UNIVERSITÉ DU BURUNDI
GRENIER DU SAVOIR DU BURUNDI
Dépôt institutionnel officiel
https://repository.ub.edu.bi

Équations linéaires aux différences q-non uniformes du second ordre

Ndayikunda, Yvette; Sous la direction de: Pr Gaspard Bangerezako

2026-03
UB, FS
https://repository.ub.edu.bi/handle/123456789/2384

Document téléchargé depuis le **Grenier du Savoir du Burundi** — https://repository.ub.edu.bi

UNIVERSITE DU BURUNDI
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES





Équations linéaires aux différences q-non uniformes du second ordre

Par:

Yvette NDAYIKUNDA

Mémoire présenté et défendu publiquement en vue de l'obtention du Diplôme de Master en Mathématiques Fondamentales et Appliquées. Option: Mathématiques Appliquées

Sous la direction de:
Pr Gaspard BANGEREZAKO

Bujumbura, mars, 2026

Les membres du Jury

Président : Dr NKURUNZIZA Denis
Directeur :Pr Gaspard BANGEREZAKO
Secrétaire : Dr NTAHOMVUKIYE J. Pesser
Membre : Pr NYANDWI Servat

Dédicace

A mon regretté **Père**,
A ma **Mère** ,
A mes frères et sœurs,
A toute la famille,
A mes amis.

Remerciements

Avant toute chose, je remercie Dieu le tout puissant qui m'a donné la vie et tous dont j'en ai eu besoin dans mes études. Ensuite , je veux signaler que ce travail n'est pas le fruit de mes seuls efforts, raison pour laquelle je voudrais présenter mes sentiments de gratitude à toute personne qui a contribué à sa réalisation.

Mes sincères remerciements sont adressés au Professeur **Gaspard BANGEREZAKO**, du département de Mathématiques de l'Université du Burundi, qui malgré ses multiples obligations a accepté de diriger ce mémoire. Ses précieux conseils, sa disponibilité, sa rigueur scientifique et ses suggestions m'ont été d'une grande utilité, qu'il trouve ici l'expression de notre profonde et respectueuse gratitude.

Je remercie également tous les membres du jury pour le temps qu'ils voudront bien voulu consacrer pour lire ce travail, leurs précieux commentaires pour l'amélioration de ce travail.

Mes sincères remerciements vont à ma chère **Mère** pour avoir imprégné en moi l'importance de l'éducation et du savoir, et m'apprendre que le choix le plus difficile est souvent le plus aboutissant. J'espère simplement vous procurer un peu de satisfaction et de fierté par cet aboutissement personnel.

Mes sincères remerciements à toute ma famille et à tous les guides qui m'ont toujours soutenu, encouragé et orienté dans le droit chemin et donné des conseils .

Résumé

Ce travail est consacré à l'étude des équations linéaires aux différences q - non uniformes du second ordre, qui généralisent les équations aux différences classiques et interviennent dans la modélisation de systèmes dynamiques discrets.

Après un rappel des notions fondamentales du calcul aux différences q -non uniformes, notamment la dérivation et l'intégration, le mémoire présente l'étude des équations linéaires aux différences q -non uniformes du second ordre .

L'analyse principale porte sur les équations linéaires aux différences q - non uniformes du second ordre. Les conditions de solvabilité sont examinées pour les coefficients constants et variables, puis les propriétés d'orthogonalité et de contrôlabilité des solutions sont étudiées.

Les résultats obtenus conduisent à la construction de la matrice de contrôlabilité du système étudié et permettent de mieux comprendre la structure et le comportement de ces équations, tout en mettant en évidence leur intérêt dans les mathématiques appliquées.

Mots clés : *Calcul aux différences q - non uniformes, Dérivabilité, Intégrabilité, Solvabilité, Orthogonalité, Contrôlabilité et Matrice de Contrôlabilité*

Abstract

This work is devoted to the study of second-order linear equations with q-nonuniform differences, which generalize classical difference equations and are used in the modeling of discrete dynamical systems.

After a review of the fundamental concepts of q-nonuniform difference calculus, including differentiation and integration, this thesis presents a study of second-order linear q-nonuniform difference equations.

The main analysis focuses on second-order linear q-nonuniform difference equations. Solvability conditions are examined for both constant and variable coefficients, and then the orthogonality and controllability properties of the solutions are studied.

The results obtained lead to the construction of the controllability matrix of the system under study and provide a better understanding of the structure and behavior of these equations, while highlighting their significance in applied mathematics.

Keywords: *Nonuniform q-difference calculs, Differentiability, Integrability, Solvability, Orthogonality, Controllability,Controllability matrix*

Table des matières

Les membres du Jury **i**

Dédicace **ii**

Remerciements **iii**

Résumé **iv**

Abstract **v**

Table des matières **vi**

Avant-propos **viii**

Introduction générale **1**

1 Calcul aux differences q-non uniformes **2**

1.1 Dérivée du produit de deux fonctions 3

1.2 Dérivée du rapport de deux fonctions 3

1.3 Dérivée d'une fonction composée 4

1.4 Dérivée d'une fonction inverse 4

1.5 Intégration aux différences q-non uniformes 4

1.5.1 Principes fondamentaux de l'analyse q-non uniforme 6

1.5.2 Intégration par parties 8

2 Équations linéaires aux différences q-non uniformes du premier ordre **10**

2.1 Équations linéaires aux différences q-non uniformes du premier ordre . . . 10

2.1.1 Équation homogène 11

2.1.2 Equation non homogène 20

2.2 Etudes de quelques cas élémentaires 22

3 Équations linéaires aux différences q-non uniformes du second ordre 35

3.1 Solvabilité 35

3.1.1 Cas des coefficients variables 36

3.1.2 Cas des coefficients constants 37

3.2 Orthogonalité 40

3.3 Contrôlabilité des équations linéaires aux différences q-non uniformes du second ordre 41

Conclusion 44

Bibliographie 45

Avant-propos

À la fin du deuxième cycle des études universitaires, l'Université du Burundi organise des travaux de recherche pour les étudiants de ce cycle. Le présent mémoire s'inscrit dans ce cadre et permet aux étudiants de Master en Mathématiques Fondamentales et Appliquées d'obtenir le diplôme de Master en Mathématiques Fondamentales et Appliquées. Ce travail est consacré à l'étude des équations linéaires aux différences q-non uniformes du second ordre, en mettant l'accent sur la contrôlabilité de ces équations.

Les équations aux différences q-non uniformes généralisent les équations aux différences classiques et les équations aux q-différences. Ce mémoire vise donc à apporter une contribution à ce domaine.

Les résultats obtenus montrent que l'approche développée permet d'analyser efficacement la contrôlabilité des équations linéaires aux différences q-non uniformes du second ordre et confirment que les objectifs de ce travail ont été atteints.

Introduction générale

Les équations linéaires aux différences q-non uniformes comme les équations aux différences et q-différences font parties de l'analyse discrète.
Dans le cas non uniforme, les équations linéaires aux différences q-non uniformes constituent une extension naturelle des équations différentielles classiques et des équations aux différences q-uniformes. Elles interviennent lorsque les points de discrétisation du domaine ne sont pas régulièrement espacés, mais suivent une loi de variation donnée, souvent de type géométrique.

Notre travail est composé de 3 chapitres :
Le premier chapitre porte sur le calcul aux différences q-non uniformes en considérant la dérivée aux différences divisées la plus générale [9, 10]:

$$Df(t(s)) = \frac{f(t(s+\frac{1}{2})) - f(t(s-\frac{1}{2}))}{t(s+\frac{1}{2}) - t(s-\frac{1}{2})}. \tag{0.1}$$

Le second chapitre porte sur les équations linéaires aux différences q-non uniformes du premier ordre qui s'écrit comme :

$$Dy(x(z)) = a(x(z))y(x(zq^{-\frac{1}{2}})) + b(x(z)). \tag{0.2}$$

On résout l'équation (0.2)dans le cas homogène et étudié quelques cas élémentaires.

Et enfin, le dernier chapitre porte sur les équations linéaires aux différences q-non uniformes du second ordre. Il y a la solvabilité, l'orthogonalité et le contrôlabilité des systèmes linéaires aux différences q-non uniformes du second ordre.

Chapitre 1

Calcul aux differences q-non uniformes

Considérons la dérivée par différence divisée la plus générale [9, 10]:

$$Df(t(s)) = \frac{f(t(s+\frac{1}{2})) - f(t(s-\frac{1}{2}))}{t(s+\frac{1}{2}) - t(s-\frac{1}{2})}, \tag{1.1}$$

admettant la propriété suivante : si $f(t) = P_n(t(s))$ est un polynôme de degré n en $t(s)$, alors $Df(t(s)) = \tilde{P}_{n-1}(t(s))$ est un polynôme de degré $n-1$ en $t(s)$, on est naturellement conduit aux formes canoniques suivantes de $t(s)$, par ordre de complexité croissante :

$$t(s) = x(0), \tag{1.2}$$

$$t(s) = s, \tag{1.3}$$

$$t(s) = q^s, \tag{1.4}$$

$$t(s) = \frac{q^s + q^{-s}}{2}, \quad q \in \mathbb{C},\ s \in \mathbb{Z}. \tag{1.5}$$

Lorsque $t(s)$ est donné par (1.5), la dérivée correspondante est généralement appelée *l'opérateur de différence divisée du premier ordre d'Askey Wilson* [1], que l'on peut écrire :

$$Df(x(z)) = \frac{f(x(zq^{\frac{1}{2}})) - f(x(zq^{-\frac{1}{2}}))}{x(zq^{\frac{1}{2}}) - x(zq^{-\frac{1}{2}})}, \tag{1.6}$$

où :

$$x(z) = \frac{z + z^{-1}}{2}, sachant \quad que \quad z = q^s.$$

Le calcul lié à (1.3) - (1.5) (respectivement aux différence; aux q-différence et aux q-différence non uniforme) est appelé le *calcul discret*.

1.1 Dérivée du produit de deux fonctions

Considérons deux fonctions $f(x(z))$ et $g(x(z))$, nous déterminons la dérivée q-non uniforme de leur produit sous la forme :

$$\begin{aligned} D(fg)(x(z)) &= \frac{(fg)(x(zq^{\frac{1}{2}})) - (fg)(x(zq^{-\frac{1}{2}}))}{x(zq^{\frac{1}{2}}) - x(zq^{-\frac{1}{2}})}, \\ &= \frac{f(x(zq^{\frac{1}{2}}))g(x(zq^{\frac{1}{2}})) - f(x(zq^{-\frac{1}{2}}))g(x(zq^{-\frac{1}{2}}))}{x(zq^{\frac{1}{2}}) - x(zq^{-\frac{1}{2}})}. \end{aligned} \tag{1.7}$$

En ajoutant et en retranchant au numérateur par le même terme $f(x(zq^{\frac{1}{2}}))g(x(zq^{-\frac{1}{2}}))$, la dérivée devient :

$$D(fg)(x(z)) = \frac{f(x(zq^{\frac{1}{2}}))\left[g(x(zq^{\frac{1}{2}})) - g(x(zq^{-\frac{1}{2}}))\right]}{x(zq^{\frac{1}{2}}) - x(zq^{-\frac{1}{2}})} + \frac{g(x(zq^{-\frac{1}{2}}))\left[f(x(zq^{\frac{1}{2}})) - f(x(zq^{-\frac{1}{2}}))\right]}{x(zq^{\frac{1}{2}}) - x(zq^{-\frac{1}{2}})}, \tag{1.8}$$

$$D(fg)(x(z)) = f(x(zq^{\frac{1}{2}}))Dg(x(z)) + g(x(zq^{-\frac{1}{2}}))Df(x(z)). \tag{1.9}$$

Ou encore :

$$D(fg)(x(z)) = g(x(zq^{\frac{1}{2}}))Df(x(z)) + f(x(zq^{-\frac{1}{2}}))Dg(x(z)). \tag{1.10}$$

1.2 Dérivée du rapport de deux fonctions

Pour deux fonctions $f(x(z))$ et $g(x(z))$, la dérivée q-non uniforme de leur quotient est déterminée par :

$$\begin{aligned} D\left(\frac{f}{g}\right)(x(z)) &= \frac{\frac{f(x(zq^{\frac{1}{2}}))}{g(x(zq^{\frac{1}{2}}))} - \frac{f(x(zq^{-\frac{1}{2}}))}{g(x(zq^{-\frac{1}{2}}))}}{x(zq^{\frac{1}{2}}) - x(zq^{-\frac{1}{2}})}, \\ &= \frac{f(x(zq^{\frac{1}{2}}))g(x(zq^{-\frac{1}{2}})) - f(x(zq^{-\frac{1}{2}}))g(x(zq^{\frac{1}{2}}))}{[x(zq^{\frac{1}{2}}) - x(zq^{-\frac{1}{2}})]g(x(zq^{\frac{1}{2}}))g(x(zq^{-\frac{1}{2}}))}. \end{aligned} \tag{1.11}$$

En ajoutant et en retranchant au numérateur de cette fraction par le même terme $g(x(zq^{-\frac{1}{2}}))f(x(zq^{-\frac{1}{2}}))$, nous obtenons :

$$D\left(\frac{f}{g}\right)(x(z)) = \frac{g(x(zq^{-\frac{1}{2}}))Df(x(z)) - f(x(zq^{-\frac{1}{2}}))Dg(x(z))}{g(x(zq^{\frac{1}{2}}))g(x(zq^{-\frac{1}{2}}))}. \tag{1.12}$$

1.3 Dérivée d'une fonction composée

La dérivée d'une fonction composée $f(g(x(z)))$ est donnée par :

$$D(f(g))(x(z)) = \frac{f(g(x(zq^{\frac{1}{2}}))) - f(g(x(zq^{-\frac{1}{2}})))}{x(zq^{\frac{1}{2}}) - x(zq^{-\frac{1}{2}})}. \tag{1.13}$$

En multipliant et en divisant au second membre par:$g(x(zq^{-\frac{1}{2}})) - g(x(zq^{\frac{1}{2}}))$ dans (1.13):

$$D(f(g))(x(z)) = \frac{f(g(x(zq^{\frac{1}{2}}))) - f(g(x(zq^{-\frac{1}{2}})))}{g(x(zq^{\frac{1}{2}})) - g(x(zq^{-\frac{1}{2}}))} \cdot \frac{g(x(zq^{\frac{1}{2}})) - g(x(zq^{-\frac{1}{2}}))}{x(zq^{\frac{1}{2}}) - x(zq^{-\frac{1}{2}})}, \tag{1.14}$$

avec

$$(D_g f(g))(x(z)) = \frac{f(g(x(zq^{\frac{1}{2}}))) - f(g(x(zq^{-\frac{1}{2}})))}{g(x(zq^{\frac{1}{2}})) - g(x(zq^{-\frac{1}{2}}))}, \tag{1.15}$$

on trouve

$$D(f(g))(x(z)) = (D_g f(g))(x(z))Dg(x(z)). \tag{1.16}$$

1.4 Dérivée d'une fonction inverse

En considérant la fonction $y = f(x)$, il en découle que $x = f^{-1}(y)$ où f^{-1} est la fonction inverse de f. En appliquant la dérivée aux différences divisées sur les deux termes de l'égalité précédente, nous obtenons :

$$1 = \frac{f^{-1}(y(x(zq^{\frac{1}{2}}))) - f^{-1}(y(x(zq^{-\frac{1}{2}})))}{y(x(zq^{\frac{1}{2}})) - y(x(zq^{-\frac{1}{2}}))} \cdot \frac{y(x(zq^{\frac{1}{2}})) - y(x(zq^{-\frac{1}{2}}))}{x(zq^{\frac{1}{2}}) - x(zq^{-\frac{1}{2}})} = D_y f^{-1} \cdot D_x y. \tag{1.17}$$

Donc:

$$D_y f^{-1} = \frac{1}{D_x y},$$

où

$$(D_y f)(x(z)) = \frac{f^{-1}(y(x(zq^{\frac{1}{2}}))) - f^{-1}(y(x(zq^{-\frac{1}{2}})))}{y(x(zq^{\frac{1}{2}})) - y(x(zq^{-\frac{1}{2}}))}. \tag{1.18}$$

1.5 Intégration aux différences q-non uniformes

Reconsidérons la dérivée définie en (1.6),
avec

$$x(z) = \frac{q^s + q^{-s}}{2} \quad \text{et} \quad z = q^s.$$

Par la suite, pour être plus concret, nous supposerons que : $0 < q < 1$.

En se basant sur cette dérivée, définissons l'intégrale q-non uniforme en tant qu'opérateur inverse de la différentiation comme suit [2] :

$$\int_{x(q^N)}^{x(q^s)} g(x(z))\, d_q x(z) \overset{\text{def}}{=} \sum_{r=s+\frac{1}{2}}^{(N-\frac{1}{2})} \left[x\left(q^{r-\frac{1}{2}}\right) - x\left(q^{r+\frac{1}{2}}\right)\right] g\left(x(q^r)\right). \tag{1.19}$$

En remplaçant q^r par z dans cette dernière, nous obtenons :

$$\int_{x(q^N)}^{x(q^s)} g(x(z))\, d_q x(z) = \sum_{x(z)=x(q^{s+\frac{1}{2}})}^{x(q^{N-\frac{1}{2}})} \left[x\left(zq^{-\frac{1}{2}}\right) - x\left(zq^{\frac{1}{2}}\right)\right] g\left(x(z)\right). \tag{1.20}$$

Remplaçons ensuite z par $q^{\frac{1}{2}}z$ au second membre et utlise le décalage de $-\frac{1}{2}$ pour la sommation, nous obtenons :

$$\int_{x(q^N)}^{x(q^s)} g(x(z))\, d_q x(z) = \sum_{x(z)=x(q^s)}^{x(q^{N-1})} \left[x\left(z\right) - x\left(qz\right)\right] g\left(x(zq^{\frac{1}{2}})\right), \tag{1.21}$$

avec :

$$x(z) = \frac{z + z^{-1}}{2}, \tag{1.22}$$

ou sa généralisation

$$x(z) = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{zq}), \tag{1.23}$$

connu dans [1, 8] pour les polynômes d'Askey–Wilson.

$$\begin{aligned}
x(z) &= \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \\
x(qz) &= \frac{1}{2}\left(qz + \frac{1}{qz}\right), \\
x(z) - x(qz) &= \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z} - qz - \frac{1}{qz}\right), \\
&= \frac{1}{2}\left[(z - qz) + \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{qz}\right)\right], \\
&= \frac{1}{2}\left[z(1-q) + \frac{1-q}{qz}\right], \\
&= \frac{1-q}{2}\left(z + \frac{1}{qz}\right), \\
&= \frac{1-q}{2}\, z\left(1 + \frac{1}{qz^2}\right).
\end{aligned} \tag{1.24}$$

Donc

$$x(z) - x(qz) = \frac{1-q}{2}\, z \left(1 + \frac{1}{qz^2}\right). \tag{1.25}$$

Remplaçons (1.25) dans (1.21),nous obtenons :

$$\int_{x(q^N)}^{x(q^s)} g(x(z))\, d_q x(z) = \frac{1}{2}(1-q) \sum_{z=q^s}^{q^{N-1}} z \left(1 - \frac{1}{qz^2}\right) g(x(q^{\frac{1}{2}} z)). \tag{1.26}$$

Cette égalité nous donne en particulier l'interconnexion entre l'intégrale q-non uniforme et la q-intégrale qu'on appelle aussi intégrale de Jackson [4] :

$$\int_{x(q^N)}^{x(q^s)} g(x(z))\, d_q x(z) = \frac{1}{2} \int_{q^N}^{z} \left(1 - \frac{1}{qz^2}\right) g(x(q^{\frac{1}{2}} z))\, d_q z. \tag{1.27}$$

Pour $N \to +\infty$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \int_{x(0)}^{x(z)} g(x(z))\, d_q x(z) &= \frac{1}{2} \int_{0}^{z} \left(1 - \frac{1}{qz^2}\right) g(x(q^{\frac{1}{2}} z))\, d_q z, \\ &= \frac{1}{2}(1-q) z \sum_{i=0}^{\infty} q^i \left(1 - \frac{1}{q^{2i+1} z^2}\right) g(x(q^{\frac{1}{2}+i} z)), \\ &= \frac{1}{2}(1-q) z \sum_{i=0}^{\infty} q^i f(x(q^{\frac{1}{2}+i} z)), \end{aligned} \tag{1.28}$$

où

$$f(x(q^{\frac{1}{2}} z)) = \left(1 - \frac{1}{qz^2}\right) g(x(q^{\frac{1}{2}} z)). \tag{1.29}$$

1.5.1 Principes fondamentaux de l'analyse q-non uniforme

1.5.1.1 Premier principe

Nous pouvons formuler l'énoncé de ce principe comme suit :
« la dérivée q-non uniforme de l'intégrale d'une fonction est cette fonction elle-même »
ce qui correspond à l'équation :

$$D\left[\int_{x(q^N)}^{x(z)} g(x(z)) d_q x(z)\right] = g(x(z)). \tag{1.30}$$

En effet, partant de la formule de l'intégrale q-non uniforme, nous avons :

$$\int_{x(q^N)}^{x(z)} g(x(z)) d_q x(z) = \sum_{x(zq^{\frac{1}{2}})}^{x(q^{N-\frac{1}{2}})} \left[x(zq^{-\frac{1}{2}}) - x(zq^{\frac{1}{2}})\right] g(x(z)). \tag{1.31}$$

En dérivant les deux membres de cette égalité, nous obtenons :

$$D\left[\int_{x(q^N)}^{x(z)} g(x(z))d_qx(z)\right] = D\left[\sum_{x(zq^{\frac{1}{2}})}^{x(q^{N-\frac{1}{2}})} x(zq^{-\frac{1}{2}}) - x(zq^{\frac{1}{2}})g(x(z))\right]. \tag{1.32}$$

Calculons la dérivée aux différences divisées pour le second membre, nous avons :

$$D\left[\int_{x(q^N)}^{x(z)} g(x(z))\, d_qx(z)\right] = \left[\sum_{x(zq^{\frac{1}{2}})}^{x(q^{N-\frac{1}{2}})} - \sum_{x(zq^{\frac{1}{2}})}^{x(q^{N-\frac{1}{2}})}\right] \frac{x(zq^{-\frac{1}{2}}) - x(zq^{\frac{1}{2}})}{x(zq^{-\frac{1}{2}}) - x(zq^{\frac{1}{2}})} g(x(z)). \tag{1.33}$$

En utilisant le décalage de -$\frac{1}{2}$ pour la première somme et le décalage de $\frac{1}{2}$ pour la deuxième somme dans l'équation (1.33), nous obtenons:

$$D\left[\int_{x(q^N)}^{x(z)} g(x(z))\, d_qx(z)\right] = \left[\sum_{x(z)}^{x(q^{N-\frac{1}{2}})} - \sum_{x(zq)}^{x(q^{N-\frac{1}{2}})}\right] g(x(z)). \tag{1.34}$$

Sachant que $z = q^s$, avec $N \geq s$, alors (1.34) s'écrit :

$$D\left[\int_{x(q^N)}^{x(z)} g(x(z))\, d_qx(z)\right] = \left[\sum_{x(q^s)}^{x(q^{N-\frac{1}{2}})} - \sum_{x(q^{s+1})}^{x(q^{N-\frac{1}{2}})}\right] g(x(q^s)). \tag{1.35}$$

On a:

$$\begin{aligned} D\left[\int_{x(q^N)}^{x(z)} g(x(z))\, d_qx(z)\right] &= g(x(q^s)) + g(x(q^{s+1})) + g(x(q^{s+2})) + \cdots + g(x(q^{N-\frac{1}{2}})) \\ &\quad - \left[g(x(q^{s+1})) + g(x(q^{s+2})) + \cdots + g(x(q^{N-\frac{1}{2}}))\right], \\ &= g(x(q^s)), \\ &= g(x(z)). \end{aligned} \tag{1.36}$$

Nous en concluons alors que :

$$D\left[\int_{x(q^N)}^{x(z)} g(x(z))\, d_qx(z)\right] = g(x(z)). \tag{1.37}$$

1.5.1.2 Deuxième principe

$$\int_{x(q^N)}^{x(z)} (Df)(x(z))d_qx(z) = f(x(z)) - f(x(q^N)). \tag{1.38}$$

En effet, à partir de la définition de l'intégrale q-non uniforme, nous avons :

$$\begin{aligned}\int_{x(q^N)}^{x(z)}(Df)(x(z))d_qx(z) &= \sum_{x(zq^{\frac{1}{2}})}^{x(q^{N-\frac{1}{2}})}\left[x(zq^{-\frac{1}{2}})-x(zq^{\frac{1}{2}})\right](Df)(x(z)),\\ &= \sum_{x(zq^{\frac{1}{2}})}^{x(q^{N-\frac{1}{2}})}\left[x(zq^{-\frac{1}{2}})-x(zq^{\frac{1}{2}})\right]\frac{f(x(zq^{-\frac{1}{2}}))-f(x(zq^{\frac{1}{2}}))}{x(zq^{-\frac{1}{2}})-x(zq^{\frac{1}{2}})}, \qquad (1.39)\\ &= \sum_{x(zq^{\frac{1}{2}})}^{x(q^{N-\frac{1}{2}})}\left[f(x(zq^{-\frac{1}{2}}))-f(x(zq^{\frac{1}{2}}))\right].\end{aligned}$$

Posons $z=q^s$ au second membre avec $N\geq s$, nous obtenons :

$$\int_{x(q^N)}^{x(z)}(Df)(x(z))d_qx(z) = \sum_{x(q^{s+\frac{1}{2}}))}^{x(q^{N-\frac{1}{2}})}f(x(q^{s-\frac{1}{2}}))-\sum_{x(q^{s+\frac{1}{2}})}^{x(q^{N-\frac{1}{2}})}f(x(q^{s+\frac{1}{2}})). \qquad (1.40)$$

En développant le second membre de cette équation , nous obtenons :

$$\begin{aligned}\int_{x(q^N)}^{x(z)}(Df)(x(z))d_qx(z) &= f(x(q^s))+f(x(q^{s+1}))+f(x(q^{s+2}))+\cdots+f(x(q^{N-1}))\\ &\quad -f(x(q^{s+1}))-f(x(q^{s+2}))-\cdots-f(x(q^N)).\end{aligned} \qquad (1.41)$$

Donc :

$$\begin{aligned}\int_{x(q^N)}^{x(z)}(Df)(x(z))d_qx(z) &= f(x(q^s))-f(x(q^N)),\\ &= f(x(z))-f(x(q^N)).\end{aligned} \qquad (1.42)$$

1.5.2 Intégration par parties

La relation (1.10) vue dans la dérivée de deux fonctions peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned}D(fg)(x(z)) &= f(x(zq^{\frac{1}{2}}))Dg(x(z))+g(x(zq^{-\frac{1}{2}}))Df(x(z)),\\ \Rightarrow f(x(zq^{\frac{1}{2}}))Dg(x(z)) &= D(fg)(x(z))-g(x(zq^{-\frac{1}{2}}))D(f)(x(z)).\end{aligned} \qquad (1.43)$$

Multipliant les deux membres de cette égalité par $\gamma(z)=x(zq^{-\frac{1}{2}})-x(zq^{\frac{1}{2}})$ et intégrant de $x(q^N)$ à $x(z)$, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\int_{x(q^N)}^{x(z)}f(x(zq^{\frac{1}{2}}))Dg(x(z))[x(zq^{-\frac{1}{2}})-x(zq^{\frac{1}{2}})] &= \int_{x(q^N)}^{x(z)}D(fg)(x(z))[x(zq^{-\frac{1}{2}})-x(zq^{\frac{1}{2}})]\\ &\quad -\int_{x(q^N)}^{x(z)}g(x(zq^{-\frac{1}{2}}))Df(x(z))[x(zq^{-\frac{1}{2}})-x(zq^{\frac{1}{2}})].\end{aligned} \qquad (1.44)$$

Or nous savons que :

$$x(zq^{-\frac{1}{2}})-x(zq^{\frac{1}{2}}) =: d_q(x(z)). \qquad (1.45)$$

Cela nous amène à écrire :

$$\begin{aligned}\int_{x(q^N)}^{x(z)} f(x(zq^{\frac{1}{2}}))Dg(x(z))d_q(x(z)) = &\int_{x(q^N)}^{x(z)} D(fg)(x(z))d_q(x(z)) \\ &- \int_{x(q^N)}^{x(z)} g(x(zq^{-\frac{1}{2}}))Df(x(z))d_q(x(z)).\end{aligned} \tag{1.46}$$

Ainsi, par le deuxième principe fondamental de l'analyse q-non uniforme, nous avons :

$$\int_{x(q^N)}^{x(z)} f(x(zq^{\frac{1}{2}}))Dg(x(z))d_q(x(z)) = [fg]_{x(q^N)}^{x(z)} - \int_{x(q^N)}^{x(z)} g(x(zq^{-\frac{1}{2}}))Df(x(z))d_q(x(z)). \tag{1.47}$$

Chapitre 2

Équations linéaires aux différences q-non uniformes du premier ordre

2.1 Équations linéaires aux différences q-non uniformes du premier ordre

Une équation aux différences q-non uniforme linéaire du premier ordre peut être écrite comme :

$$Dy(x(z)) = a(x(z))y(x(zq^{-\frac{1}{2}})) + b(x(z)), \tag{2.1}$$

voir dans [1, 6, 8], ou différemment comme :

$$Dy(x(z)) = a(x(z))y(x(z)) + b(x(z)), \tag{2.2}$$

où y, a et b sont des fonctions scalaires.

Toutefois, l'équation de la forme :

$$D\tilde{y}(x(z)) = \tilde{a}(x(z))\tilde{y}(x(zq^{\frac{1}{2}})) + \tilde{b}(x(z)), \tag{2.3}$$

avec $\tilde{y}$, $\tilde{a}$ et $\tilde{b}$ des fonctions scalaires, peut être obtenue de l'équation 2.1 en remplaçant q par q^{-1}.
D'où l'équation (2.3) peut être considérée non pas comme une équation indépendante mais comme associée à l'équation (2.1).

2.1.1 Équation homogène

Considérons d'abord l'équation (2.1). Sa version homogène s'écrit :

$$Dy(x(z)) = a(x(z))\, y(x(q^{-\frac{1}{2}}z)). \tag{2.4}$$

Lorsque $D_q f(x(z)) \to f'(x(z))$ et que $q \to 1$, l'équation (2.4) devient la version q-non uniforme de l'équation différentielle classique :

$$y'(t) = a(t)\, y(t). \tag{2.5}$$

Ainsi, comme dans le calcul différentiel ou calcul aux différences, pour résoudre (2.1), nous résolvons d'abord (2.4) et nous appliquons ensuite la méthode de Lagrange dite méthode de variation des constantes[5].
La résolution de (2.4) nous donne successivement :

$$\begin{aligned}
\frac{y(x(zq^{\frac{1}{2}})) - y(x(zq^{-\frac{1}{2}}))}{x(zq^{\frac{1}{2}}) - x(zq^{-\frac{1}{2}})} &= a(x(z))y(x(zq^{-\frac{1}{2}})),\\
y(x(zq^{\frac{1}{2}})) - y(x(zq^{-\frac{1}{2}})) &= [x(zq^{\frac{1}{2}}) - x(zq^{-\frac{1}{2}})]a(x(z))y(x(zq^{-\frac{1}{2}})),\\
y(x(zq^{\frac{1}{2}})) &= y(x(zq^{-\frac{1}{2}})) + [x(zq^{\frac{1}{2}}) - x(zq^{-\frac{1}{2}})]a(x(z))y(x(zq^{-\frac{1}{2}})),\\
&= \left[1 + \left(x(zq^{\frac{1}{2}}) - x(zq^{-\frac{1}{2}})\right) a(x(z))\right] y(x(zq^{-\frac{1}{2}})),\\
&= \left[1 + \frac{q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}}{2}(z - z^{-1})a(x(z))\right] y(x(zq^{-\frac{1}{2}})).
\end{aligned} \tag{2.6}$$

En posant

$$1 + \frac{q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}}{2}(z - z^{-1})a(x(z)) = p(z), \tag{2.7}$$

nous avons :

$$y(x(zq^{\frac{1}{2}})) = p(z)y(x(zq^{-\frac{1}{2}})). \tag{2.8}$$

Si $y_0(x(z))$ est solution de l'équation homogène (2.4), nous avons :

$$y_0(x(zq^{\frac{1}{2}})) = p(z)y_0(x(zq^{-\frac{1}{2}})). \tag{2.9}$$

En remplaçant z par $zq^{-\frac{1}{2}}$ dans l'équation (2.9), on obtient:

$$y_0(x(z)) = p\left(zq^{-\frac{1}{2}}\right)\, y_0\left(x(zq^{-1})\right). \tag{2.10}$$

Ensuite, afin d'exprimer le terme $y_0(x(zq^{-1}))$, on remplace z par zq^{-1} dans l'équation (2.10), ce qui conduit à

$$y_0\left(x(zq^{-1})\right) = p\left(zq^{-\frac{1}{2}-1}\right)\, y_0\left(x(zq^{-2})\right). \tag{2.11}$$

et puis remplaçons l'équation (2.11) dans (2.10).
En poursuivant ce procédé par itération, en remplaçant successivement z par $zq^{-2}, zq^{-3}, \ldots$ dans l'équation (2.9), on obtient :

$$\begin{aligned} y_0(x(z)) &= p(zq^{-\frac{1}{2}})y_0(x(zq^{-1})), \\ &= p(zq^{-\frac{1}{2}})p(zq^{-\frac{1}{2}-1})y_0(x(zq^{-2})), \\ &= p(zq^{-\frac{1}{2}})p(zq^{-\frac{1}{2}-1})p(zq^{-\frac{1}{2}-2})y_0(x(zq^{-3})). \end{aligned} \tag{2.12}$$

Après N itération on obtiens:

$$y_0(x(z)) = \left[\prod_{i=0}^{N-1} p(zq^{(-\frac{1}{2}-i)})\right] \cdot y_0(x(zq^{-N})). \tag{2.13}$$

A partir de l'équation (2.9), on peut écrire:

$$y_0(x(zq^{-\frac{1}{2}})) = [p(z))]^{-1}\, y_0(x(zq^{\frac{1}{2}})), \tag{2.14}$$

et remplaçons maintenant z par $zq^{\frac{1}{2}}$ dans la dernière équation, nous obtenons :

$$y_0x(z) = \left[p\Big(zq^{\frac{1}{2}}\Big)\right]^{-1} y_0(x(zq)). \tag{2.15}$$

Par itération , en utilisant l'equation (2.15), on obtient successivement:

$$\begin{aligned} y_0(x(z)) &= \left[p\left(zq^{\frac{1}{2}}\right)\right]^{-1} y_0(x(zq)), \\ &= \left[p\left(zq^{\frac{1}{2}}\right)\right]^{-1}\left[p\left(zq^{\frac{1}{2}+1}\right)\right]^{-1} y_0(x(zq^2)), \\ &= \left[p\left(zq^{\frac{1}{2}}\right)\right]^{-1}\left[p\left(zq^{\frac{1}{2}+1}\right)\right]^{-1}\left[p\left(zq^{\frac{1}{2}+2}\right)\right]^{-1} y_0(x(zq^3)), \\ &\vdots \end{aligned} \tag{2.16}$$

et plus généralement, nous avons :

$$y_0(x(z)) = \left[\prod_{i=0}^{N-1} p(zq^{i+\frac{1}{2}})\right]^{-1} y_0(x(zq^N)). \tag{2.17}$$

Considérons maintenant l'équation associée à l'équation (2.1), c'est-à-dire l'équation aux différences q-non uniformes linéaire du premier ordre (2.3) obtenue en remplaçant q par q^{-1} dans (2.1), encore ici, l'équation homogène correspondante est :

$$D\tilde{y}(x(z)) = \tilde{a}(x(z))\tilde{y}(x(zq^{\frac{1}{2}})). \tag{2.18}$$

Comme précédemment, en développant cette dernière, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\frac{\tilde{y}(x(zq^{\frac{1}{2}})) - \tilde{y}(x(zq^{-\frac{1}{2}}))}{x(zq^{\frac{1}{2}}) - x(zq^{-\frac{1}{2}})} &= \tilde{a}(x(z))\tilde{y}(x(zq^{\frac{1}{2}})),\\
\tilde{y}(x(zq^{\frac{1}{2}})) - \tilde{y}(x(zq^{-\frac{1}{2}})) &= \left[x(zq^{\frac{1}{2}}) - x(zq^{-\frac{1}{2}})\right]\tilde{a}(x(z))\tilde{y}(x(zq^{\frac{1}{2}})),\\
\tilde{y}(x(zq^{-\frac{1}{2}})) &= \tilde{y}(x(zq^{\frac{1}{2}})) - \left[x(zq^{-\frac{1}{2}}) - x(zq^{\frac{1}{2}})\right]\tilde{a}(x(z))\tilde{y}(x(zq^{\frac{1}{2}})),\\
\tilde{y}(x(zq^{-\frac{1}{2}})) &= \tilde{y}(x(zq^{\frac{1}{2}})) - \left[\frac{q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}}{2}(z - z^{-1})\right]\tilde{a}(x(z))\tilde{y}(x(zq^{\frac{1}{2}})),\\
\tilde{y}(x(zq^{-\frac{1}{2}})) &= \left[1 - \frac{q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}}{2}(z - z^{-1})\right]\tilde{a}(x(z))\tilde{y}(x(zq^{\frac{1}{2}})),\\
\tilde{y}(x(zq^{-\frac{1}{2}})) &= \tilde{y}(x(zq^{\frac{1}{2}}))\tilde{p}(z),
\end{aligned} \tag{2.19}$$

où

$$\tilde{p}(z) = 1 - \frac{q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}}{2}(z - z^{-1})\tilde{a}(x(z)). \tag{2.20}$$

Donc l'équation devient:

$$\tilde{y}(x(zq^{-\frac{1}{2}})) = \tilde{y}(x(zq^{\frac{1}{2}}))\tilde{p}(z). \tag{2.21}$$

Si $\tilde{y}_0(x(z))$ est solution de l'équation homogène (2.18)et en remplaçant z par $zq^{\frac{1}{2}}$ dans l'équation (2.21) alors nous avons :

$$\tilde{y}_0(x(z)) = \tilde{p}(zq^{\frac{1}{2}})\tilde{y}_0(x(zq)), \tag{2.22}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{y}_0(x(z)) &= \tilde{p}(zq^{\frac{1}{2}})\tilde{y}_0(x(zq)),\\
&= \tilde{p}(zq^{\frac{1}{2}})\tilde{p}(zq^{(\frac{1}{2}+1)})\tilde{y}_0(x(zq^2)),\\
&= \tilde{p}(zq^{\frac{1}{2}})\tilde{p}(zq^{(\frac{1}{2}+1)})\tilde{p}(zq^{(\frac{1}{2}+2)})\bar{y}_0(x(zq^3)),\\
&\vdots
\end{aligned} \tag{2.23}$$

et plus généralement, nous avons :

$$\tilde{y}_0(x(z)) = \left[\prod_{i=0}^{N-1}\tilde{p}(zq^{i+\frac{1}{2}})\right]\tilde{y}_0(x(zq^N)). \tag{2.24}$$

A partir de l'équation (2.21), on peut aussi écrire comme:

$$\tilde{y}_0(x(zq^{\frac{1}{2}})) = [\tilde{p}(z)]^{-1}\,\tilde{y}_0(x(zq^{-\frac{1}{2}})), \tag{2.25}$$

et remplaçons maintenant z par $zq^{-\frac{1}{2}}$ dans léquation (2.25), nous obtenons :

$$\tilde{y}_0(x(z)) = \left[\tilde{p}(zq^{-\frac{1}{2}})\right]^{-1}\tilde{y}_0(x(zq^{-1})). \tag{2.26}$$

D'une manière récursive ,on a:

$$\begin{aligned}\tilde{y}_0(x(z)) &= \left[\tilde{p}(zq^{-\frac{1}{2}})\right]^{-1}\tilde{y}_0(x(zq^{-1})),\\ &= \left[\tilde{p}(zq^{-\frac{1}{2}})\right]^{-1}\left[\tilde{p}(zq^{-\frac{1}{2}-1})\right]^{-1}\tilde{y}_0(x(zq^{-2})),\\ &= \left[\tilde{p}(zq^{-\frac{1}{2}})\right]^{-1}\left[\tilde{p}(zq^{-\frac{1}{2}-1})\right]^{-1}\left[\tilde{p}(zq^{-\frac{1}{2}-2})\right]^{-1}\tilde{y}_0(x(zq^{-3})),\\ &\vdots\end{aligned} \tag{2.27}$$

et plus généralement, nous avons :

$$\tilde{y}_0(x(z)) = \left[\prod_{i=0}^{N-1}\tilde{p}(zq^{-\frac{1}{2}-i})\right]^{-1}\tilde{y}_0(x(zq^{-N})). \tag{2.28}$$

D'où le lemme suivant :

Lemme 2.1

Les équations (2.13) *et* (2.24) *ou* (2.17) *et* (2.28) *peuvent être obtenues l'une de l'autre en remplaçant* q *par* q^{-1} *et* $\tilde{a}(x(z))$ *par* $a(x(z))$. *C'est ainsi que pour obtenir une solution de* (2.18) *avec* $\tilde{a}x(z) = a(x(z))$, *il suffit de remplacer* q *par* q^{-1} *dans la solution* (2.4) .

Nous pouvons écrire (2.17) et (2.24) sous les formes suivantes:

$$y_0(x(z)) = \left[\prod_{t=z_0q^{-1}}^{z}p(tq^{\frac{1}{2}})\right]^{-1}y_0(x(z_0)), \tag{2.29}$$

$$\tilde{y}_0(x(z)) = \left[\prod_{t=z_0q^{-1}}^{z}\tilde{p}(tq^{\frac{1}{2}})\right]\tilde{y}_0(x(z_0)), \tag{2.30}$$

pour $z = q^{-k_z}z_0$ et pour un certain entier positif k_z.
Maintenant, si $\tilde{a}(x(z)) = -a(x(z))$, $\tilde{p}(z) = p(z)$ alors la multiplication de (2.29) par (2.30) nous donne :

$$y_0(x(z))\tilde{y}_0(x(z)) = y_0(x(z_0))\tilde{y}_0(x(z_0)). \tag{2.31}$$

En particulier, si $y_0(x(z_0))\tilde{y}_0(x(z_0)) = 1$, alors $y_0(x(z))\tilde{y}_0(x(z)) = 1$, $\forall\ z = q^{-k}z_0$.
En utilisant (2.13) et (2.28), nous obtenons que $y_0(x(z))\tilde{y}_0(x(z)) = 1$, $\forall\ \ z = q^kz_0$, c'est-à-dire que $y_0(x(z))$ est l'inverse de $\tilde{y}_0(x(z))$ et vise-versa .

D'où le théorème suivant :

Théorème 2.1

Si $y(x(z))$ et $\tilde{y}(x(z))$ sont des solutions respectives des équations associées :

$$Dy(x(z)) = a(x(z))y(x(zq^{-\frac{1}{2}})), \tag{2.32}$$

$$D\tilde{y}(x(z)) = -a(x(z))\tilde{y}(x(zq^{\frac{1}{2}})), \tag{2.33}$$

satisfaisant les conditions

$$\tilde{y}(x(z_0))y(x(z_0)) = 1, \tag{2.34}$$

alors ces fonctions sont inverses l'un par rapport à l'autre.

Il est cependant possible de donner une preuve directe de ce théorème en appliquant la dérivée du produit $\tilde{y}(x(z))y(x(z))$.

Nous obtenons :

$$\begin{aligned} D(\tilde{y}y) &= D\tilde{y} \cdot y(x(zq^{-\frac{1}{2}})) + \tilde{y}(x(zq^{\frac{1}{2}})) \cdot Dy \\ &= -a(x(z))\tilde{y}(x(zq^{\frac{1}{2}}))y(x(zq^{-\frac{1}{2}})) + \tilde{y}(x(zq^{\frac{1}{2}}))a(x(z))y(x(zq^{-\frac{1}{2}})) \\ &= 0. \end{aligned} \tag{2.35}$$

Donc

$$D(\tilde{y}y) = 0. \tag{2.36}$$

Puisque la dérivée du produit $\tilde{y}(x(z))y(x(z))$ est nulle, cela signifie que $\tilde{y}(x(z))y(x(z)) =$ *constante*, et la condition (2.34) nous apporte le résultat.

À partir du **théorème 2.1** et du **lemme 2.1** nous déduisons le corollaire suivant :

Corollaire 2.1

L'inverse de la solution de

$$Dy(x(z)) = a(x(z))y(x(zq^{-\frac{1}{2}})), \tag{2.37}$$

est une solution de

$$Dy(x(z)) = -a(x(z))y(x(zq^{-\frac{1}{2}})), \tag{2.38}$$

avec q remplacé par q^{-1}.

Pour discuter la forme exponentielle de la solution de (2.4), nous la résolvons d'abord, nous l'écrivons sous la forme d'une équation aux q-différences en variable z , on a:

$$Dy(x(z)) = a(x(z))y(x(zq^{-\frac{1}{2}})),$$

$$\frac{y(x(zq^{\frac{1}{2}})) - y(x(zq^{-\frac{1}{2}}))}{x(zq^{\frac{1}{2}}) - x(zq^{-\frac{1}{2}})} = a(x(z))y(x(zq^{-\frac{1}{2}})),$$

en remplaçant z par $zq^{\frac{1}{2}}$ dans cette dernière équation on a:

$$\frac{y(x(zq))-y(x(z))}{x(zq)-x(z)} = a(x(zq^{\frac{1}{2}}))y(x(z)),$$

$$y(x(zq)) - y(x(z)) = [x(zq) - x(z)]\, a(x(zq^{\frac{1}{2}}))y(x(z)). \tag{2.39}$$

Calculons d'abord $x(zq) - x(z)$ en utilisant l'équation (1.22), nous avons:

$$\begin{aligned}
x(z) &= \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \\
x(qz) &= \frac{1}{2}\left(qz + \frac{1}{qz}\right), \\
x(qz) - x(z) &= \frac{1}{2}\left(qz + \frac{1}{qz} - z - \frac{1}{z}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left[z(q-1) + \frac{1}{z}\left(\frac{1}{q} - 1\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[z(q-1) - \frac{q-1}{qz}\right] \\
&= \frac{q-1}{2}\left(z - \frac{1}{qz}\right) \\
&= \frac{q-1}{2}\, z\left(1 - \frac{1}{qz^2}\right).
\end{aligned} \tag{2.40}$$

Donc

$$x(qz) - x(z) = \frac{q-1}{2}\, z\left(1 - \frac{1}{qz^2}\right). \tag{2.41}$$

Remplaçons (2.41) dans (2.39),on trouve :

$$\begin{aligned}
y(x(zq)) - y(x(z)) &= \frac{1}{2}z(q-1)\left(1 - \frac{1}{qz^2}\right) a(x(zq^{\frac{1}{2}}))y(x(z)), \\
&= \frac{1}{2}(qz - z)\left(1 - \frac{1}{qz^2}\right) a(x(zq^{\frac{1}{2}}))y(x(z)), \\
\Longrightarrow \quad \frac{y(x(zq)) - y(x(z))}{qz - z} &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{qz^2}\right) a(x(zq^{\frac{1}{2}}))y(x(z)).
\end{aligned} \tag{2.42}$$

Pour la fonction $y(x(z))$,la dérivée de Jackson [7] est $D_q y(x(z)) = \frac{y(x(zq))-y(x(z))}{qz-z}$.
On obtient l'équation:

$$D_q y(x(z)) = \beta(z)y(x(z)), \tag{2.43}$$

où

$$\beta(z) = \frac{1}{2}a(x(zq^{\frac{1}{2}}))\left(1 - \frac{1}{qz^2}\right). \tag{2.44}$$

Pour faire face à (2.44), définissons une q-version de la fonction logarithme en fixant

$$l\tilde{n}_q(f(z)) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{z_0}^{z} \frac{D_q f(z)}{f(z)} d_q z, \tag{2.45}$$

où

$$z_0 = f^{-1}(1), \implies f(z_0) = 1,$$

et une q-version de la fonction exponentielle en tant que fonction inverse de la q-logarithme par :

$$\tilde{e}_q(f) \stackrel{\text{def}}{=} l\tilde{n}_q^{-1}(f). \tag{2.46}$$

Ceci signifie que :

$$f(z) = \tilde{e}_q^{\left(\int_{z_0}^{z} \frac{D_q f(z)}{f(z)} d_q z\right)}. \tag{2.47}$$

Exemples

1)D'un coté, par (2.45), on a:

$$\begin{aligned} l\tilde{n}_q(z^b) &= \int_1^z \frac{D_q z^b}{z^b}\, d_q z, \\ &= \int_1^z \frac{q^b z^b - z^b}{qz - z} \frac{1}{z^b}\, d_q z, \\ &= \frac{q^b - 1}{q - 1} \int_1^z \frac{1}{z}\, d_q z, \\ &= \frac{q^b - 1}{\ln_q} \ln_z, \\ &= \log_q^{z^{q^b - 1}}. \end{aligned} \tag{2.48}$$

2) Si $e_q^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{[k]_q!}$ est la fonction q-exponentielle habituelle, alors par (2.47), nous avons que

$$\begin{aligned} D_q e_q^{az} &= a e_q^{az}, \\ &\implies e_q^{az} = \tilde{e}_q^{\left(\int_0^z \frac{a e_q^{az}}{e_q^{az}} d_q z\right)}, \\ &= \tilde{e}_q^{\left(\int_0^z a\, d_q z\right)}, \\ &= \tilde{e}_q^{(az)}, \end{aligned} \tag{2.49}$$

et

$$\begin{aligned} D_q e_{q^2}^{z^2} &= \frac{q^2 z^2 - z^2}{qz - z} e_{q^2}^{z^2}, \\ &= (q+1) z e_{q^2}^{z^2}, \\ \implies e_q^{z^2} &= \tilde{e}_q^{\left[\int_0^z (q+1) z \frac{e_{q^2}^{z^2}}{e_{q^2}^{z^2}} d_q z\right]}, \\ &= \tilde{e}_q^{z^2}. \end{aligned} \tag{2.50}$$

Plus généralement, nous avons

$$\begin{aligned} D_q e_{q^b}^{z^b} &= (D_q z^b) e_{q^b}^{z^b}, \\ &\Longrightarrow\ e_{q^b}^{z^b} = \tilde{e}_q^{\left[\int_0^z (D_q z^b) \frac{e_{q^b}^{z^b}}{e_q^{z^b}} d_q z\right]}, \\ &= \tilde{e}_q^{\left(\int_0^z (D_q z^b) d_q z\right)}, \\ &= \tilde{e}_q^{(z^b)}. \end{aligned} \tag{2.51}$$

D'un autre côté par (2.49), (2.50) et (2.51), nous avons que :

$$\begin{aligned} l\tilde{n}_q(e_q^{az}) &= az = ln_q(e_q^{az}), \\ l\tilde{n}_q(e_{q^2}^{z^2}) &= z^2 \neq ln_q(e_{q^2}^{z^2}), \\ l\tilde{n}_q(e_{q^b}^{z^b}) &= z^b \neq ln_q(e_{q^b}^{z^b}), \end{aligned} \tag{2.52}$$

où ln_q est l'inverse de la fonction q-exponentielle habituelle e_q.

Il est également intéressant de noter qu'à partir des relations (2.45) et (2.47), s'en suivent clairement les formules :

$$\begin{aligned} D_q \tilde{l}_{n_q}(u(z)) &= \frac{D_q u(z)}{u(z)}, \\ D_q \tilde{e}_q(v(z)) &= e_q(v(z)) D_q v(z), \end{aligned} \tag{2.53}$$

de manière similaire que pour les situations différentielles.

Nous pouvons maintenant écrire *formellement* la solution de (2.44)-(2.43) comme :

$$\begin{aligned} y(x(z)) &= \tilde{e}_q^{\left(\frac{1}{2}\int_{z_0}^z a(x(zq^{\frac{1}{2}}))(1-\frac{1}{qz^2}) d_q z\right)}, \\ &= \tilde{e}_q^{\left(\int_{z_0}^z a(x(zq^{\frac{1}{2}}))(D_q x(z)) d_q z\right)}. \end{aligned} \tag{2.54}$$

Par comparaison (2.13) et (2.17) avec (2.45), on a :

$$y_0 x(z) = \left[\prod_{t=qz_0}^{z} p(tq^{-\frac{1}{2}})\right] y_0(x(z_0)), \quad z = z_0 q^{k_z}, \tag{2.55}$$

et

$$y_0 x(z) = \left[\prod_{t=q^{-1}z_0}^{z} p(tq^{-\frac{1}{2}})\right]^{-1} y_0(x(z_0)), \quad z = z_0 q^{-k_z}, \tag{2.56}$$

pour un certain entier positif n, et un complexe $q \neq 0$.

D'où alors nous pouvons écrire :

$$\tilde{e}_q\left[\frac{1}{2}\int_{z_0}^{z} a(x(zq^{\frac{1}{2}}))\left(1-\frac{1}{qz^2}\right)d_qz\right] = E_q(z_0;a(x(z));z),$$
$$\stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \prod_{t=qz_0}^{z} p\left(tq^{-\frac{1}{2}}\right) & z = z_0q^{k_z} \\ \left[\prod_{t=q^{-1}z_0}^{z} p\left(tq^{\frac{1}{2}}\right)\right]^{-1}, & z = z_0q^{-k_z} \end{cases} \tag{2.57}$$

où nous avons supprimé le facteur $y_0(x(z_0))$ puisque dans la définition (2.45), z_0 avait été choisi de manière à ce que $y_0(x(z_0)) = 1$.

La notation $E_q(x_0;a(a(z));z)$ rappelle que cette fonction est une version *q-non uniforme* de la fonction exponentielle $\exp\left(\int_{x_0}^{x} a(x)dx\right)$ qui est solution de (2.5).

Si $z_0 = 0$, alors

$$\begin{aligned}\tilde{e}_q\left[\frac{1}{2}\int_{z_0}^{z} a\left(x(zq^{\frac{1}{2}})\right)\left(1-\frac{1}{qz^2}\right)d_qz\right] &= E_q(0;a(x(z));z),\\ &= \prod_{i=0}^{\infty}\left[p\left(zq^{\frac{1}{2}+i}\right)\right]^{-1},\end{aligned} \tag{2.58}$$

et pour $z_0 = \infty$

$$\begin{aligned}\tilde{e}_q\left[\frac{1}{2}\int_{z_0}^{z} a\left(x(zq^{\frac{1}{2}})\right)\left(1-\frac{1}{qz^2}\right)d_qz\right] &= E_q(\infty;a(x(z));z),\\ &= \prod_{i=0}^{\infty}\left[p\left(zq^{-\frac{1}{2}-i}\right)\right],\end{aligned} \tag{2.59}$$

En effet, si $g(z) = \frac{1}{2}(a(x(zq^{\frac{1}{2}}))(1-\frac{1}{qz^2}))$ est la fonction intégrée dans le membre gauche de (2.58) et (2.59), alors $p(zq^{\frac{1}{2}}) = (q-1)zg(z)+1$ et par conséquent, la convergence du produit en (2.58) est équivalente à celle des séries $\sum_{i=0}^{\infty}(q-1)q^izg(zq^i) = -\int_0^z h(z)d_qz$.

Similairement, puisque $p(zq^{-\frac{1}{2}}) = (q-1)q^{-1}zg(zq^{-1})+1$, alors la convergence du produit en (2.59) est équivalente à celle des séries $\sum_{i=0}^{\infty}(q-1)zq^{-1-i}g(zq^{-1-i}) = \int_{\infty}^{z} g(z)d_qz$.

Il est cependant bien connu que l'utilité des q-séries n'est pas nécessairement liée à leur convergence. Ici, nous illustrons le **corollaire** en vérifiant que :

$$\begin{cases} E_q(0;a(x(z));z)^{-1} = E_{q^{-1}}(\infty;-a(x(z));z) \\ E_q(\infty;a(x(z));z)^{-1} = E_{q^{-1}}(0;-a(x(z));z) \end{cases} \tag{2.60}$$

Si $a(x(z)) = a = const$, alors nous avons :

$$E_q(0;a;z) = \prod_{i=0}^{\infty}(1+(q-1)azq^ih(zq^i))^{-1}, \tag{2.61}$$

et

$$E_q(\infty;a;z)=\prod_{i=0}^{\infty}(1+(q-1)azq^{-1-i}h(zq^{-1-i})), \tag{2.62}$$

où

$$h(z)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{qz^2}\right). \tag{2.63}$$

Définissant

$$Cos_q(z_0;x(z))\overset{\text{def}}{=}\frac{E_q(z_0;i;x(z))+E_q(z_0;-i;x(z))}{2}, \tag{2.64}$$

$$Sin_q(z_0;x(z))\overset{\text{def}}{=}\frac{E_q(z_0;i;x(z))-E_q(z_0;-i;x(z))}{2i}, \tag{2.65}$$

et

$$Cosh_q(z_0;x(z))\overset{\text{def}}{=}\frac{E_q(z_0;1;x(z))+E_q(z_0;-1;x(z))}{2}, \tag{2.66}$$

$$Sinh_q(z_0;x(z))\overset{\text{def}}{=}\frac{E_q(z_0;1;x(z))-E_q(z_0;-1;x(z))}{2}. \tag{2.67}$$

Nous obtenons alors :

$$\begin{cases} DCos_q(z_0;x(z)) &= -Sin_q(z_0;x(zq^{-\frac{1}{2}})) \\ DSin_q(z_0;x(z)) &= Cos_q(z_0;x(zq^{-\frac{1}{2}})) \end{cases},$$

et

$$\begin{cases} DCosh_q(z_0;x(z)) &= Sinh_q(z_0;x(zq^{-\frac{1}{2}})) \\ DSinh_q(z_0;x(z)) &= Cosh_q(z_0;x(zq^{-\frac{1}{2}})) \end{cases}, \tag{2.68}$$

2.1.2 Equation non homogène

Considérons maintenant l'équation (2.1) non homogène. Soit $y(x(z))$ étant la solution de l'équation homogène correspondante(2.4). En utilisant la méthode de variation des constantes sous la forme :

$$y(x(z))=c(x(z))y_0(x(z)), \tag{2.69}$$

avec $c(x(z))$ une fonction à déterminer.

Pour ce faire, remplaçons (2.69) dans (2.1) et en dérivant nous obtenons :

$$D[y_o(x(z))c(x(z))]=a(x(z))c(x(zq^{-\frac{1}{2}}))y_0(x(zq^{-\frac{1}{2}}))+b(x(z)), \tag{2.70}$$

$$D[c(x(z))]y_0(x(zq^{\frac{1}{2}}))+c(x(zq^{-\frac{1}{2}}))D[y_o(x(z))]=a(x(z))c(x(zq^{-\frac{1}{2}}))y_0(x(zq^{-\frac{1}{2}}))+b(x(z)). \tag{2.71}$$

Or, nous savons que :

$$Dy_0(x(z)) = a(x(z))c(x(zq^{-\frac{1}{2}})). \tag{2.72}$$

Nous avons :

$$\begin{aligned} D[c(x(z))]y_0(x(zq^{\frac{1}{2}})) + c(x(zq^{-\frac{1}{2}}))a(x(z)y_0(zq^{-\frac{1}{2}})) = a(x(z))c(x(zq^{-\frac{1}{2}}))y_0(x(zq^{-\frac{1}{2}})) + b(x(z)), \\ D[c(x(z))]y_0(x(zq^{\frac{1}{2}})) = b(x(z)), \\ D[c(x(z))] = y_0^{-1}(x(zq^{\frac{1}{2}}))b(x(z)). \end{aligned} \tag{2.73}$$

Ceci nous amène à la relation suivante :

$$c(x(z)) = c + \int_{x(z_0)}^{x(z)} [y_0^{-1}(x(tq^{\frac{1}{2}}))]b(x(t))d_qx(t). \tag{2.74}$$

En remplaçant (2.74) dans (2.69), alors $y(x(z))$ devient :

$$y(x(z)) = y_0(x(z))c + \int_{x(z_0)}^{x(z)} [y_0(x(z))y_0^{-1}(x(tq^{\frac{1}{2}}))]b(x(t))\, d_qx(t), \tag{2.75}$$

où

$$c = y_0^{-1}(x(z_0))y(x(z_0)). \tag{2.76}$$

Par (2.69), nous obtenons la forme générale de (2.1) qui est :

$$y(x(z)) = \phi(x(z), x(z_0)) \left[y(x(z_0)) + \int_{x(z_0)}^{x(z)} \phi(x(z_0), x(tq^{\frac{1}{2}}))b(x(t))\, d_qx(t) \right], \tag{2.77}$$

où

$$\phi(a, b) = y_0(a)y_0^{-1}(b). \tag{2.78}$$

Nous faisons de même pour l'équation associée à (2.1), l'équation (2.3) en utilisant la méthode de variation des constantes tout en sachant que :

$$\tilde{y}(x(z)) = \tilde{c}(x(z))\tilde{y}_0(x(z)), \tag{2.79}$$

est sa solution générale avec $\tilde{c}(x(z))$ une fonction qu'il faut déterminer.
En remplaçant cette équation dans (2.3) et en dérivant, nous aboutissons aux résultats suivants :

$$\tilde{c}(x(z)) = \tilde{c} + \int_{x(z_0)}^{x(z)} \tilde{y}0^{-1}(x(tq^{-\frac{1}{2}}))\tilde{b}(x(t))\, d_qx(t). \tag{2.80}$$

Remplaçons maintenant $\tilde{c}(x(z))$ par sa valeur dans (2.79), nous obtenons :

$$\tilde{y}(x(z)) = \tilde{y}_0(x(z))\tilde{c} + \int_{x(z_0)}^{x(z)} \tilde{y}_0^{-1}(x(tq^{-\frac{1}{2}}))\tilde{y}_0(x(z))\tilde{b}(x(t))\, d_q x(t), \tag{2.81}$$

où

$$\tilde{c} = \tilde{y}(x(z_0))\tilde{y}_0^{-1}(x(z_0)). \tag{2.82}$$

Nous écrivons alors la solution générale de (2.3) sous cette forme :

$$\tilde{y}(x(z)) = \tilde{\phi}(x(z), x(z_0)) \left[\tilde{y}(x(z_0)) + \int_{x(z_0)}^{x(z)} \tilde{\phi}(x(z_0), x(tq^{-\frac{1}{2}}))\tilde{b}(x(t))\, d_q x(t)\right], \tag{2.83}$$

avec

$$\tilde{\phi}(a, b) = \tilde{y}_0(a)\tilde{y}_0^{-1}(b). \tag{2.84}$$

Signalons aussi que les solutions

$$y_p(x(z)) = \int_{x(z_0)}^{x(z)} \Big[\phi(x(z)),\, x(tq^{\frac{1}{2}})b(x(t))\Big]\, d_q x(t), \tag{2.85}$$

et

$$\tilde{y}_p(x(z)) = \int_{x(z_0)}^{x(z)} \Big[\tilde{\phi}(x(z)),\, x(tq^{-\frac{1}{2}})\tilde{b}(x(t))\Big]\, d_q x(t). \tag{2.86}$$

sont des solutions particulières de (2.1) et (2.3) respectivement.

Nous allons maintenant examiner quelques cas spéciaux de l'équation (2.1). Puisque par (2.77), l'essentiel de la solution de (2.1) consiste à résoudre (2.4), nous pouvons considérer ici que des cas homogènes.

2.2 Etudes de quelques cas élémentaires

1er cas :

$$Dy(x(z)) = ay(x(zq^{-\frac{1}{2}})), \tag{2.87}$$

où $a = const.$

Nous pouvons résoudre cette équation de deux façons :

1°) Nous utilisons :

$$\frac{y(x(zq^{\frac{1}{2}})) - y(x(zq^{-\frac{1}{2}}))}{x(zq^{\frac{1}{2}}) - x(zq^{-\frac{1}{2}})} = ay(xzq^{-\frac{1}{2}}). \tag{2.88}$$

En remplaçant z par $zq^{\frac{1}{2}}$, on a

$$y(x(zq)) - y(x(z)) = \Big[x(zq) - x(z)\Big]\, a\, y(x(z)). \tag{2.89}$$

Or dans (2.41), on a

$$x(zq) - x(z) = \frac{1}{2}z(q-1)\left(1 - \frac{1}{qz^2}\right). \tag{2.90}$$

Donc

$$y(x(zq)) - y(x(z)) = \frac{1}{2}(zq - z)\left(1 - \frac{1}{qz^2}\right) a\, y(x(z)), \tag{2.91}$$

$$\frac{y(x(zq)) - y(x(z))}{zq - z} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{qz^2}\right) a\, y(x(z)). \tag{2.92}$$

On définit la **dérivée de Jackson** :

$$D_q y(x(z)) = \frac{y(x(zq)) - y(x(z))}{zq - z}. \tag{2.93}$$

On a alors

$$\frac{D_q y(x(z))}{y(x(z))} = \frac{a}{2}\left(1 - \frac{1}{qz^2}\right). \tag{2.94}$$

En intégrant les deux membres de z_0 à z, on obtient :

$$\int_{z_0}^{z} \frac{D_q y(x(z))}{y(x(z))} = \frac{a}{2}\int_{z_0}^{z}(1 - \frac{1}{qz^2})d_q z. \tag{2.95}$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned} łñ_q y(x(z)) &= \frac{a}{2}\int_{z_0}^{z}(1 - \frac{1}{qz^2})d_q z \\ y(x(z)) &= \tilde{e}q\left[\frac{a}{2}\int_{z_0}^{z}\left(1-\frac{1}{qz^2}\right)d_q z\right], \\ &= \tilde{e}q\left[a\int_{z_0}^{z}(D_q x(z))d_q z\right], \\ &= \tilde{e}_q^{\left[\frac{a}{2}(z+z^{-1})\right]}, \\ &= \tilde{e}_q^{(ax(z))}, \end{aligned} \tag{2.96}$$

pour $z_0 = \pm i$.

2°) Pour résoudre

$$Dy(x(z)) = a\, y(x(zq^{-\frac{1}{2}})), \tag{2.97}$$

où a est une constante.

On sait que la solution particulière y_0 satisfait la relation fonctionnelle

$$y_0(x(z)) = \left[p(q^{\frac{1}{2}}z)\right]^{-1} y_0(x(zq)), \tag{2.98}$$

où la fonction p est définie par

$$p(z) = 1 + \frac{q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}}{2}(z - z^{-1})a. \tag{2.99}$$

Remplaçons z par $q^{\frac{1}{2}}z$. On obtient

$$p(q^{\frac{1}{2}}z) = 1 + \frac{q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}}{2}\left(q^{\frac{1}{2}}z - q^{-\frac{1}{2}}z^{-1}\right)a. \tag{2.100}$$

Factorisons $q^{-\frac{1}{2}}$ dans la parenthèse :

$$q^{\frac{1}{2}}z - q^{-\frac{1}{2}}z^{-1} = q^{-\frac{1}{2}}(qz - z^{-1}),$$

d'où

$$p(q^{\frac{1}{2}}z) = 1 + \frac{a}{2}(q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}})q^{-\frac{1}{2}}(qz - z^{-1}).$$

Or

$$(q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}})q^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{q},$$

ainsi

$$p(q^{\frac{1}{2}}z) = 1 + \frac{a}{2}\left(1 - \frac{1}{q}\right)(qz - z^{-1}).$$

Comme

$$qz - z^{-1} = \frac{qz^2 - 1}{z},$$

on obtient

$$p(q^{\frac{1}{2}}z) = 1 + \frac{a(q-1)}{2z}\left(z^2 - \frac{1}{q}\right). \tag{2.101}$$

Pour trouver les racines, on pose $p(q^{\frac{1}{2}}z) = 0$:

$$1 + \frac{a(q-1)}{2z}\left(z^2 - \frac{1}{q}\right) = 0. \tag{2.102}$$

On met sur un dénominateur commun :

$$2z + a(q-1)\left(z^2 - \frac{1}{q}\right) = 0. \tag{2.103}$$

Ceci est une équation quadratique en z :

$$a(q-1)z^2 + 2z - \frac{a(q-1)}{q} = 0. \tag{2.104}$$

Les solutions sont données par la formule quadratique :

$$z_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + \frac{a^2(q-1)^2}{q}}}{a(q-1)}. \tag{2.105}$$

Ainsi, le numérateur se factorise comme

$$2z + a(q-1)\left(z^2 - \frac{1}{q}\right) = a(q-1)(z - z_1)(z - z_2), \tag{2.106}$$

et on obtient la factorisation complète :

$$p(q^{\frac{1}{2}}z) = \frac{a(q-1)}{2z}(z-z_1)(z-z_2). \tag{2.107}$$

On peut également écrire cette factorisation sous la forme adaptée aux produits q-Pochhammer :

$$p(q^{\frac{1}{2}}z) = \frac{a(q-1)z_2}{2}(1-z_1z^{-1})(1-zz_2^{-1}). \tag{2.108}$$

Il s'ensuit que l'inverse est

$$[p(q^{\frac{1}{2}}z)]^{-1} = \frac{2}{a(q-1)z_2}\frac{1}{(1-z_1z^{-1})(1-zz_2^{-1})}. \tag{2.109}$$

Posons

$$c = \frac{2}{a(q-1)z_2}. \tag{2.110}$$

La relation fonctionnelle pour y_0 devient

$$y_0(x(z)) = c\frac{1}{(1-z_1z^{-1})(1-zz_2^{-1})}\, y_0(x(zq)). \tag{2.111}$$

Enfin, la solution explicite est

$$y_0(x(z)) = z^{\frac{\ln c}{\ln q}}\frac{(z_1qz^{-1};q)_\infty}{(z_2^{-1}z;q)_\infty}, \tag{2.112}$$

$$(\alpha;q)_n = \prod_{i=0}^{n-1}(1-q^i\alpha), \qquad (\alpha;q)_\infty = \lim_{n\to\infty}(\alpha;q)_n. \tag{2.113}$$

2ème cas :

$$D_qy(x(z)) = ax(z)\, y\Big(x(zq^{-\frac{1}{2}})\Big). \tag{2.114}$$

1°) Comme dans le cas précédent, pour résoudre cette équation formellement, on l'écrit d'abord sous forme d'une équation aux q-différences en variable z. On a successivement

$$\frac{y\Big(x(zq^{\frac{1}{2}})\Big) - y\Big(x(zq^{-\frac{1}{2}})\Big)}{x(zq^{\frac{1}{2}}) - x(zq^{-\frac{1}{2}})} = ax(z)\, y\Big(x(zq^{-\frac{1}{2}})\Big). \tag{2.115}$$

En remplaçant z par $zq^{\frac{1}{2}}$, on obtient

$$y(x(zq)) - y(x(z)) = \Big[x(zq) - x(z)\Big]\, ax(zq^{\frac{1}{2}})\, y(x(z)). \tag{2.116}$$

Or nous savons que:

$$x(zq) - x(z) = \frac{1}{2}z(q-1)\Big(1-\frac{1}{qz^2}\Big). \tag{2.117}$$

On a alors

$$\frac{y(x(zq))-y(x(z))}{zq-z}=\frac{a}{4}\Big(1-\frac{1}{qz^2}\Big)\Big(zq^{\frac{1}{2}}+z^{-1}q^{-\frac{1}{2}}\Big)y(x(z)) \tag{2.118}$$

$$=\frac{q^{\frac{1}{2}}a}{4}\Big(z-z^{-3}q^{-2}\Big)y(x(z)). \tag{2.119}$$

Or montrons que

$$D_qx^2(z)=\frac{x^2(zq)-x^2(z)}{zq-z}=\frac{1}{2}(q+1)\Big(z-z^{-3}q^{-2}\Big). \tag{2.120}$$

À partir de la définition

$$x(z)=\frac{z+z^{-1}}{2}.$$

On a alors

$$x^2(z)=\left(\frac{z+z^{-1}}{2}\right)^2=\frac{1}{4}\left(z^2+2+z^{-2}\right),$$

et

$$x^2(zq)=\frac{1}{4}\left(z^2q^2+2+z^{-2}q^{-2}\right).$$

Par conséquent,

$$x^2(zq)-x^2(z)=\frac{1}{4}\Big[z^2(q^2-1)+z^{-2}(q^{-2}-1)\Big].$$

Comme

$$zq-z=z(q-1),$$

on obtient

$$D_qx^2(z)=\frac{x^2(zq)-x^2(z)}{zq-z}$$

$$=\frac{1}{4}\frac{z^2(q^2-1)+z^{-2}(q^{-2}-1)}{z(q-1)}.$$

En utilisant

$$q^2-1=(q-1)(q+1),\qquad q^{-2}-1=-(q-1)(q+1)q^{-2}.$$

Donc

$$D_qx^2(z)=\frac{1}{4}(q+1)\left(z-z^{-3}q^{-2}\right). \tag{2.121}$$

L'équation (2.114) peut donc s'écrire

$$D_qy(x(z))=\beta(z)\,y(x(z)), \tag{2.122}$$

avec

$$\beta(z) = \frac{a}{4}q^{\frac{1}{2}}\Big(z - z^{-3}q^{-2}\Big) = \frac{aq^{\frac{1}{2}}}{q+1}D_q x^2(z). \tag{2.123}$$

Montrons que:

$$\beta(z) = \frac{aq^{\frac{1}{2}}}{q+1}D_q x^2(z). \tag{2.124}$$

On part de l'expression

$$\beta(z) = \frac{a}{4}q^{\frac{1}{2}}\Big(z - z^{-3}q^{-2}\Big).$$

D'après l'équation (2.121), on a

$$D_q x^2(z) = \frac{1}{4}(q+1)\Big(z - z^{-3}q^{-2}\Big).$$

On en déduit

$$\Big(z - z^{-3}q^{-2}\Big) = \frac{4}{q+1}\, D_q x^2(z).$$

En substituant cette expression dans la formule de $\beta(z)$, on obtient

$$\begin{aligned}\beta(z) &= \frac{a}{4}q^{\frac{1}{2}}\left(\frac{4}{q+1}D_q x^2(z)\right)\\ &= \frac{aq^{\frac{1}{2}}}{q+1}D_q x^2(z).\end{aligned}$$

D'où,

$$\beta(z) = \frac{aq^{\frac{1}{2}}}{q+1}D_q x^2(z).$$

Enfin,

$$\int_{z_0}^{z} \frac{D_q y(x(z))}{y(x(z))}\, d_q z = \int_{z_0}^{z} \beta(z)\, d_q z, \tag{2.125}$$

et par suite

$$y(x(z)) = \exp_q\Big(\int_{z_0}^{z} \beta(z)\, d_q z\Big) \tag{2.126}$$

$$= \exp_q\left(\frac{aq^{\frac{1}{2}}}{q+1}\int_{z_0}^{z} D_q x^2(z)\, d_q z\right) \tag{2.127}$$

$$= \exp_q\left(\frac{aq^{\frac{1}{2}}}{q+1}x^2(z)\right), \qquad z_0 = \pm i. \tag{2.128}$$

2°) La solution explicite de l'équation (2.114) est obtenue en factorisant $p(q^{\frac{1}{2}}z)$ dans la relation (2.15) avec $a(x(z)) = ax(z)$. On obtient successivement

$$p(z) = 1 + \frac{q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}}{2}(z - z^{-1})ax(z), \tag{2.129}$$

$$p(zq^{\frac{1}{2}}) = 1 + \frac{q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}}{2}(zq^{\frac{1}{2}} - z^{-1}q^{-\frac{1}{2}})a\frac{zq^{\frac{1}{2}} + z^{-1}q^{-\frac{1}{2}}}{2} \tag{2.130}$$

$$= 1 + \frac{a}{4}z^2q^{\frac{1}{2}}(q-1) - \frac{a}{4}z^{-2}q^{-\frac{1}{2}}(q-1). \tag{2.131}$$

D'où

$$p(zq^{\frac{1}{2}}) = \frac{aq^{\frac{1}{2}}(q-1)}{4z^2}(z^2 - z_1)(z^2 - z_2), \tag{2.132}$$

avec

$$z_{1,2}^2 = \frac{-2q^{\frac{1}{2}} \pm \sqrt{4q + a^2(q-1)^2}}{aq(q-1)}. \tag{2.133}$$

Ainsi

$$\left[p(zq^{\frac{1}{2}})\right]^{-1} = \frac{4}{a(1-q)q^{\frac{1}{2}}z_2}\frac{1}{(1 - z_1z^{-2})(1 - z^{-2}z_2^{-1})}. \tag{2.134}$$

En prenant

$$c = \frac{4}{a(1-q)q^{\frac{1}{2}}z_2}, \tag{2.135}$$

on a

$$y_0(x(z)) = c\frac{1}{(1 - z_1z^{-2})(1 - z^{-2}z_2^{-1})}y_0(x(zq)). \tag{2.136}$$

Montrons que :

$$y_0(x(z)) = z^{\frac{\ln c}{\ln q}}\frac{(z_1qz^{-2}; q^2)_\infty}{(z_2^{-1}z^{-2}; q^2)_\infty}. \tag{2.137}$$

Si

$$y_0(x(z)) = c\,\frac{1}{(1 - z_1z^{-2})(1 - z^{-2}z_2^{-1})}.y_0(x(zq)). \tag{2.138}$$

En divisant les deux membres par $y_0(x(zq))$, on obtient

$$\frac{y_0(x(z))}{y_0(x(zq))} = c\,\frac{1}{(1 - z_1z^{-2})(1 - z^{-2}z_2^{-1})}. \tag{2.139}$$

En itérant cette relation, on remplace successivement z par $zq, zq^2, \ldots, zq^{n-1}$ et l'on obtient

$$\frac{y_0(x(z))}{y_0(x(zq^n))} = c^n\prod_{i=0}^{n-1}\frac{1}{\left(1 - z_1z^{-2}q^{-2i}\right)\left(1 - z_2^{-1}z^{-2}q^{-2i}\right)}. \tag{2.140}$$

Supposant $|q| < 1$, on a

$$\lim_{n\to\infty} y_0(x(zq^n)) = \text{constante}.$$

Ainsi,

$$y_0(x(z)) = C\prod_{i=0}^{\infty}\frac{1}{\left(1-z_1z^{-2}q^{-2i}\right)\left(1-z_2^{-1}z^{-2}q^{-2i}\right)}. \tag{2.141}$$

En utilisant la définition du symbole q de Pochhammer [**?**],

$$(\alpha;q)_\infty = \prod_{i=0}^{\infty}(1-\alpha q^i),$$

on obtient

$$\prod_{i=0}^{\infty}\left(1-z_1z^{-2}q^{-2i}\right) = \frac{1}{(z_1qz^{-2};q^2)_\infty}, \tag{2.142}$$

et

$$\prod_{i=0}^{\infty}\left(1-z_2^{-1}z^{-2}q^{-2i}\right) = (z_2^{-1}z^{-2};q^2)_\infty. \tag{2.143}$$

Par ailleurs, le facteur c^n peut s'écrire sous la forme

$$c^n = q^{n\frac{\ln c}{\ln q}},$$

ce qui conduit à un facteur multiplicatif $z^{\frac{\ln c}{\ln q}}$.

On obtient finalement la solution

$$y_0(x(z)) = z^{\frac{\ln c}{\ln q}}\frac{(z_1qz^{-2};q^2)_\infty}{(z_2^{-1}z^{-2};q^2)_\infty}. \tag{2.144}$$

3ème cas :

On considère l'équation

$$D_qy(x(z)) = \frac{1}{x(zq^{-\frac{1}{2}})+\nu}\,y\Big(x(q^{-\frac{1}{2}}z)\Big). \tag{2.76}$$

Comme précédemment, on transforme cette équation en une équation aux q-différences en la variable z. Par définition de la dérivée q-symétrique, on a

$$\frac{y\Big(x(zq^{\frac{1}{2}})\Big)-y\Big(x(zq^{-\frac{1}{2}})\Big)}{x(zq^{\frac{1}{2}})-x(zq^{-\frac{1}{2}})} = \frac{1}{x(zq^{-\frac{1}{2}})+\nu}\,y\Big(x(zq^{-\frac{1}{2}})\Big). \tag{2.145}$$

En remplaçant z par $zq^{\frac{1}{2}}$, il vient

$$y(x(zq))-y(x(z)) = \frac{x(zq)-x(z)}{x(z)+\nu}\,y(x(z)). \tag{2.146}$$

Or l'on sait que

$$x(zq)-x(z) = \frac{1}{2}(zq-z)\left(1-\frac{1}{z^2q}\right). \tag{2.147}$$

Par conséquent,

$$\frac{y(x(zq))-y(x(z))}{zq-z}=\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{z^2q}\right)}{x(z)+\nu}\,y(x(z)). \tag{2.148}$$

Montrons d'abord que:

$$D_qx(z)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{z^2q}\right). \tag{2.149}$$

Par définition,

$$x(z)=\frac{z+z^{-1}}{2}.$$

On a

$$x(zq)=\frac{zq+z^{-1}q^{-1}}{2}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}x(zq)-x(z)&=\frac{1}{2}\Big(zq+z^{-1}q^{-1}-z-z^{-1}\Big)\\&=\frac{1}{2}\Big[z(q-1)+z^{-1}(q^{-1}-1)\Big].\end{aligned}$$

Par définition,

$$D_qx(z)=\frac{x(zq)-x(z)}{zq-z}.$$

Comme

$$zq-z=z(q-1),$$

on obtient

$$\begin{aligned}D_qx(z)&=\frac{\frac{1}{2}\left[z(q-1)+z^{-1}(q^{-1}-1)\right]}{z(q-1)}\\&=\frac{1}{2}\left(1+\frac{z^{-1}(q^{-1}-1)}{z(q-1)}\right).\end{aligned}$$

Or

$$\frac{q^{-1}-1}{q-1}=-\frac{1}{q},$$

d'où

$$D_qx(z)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{z^2q}\right).$$

Cela montre bien que

$$D_qx(z)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{z^2q}\right). \tag{2.150}$$

et l'équation précédente s'écrit

$$D_qy(x(z))=\frac{D_qx(z)}{x(z)+\nu}\,y(x(z)). \tag{2.151}$$

On intègre alors

$$\int_{z_0}^{z}\frac{D_qy(x(z))}{y(x(z))}\,d_qz=\int_{z_0}^{z}\frac{D_q[x(z)+\nu]}{x(z)+\nu}\,d_qz, \tag{2.152}$$

et l'on obtient finalement

$$\begin{aligned} y(x(z)) &= \tilde{e}_q^{\left[\frac{1}{4}\tilde{n}_q[x(z)+\nu]\right]}, \\ &= x(z)+\nu. \end{aligned} \tag{2.153}$$

$4^{\text{ème}}$ cas :

On considère l'équation

$$D_q y(x(z)) = \frac{q+1}{q^{\frac{1}{2}}}\frac{x(z)}{x^2(zq^{-\frac{1}{2}})+\mu}\, y\Big(x(q^{-\frac{1}{2}}z)\Big). \tag{2.78}$$

Comme dans les cas précédents, on commence par transformer cette équation en une équation aux q-différences en la variable z. Par définition , on a:

$$\frac{y\Big(x(zq^{\frac{1}{2}})\Big)-y\Big(x(zq^{-\frac{1}{2}})\Big)}{x(zq^{\frac{1}{2}})-x(zq^{-\frac{1}{2}})} = \frac{q+1}{q^{\frac{1}{2}}}\frac{x(z)}{x^2(zq^{-\frac{1}{2}})+\mu}\, y\Big(x(zq^{-\frac{1}{2}})\Big). \tag{2.154}$$

En remplaçant z par $zq^{\frac{1}{2}}$, il vient

$$y(x(zq))-y(x(z)) = \frac{q+1}{q^{\frac{1}{2}}}\frac{[x(zq)-x(z)]x(zq^{\frac{1}{2}})}{x^2(z)+\mu}\, y(x(z)). \tag{2.155}$$

Or l'on sait que

$$x(zq)-x(z) = \tfrac{1}{2}(zq-z)\left(1-\frac{1}{z^2q}\right). \tag{2.156}$$

Par conséquent,

$$\frac{y(x(zq))-y(x(z))}{zq-z} = \frac{q+1}{4}\frac{z-z^{-3}q^{-2}}{x^2(z)+\mu}\, y(x(z)). \tag{2.157}$$

Mais

$$D_q x^2(z) = \tfrac{1}{4}(q+1)\Big(z-z^{-3}q^{-2}\Big), \tag{2.158}$$

ce qui permet d'écrire

$$D_q y(x(z)) = \frac{D_q x^2(z)}{x^2(z)+\mu}\, y(x(z)). \tag{2.79}$$

On intègre alors

$$\int_{z_0}^{z}\frac{D_q y(x(z))}{y(x(z))}\, d_q z = \int_{z_0}^{z}\frac{D_q[x^2(z)+\mu]}{x^2(z)+\mu}\, d_q z, \tag{2.159}$$

d'où finalement

$$y(x(z)) = \tilde{e}_q^{\left[\ln_q[x^2(z)+\mu]\right]} = x^2(z)+\mu. \tag{2.80}$$

$5^{\text{ème}}$ cas :

On considère l'équation

$$D_q y(x(z)) = \frac{a}{x(bz)}\, y\Big(x\Big(zq^{-\frac{1}{2}}\Big)\Big). \tag{2.160}$$

On cherche une solution sous forme de série:

$$y(x(z)) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n z^n. \tag{2.161}$$

Par définition,

$$D_q y(x(z)) = \frac{y\Big(x(zq^{\frac{1}{2}})\Big) - y\Big(x(zq^{-\frac{1}{2}})\Big)}{x(zq^{\frac{1}{2}}) - x(zq^{-\frac{1}{2}})}. \tag{2.162}$$

En substituant dans l'équation de départ et en multipliant par $x(zq^{\frac{1}{2}}) - x(zq^{-\frac{1}{2}})$, on obtient

$$y\Big(x(zq^{\frac{1}{2}})\Big) - y\Big(x(zq^{-\frac{1}{2}})\Big) = \frac{a[x(zq^{\frac{1}{2}}) - x(zq^{-\frac{1}{2}})]}{x(bz)}\, y\Big(x(zq^{-\frac{1}{2}})\Big). \tag{2.163}$$

En faisant aussi la substitution de la série. On a

$$y(x(zq^{\frac{1}{2}})) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n q^{\frac{n}{2}} z^n \tag{2.164}$$

$$y(x(zq^{-\frac{1}{2}})) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n q^{-\frac{n}{2}} z^n. \tag{2.165}$$

Ainsi, le membre de gauche devient

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (q^{\frac{n}{2}} - q^{-\frac{n}{2}}) C_n z^n. \tag{2.166}$$

On rappelle que

$$x(z) = \frac{1}{2}(z + z^{-1}),$$

d'où

$$x(zq^{\frac{1}{2}}) - x(zq^{-\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}(q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}})(z - z^{-1}),$$

et

$$x(bz) = \frac{1}{2}(bz + b^{-1}z^{-1}).$$

En les substituant, on obtient

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (q^{\frac{n}{2}} - q^{-\frac{n}{2}}) C_n z^n = a(q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}) \frac{z - z^{-1}}{bz + b^{-1}z^{-1}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n q^{-\frac{n}{2}} z^n. \tag{2.167}$$

En faisant la simplification du facteur rationnel,on a:

$$\frac{z-z^{-1}}{bz+b^{-1}z^{-1}}=\frac{b(z^2-1)}{bz^2+b^{-1}}=\frac{b}{b^2+z^{-2}}(1-z^{-2}).$$

Après multiplication et identification des puissances de z, on obtient une relation reliant C_n à C_{n-2}.

On a ,

$$\tilde{C}_n=C_{2n}.$$

On obtient alors l'équation aux différences du premier ordre

$$\tilde{C}_n=\frac{ba(q^{\frac{1}{2}}-q^{-\frac{1}{2}})q^{-n+1}-2b^2(q^{n-1}-q^{-n+1})}{2(q^n-q^{-n})+ba(q^{\frac{1}{2}}-q^{-\frac{1}{2}})q^{-n}}\,\tilde{C}_{n-1},\qquad \tilde{C}_0 \text{ arbitraire.} \tag{2.168}$$

6ème cas :

De manière analogue, on peut résoudre :

$$Dy(x(z))=\frac{a\,x(z)}{x^2(bz)-2}\,y(x(q^{-\frac{1}{2}}z)). \tag{2.169}$$

A partir du **lemme 2.1** et du **corollaire 2.1**, nous en déduisons directement que la fonction

$$\begin{aligned} y(x(z)) &= \tilde{e}_{q^{-1}}^{-a\,x(z)},\\ &= z^{-\frac{ln_c}{lnq}\left(\frac{(z_2^{-1}z;q)_\infty}{(z_1qz^{-1};q)_\infty}\right)}, \end{aligned} \tag{2.170}$$

qui est l'inverse de $\tilde{e}_q^{(ax(z))}=z^{\frac{ln_c}{lnq}\left(\frac{(z_1qz^{-1};q)_\infty}{(z_2^{-1}z;q)_\infty}\right)}$ est la solution de l'équation:

$$Dy(x(z))=-ay(x(zq^{\frac{1}{2}})). \tag{2.171}$$

Similairement pour la fonction

$$\begin{aligned} y(x(z)) &= \tilde{e}_{q^{-1}}^{\left(-a\frac{q^{\frac{1}{2}}}{q+1}x^2(z)\right)},\\ &= z^{-\frac{ln_c}{lnq}\left(\frac{(z_2^{-1}z^2;q^2)_\infty}{(z_1qz^{-2};q^2)_\infty}\right)}, \end{aligned} \tag{2.172}$$

est une solution de l'équation:

$$Dy(x(z))=-ax(z)\,y(x(q^{\frac{1}{2}}z)). \tag{2.173}$$

Alors que les fonctions

$$y(x(z))=\frac{1}{x(z)+\nu}\qquad ,$$

et

$$y(x(z)) = \frac{1}{x^2(z)+\mu}, \qquad ,$$

sont des solution de:

$$\begin{aligned} Dy(x(z)) &= -\frac{1}{x(zq^{-\frac{1}{2}})+\nu}\, y(x(q^{\frac{1}{2}}z)), \\ Dy(x(z)) &= -\frac{q+1}{q^{\frac{1}{2}}}\,\frac{x(z)}{x^2(zq^{-\frac{1}{2}})+\mu}\, y(x(q^{\frac{1}{2}}z)). \end{aligned} \tag{2.174}$$

Chapitre 3

Équations linéaires aux différences q-non uniformes du second ordre

Comme dans le cas des équations différentielles, les équations aux différences et les équations aux q-différences , les équations linéaires du second ordre sur des réseaux q-non uniformes présentent un intérêt particulier dans l'étude et les applications de la théorie des équations aux différences définies sur de tels réseaux.

3.1 Solvabilité

Considérons les équations aux différences linéaires q-non uniformes du second ordre de la forme

$$a_0(x(z))[D^+]^2y(x(z)) + a_1(x(z))D^+y(x(z)) + a_2(x(z))y(x(z)) = 0, \tag{3.1}$$

et celles de la forme

$$h_0(x(z))D^-D^+y(x(z)) + h_1(x(z))D^+y(x(z)) + h_2(x(z))y(x(z)) = 0, \tag{3.2}$$

$a_0, h_0 \neq 0$, où D^+ et D^-sont des opérateurs de dérivation définies par

$$\begin{cases} D^+y(x(z)) = \frac{f(x(qz))-f(x(z))}{x(qz)-x(z)} \\ D^-y(x(z)) = \frac{f(x(z))-f(x(z/q))}{x(z)-x(z/q)} \end{cases}, \tag{3.3}$$

lorsque l'on s'intéresse à la propriété d'auto-adjointe. Comme dans le cas des équations différentielles ou équation aux différences, il n'y a pas de méthode générale pour résoudre ces équations en quadrature pour les coefficients généralisés $h_0(x(z))$, $h_1(x(z))$, $h_2(x(z))$, $a_0(x(z))$, $a_1(x(z))$, $a_2(x(z))$.

Cependant, certains cas particuliers peuvent être résolus explicitement.

3.1.1 Cas des coefficients variables

Considérons l'équation (3.2) et supposons que l'une de ses deux solutions indépendantes, disons $y_1(x(z))$, soit connue. L'autre solution, notée $y_2(x(z))$, peut alors être obtenue, comme en calcul différentiel ou aux différences. en utilisant la version q-non uniforme de la formule de Liouville. Comme $y_1(x(z))$ et $y_2(x(z))$ sont des solutions de (3.2) nous avons:

$$\begin{vmatrix} y(x(z)) & y_1(x(z)) & y_2(x(z)) \\ D^+y(x(z)) & D^+y_1(x(z)) & D^+y_2(x(z)) \\ (D^+)^2y(x(z)) & (D^+)^2y_1(x(z)) & (D^+)^2y_2(x(z)) \end{vmatrix} = 0. \tag{3.4}$$

Le **Vronskien** de ces deux solutions, est :

$$W(y_1,y_2) = \begin{vmatrix} y_1(x(z)) & y_2(x(z)) \\ D^+y_1(x(z)) & D^+y_2(x(z)) \end{vmatrix} = y_1(x(z))\,D^+y_2(x(z)) - y_2(x(z))\,D^+y_1(x(z)).$$

L'équation (3.4) est équivalente à l'équation du premier degré pour
$w(y_1,y_2) = w(y_1,y_2)(x(z))$.
Résolvons l'équation :

$$Dw(x(z)) = a(x(z))w(x(zq^{-\frac{1}{2}})), \tag{3.5}$$

on a:

$$\begin{aligned} \frac{w(x(zq^{\frac{1}{2}})) - w(x(zq^{-\frac{1}{2}}))}{x(zq^{\frac{1}{2}}) - x(zq^{-\frac{1}{2}})} &= a(x(z))w(x(zq^{-\frac{1}{2}})), \\ w(x(zq^{\frac{1}{2}})) &= \Big[1 + (x(zq^{\frac{1}{2}})) - x(zq^{-\frac{1}{2}}))a(x(z))\Big]w(x(zq^{-\frac{1}{2}})), \\ &= \left[1 + \frac{q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}}{2}(z - z^{-1})a(x(z))\right]w(x(zq^{-\frac{1}{2}})). \end{aligned} \tag{3.6}$$

En posant

$$p(z) = 1 + \frac{q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}}{2}(z - z^{-1})a(x(z)), \tag{3.7}$$

on a :

$$\begin{aligned} w(x(zq^{\frac{1}{2}})) &= p(z)\,w(x(zq^{-\frac{1}{2}})), \\ w(x(z)) &= p(zq^{-\frac{1}{2}})w(x(zq^{-1})). \end{aligned} \tag{3.8}$$

La solution est alors :

$$w(x(z)) = \prod_{i=0}^{N-1} p(zq^{(-\frac{1}{2}-i)})w(x(zq^{-N})). \tag{3.9}$$

En utilisant la formule **q-non uniforme de Liouville** voir([1, 2, 6]), cette solution s'écrit :

$$w(x(z)) = \begin{cases} \prod_{t=qz_0}^{z} p(tq^{-\frac{1}{2}})w(x(z_0)), & z = z_0 \cdot q^{k_z} \\ \prod_{t=q^{-1}z_0}^{z} \left[p(tq^{\frac{1}{2}})\right]^{-1} w(x(z_0)); & z = z_0 \cdot q^{-k_z} \end{cases}, \tag{3.10}$$

En considérant

$$\frac{w(x(zq^{\frac{1}{2}})) - w(x(zq^{-\frac{1}{2}}))}{x(zq^{\frac{1}{2}}) - x(zq^{-\frac{1}{2}})} = a(x(z))w(x(zq^{-\frac{1}{2}})), \tag{3.11}$$

et en remplaçant z par $zq^{\frac{1}{2}}$, on a :

$$\begin{aligned} w(x(zq)) - w(x(z)) &= (x(zq) - x(z))a(x(zq^{\frac{1}{2}}))w(x(z)), \\ \frac{w(x(zq)) - w(x(z))}{x(zq) - x(z)} &= \tfrac{1}{2}a(x(zq^{\frac{1}{2}}))\Big(1 - \tfrac{1}{qz^2}\Big)w(x(z)), \end{aligned} \tag{3.12}$$

$$\begin{aligned} \frac{D_q w(x(z))}{w(x(z))} &= \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{1}{qz^2}\Big)a(x(zq^{\frac{1}{2}})), \\ \tilde{ln}_q w(x(z)) &= \frac{1}{2}\int_{\infty}^{z} a(x(zq^{\frac{1}{2}}))(1 - \frac{1}{z^2 q})d_q z. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Donc

$$w(x(z)) = w(x(z_0))\tilde{e}_q^{\frac{1}{2}\left(\int_{z_0}^{z} \frac{1}{2}a(x(zq^{\frac{1}{2}}))\left(1-\frac{1}{z^2 q}\right)d_q z\right)}. \tag{3.14}$$

Ainsi, la première solution de l'équation (3.2) étant connue, on peut chercher la seconde à partir de

$$w(y_1, y_2) = y_1 D^+ y_2 - y_2 D^+ y_1, \tag{3.15}$$

car $w(y_1, y_2)$ est connue par la relation (3.14).

3.1.2 Cas des coefficients constants

Ce cas se présente lorsque les coefficients de l'équation (3.1) sont des constantes. Nous pouvons résoudre cette équation par sa factorisation :

$$(D^+ - k_1)(D^+ - k_2)y(x(z)) = 0, \tag{3.16}$$

où k_1 et k_2 sont les racines de l'équation caractéristique algébrique :

$$a_2 k^2 + a_1 k + a_2 = 0. \tag{3.17}$$

Ensuite, en résolvant les deux équations du premier degré si $k_1 \neq k_2$, on obtient deux solutions indépendantes :

$$y_1(x(z)) = \tilde{e}_q^{k_1 x(z)}, \tag{3.18}$$

et

$$y_2(x(z)) = \tilde{e}_q^{k_2 x(z)}. \tag{3.19}$$

C'est-à-dire :

a)

$$D^+ y_1(x(z)) - k_1 y_1(x(z)) = 0. \tag{3.20}$$

et

b)

$$D^+y_2(x(z)) - k_2y_2(x(z)) = 0. \tag{3.21}$$

Preuve

$$D^+y(x(z)) - ky(x(z)) = 0. \tag{3.22}$$

$$\begin{aligned} \frac{y(x(zq)) - y(x(z))}{x(zq) - x(z)} &= ky(x(z)), \\ \frac{y(x(zq)) - y(x(z))}{x(zq) - x(z)} &= \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{z^2q})y(x(z))k, \\ \frac{D_qy(x(z))}{y(x(z))} &= \frac{k}{2}(1 - \frac{1}{z^2q}). \end{aligned} \tag{3.23}$$

Or

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{z^2q}) &= D_qx(z). \\ \frac{D_qy(x(z))}{y(x(z))} &= kD_qx(z). \\ \int_{z_0}^{z} \frac{D_qy(x(z))}{y(x(z))}d_qz &= \int_{z_0}^{z} kD_qx(z)d_qz. \\ \tilde{ln}_qy(x(z)) = kx(z) \implies y(x(z)) &= \tilde{e}_q^{kx(z)}, \end{aligned} \tag{3.24}$$

Exemple

Les fonctions trigonométriques

$$\tilde{cos}_qx(z) = \frac{\tilde{e}_q^{ix(z)} + \tilde{e}_q^{-ix(z)}}{2} \quad \text{et} \quad \tilde{sin}_qx(z) = \frac{\tilde{e}_q^{ix(z)} - \tilde{e}_q^{-ix(z)}}{2i}, \tag{3.25}$$

ainsi que les fonctions hyperboliques

$$\cosh_q x(z) = \frac{\tilde{e}_q^{x(z)} + \tilde{e}_q^{-x(z)}}{2} \quad \text{et} \quad \sinh_q x(z) = \frac{\tilde{e}_q^{x(z)} - \tilde{e}_q^{-x(z)}}{2} \tag{3.26}$$

sont des solutions des équations :

$$\begin{aligned} [D^+]^2y(x(z)) + y(x(z)) &= 0 \\ [D^+]^2y(x(z)) - y(x(z)) &= 0. \end{aligned} \tag{3.27}$$

Preuve

a) i)

$$[D^+]^2\tilde{cos}_qx(z) + \tilde{cos}_qx(z) = 0, \tag{3.28}$$

$$\begin{aligned}
[D^+]^2\frac{\tilde{e}_q^{ix(z)}+\tilde{e}_q^{-ix(z)}}{2}+\frac{\tilde{e}_q^{ix(z)}+\tilde{e}_q^{-ix(z)}}{2}&=0,\\
D^+\frac{i\tilde{e}_q^{ix(z)}-i\tilde{e}_q^{-ix(z)}}{2}+\frac{\tilde{e}_q^{ix(z)}-\tilde{e}_q^{-ix(z)}}{2}&=0,\\
\frac{i^2\tilde{e}_q^{ix(z)}+i^2\tilde{e}_q^{-ix(z)}}{2}+\frac{\tilde{e}_q^{ix(z)}+\tilde{e}_q^{-ix(z)}}{2}&=0,\\
-\frac{\tilde{e}_q^{ix(z)}+\tilde{e}_q^{-ix(z)}}{2}+\frac{\tilde{e}_q^{ix(z)}+\tilde{e}_q^{-ix(z)}}{2}&=0.
\end{aligned}\tag{3.29}$$

ii)

$$[D^+]^2\tilde{sin}_q x(z)+\tilde{sin}_q x(z)=0,\tag{3.30}$$

$$\begin{aligned}
[D^+]^2\frac{\tilde{e}_q^{ix(z)}-\tilde{e}_q^{-ix(z)}}{2i}+\frac{\tilde{e}_q^{ix(z)}-\tilde{e}_q^{-ix(z)}}{2i}&=0,\\
D^+\frac{\tilde{e}_q^{ix(z)}-\tilde{e}_q^{-ix(z)}}{2i}+\frac{\tilde{e}_q^{ix(z)}-\tilde{e}_q^{-ix(z)}}{2i}&=0,\\
\frac{i^2\tilde{e}_q^{ix(z)}-i^2\tilde{e}_q^{-ix(z)}}{2i}+\frac{\tilde{e}_q^{ix(z)}-\tilde{e}_q^{-ix(z)}}{2i}&=0,\\
-\frac{\tilde{e}_q^{ix(z)}-\tilde{e}_q^{-ix(z)}}{2i}+\frac{\tilde{e}_q^{ix(z)}-\tilde{e}_q^{-ix(z)}}{2i}&=0.
\end{aligned}\tag{3.31}$$

b) i)

$$[D^+]^2\tilde{cosh}_q x(z)+\tilde{cosh}_q x(z)=0,\tag{3.32}$$

$$\begin{aligned}
[D^+]^2\frac{\tilde{e}_q^{x(z)}+\tilde{e}_q^{-x(z)}}{2}-\frac{\tilde{e}_q^{x(z)}+\tilde{e}_q^{-x(z)}}{2}&=0,\\
D^+\frac{\tilde{e}_q^{x(z)}-\tilde{e}_q^{-x(z)}}{2}-\frac{\tilde{e}_q^{x(z)}+\tilde{e}_q^{-x(z)}}{2}&=0,\\
\frac{\tilde{e}_q^{x(z)}+\tilde{e}_q^{-x(z)}}{2}-\frac{\tilde{e}_q^{x(z)}+\tilde{e}_q^{-x(z)}}{2}&=0.
\end{aligned}\tag{3.33}$$

ii)

$$[D^+]^2\tilde{sinh}_q x(z)+\tilde{sinh}_q x(z)=0.\tag{3.34}$$

$$\begin{aligned}
[D^+]^2\frac{\tilde{e}_q^{x(z)}-\tilde{e}_q^{-x(z)}}{2}-\frac{\tilde{e}_q^{x(z)}-\tilde{e}_q^{-x(z)}}{2}&=0,\\
D^+\frac{\tilde{e}_q^{x(z)}+\tilde{e}_q^{-x(z)}}{2}-\frac{\tilde{e}_q^{x(z)}-\tilde{e}_q^{-x(z)}}{2}&=0,\\
\frac{\tilde{e}_q^{x(z)}-\tilde{e}_q^{-x(z)}}{2}-\frac{\tilde{e}_q^{x(z)}-\tilde{e}_q^{-x(z)}}{2}&=0.
\end{aligned}\tag{3.35}$$

En effet, de l'autre côté, si l'équation $a_0k^2+a_1k+a_2=0$, admet une racine double, alors on utilise la formule de **Liouville** pour trouver la seconde solution indépendante.

3.2 Orthogonalité

Considérons l'équation aux valeurs propres :

$$a(x(z))D^-D^+y(x(z)) + b(x(z))D^+y(x(z)) = \lambda y(x(z)). \tag{3.36}$$

Nous pouvons l'écrire sous forme auto-adjointe :

$$D^-\Big[a(x(qz))\,p(x(qz))\,D^+y(x(z))\Big] = \lambda p(x(z))y(x(z)), \tag{3.37}$$

où

$$D^-\Big[a(x(qz))p(x(qz))\Big] = p(x(z))b(x(z)). \tag{3.38}$$

Supposons que nous avons aussi

$$D^-[a(x(qz))p(x(qz))D^+\tilde{y}(x(z))] = \tilde{\lambda}p(x(z))\tilde{y}(x(z)), \tag{3.39}$$

pour λ et $\tilde{\lambda}$ distincts.

Ensuite, en multipliant l'équation (3.37) par $\tilde{y}(x(z))$ et en soustrayant membre à membre l'équation (3.39) multipliée par $y(x(z))$, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\tilde{y}(x(z))D^-[a(x(qz))p(x(qz))D^+y(x(z))] - y(x(z))D^-[a(x(qz))p(x(qz))D^+\tilde{y}(x(z))]\\ = (\lambda-\tilde{\lambda})p(x(z))y(x(z))\tilde{y}(x(z)).\end{aligned} \tag{3.40}$$

Or

$$D^-[p(u)D^+v - vD^+u] = uD^-(pD^+v) - vD^-(pD^+u). \tag{3.41}$$

Par cette identité, nous obtenons alors :

$$\begin{aligned}D^-[a(x(qz))p(x(qz))[\,\tilde{y}(x(z))D^+y(x(z)) - y(x(z))D^+\bar{y}(x(z))]]\\ = (\lambda-\tilde{\lambda})p(x(z))y(x(z))\bar{y}(x(z)).\end{aligned} \tag{3.42}$$

Posons

$$\tilde{y}(x(z))D^+y(x(z)) - y(x(z))D^+\tilde{y}(x(z)) = W(\tilde{y}(x(z)), y(x(z))). \tag{3.43}$$

D'où

$$D^-[a(x(qz))p(x(qz))W(\tilde{y}(x(z)), y(x(z)))] = (\lambda-\tilde{\lambda})p(x(z))y(x(z))\tilde{y}(x(z)). \tag{3.44}$$

En intégrant les deux membres de cette égalité de $x(z_0)$ à $x(z_1)$, tout en notant que

$(D^{-}F)(z) = (DF)(q^{-\frac{1}{2}}z)$, nous obtenons :

$$(\lambda - \tilde{\lambda}) \int_{x(z_0)}^{x(z_1)} p(x(z))y(x(z))\tilde{y}(x(z))\, d_q x(z) = \int_{x(z_0)}^{x(z_1)} D^{-}\left[a(x(qz))p(x(qz))W(\tilde{y}(x(z)), y(x(z)))\right] d_q x(z),$$
$$= \Big[a(x(qz))p(x(qz))W(\tilde{y}(x(z)), y(x(z)))\Big]_{x(q^{-\frac{1}{2}}z_0)}^{x(q^{-\frac{1}{2}}z_1)}. \tag{3.45}$$

Cette dernière égalité donne la condition d'orthogonalité pour les deux fonctions aux valeurs propres $y(x(z))$ et $\tilde{y}(x(z))$ de l'équation (3.36) correspondant aux valeurs propres λ et $\tilde{\lambda}$ distinctes dans l'intervalle $[x(z_0), x(z_1)]$; avec un poids q-non uniforme discret $p(x(z))$ donné par la relation (3.38) en prenant $z_1 = z$ et $z_0 = z$, on a:

$$\Big[a(x(qz))p(x(qz))W(\tilde{y}(x(z)), y(x(z)))\Big]_{x(q^{-\frac{1}{2}}z_0)}^{x(q^{-\frac{1}{2}}z_1)} = 0. \tag{3.46}$$

Donc, l'orthogonalité est vérifié.

3.3 Contrôlabilité des équations linéaires aux différences q-non uniformes du second ordre

Contrôlabilité

On considère un système linéaire de commande aux différences q-non uniformes défini par:

$$Dy(x(z)) = A(x(z))\, y(x(zq^{\frac{1}{2}})) + B(x(z))\, u(x(z)). \tag{3.47}$$

où y est un vecteur de dimension k, A une matrice $k \times k$, B une matrice $k \times m$, et u un vecteur de dimension m.

Un modèle mathématique plus adapté que (3.47) à l'étude de la contrôlabilité des systèmes s'écrit ainsi :

$$\begin{aligned} Dy(x(z)) &= A(x(z))\, y(x(zq^{\frac{1}{2}})) + B(x(z))\, u(x(z)), \\ v(x(z)) &= C(x(z))\, y(x(zq^{\frac{1}{2}})), \end{aligned} \tag{3.48}$$

où :

- $y(x(z))$ est l'état du système,
- $u(x(z))$ est la fonction de contrôle,
- $v(x(z))$ est la sortie,
- $A(x(z))$, $B(x(z))$ et $C(x(z))$ sont des matrices

Définition 3.1 *Le système* (3.48) *est dit* ***complètement contrôlable*** *si, pour tout état initial* $y_0 = y(x_0)$ *et tout état final* $y_f = y(x_1)$*, il existe :*

- *un intervalle fini* $x_0 \leq x \leq x_1$*,*
- *une fonction de contrôle* $u(x)$ *définie sur cet intervalle,*

telle que la solution du système satisfait :
$y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_f.$

Considérons l'équation linéaire scalaire aux q-différences non uniformes d'ordre deux, à coefficients constants :

$$(D^+)^2 y(x) + a_1 D^+ y(x) + a_2 y(x) = u(x), \tag{3.49}$$

où D^+ désigne l'opérateur q-différence sur un réseau non uniforme.

Changement de variables

On définit les variables d'état :

$$z_1(x) = y(x), \qquad z_2(x) = D^+ y(x). \tag{3.50}$$

Alors :

$$\begin{aligned} D^+ z_1(x) &= z_2(x), \\ D^+ z_2(x) &= -a_1 z_2(xq^{-\frac{1}{2}}) - a_2 z_1(xq^{-\frac{1}{2}}) + u(x). \end{aligned} \tag{3.51}$$

On obtient le système d'état matriciel :

$$D^+ z(x) = C z(xq^{-\frac{1}{2}}) + d\, u(x), \tag{3.52}$$

avec

$$z(x) = \begin{pmatrix} z_1(x) \\ z_2(x) \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{3.53}$$

Matrice de contrôlabilité

La matrice de contrôlabilité associée est :

$$U(C, d) = [\, d \quad Cd \,]. \tag{3.54}$$

On calcule :

$$d = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad Cd = \begin{pmatrix} 1 \\ -a_1 \end{pmatrix}, \tag{3.55}$$

donc

$$U(C,d) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -a_1 \end{pmatrix}. \tag{3.56}$$

Le déterminant est

$$\det U(C,d) = -1 \neq 0, \tag{3.57}$$

donc $\operatorname{rang} U(C,d) = 2$. Ainsi, le système (3.52), issu de l'équation (3.49), est complètement contrôlable.

Définition 3.2 *Un système est dit de* ***rang maximal*** *lorsque la matrice de contrôlabilité associée possède un rang égal à la dimension de l'espace d'état du système.*

Conclusion

Ce mémoire a été consacré à l'étude des équations linéaires aux différences q- non uniformes du second ordre, qui constituent une généralisation des équations aux différences classiques et occupent une place importante dans l'analyse des systèmes dynamiques discrets.

Dans un premier temps, nous avons présenté les notions fondamentales du calcul aux différences q- non uniformes, notamment les concepts de dérivabilité et d'intégrabilité, ainsi que leurs principales propriétés. Nous avons ensuite étudié les équations linéaires aux différences q-non uniformes du premier ordre dans les cas homogène et non homogène, afin de mettre en place les outils nécessaires à l'étude des équations du second ordre.

L'essentiel de ce travail a porté sur l'analyse des équations linéaires aux différences q-non uniformes du second ordre. Nous avons examiné les conditions de solvabilité dans les cas des coefficients constants et variables, puis étudié les propriétés d'orthogonalité des solutions. Enfin, nous nous sommes intéressés à la contrôlabilité de ces systèmes en déterminant la matrice de contrôlabilité associée. Cette matrice constitue un outil fondamental puisqu'elle permet de caractériser la capacité du système à être conduit d'un état initial vers un état final désiré à l'aide d'une commande appropriée.

L'intérêt principal de ce travail réside ainsi dans l'obtention de cette matrice de contrôlabilité et dans la mise en évidence des conditions permettant d'assurer le contrôle des systèmes décrits par des équations aux différences q- non uniformes du second ordre. Les résultats obtenus contribuent à une meilleure compréhension de la structure de ces équations et renforcent leur importance dans l'étude des systèmes dynamiques discrets.

Comme perspective, il serait intéressant d'étendre cette étude aux équations q- non uniformes non linéaires, aux systèmes d'ordre supérieur ainsi qu'à leurs applications dans des domaines concrets tels que les réseaux de télécommunication, le traitement du signal, l'automatique et la modélisation de phénomènes dynamiques complexes.

Bibliographie

[1] R. Askey and James Arthur Wilson. *Some Basic Hypergeometric Orthogonal Polynomials that Generalize Jacobi Polynomials*, volume 319 of *Memoirs of the American Mathematical Society*. American Mathematical Society, 1985.

[2] G. Bangerezako. Variational calculus on q-nonuniform lattices. *Journal of mathematical analysis and applications*, 306(1):161–179, 2005.

[3] G. Bangerezako. An introduction to q-difference equations. 2008.

[4] B. Malcolm Brown and Mourad EH Ismail. A right inverse of the askey-wilson operator. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 123(7):2071–2079, 1995.

[5] Saber N. Elaydi. *An Introduction to Difference Equations*. Springer, New York, 3rd edition, 2005.

[6] Mourad EH Ismail, Mizan Rahman, and Ruiming Zhang. Diagonalization of certain integral operators ii. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 68(1-2):163–196, 1996.

[7] Frank Hilton J. On q-definite integrals. *Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics*, 41:193–203, 1910.

[8] Victor G Kac and Pokman Cheung. *Quantum calculus*, volume 113. Springer, 2002.

[9] A. Magnus. Associated askey-wilson polynomials as laguerre–hahn orthogonal polynomials. *Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications*, 2:Paper 076, 2006.

[10] A. Magnus and J. Winkler. *Special Functions of Mathematical Physics: A Unified Introduction*. Springer, 1995.

[11] A.P. Magnus. Special nonuniform lattice (snul) orthogonal polynomials on discrete dense sets of points. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 65(1-3):253–265, 1995.