\quad I = e + k\left(-\frac{1}{m_0} f\right) - \frac{1}{m_0}\frac{p^2}{2} + c.$

où c est une constante d'intégration.

ou de façon équivalente

$$e = I + k\left(\frac{1}{m_0} f\right) + \frac{1}{m_0}\frac{p^2}{2}.$$

$Or, p = m_0 l t^{-1} = m_0 v$ est le moment linéaire et f la dimension physique d'une force

$$\Longrightarrow e = I + k\left(\frac{1}{m_0} f\right) + \frac{1}{m_0}\left(\frac{{m_0}^2 v^2}{2}\right)$$

$$e = I + k\left(\frac{1}{m_0} f\right) + \frac{1}{2} m_0 v^2. \qquad (***)$$

Posons que $\frac{f}{m_0} = \eta$ où $[\eta] = lt^{-2}$ et $q = \frac{k}{m_0}$; nous obtenons :

$$e = E_c + E_q + I. \tag{3.33}$$

où $E_c = \frac{1}{2} m_0 v^2$ est l'énergie cinétique du système dynamique obtenu, $E_q = \frac{1}{2} m_0 \omega^2 q^2$ est l'énergie potentielle du système tandis que I est l'énergie interne du système.

L'expression (3.33) satisfait à la loi de la dynamique selon laquelle l'énergie totale du système est égale à la somme de l'énergie cinétique E_C, de l'énergie potentielle E_p et d'une énergie interne au système.

La restriction de la forme de Kirillov à l'orbite est :

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & m_0 \\ -m_0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Omega^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{m_0} \\ \frac{1}{m_0} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\omega = (dk \quad dp) \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{m_0} \\ \frac{1}{m_0} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dk \\ dp \end{pmatrix} = 0$$

$$\omega = (dk \quad dp) \begin{pmatrix} -\frac{1}{m_0} dp \\ \frac{1}{m_0} dk \end{pmatrix}$$

$$\omega = -\frac{1}{m_0} dk.dp + \frac{1}{m_0} dp.dk$$

Puisque nous avons posé $q = \frac{k}{m_0}$, il en résulte que $dq = \frac{dk}{m_0}$. (3.34)

$$\text{D'où } \omega_0 = -dq.dp + dp.dq$$

$$\omega_0 = dp.dq - dq.dp$$

$$\omega_0 = dp \wedge dq \tag{3.35}$$

ω_0 est une 2-forme symplectique standard.

Donc, en définitive, l'orbite coadjointe pour cette classe de groupes de Lie dans le cas particulier où le paramètre $\lambda = 1$ est une variété symplectique de dimension 2 isomorphe donc à $\mathbb{R}^2$.

3.8. Réalisations symplectiques

Les réalisations symplectiques nous aident à trouver les équations du mouvement. Dans notre cas, nous obtenons, de la formule (3.24)

$$D(t, v, x) = \left(k - \frac{1}{2} f t^2 - m_0 x - m_0 v t - p t, p + f t + m_0 v \right). \tag{3.36}$$

En utilisant la relation (3.34), nous avons :

$$D(t, q, p) = (m_0 q - \frac{1}{2} f t^2 - m_0 x - m_0 v t, p + f t + m_0 v) \tag{3.37}$$

La restriction de la réalisation symplectique à l'orbite nous donne :

$$D(t, 0,0)=(-\frac{1}{2} f t^2 - m_0 x - m_0 v t, f t + m_0 v) \tag{3.38}$$

En posant que $m = m_0$ (une masse), nous avons :

$$D(t, 0,0) = \left(-\frac{1}{2} f t^2 - m x - m v t, f t + m v\right). \tag{3.39}$$

Les observables classiques (ou fonctions Hamiltoniennes) en coordonnées de Darboux p et q sont données par :

$$\begin{cases} q(t) = -\frac{1}{2} f t^2 - m x - m v t \\ \quad p(t) = f t + m v \end{cases} \tag{3.40}$$

3.9. Les équations du mouvement

La dérivation par rapport au temps t des observables classiques du système (3.40) donne les équations du mouvement suivantes :

Nous avons :

$$\begin{cases} \dfrac{dq}{dt} = -f t - m \dfrac{dx}{dt} - m v \\ \quad \dfrac{dp}{dt} = f + m \dfrac{dv}{dt} \end{cases} \tag{3.41}$$

où nous avons supposé le cas le plus simple où la masse "m" est une constante et où f, v, x ne dépendent pas explicitement de t.

$$\begin{cases} \dfrac{dq}{dt} = -ft - 2mv \\ \dfrac{dp}{dt} = f + ma \end{cases} \qquad (3.42)$$

où a qui est une accélération et v une vitesse.

D'où :

$$\begin{cases} \frac{d^2q}{dt^2} = -f - 2m\frac{dv}{dt} \\ \frac{d^2p}{dt^2} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{d^2q}{dt^2} = -f - 2ma \\ \frac{d^2p}{dt^2} = 0 \end{cases} \qquad (3.43)$$

3.10. Solutions des équations du mouvement et leurs interprétations physiques

3.10.1. Solutions des équations du mouvement

Partant de l'équation (3.43), nous avons :

$$\ddot{q} = -f - 2ma$$

$$\int \ddot{q} = \int (-f - 2ma)dt$$

$$\int \ddot{q} = \int -fdt - \int 2ma\, dt$$

$$\int \ddot{q} = -f \int dt - 2ma \int dt$$

$$\dot{q} = -ft - 2mat + c$$

$$\int \dot{q} = \int (-ft - 2mat + c)dt$$

$$q = -\frac{ft^2}{2} - \frac{2mat^2}{2} + ct + C_1$$

$$q = -\frac{ft^2}{2} - mat^2 + ct + C_1 \tag{3.44}$$

où $[c] = mlt^{-1}$ est le moment linéaire et $[c_1] = ml$ est le moment statique.

3.10.2. Interprétations physiques

Dans l'équation (3.44); q: prend la dimension d'une longueur. C'est une position.

f est une force. Sa dimension est mlt^{-2} ; t c'est le temps ou la durée et c et c_1 sont des constantes de primitivation de dimensions respectives mlt^{-1} et ml.

La donnée d'une condition initiale du système pourrait permettre d'éliminer les constantes d'intégration et avoir des intégrales premières particulières (ou solutions) du système différentiel d'ordre deux (3.43).

CONCLUSION GENERALE

Le travail intitulé «Réalisations symplectiques associées à une classe de groupes de Lie de dimension trois » construit par la méthode des orbites coadjointes, un système dynamique élémentaire dont l'espace de mouvement est une variété symplectique de dimension 2 munie d'une structure symplectique standard. Nous sommes partis d'une classe de groupes de Lie dont la classe d'algèbre de Lie correspond à la $6^{\text{ème}}$ classe de la classification 3-dimensionnelle faite par Ganbouri [1].

Pour y arriver, nous avons d'abord rappelé certaines notions pour aider le lecteur à comprendre le reste du travail. Il s'agit principalement des notions de groupe de Lie, d'algèbre de Lie, de passage de l'algèbre de Lie au groupe de Lie et réciproquement, de l'application exponentielle, des formules de Baker-Campbell-Hausdorff, de l'action adjointe et coadjointe et de l'orbite de l'action coadjointe.

Ensuite, nous avons développé de façon claire et concise les différentes étapes de la méthode des orbites coadjointes.

Enfin, sachant qu'un groupe de Lie agit à la fois sur son algèbre de Lie et sur le dual de son algèbre de Lie, nous avons déterminé les deux actions adjointe et coadjointe. A partir de l'action coadjointe, nous avons déterminé l'orbite coadjointe qui est une variété symplectique dont la 2-forme symplectique est obtenue à partir de l'inverse de la restriction de la forme de Kirillov à l'orbite. La réalisation symplectique déduite de l'action coadjointe a permis de déterminer les équations du mouvement du système dynamique résultant et l'analyse dimensionnelle a permis d'interpréter physiquement les nouveaux paramètres d'extension. Des méthodes d'analyse ont été utilisées pour trouver les intégrales premières (du système dynamique obtenu) ou les solutions des équations du mouvement correspondant à ce système.

Nous ne prétendons pas avoir épuisé le sujet. Le cas général où le paramètre réel λ dans la structure de Lie associée à la classe correspondante dans la classification faite par Ganbouri [1] pourra faire l'objet d'une étude ultérieure.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] S. Benmouloud, B. Ganbouri, SM. Sbai, *Structures de Lie-Poisson sur SU(2) et SL(2,ℝ)*, African Journal of Mathematical Physics. Vol2, No1, (2005) 49-52.

[2] T. Masson, *Géométrie Différentielle, groupe et algèbre de Lie, fibré et connexion*. Laboratoire de théorique, Université de Paris XI, 2001.

[3] J. Lafontaine, *Introduction aux variétés différentielles*, Les Ulis, EDP Sciences, 2010, 369p (ISBN978-2-7598-0572-3), p.152.

[4] N. Bourbaki, *Éléments de mathématique : Groupes et algèbres de Lie*, Springer, 2006.

[5] E. Cartan, « *La théories de groupes finis et continus et l'analysis Situs* », Mémorial Sc. Math., vol. XLII, 1930, p. 1-61, § 2.

[6] R.Zhang, *The Baker-Campbell-Hausdorff formula*, Columbia University: New York, NY, USA, 2017.

[7] A. Lesfari, *Géométrie symplectique et Mécanique Hamiltonienne*, Tunis, 2012.

[8] A. Lichnerowicz, « *Représentation coadjointe quotient et espaces homogènes* (extrait) [archive] », sur pmls.oxfordjournals.org (consulté le 20 septembre 2024 à 7h22min).

[9] J.M. Souriau, *structure des systèmes dynamiques*, Dunod, 1970.

[10] A. Ngendakumana, *Group theoretical construction of planar Non commutative systems*, Abomey-Calavi, December 2013.

[11] C.-M. Marle, *Variétés symplectiques et variétés de Poisson*, Université Pierre et Marie Curie, 1998-1999.

[12] A.A. Kirillov, *Lectures on the orbit Method*, Graduate studies in Mathematics, American Mathematical society, V 64, 2004.