



**DSPACE**

<https://dspace.org/>

**Etude de changement des énergies hyperfines des noyaux de 57 fe incorporés dans un solide soumis à l'interaction combinée de champs statiques et un champ dépendant du temps avec deux niveaux hyperfins**

**Niyonkuru, Seth**

**2023-03**

UB

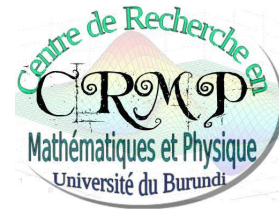
<https://repository.ub.edu.bi/handle/123456789/447>

UNIVERSITE DU BURUNDI

FACULTE DES SCIENCES

Département de Physique

Centre de Recherche en Mathématiques et Physique



---

**ETUDE DE CHANGEMENT DES ENERGIES  
HYPERFINES DES NOYAUX DE  $^{57}\text{Fe}$   
INCORPORES DANS UN SOLIDE SOUMIS A  
L'INTERACTION COMBINEE DE CHAMPS  
STATIQUES ET UN CHAMP DEPENDANT DU  
TEMPS AVEC DEUX NIVEAUX HYPERFINS**

---

Par:

**NIYONKURU Seth**

Mémoire présenté et défendu publiquement en vue de l'obtention du  
Diplôme de Master en Physique fondamentale et appliquée.

Option: Physique Fondamentale

---

**Sous la direction de:**

Professeur Émérite Jos ODEURS (Directeur)

Docteur BARANCIRA Thaddée (Co-Directeur)

Bujumbura, Mars 2023

## Composition du Jury

Docteur HAVYARIMANA Claver: *Président*

Docteur KARANGWA Pierre-Célestin: *Secrétaire*

Professeur Émérite Jos ODEURS: *Directeur*

Docteur BARANCIRA Thaddée: *Co-Directeur*

## Dédicace

A mes parents;

A mes frères et sœurs;

A toute ma famille;

A mes camarades;

A tous ceux qui me sont chers;

Je dédie ce mémoire.

## Remerciements

En premier lieu, je remercie mon Directeur de mémoire Professeur Emérite Jos Odeurs et mon Co-Directeur Docteur BARANCIRA Thaddée qui ont suivi régulièrement l'évolution de ce mémoire.

Mes remerciements s'adressent aussi à tous les membres du Jury de ce mémoire pour leur contribution à sa présentation, défense et correction. Je remercie tous ceux qui ont contribué à l'exécution de ce travail.

Je remercie mes camarades de master en Physique fondamentale et appliquée qui m'ont donné quelques conseils.

## Résumé

Dans ce travail, nous avons étudié le changement des niveaux nucléaires du noyau de  $^{57}\text{Fe}$  incorporé dans un solide soumis simultanément aux champs électromagnétiques statiques et au champ électromagnétique dépendant du temps. Pour ce fait, nous avons commencé par montrer les sous niveaux nucléaires du noyau de  $^{57}\text{Fe}$  soumis aux champs électromagnétiques statiques (champ magnétique et champ électrique). Nous avons utilisé un champ magnétique  $B = 33 \text{ T}$  et un champ quadripolaire électrique  $Q = 0,17 \cdot 10^{-23} \text{ fm}^2$ . Les sous niveaux obtenus ont été utilisés dans l'étude de l'émission spontanée. Lors de l'émission spontanée, nous avons traité en premier lieu le cas d'un seul mode de rayonnement avec une interaction noyau-rayonnement quantifié négligeable. L'application d'un champ quantifié nous a permis de calculer les valeurs propres et les vecteurs propres du noyau habillé de photons. Les règles de sélection nous ont permis de trouver huit transitions différentes correspondant aux huit rayons  $\gamma$  différents. Nous avons étudié une interaction résonante dans les sous niveaux excités caractérisés par  $m_I = \frac{1}{2}$  et  $m_I = -\frac{1}{2}$ , les autres sous niveaux étant hors-résonance. Nous avons trouvé que huit rayons  $\gamma$  couplent les sous niveaux excités résonants avec le rayonnement quantifié aux sous niveaux fondamentaux et deux rayons  $\gamma$  couplent les sous niveaux excités non résonnants avec le champ dépendant du temps aux sous niveaux fondamentaux.

**Mots clés:** Noyau habillé, états habillés, valeurs propres et vecteurs propres, absorption, émission spontanée et émission induite, hamiltonien.

## Abstract

In this work, we studied the change in nuclear levels of the nucleus of  $^{57}\text{Fe}$  incorporated in a solid subjected simultaneously to static and time-dependent fields. To this end we started to calculate the nuclear sub-levels of the nucleus subjected to static fields (magnetic field and electric field). We have used a magnetic field  $B = 33 \text{ T}$  and a quadrupole moment of the nucleus  $Q = 0.17 \cdot 10^{-23} \text{ fm}^2$ . The obtained sub-levels have been used in the study of spontaneous emission of  $\gamma$  radiation. During the spontaneous emission, we have treated first the case of a single radiation mode with a negligible nucleus-photon interaction. The selection rules allowed us to find eight different transitions corresponding to the eight different  $\gamma$  rays. We have studied the resonant interaction of the photon with two sublevels characterized by  $m_I = \frac{1}{2}$  and  $m_I = -\frac{1}{2}$ , the other sublevels are not in resonance. The eight  $\gamma$  rays couple the resonant excited sublevels with the quantized radiation at the fundamental sublevels and two  $\gamma$  rays couple the other excited sublevels with the fundamental sublevels.

**Keywords:** Dressed nucleus, dressed states, eigen values and eigen states, absorption and spontaneous and induced emission , Hamiltonian.

# Table des matières

Composition du Jury	i
Dédicace	ii
Remerciements	iii
Résumé	iv
Abstract	v
Table des matières	vi
Liste des figures	viii
Sigles et abréviations	ix
Avant-propos	x
Introduction générale	1
<b>1 NOYAU DE <math>^{57}\text{Fe}</math> SOUMIS A L'INTERACTION COMBINEE DES CHAMPS STATIQUES ET UN CHAMP DEPENDANT DU TEMPS</b>	<b>4</b>
1.1 Noyau de $^{57}\text{Fe}$ soumis à l'interaction combinée d'un champ magnétique statique et un champ électrique statique . . . . .	4
1.1.1 Introduction . . . . .	4
1.1.2 Rappels sur le spectre du rayonnement électromagnétique . . . . .	4
1.1.3 Niveaux nucléaires . . . . .	7
1.2 Noyau de $^{57}\text{Fe}$ soumis à l'interaction combinée d'un champ magnétique statique, un champ électrique statique et un champ électromagnétique dépendant du temps . . . . .	10

1.2.1	Introduction . . . . .	10
1.2.2	Interaction résonante entre un rayonnement quantifié avec deux niveaux excités . . . . .	11
<b>2</b>	<b>ETUDE DE L'EMISSION SPONTANEE</b>	<b>18</b>
2.1	Introduction . . . . .	18
2.2	Valeurs propres de H . . . . .	18
2.3	Etats propres de H . . . . .	19
2.4	Transitions . . . . .	20
2.5	Intensités relatives . . . . .	21
2.6	Forme de distribution . . . . .	22
2.7	Emission spontanée . . . . .	23
2.8	Amortissement et largeur naturelle . . . . .	28
2.8.1	Introduction . . . . .	28
2.8.2	Probabilité de transition . . . . .	29
2.9	Discussion des résultats . . . . .	33
	<b>CONCLUSION GENERALE</b>	<b>35</b>
	<b>BIBLIOGRAPHIE</b>	<b>37</b>

# Liste des figures

1.1	Les niveaux énergétiques du noyau de $^{57}\text{Fe}$ soumis à l'interaction combinée d'un champ dipolaire magnétique et un champ quadripolaire électrique statiques parallèles à l'axe des Z. . . . .	10
1.2	Les niveaux énergétiques dans les sous espaces $\varepsilon$ et $\varepsilon_{n-1}$ . . . . .	15
2.1	Les huit transitions possibles lors de l'émission spontanée des sous niveaux résonnants vers les sous niveaux de l'état fondamental. . . . .	23
2.2	La probabilité de transition par émission spontanée d'un sous niveau excité vers un sous niveau fondamental; l'axe des abscisses représente les énergies en électron-volts et celui des ordonnées la probabilité de transition. . . . .	32

## Sigles et abréviations

$H_0$ : Hamiltonien non perturbé

$H_{DM}$ : Hamiltonien d'interaction dipolaire magnétique

$H_{esp}$  : Hamiltonien de perturbation pour l'émission spontanée

$H_{int}$ : Hamiltonien d'interaction noyau-rayonnement

$H_N$ : Hamiltonien du noyau soumis à l'interaction combinée d'un champ électrique et un champ magnétique statiques

$H_{N,O}$  : Hamiltonien du noyau libre

$H_Q$ : Hamiltonien d'interaction quadripolaire électrique

$P_{sp}$ : Probabilité de transition par émission spontanée

rf: radio-fréquent

$W_{sp}$ : Coefficient d'émission spontanée

## Avant-propos

Le présent travail de mémoire a été réalisé dans le cadre de l'obtention du diplôme de fin d'étude du deuxième cycle des enseignements de l'Université du Burundi.

Notre objectif est d'étudier l'interaction résonante du noyau de  $^{57}\text{Fe}$  incorporé dans un solide soumis simultanément aux champs électromagnétiques statiques et à un champ dépendant du temps. Nous nous intéressons sur le niveau fondamental de spin  $I = \frac{1}{2}$  et le premier niveau excité de spin  $I = \frac{3}{2}$ .

En se servant du concept du noyau habillé de photons, nous avons étudié une interaction résonante dans les sous niveaux excités caractérisés par  $m_I = \frac{1}{2}$  et  $m_I = \frac{-1}{2}$ ; les autres sous niveaux étant hors-résonance. L'étude de l'émission spontanée a donné huit transitions différentes des sous niveaux résonnants vers les sous niveaux de l'état fondamental.

# INTRODUCTION GENERALE

L'effet Mössbauer résulte du fait que l'émission et l'absorption de rayons gamma peuvent se produire d'une manière sans recul. Par conséquent, la spectroscopie Mössbauer qui est la méthode spectroscopique basée sur l'effet Mössbauer conduit à la mesure expérimentale des interactions hyperfines entre les noyaux résonants et leur environnement. A part son utilisation dans l'analyse des matériaux, l'applicabilité de la spectroscopie Mössbauer dans la matière condensée est d'une grande importance dans un certain nombre de domaines, y compris les propriétés magnétiques, la densité de charge, la transformation de phase, la diffusion atomique, la vibration du réseau, la texture et la contrainte des effets [Cotton, 1960], [P.B. Fabritchnyi, 2012].

Les structures hyperfines des niveaux nucléaires résultent de l'action sur les moments magnétiques nucléaires (ou sur les moments quadripolaires électriques) des champs magnétiques (respectivement des gradients de champ électrique) « vus » par les noyaux dans l'échantillon étudié. L'analyse de ces structures fournit des renseignements sur les propriétés magnétiques de l'échantillon ainsi que sur le nombre et sur les caractéristiques de symétrie locale des divers types de sites occupés par les noyaux Mössbauer [Massaq, 1991].

La spectroscopie Mössbauer est tout-à-fait considérée comme une méthode spectroscopique très utilisée [Janot, 1976].

La nature nucléaire de la résonance présente certaines conséquences:

- (a) Le phénomène ne peut être observé que si les noyaux sources et absorbeurs peuvent effectuer (en sens inverse) strictement la même transition. Cela interdit la plus petite perturbation des niveaux nucléaires, en particulier par le phénomène de recul à l'émission ou à l'absorption ou le changement d'état dans le mouvement des atomes. C'est pourquoi le phénomène ne peut être observé pratiquement que dans les noyaux pouvant effectuer la transition nucléaire sans recul grâce aux liaisons rigides avec l'ensemble du réseau et sans modification des états quantifiés de vibrations du réseau.
- (b) Le phénomène est très sélectif puisqu'il suffit d'un déplacement relatif entre l'émission et l'absorption pour détruire la résonance et donc faire disparaître l'absorption [Janot, 1976].

Enfin, les spectres Mössbauer sont sensibles à certaines propriétés dynamiques: amplitude et anisotropie des vibrations cristallines, diffusion des atomes dans le cristal et agitation de leurs moments magnétiques [Pierre, 2022].

L'extension des applications de la spectrométrie Mössbauer est pour une bonne part due aux caractéristiques très favorables de l'isotope  $^{57}\text{Fe}$ , ainsi qu'à l'abondance du fer dans la nature, à la variété de ses combinaisons chimiques et à son rôle industriel. De plus, la spectrométrie Mössbauer constitue une méthode d'analyse non destructive d'échantillons.

Parmi ses nombreuses applications, mentionnons:

- Dans le domaine de la géophysique, la détermination des différentes formes chimiques du fer présent dans les minéraux et les roches, dans des fragments de météorites ou de sol lunaire;
- En métallurgie, l'analyse des phases existant dans des alliages aux différents stades du traitement;
- Dans le domaine de la catalyse, l'étude des propriétés physico-chimiques de grains ultrafins, de films et de surfaces;
- En biophysique, l'étude de la coordination et des propriétés physiques d'atomes de fer dans des molécules biologiques normales ou pathologiques telles que l'hémoglobine, ou la mise en évidence de micro-cristallites de magnétite ( $\text{Fe}_3\text{O}_4$ ) dans certaines bactéries susceptibles de s'orienter dans le champ magnétique terrestre;
- En archéologie, la détermination des conditions de cuisson de poteries anciennes, à partir de l'état d'oxydation et des propriétés magnétiques du fer provenant des argiles utilisées, ou encore l'analyse des pigments employés dans les peintures des tableaux anciens, etc [El Hafid, 2013].

Du fait de l'extraordinaire précision en énergie du rayonnement gamma émis sans recul, l'effet Mössbauer apparut dès l'origine comme une méthode expérimentale susceptible d'être utilisée pour la vérification de certains concepts fondamentaux de la physique.

Notons que la spectrométrie Mössbauer permet de caractériser l'état du fer dans des matériaux très divers tels que les oxydes de fer, les couches minces, les nanoparticules, les complexes de fer et d'autres isotopes comme  $^{119}\text{Sn}$ ,  $^{61}\text{Ni}$ ,  $^{67}\text{Zn}$ , etc. C'est une technique très sensible, dotée d'une excellente résolution. Elle constitue une technique nécessaire en complément de celles de la diffraction des rayons X, de la microscopie et des mesures magnétiques. De plus l'absorption résonnante rend compte quantitativement de la variété des sites cristallographiques occupés par l'atome de Fer, voire de différentes phases cristallines présentes [Gravereau, 2011].

### **Problématique:**

Les champs électromagnétiques affectent les niveaux énergétiques des matériaux lors de l'étude des spectres énergétiques.

### **Objectif global:**

Contribuer à l'étude des propriétés physicochimiques des matériaux.

### **Objectifs spécifiques:**

- Calculer les niveaux hyperfins du noyau de  $^{57}\text{Fe}$  soumis à l'interaction combinée d'un champ magnétique statique et un champ électrique.
- Déterminer l'interaction résonante entre le rayonnement quantifié avec deux sous-niveaux d'un niveau excité.
- Etudier l'émission spontanée des noyaux soumis au rayonnement rf se désexcitant vers les sous-niveaux de l'état fondamental.

### **Méthodologie de recherche:**

Dans cette étude, une documentation portant sur l'interaction d'un noyau soumis à la fois aux champs électromagnétiques statiques et un rayonnement électromagnétique dépendant du temps (avec un champ quantifié) a été menée ainsi que des analyses sur le changement des niveaux nucléaires.

Les règles de sélection pour une interaction de type dipolaire magnétique ont été appliquée pour identifier les transitions possibles lors de l'émission spontanée. L'application de  $n$  photons rf de fréquence résonant avec deux états nucléaires et le calcul des résultats avec des formules et des valeurs numériques issues de la littérature ont été réalisés.

# Chapitre 1

## NOYAU DE $^{57}\text{Fe}$ SOUMIS A L'INTERACTION COMBINEE DES CHAMPS STATIQUES ET UN CHAMP DEPENDANT DU TEMPS

### 1.1 Noyau de $^{57}\text{Fe}$ soumis à l'interaction combinée d'un champ magnétique statique et un champ électrique statique

#### 1.1.1 Introduction

L'objectif de cette section du premier chapitre est d'étudier les changements des niveaux énergétiques du noyau de  $^{57}\text{Fe}$  incorporé dans un solide. Pour ce, il est très indispensable de connaître quelques paramètres y relatifs qui nous serviront à exécuter cette tâche. Nous allons voir le changement des niveaux nucléaires du noyau de  $^{57}\text{Fe}$  soumis à l'interaction combinée d'un champ magnétique et d'un champ électrique.

#### 1.1.2 Rappels sur le spectre du rayonnement électromagnétique

Avant de d'entrer en profondeur de notre travail, signalons que la classification des ondes électromagnétiques n'a pas de limites précises car les différentes sources peuvent produire des ondes dans des domaines de fréquence qui se recouvrent. Les ondes électromagnétiques couvrent un large domaine de fréquences ou de longueurs d'onde, et peuvent être classées d'après leur source principale. La classification usuelle du spectre électromagnétique est la suivante [SAGHIR, 2013]:

- Les ondes radio dont les longueurs d'onde vont de quelques kilomètres à 0,3 m. Leur domaine de fréquence s'étend de quelques Hz jusqu'à  $10^9$  Hz. L'énergie des photons va pratiquement de 0 à  $10^{-5}$  eV. Ces ondes qui sont utilisées pour les transmissions radio et la télévision sont produites par des dispositifs électroniques, essentiellement des circuits oscillants.
  
- Les micro-ondes dont les longueurs d'onde vont de 0,3 m à  $10^{-3}$  m. Leur domaine de fréquence s'étend de  $10^9$  Hz à  $3 \times 10^{11}$  Hz. L'énergie des photons va de  $10^{-5}$  eV à  $10^{-3}$  eV. Ces ondes sont utilisées dans les radars et d'autres systèmes de communication, les téléphones cellulaires, les fours à micro ondes, et aussi dans l'analyse de détails très fins des structures atomiques et moléculaires. Elles sont également produites par des dispositifs électroniques. La région des micro-ondes est également désignée par les ultra-hautes fréquences par rapport aux fréquences radio.
  
- Le spectre infrarouge dont les longueurs d'onde s'étendent de  $10^{-3}$  m à  $7,8 \times 10^{-7}$  m. Ce domaine de fréquence qui s'étend de  $3 \times 10^{11}$  Hz à  $4 \times 10^{14}$  Hz et l'énergie des photons va de  $10^{-3}$  eV à environ 1,6 eV. Ces ondes sont produites par les molécules et les corps chauds. Elles ont de nombreuses applications dans l'industrie, la médecine et l'astronomie.
  
- Le spectre visible ou lumière. C'est une bande étroite formée par les longueurs d'onde auxquelles notre rétine est sensible. Il s'étend en longueur d'onde de  $7,8 \times 10^{-7}$  m à  $3,8 \times 10^{-7}$  m et en fréquence de  $4 \times 10^{14}$  Hz à  $8 \times 10^{14}$  Hz. L'énergie des photons va de 1,6 eV à 3,2 eV. La lumière est produite par les atomes et les molécules par suite des réajustements internes des mouvements de leurs composants, principalement des électrons. La lumière joue un rôle si important qu'une branche spéciale de la physique appliquée, appelée optique, lui est consacrée. L'optique s'occupe des phénomènes lumineux aussi bien que de la vision et comprend la conception des instruments d'optique. En raison des similitudes dans le comportement des régions ultra- violettes et infrarouges du spectre, le domaine de l'optique les inclut actuellement en plus du spectre visible. Les différentes sensations que la lumière produit sur l'œil, que l'on nomme couleurs, dépendent de la fréquence ou de la longueur d'onde du rayonnement électromagnétique. La sensibilité de l'œil dépend également de la longueur d'onde de la lumière, elle est maximum pour les longueurs d'onde voisines de  $5,6 \times 10^{-7}$  m. En raison de la relation qui existe entre la couleur et la fréquence ou la longueur d'onde, une onde électromagnétique de longueur d'onde ou de fréquence bien définie est aussi appelée onde monochromatique (de monos: un; chromos: couleur). La vision est le résultat des signaux transmis au cerveau par deux éléments se trouvant dans la membrane appelée rétine qui tapisse le fond de l'œil. Ces éléments sont les cônes et les bâtonnets. Les cônes sont les éléments

actifs en présence d'une lumière intense, comme celle qui existe durant le jour. Les cônes sont sensibles à la couleur. Les bâtonnets par contre sont capables d'agir sous une très faible illumination, comme celle d'une chambre obscure; ils sont insensibles à la couleur.

- Les rayons ultra-violet. Ils vont de  $3,8 \times 10^{-7}$  m à environ  $6 \times 10^{-10}$  m en longueur d'onde et de  $8 \times 10^{14}$  Hz à environ  $3 \times 10^{17}$  Hz en fréquence. L'énergie des photons correspondants va de 3 eV à  $2 \times 10^3$  eV. Ces ondes sont produites par des atomes et des molécules dans des décharges électriques. Leur énergie est de l'ordre de grandeur de l'énergie mise en jeu dans de nombreuses réactions chimiques, ce qui rend ainsi compte de beaucoup de leurs effets chimiques. Le soleil est une source très intense de rayonnement ultra-violet et c'est ce facteur qui est essentiellement responsable du brunissement de la peau au soleil. Le rayonnement ultra-violet du soleil interagit également avec les atomes de la haute atmosphère, produisant ainsi de nombreux ions. Ceci explique pourquoi la haute atmosphère à des altitudes supérieures à 80 km est fortement ionisée. On l'appelle pour cette raison l'ionosphère. Les rayons ultraviolets sont employés pour cette raison dans certaines applications médicales et certains procédés de stérilisation.
- Les rayons X. Cette partie du spectre électromagnétique s'étend de  $10^{-9}$  m à environ  $6 \times 10^{-12}$  m en longueur d'onde ou entre  $3 \times 10^{17}$  Hz et  $5 \times 10^{19}$  Hz en fréquence. L'énergie des photons va de  $1,2 \times 10^3$  eV à  $2,4 \times 10^5$  eV. Les rayons X sont produits par les électrons les plus fortement liés des couches internes des atomes. Une autre source de rayons X réside dans le rayonnement de freinage . Ceci représente en fait la méthode la plus commune de production de rayons X dans les tubes à rayons X commerciaux. Un faisceau d'électrons accéléré par un potentiel de plusieurs milliers de volts, tombe sur une cible métallique appelée anticathode (en fait c'est la manière dont les rayons X ont été produits dans l'expérience originale de Roentgen). Les rayons X, en raison de la plus grande énergie de leurs photons, produisent des effets plus profonds sur les atomes et les molécules constituant les substances à travers lesquelles ils se propagent, et ionisent ou dissocient ainsi les molécules. Les rayons X servent au diagnostic médical car l'absorption relativement plus élevée des os par rapport aux tissus permet une « photographie » précise. Ils produisent également, par suite des processus chimiques qu'ils induisent, des dommages sérieux aux tissus et aux organismes vivants. C'est pour cette raison que les rayons X sont utilisés dans le traitement des cancers, dans la mesure où les rayons X semblent avoir tendance à détruire les tissus malades plus rapidement que les tissus sains. Il faut insister sur le fait que toute dose de rayons X détruit une fraction de tissu sain ; une exposition à une forte dose peut produire assez de destruction pour causer la maladie ou la mort.

- Les rayons  $\gamma$  sont d'origine nucléaire. Elles recouvrent la limite supérieure du spectre des rayons X. Leurs longueurs d'onde s'étendent de  $10^{-10}$  m à en dessous de  $10^{-14}$  m ce qui correspond à un domaine de fréquence de  $3 \times 10^{18}$  Hz jusqu'à plus de  $3 \times 10^{22}$  Hz. Les énergies des photons vont de  $10^4$  eV jusqu'à environ  $10^7$  eV. Ces énergies sont du même ordre que celles mises en jeu dans les processus nucléaires et l'absorption de rayons  $\gamma$  peut donc produire des modifications à l'intérieur du noyau. Ces rayons sont produits par de nombreuses substances radioactives et sont présents en grande quantité dans les réacteurs nucléaires. Ils ne sont pas facilement absorbés par la plupart des substances mais leur absorption par les organismes vivants produit de très sérieux effets. Leur manipulation exige un lourd blindage de protection.

### 1.1.3 Niveaux nucléaires

Notre système est constitué d'un noyau de  $^{57}\text{Fe}$  soumis simultanément à deux champs statiques (interaction dipolaire magnétique et interaction quadripolaire électrique). Considérons un noyau de  $^{57}\text{Fe}$  (noyau absorbeur) soumis à l'interaction combinée d'un champ magnétique statique parallèle à l'axe des Z et un gradient de champ électrique pour lequel  $V_{ZZ}$  est également parallèle à Z.

- Le hamiltonien dipolaire magnétique est [P.B. Fabritchnyi, 2012, Ferrari, 2008]:

$$H_{DM} = -\gamma BI_z = -g\mu_N BI_z \quad (1.1)$$

où  $H_{DM}$  est le hamiltonien d'interaction dipolaire magnétique;

$\gamma$  est le rapport gyromagnétique;

$B$  est le champ magnétique statique;

$I_z$  est la composante du spin nucléaire suivant l'axe des Z;

$\mu_N$  est le magnéton nucléaire.

- Le hamiltonien quadripolaire électrique est donnée par la relation [P.B. Fabritchnyi, 2012, Ferrari, 2008]:

$$H_Q = \frac{e^2 q Q}{4\hbar^2 I (2I - 1)} (3I_z^2 - I^2) \quad (1.2)$$

où  $H_Q$  est le hamiltonien d'interaction quadripolaire électrique;  $eq = V_{ZZ}$  est le gradient de champ électrique;  $I$  est le spin nucléaire;  $Q$  est le moment quadripolaire électrique du noyau et  $e$  est la charge élémentaire. Le hamiltonien total du noyau soumis à ces deux types d'interaction est:

$$H_N = H_{N,0} + H_{DM} + H_Q = H_{N,0} - \gamma BI_z + \frac{e^2 q Q}{4\hbar^2 I (2I - 1)} (3I_z^2 - I^2) \quad (1.3)$$

où  $H_{N,0}$  est le hamiltonien du noyau libre.

Pour notre cas, les trois observables  $H_{N,0}$ ,  $H_{DM}$  et  $H_Q$  commutent; leurs vecteurs propres communs sont  $\{|E_{N,0}, I, m_I\rangle, -I \leq m_I \leq I\}$  où  $I = \frac{3}{2}$ .

Les valeurs propres sont données par l'expression suivante [P.B. Fabritchnyi, 2012, Ferrari, 2008]:

$$E_{m_I} = E_{N,0} - g\mu_N B m_I + \frac{e^2 q Q}{4I(2I-1)} (3m_I^2 - I(I+1)), \quad (1.4)$$

$$E_{m_I} = E_{N,0} - g\mu_N B m_I + \frac{eV_{ZZ}Q}{4I(2I-1)} (3m_I^2 - I(I+1)); \quad (1.5)$$

avec  $-\frac{3}{2} \leq m_I \leq \frac{3}{2}$ .

L'énergie du premier état excité du noyau  $^{57}\text{Fe}$  de spin  $I=3/2$  est égale à 14,4 keV et le moment quadripolaire électrique de cet état Q est de  $0,17 \cdot 10^{-23} \text{ fm}^2$  [P.B. Fabritchnyi, 2012]. Cet état a un facteur  $g_e$  de  $-0,103$  [Odeurs, 1995]. De plus, l'énergie de l'état fondamental du noyau du  $^{57}\text{Fe}$  de spin  $I=1/2$  a une valeur de 0 avec un gradient quadripolaire électrique nul et un facteur  $g_f$  de  $0,18$  [Odeurs et Hoy, 1999], [P.B. Fabritchnyi, 2012]. En utilisant un champ magnétique B de 33 T, on a les énergies suivantes:

Pour le premier état excité ( $I = \frac{3}{2}$ ):

$$E_{-3/2} = 14,4 \cdot 10^3 \text{ eV} - 1,6093 \cdot 10^{-45} \text{ eV} + 0,425 \cdot 10^{-33} \text{ eV}_{ZZ} \text{ eV} \quad (1.6)$$

$$E_{-1/2} = 14,4 \cdot 10^3 \text{ eV} - 0,5364 \cdot 10^{-45} \text{ eV} - 0,425 \cdot 10^{-33} \text{ eV}_{ZZ} \text{ eV} \quad (1.7)$$

$$E_{1/2} = 14,4 \cdot 10^3 \text{ eV} + 0,5364 \cdot 10^{-45} \text{ eV} - 0,425 \cdot 10^{-33} \text{ eV}_{ZZ} \text{ eV} \quad (1.8)$$

$$E_{3/2} = 14,4 \cdot 10^3 \text{ eV} + 1,6093 \cdot 10^{-45} \text{ eV} + 0,425 \cdot 10^{-33} \text{ eV}_{ZZ} \text{ eV} \quad (1.9)$$

Pour l'état fondamental:

$$E_{-1/2} = 0 \text{ eV} + 0,9375 \cdot 10^{-46} \text{ eV} \quad (1.10)$$

$$E_{1/2} = 0 \text{ eV} - 0,9375 \cdot 10^{-46} \text{ eV} \quad (1.11)$$

Dans la suite, nous allons considérer que la différence entre les sous-niveaux due à l'éclatement quadripolaire électrique est à  $\frac{1}{10}$  de la différence entre les niveaux Zeeman afin de simplifier les calculs puisque nous ne connaissons pas la valeur de  $V_{zz}$  dans les relations (1.6) à (1.9). Ces 4 dernières équations deviennent alors:

$$E_{-3/2} = 14,4 \cdot 10^3 \text{ eV} - 1,6093 \cdot 10^{-45} \text{ eV} + 0,1609 \cdot 10^{-46} \text{ eV} \quad (1.12)$$

$$E_{3/2} = 14,4.10^3 \text{ eV} + 1,6093.10^{-45} \text{ eV} + 0,1609.10^{-46} \text{ eV} \quad (1.13)$$

$$E_{1/2} = 14,4.10^3 \text{ eV} + 0,5364.10^{-45} \text{ eV} - 0,5364.10^{-46} \text{ eV} \quad (1.14)$$

$$E_{-1/2} = 14,4.10^3 \text{ eV} - 0,5364.10^{-45} \text{ eV} - 0,5364.10^{-46} \text{ eV} \quad (1.15)$$

Les relations (1.12) à (1.15) contiennent trois termes. Nous les avons gardé tels qu'ils sont pour montrer la contribution de chaque opérateur à l'énergie propre du hamiltonien total. Le premier terme est la valeur propre de l'opérateur hamiltonien du noyau libre, le deuxième est la valeur propre de l'opérateur hamiltonien de l'interaction dipolaire magnétique et le dernier terme est la valeur propre de l'opérateur hamiltonien de l'interaction quadripolaire électrique. Les relations (1.10) et (1.11) contiennent deux termes: Le premier correspond à la valeur propre du hamiltonien du noyau libre dans l'état fondamental et le second correspond à la valeur propre de l'opérateur hamiltonien d'interaction dipolaire magnétique dans l'état fondamental, avec:  $eq = V_{zz}$ . Le magnéton nucléaire  $\mu_N = 5,05038 \times 10^{-26} J T^{-1}$ .

Ces résultats montrent les niveaux nucléaires du noyau de  $^{57}\text{Fe}$  incorporé dans un solide soumis simultanément à deux champs statiques (champ dipolaire magnétique et champ quadripolaire électrique). Le premier niveau excité est quatre fois dégénéré et le niveau fondamental doublement dégénéré en absence de champs statiques. Il y a la levée de dégénérescence lorsque le noyau interagit avec ces champs statiques. La figure 1.1 montre la duplication des niveaux du noyau de  $^{57}\text{Fe}$  soumis à l'interaction combinée de deux champs statiques. Elle montre aussi les sous niveaux qui vont nous servir dans l'étude du noyau habillé de photons.

Dans cette section nous venons de voir six sous niveaux du noyau de  $^{57}\text{Fe}$  comme le montre la figure 1.1 (où l'état excité de spin  $\frac{3}{2}$  a un facteur gyromagnétique négatif et l'état fondamental de spin  $\frac{1}{2}$  un facteur gyromagnétique positif). Dans la suite, nous allons considérer une résonance magnétique nucléaire dans les sous niveaux excités caractérisés par  $m_I = \frac{1}{2}$  et  $m_I = \frac{-1}{2}$  afin de mettre en évidence l'effet d'un champ quantifié sur les sous niveaux énergétiques de notre système.

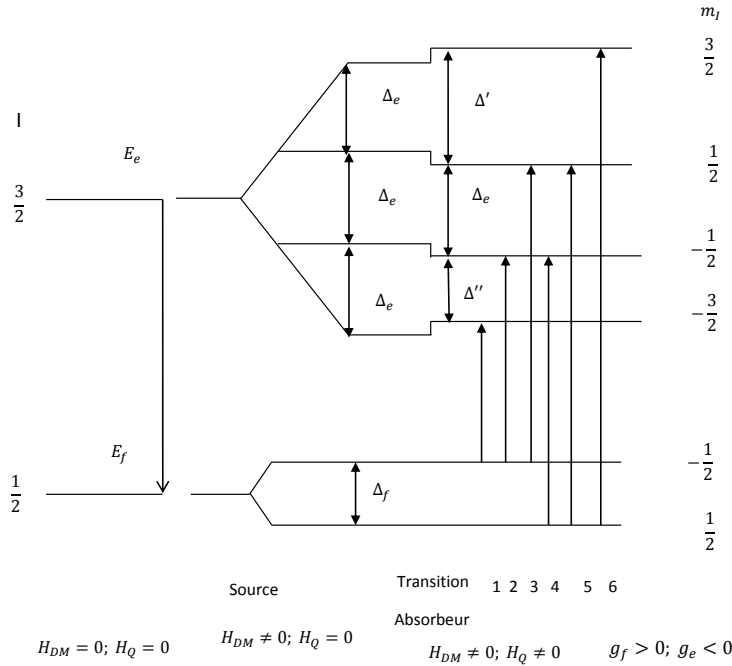


Figure 1.1: Les niveaux énergétiques du noyau de  $^{57}\text{Fe}$  soumis à l'interaction combinée d'un champ dipolaire magnétique et un champ quadripolaire électrique statiques parallèles à l'axe des Z.

## 1.2 Noyau de $^{57}\text{Fe}$ soumis à l'interaction combinée d'un champ magnétique statique, un champ électrique statique et un champ électromagnétique dépendant du temps

### 1.2.1 Introduction

Dans cette section, nous allons étudier un système constitué par un noyau de  $^{57}\text{Fe}$  soumis à l'interaction combinée des champs électromagnétiques statiques et un champ quantifié. Nous traitons le cas où le rayonnement quantifié est en résonance avec les sous niveaux excités caractérisés par  $m_I = \frac{1}{2}$  et  $m_I = -\frac{1}{2}$ . Le concept du noyau habillé de photons sera utilisé. Nous allons calculer les valeurs propres et les vecteurs propres du hamiltonien total de ce système afin de les utiliser dans l'étude de l'émission spontanée.

## 1.2.2 Interaction résonante entre un rayonnement quantifié avec deux niveaux excités

### 1.2.2.1 Noyau habillé de photons

Le hamiltonien total du système est la somme des différents termes comme suit [Odeurs, 1995]:

$$H = H_{N,0} + H_{DM} + H_Q + H_f + H_{int} \quad (1.16)$$

avec:

- $H$  est le hamiltonien total du système;
- $H_{N,0}$  est le hamiltonien du noyau libre;
- $H_f$  est le hamiltonien du rayonnement électromagnétique;

$$H_f = \sum_{\vec{k}} \sum_{s=1}^2 \hbar\omega_{\vec{k},s} \left( a_{\vec{k},s}^+ a_{\vec{k},s} + \frac{1}{2} \right) \quad (1.17)$$

$\vec{k}$  est le vecteur d'onde du photon et  $s$  décrit sa polarisation;

$a_{\vec{k},s}^+$  est l'opérateur de création d'un photon  $(\vec{k}, s)$ ;

$a_{\vec{k},s}$  est l'opérateur d'annihilation d'un photon  $(\vec{k}, s)$ ;

- $H_{int}$  est l'interaction entre les niveaux excités avec le champ électromagnétique défini comme suit [Odeurs et Hoy, 1999]:

$$H_{int} = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}_{rf} \quad (1.18)$$

$$\vec{B}_{rf} = -\frac{i}{c} \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0 V}} \left( a e^{\vec{k} \cdot \vec{r}} - a^+ e^{-\vec{k} \cdot \vec{r}} \right) \vec{u}_y \quad (1.19)$$

où

$$\vec{\mu} = \gamma_e \vec{I} \quad (1.20)$$

Les relations (1.18) et (1.19) donnent:

$$H_{int} = \gamma_e \vec{I} \cdot \frac{i}{c} \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0 V}} \left( a e^{\vec{k} \cdot \vec{r}} - a^+ e^{-\vec{k} \cdot \vec{r}} \right) \vec{u}_y \quad (1.21)$$

où  $\gamma_e$  est le rapport gyromagnétique de l'état excité. Au niveau du noyau, le facteur en exponentiel tend vers un car la longueur d'onde du rayonnement rf est extrêmement grande par rapport à la dimension linéaire du noyau; dans la suite nous allons l'ignorer [Odeurs, 1995].

Les relations (1.19) et (1.21) montrent que nous avons considéré un champ magnétique parallèle à l'axe des Y.  $V$  est le volume du cube dans lequel le champ électromagnétique est généré [Loudon, 2000].

### 1.2.2.2 Valeurs propres du hamiltonien du noyau habillé

Le hamiltonien du champ électromagnétique avec un seul mode est donné par

$$H_f = \hbar\omega \left( a_{k,s}^+ a_{k,s} + \frac{1}{2} \right) \quad (1.22)$$

Considérons l'opérateur défini par (1.16) dans le cas où l'interaction entre le noyau et le rayonnement quantifié est très faible. On a:

$$H_0 = H_{N,0} + H_{DM} + H_Q + H_f \quad (1.23)$$

Dans ce travail, le champ magnétique statique  $\vec{B}$  et le gradient de champ électrique sont parallèles à l'axe des Z.

Les valeurs propres sont données par la relation suivante [P.B. Fabritchnyi, 2012, Ferrari, 2008]:

$$E_{m_I, n} = E_{N,0} - \gamma \hbar B m_I + \frac{eV_{ZZ}Q}{4I(2I-1)} (3m_I^2 - I(I+1)) + \hbar\omega \left( n + \frac{1}{2} \right); \quad (1.24)$$

le dernier terme donne l'énergie du rayonnement électromagnétique;  $n \geq 0$  est le nombre de photons du rayonnement électromagnétique.

Les vecteurs propres sont le produit tensoriel de  $|\frac{3}{2}, m_I\rangle$  et  $|n\rangle$ :  $\{|\frac{3}{2}, m_I\rangle \otimes |n\rangle\}$

$$H_0 |\frac{3}{2}, m_I\rangle \otimes |n\rangle = \left( E_{N,0} - \gamma \hbar B m_I + \frac{eV_{ZZ}Q}{4I(2I-1)} (3m_I^2 - I(I+1)) + \hbar\omega \left( n + \frac{1}{2} \right) \right) |\frac{3}{2}, m_I\rangle \otimes |n\rangle \quad (1.25)$$

Les expressions (1.24) et (1.25) vont nous servir dans la suite pour calculer les valeurs propres et les vecteurs propres du hamiltonien du noyau habillé de photons.

Appliquons alors le rayonnement quantifié de sorte qu'il soit en résonance avec deux sous niveaux excités caractérisés par  $m_I = \frac{1}{2}$  et par  $m_I = -\frac{1}{2}$ .

Dans ce cas les autres sous niveaux sont hors-résonance, on a deux bases possibles:

$$\left\{ \left| \frac{3}{2}, \frac{-1}{2} \right\rangle \otimes |n\rangle, \left| \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \otimes |n-1\rangle \right\} \quad (1.26)$$

lorsqu'il y a  $n$  photons dans l'état  $|\frac{3}{2}, \frac{-1}{2}\rangle$  et  $(n-1)$  dans l'état  $|\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\rangle$  et

$$\left\{ \left| \frac{3}{2}, \frac{-1}{2} \right\rangle \otimes |n+1\rangle, \left| \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \otimes |n\rangle \right\} \quad (1.27)$$

lorsqu'il y a  $(n + 1)$  photons dans l'état  $|\frac{3}{2}, \frac{-1}{2}\rangle$  et  $n$  photons dans l'état  $|\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\rangle$ .

En utilisant les relations suivantes de la mécanique quantique dans l'expression (1.21),

$$I_{\pm} = I_x \pm iI_y \quad (1.28)$$

$$I_y = \frac{I_+ - I_-}{2i} \quad (1.29)$$

on trouve que:

$$H_{int} = -\frac{\gamma_e}{2c} \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0 V}} (I_- a + I_+ a^+) + \frac{\gamma_e}{2c} \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0 V}} (I_+ a + I_- a^+) \quad (1.30)$$

avec  $\gamma_e$  le rapport gyromagnétique du premier état excité de  $^{57}\text{Fe}$ .

Le rayonnement radiofréquent est appliqué de sorte que les deux sous niveaux excités caractérisés par  $m_I = \frac{-1}{2}$  et  $m_I = \frac{1}{2}$  soient en interaction résonante alors que les autres sont hors résonance.

Dans cette situation deux cas sont possibles (voir (1.26) et (1.27)):

- a) Le noyau se trouve dans le sous-niveau caractérisé par  $m_I = \frac{-1}{2}$  avec  $n$  photons et le niveau caractérisé par  $m_I = \frac{1}{2}$  avec  $(n - 1)$  photons.
- b) Le noyau se trouve dans le sous-niveau  $m_I = \frac{1}{2}$  avec  $n$  photons et le niveau caractérisé par  $m_I = \frac{-1}{2}$  avec  $(n + 1)$  photons.

a) Pour le premier cas, on a deux vecteurs propres du hamiltonien défini par la relation (1.23) associés aux niveaux d'énergie.

$\phi_1 = |\frac{3}{2}, \frac{-1}{2}\rangle \otimes |n\rangle$  et  $\phi_2 = |\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\rangle \otimes |n - 1\rangle$ . Les valeurs propres associées à ces vecteurs propres sont les énergies de l'opérateur hamiltonien défini par la relation (1.23) et sont les suivantes:

$$E_{1e} = E_{N,0} - \frac{1}{2}\gamma_e \hbar B - \frac{1}{4}eV_{zz}Q + \hbar\omega \left( n + \frac{1}{2} \right); \quad (1.31)$$

$$E_{2e} = E_{N,0} + \frac{1}{2}\gamma_e \hbar B - \frac{1}{4}eV_{zz}Q + \hbar\omega \left( n - \frac{1}{2} \right); \quad (1.32)$$

$$E_{2e} - E_{1e} = \gamma_e \hbar B - \hbar\omega = \hbar\omega_e - \hbar\omega; \quad (1.33)$$

avec  $\omega_e = \gamma_e B$ .

Les relations (1.31) et (1.32) proviennent de la relation (1.24) en remplaçant  $m_I$  par ses valeurs. A la résonance, on a  $\Delta\omega = \omega_e - \omega = 0$ . Dans ce cas, le sous niveau excité concerné est doublement dégénéré. On a:  $E_{2e} = E_{1e} = E_e$ ; ce qui veut dire que  $\phi_1$  et  $\phi_2$  sont des vecteurs propres d'un seul sous niveau énergétique

avec  $E_e = E_{N,0} - \frac{1}{4}eV_{zz}Q + \hbar\omega n$ ;

$$E_{2e} + E_{1e} = 2E_{N,0} - \frac{1}{2}eV_{zz}Q + 2\hbar\omega n. \quad (1.34)$$

Pour le noyau de  $^{57}\text{Fe}$  en interaction combinée en absence du rayonnement, le niveau caractérisé par  $m_I = \frac{-1}{2}$  est moins énergétique par rapport à celui caractérisé par  $m_I = \frac{1}{2}$  (car  $g$  est négatif). Pour ce, les deux derniers termes de l'expression (1.30) vont contribuer à l'interaction noyau-rayonnement quantifié pour qu'il y ait conservation de l'énergie. Cherchons d'abord les éléments de matrice utile pour résoudre l'équation aux valeurs propres dont la solution donne les valeurs propres du noyau habillé de photons.

$$g_{12} = \langle \phi_1 | H | \phi_2 \rangle = g_{21}^* \quad (1.35)$$

$$g_{12} = \left\langle \frac{3}{2}, \frac{-1}{2} \middle| \otimes \langle n | H \left| \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \otimes | n-1 \rangle \right. \quad (1.36)$$

$$g_{21} = \left\langle \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \middle| \otimes \langle n-1 | H \left| \frac{3}{2}, \frac{-1}{2} \right\rangle \otimes | n \rangle \right. \quad (1.37)$$

où  $g_{12}$  et  $g_{21}$  sont les éléments de matrice suivante

$$\langle \phi_i | H | \phi_j \rangle = \begin{pmatrix} E_{1e} & g_{12} \\ g_{21} & E_{2e} \end{pmatrix} \quad (1.38)$$

où  $i$  et  $j$  varient de 1 à 2. On sait que:

$$I_{\pm} | I, m \rangle \otimes | n \rangle = \hbar \sqrt{I(I+1) - m(m \pm 1)} (| I, m \pm 1 \rangle \otimes | n \rangle) \quad (1.39)$$

$$I_+ | I, I \rangle \otimes | n \rangle = I_- | I, -I \rangle \otimes | n \rangle = 0; \quad (1.40)$$

$$a^+ | I, m \rangle \otimes | n \rangle = \sqrt{(n+1)} (| I, m \rangle \otimes | n+1 \rangle); \quad (1.41)$$

$$a | I, m \rangle \otimes | n \rangle = \sqrt{n} (| I, m \rangle \otimes | n-1 \rangle) \quad (1.42)$$

En utilisant les relations (1.39) à (1.42), on calcule les éléments de la matrice (1.38)

$$g_{12} = \left\langle \frac{3}{2}, \frac{-1}{2} \middle| \otimes \langle n | H_0 + \frac{\gamma_e}{2c} \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_{0V}}} (I_+ a + I_- a^+) \left| \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \otimes | n-1 \rangle \right. \quad (1.43)$$

$$g_{21} = \left\langle \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \middle| \otimes \langle n-1 | H_0 + \frac{\gamma_e}{2c} \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_{0V}}} (I_+ a + I_- a^+) \left| \frac{3}{2}, \frac{-1}{2} \right\rangle \otimes | n \rangle \right. \quad (1.44)$$

$$g_{12} = \frac{\gamma_e}{c} \sqrt{\frac{\hbar^3\omega}{2\varepsilon_{0V}}} \sqrt{n} \quad (1.45)$$

$$g_{21} = \frac{\gamma_e}{c} \sqrt{\frac{\hbar^3\omega}{2\varepsilon_{0V}}} \sqrt{n} \quad (1.46)$$

Posons que

$$g = \frac{\gamma_e}{c} \sqrt{\frac{\hbar^3 \omega}{2\varepsilon_0 V}}; \quad (1.47)$$

en résolvant l'équation suivante, on trouve les valeurs propres de H:

$$\begin{vmatrix} E_e - \lambda & g\sqrt{n} \\ g\sqrt{n} & E_e - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (1.48)$$

on a:

$$\lambda_1 = E_e + g\sqrt{n}; \quad (1.49)$$

$$\lambda_2 = E_e - g\sqrt{n} \quad (1.50)$$

et explicitement

$$\lambda_1 = E_{N,0} - \frac{1}{4}eV_{zz}Q + \hbar\omega n + g\sqrt{n}; \quad (1.51)$$

$$\lambda_2 = E_{N,0} - \frac{1}{4}eV_{zz}Q + \hbar\omega n - g\sqrt{n}; \quad (1.52)$$

$$\Delta = \lambda_1 - \lambda_2 = 2g\sqrt{n} \quad (1.53)$$

$\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont les valeurs propres du noyau habillé de n photons.

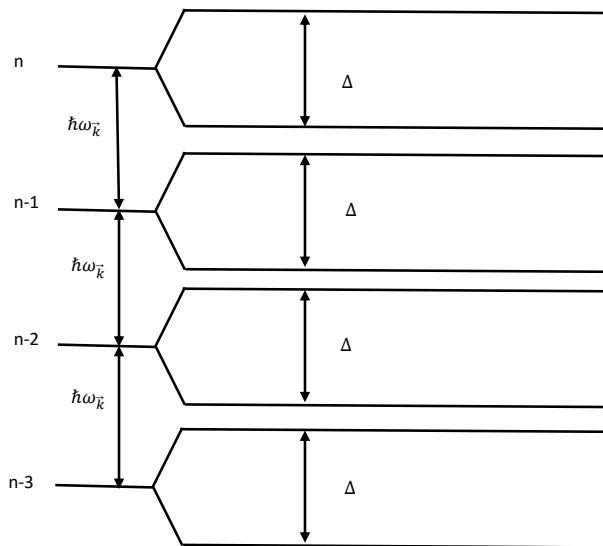


Figure 1.2: Les niveaux énergétiques dans les sous espaces  $\varepsilon$  et  $\varepsilon_{n-1}$

b) Pour le second cas, un raisonnement similaire donne:

$$\begin{vmatrix} E_e - \lambda & g\sqrt{(n+1)} \\ g\sqrt{(n+1)} & E_e - \lambda \end{vmatrix} = 0; \quad (1.54)$$

$$\lambda'_1 = E_{N,0} - \frac{1}{4}eV_{zz}Q + \hbar\omega(n+1) + g\sqrt{(n+1)}; \quad (1.55)$$

$$\lambda'_2 = E_{N,0} - \frac{1}{4}eV_{zz}Q + \hbar\omega(n+1) - g\sqrt{(n+1)};$$

$$\Delta' = \lambda'_1 - \lambda'_2 = 2g\sqrt{(n+1)}; \quad (1.56)$$

$\lambda'_1$  et  $\lambda'_2$  sont des valeurs propres du noyau habillé de  $(n+1)$  photons.

Pour  $n$  suffisamment grand,  $\Delta = \Delta'$ . On peut continuer dans les autres sous espaces avec le même raisonnement comme le montre la figure 1.2

### 1.2.2.3 Vecteurs propres du noyau habillé de photons

Posons  $|\phi_1\rangle = \left| \frac{3}{2}, \frac{-1}{2} \right\rangle \otimes |n\rangle$  et  $|\phi_2\rangle = \left| \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \otimes |n-1\rangle$ . Les vecteurs propres du noyau habillé de photons sont des combinaisons linéaires de  $|\phi_1\rangle$  et  $|\phi_2\rangle$ , sachant que le photon se dirige suivant une direction perpendiculaire à l'axe des Y (dans le plan ZX) faisant un angle  $\alpha$  avec l'axe des Z.

En utilisant la matrice de rotation on a:

$$|\psi, +\rangle = \sin\frac{\alpha}{2} |\phi_1\rangle + \cos\frac{\alpha}{2} |\phi_2\rangle; \quad (1.57)$$

$$|\psi, -\rangle = -\sin\frac{\alpha}{2} |\phi_1\rangle + \cos\frac{\alpha}{2} |\phi_2\rangle; \quad (1.58)$$

avec

$$\tan\alpha = \frac{2g\sqrt{n}}{\gamma_e\hbar B - \hbar\omega} \quad (1.59)$$

A la résonance,  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ;  $0 < \alpha < \pi$ :

$$|\psi, +\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2} |\phi_1\rangle + \frac{\sqrt{2}}{2} |\phi_2\rangle; \quad (1.60)$$

$$|\psi, -\rangle = -\frac{\sqrt{2}}{2} |\phi_2\rangle + \frac{\sqrt{2}}{2} |\phi_1\rangle \quad (1.61)$$

Le même raisonnement montre que les vecteurs propres du noyau habillé de photons sont des combinaisons linéaires des vecteurs  $|\phi'_1\rangle = \left| \frac{3}{2}, \frac{-1}{2} \right\rangle \otimes |n+1\rangle$  et  $|\phi'_2\rangle = \left| \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \otimes |n\rangle$

$$|\psi', +\rangle = \sin\frac{\alpha'}{2} |\phi'_1\rangle + \cos\frac{\alpha'}{2} |\phi'_2\rangle \quad (1.62)$$

$$|\psi', -\rangle = -\sin\frac{\alpha'}{2} |\phi'_1\rangle + \cos\frac{\alpha'}{2} |\phi'_2\rangle \quad (1.63)$$

avec

$$\tan\alpha' = \frac{2g\sqrt{n+1}}{\gamma_e\hbar B - \hbar\omega} \quad (1.64)$$

A la résonance,  $\alpha' = \frac{\pi}{2}$  ;  $0 < \alpha < \pi$ ,

$$|\psi', +\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2} |\phi'_1\rangle + \frac{\sqrt{2}}{2} |\phi'_2\rangle; \quad (1.65)$$

$$|\psi', -\rangle = -\frac{\sqrt{2}}{2} |\phi'_1\rangle + \frac{\sqrt{2}}{2} |\phi'_2\rangle \quad (1.66)$$

Dans ce chapitre nous avons calculé les valeurs propres et les vecteurs propres du hamiltonien d'un noyau de  $^{57}\text{Fe}$  habillé de photons. Le chapitre qui suit sera réservé à l'étude de l'émission spontanée.

## Chapitre 2

# ETUDE DE L'EMISSION SPONTANEE

### 2.1 Introduction

Notre système est constitué par un noyau libre soumis à l'interaction combinée des champs statiques parallèles à l'axe des Z et un champ quantifié dépendant du temps parallèle à l'axe des Y. Après émission, il y a la présence du rayonnement produit par l'émission spontanée mais ce dernier ne sera pas considéré.

### 2.2 Valeurs propres de H

Avant de passer à l'étude de l'émission spontanée, calculons les valeurs propres des sous niveaux nucléaires qui ne sont pas couplés par le rayonnement quantifié à savoir les sous niveaux caractérisés par  $m_I = \pm \frac{3}{2}$  (pour l'état excité). Sachant que l'opérateur dipolaire magnétique ne change pas le nombre du rayonnement extérieur, les valeurs propres des sous niveaux excités non résonants sont modifiées par la présence du rayonnement quantifié, on a, à partir de l'équation (1.24):

$$E_{m_I} = E_{N,0} - g_e \mu_N B m_I + \frac{e^2 q Q}{4I(2I-1)} (3m_I^2 - I(I+1)) + \hbar \omega \left( n + \frac{1}{2} \right) \quad (2.1)$$

avec  $m_I = \pm \frac{3}{2}, I = \frac{3}{2}$ .

Les états propres associés à ces énergies sont le produit tensoriel des états du noyau soumis à l'interaction combinée des champs statiques et l'état propre du rayonnement quantifié.

Dans l'état fondamental les valeurs sont des valeurs propres du hamiltonien total qui est la somme du hamiltonien du noyau libre, du hamiltonien dipolaire magnétique, du hamiltonien quadripolaire électrique et du rayonnement libre.

$$E_{m_I} = E_{N,0} - g_f \mu_N B m_I + \frac{e^2 q Q}{4I(2I-1)} (3m_I^2 - I(I+1)) + \hbar \omega \left( n + \frac{1}{2} \right) \quad (2.2)$$

avec  $m_I = \pm\frac{1}{2}$

## 2.3 Etats propres de H

Pour étudier l'émission spontanée, nous considérons que le rayonnement  $\gamma$  est émis suivant la direction  $OZ'$  perpendiculaire à l'axe des  $Y$  mais faisant un angle  $\beta$  avec l'axe des  $Z$ . Dans ce cas les états propres du noyau habillé de photons des sous niveaux fondamentaux et sous niveaux excités définis par les relations (2.1) et (2.2) ne sont plus des états purs du système. Les états propres sont obtenus grâce à l'utilisation de la matrice de rotation suivante [Odeurs et Hoy, 1999]

$$M = \begin{pmatrix} \cos\frac{\beta}{2} & \sin\frac{\beta}{2} \\ -\sin\frac{\beta}{2} & \cos\frac{\beta}{2} \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

Les vecteurs propres des sous niveaux de l'état fondamental dans le nouveau système d'axe sont:

$$|\psi_{fz'}, +\rangle = \cos\frac{\beta}{2} \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \otimes |n\rangle + \sin\frac{\beta}{2} \left| \frac{1}{2}, \frac{-1}{2} \right\rangle \otimes |n\rangle; \quad (2.4)$$

$$|\psi_{fz'}, -\rangle = -\sin\frac{\beta}{2} \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \otimes |n\rangle + \cos\frac{\beta}{2} \left| \frac{1}{2}, \frac{-1}{2} \right\rangle \otimes |n\rangle. \quad (2.5)$$

Les vecteurs propres des sous niveaux non résonants avec le rayonnement quantifié dans le système d'axes lié à l'émission spontanée sont:

$$|\psi_{ez'}, +\rangle = \cos\frac{\beta}{2} \left| \frac{3}{2}, \frac{-3}{2} \right\rangle \otimes |n\rangle + \sin\frac{\beta}{2} \left| \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle \otimes |n\rangle; \quad (2.6)$$

$$|\psi_{ez'}, -\rangle = -\sin\frac{\beta}{2} \left| \frac{3}{2}, \frac{-3}{2} \right\rangle \otimes |n\rangle + \cos\frac{\beta}{2} \left| \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle \otimes |n\rangle; \quad (2.7)$$

Les vecteurs propres des sous niveaux excités résonants avec le rayonnement quantifié dans le système d'axe  $Z'$  (les axes  $Z$  et  $Z'$  forment un angle  $\beta$  entre eux).

$$\begin{aligned} |\psi_{ez'}, +\rangle = & \cos\frac{\alpha}{2} (\cos\frac{\beta}{2} \left| \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle - \sin\frac{\beta}{2} \left| \frac{3}{2}, \frac{-1}{2} \right\rangle) \otimes |n\rangle + \sin\frac{\alpha}{2} (\sin\frac{\beta}{2} \left| \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \\ & + \cos\frac{\beta}{2} \left| \frac{3}{2}, \frac{-1}{2} \right\rangle) \otimes |n-1\rangle \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} |\psi_{ez'}, -\rangle = & -\sin\frac{\alpha}{2} (\cos\frac{\beta}{2} \left| \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle - \sin\frac{\beta}{2} \left| \frac{3}{2}, \frac{-1}{2} \right\rangle) \otimes |n\rangle + \cos\frac{\alpha}{2} (\sin\frac{\beta}{2} \left| \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \\ & + \cos\frac{\beta}{2} \left| \frac{3}{2}, \frac{-1}{2} \right\rangle) \otimes |n-1\rangle \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$|\psi'_{ez'}, +\rangle = \cos\frac{\alpha'}{2}(\cos\frac{\beta}{2}|\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\rangle - \sin\frac{\beta}{2}|\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\rangle) \otimes |n+1\rangle + \sin\frac{\alpha'}{2}(\sin\frac{\beta}{2}|\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\rangle + \cos\frac{\beta}{2}|\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\rangle) \otimes |n\rangle \quad (2.10)$$

$$|\psi'_{ez'}, -\rangle = -\sin\frac{\alpha'}{2}(\cos\frac{\beta}{2}|\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\rangle - \sin\frac{\beta}{2}|\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\rangle) \otimes |n+1\rangle + \cos\frac{\alpha'}{2}(\sin\frac{\beta}{2}|\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\rangle + \cos\frac{\beta}{2}|\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\rangle) \otimes |n\rangle \quad (2.11)$$

On sait qu'à la résonance  $\alpha = \alpha' = \frac{\pi}{2}$  et pour un grand nombre de photons  $n = n + 1$ , les relations (2.8) à (2.11) deviennent

$$|\psi_{ez'}, +\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\frac{\beta}{2}|\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\rangle - \sin\frac{\beta}{2}|\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\rangle) \otimes |n\rangle + \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\frac{\beta}{2}|\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\rangle + \cos\frac{\beta}{2}|\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\rangle) \otimes |n\rangle \quad (2.12)$$

$$|\psi_{ez'}, -\rangle = -\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\frac{\beta}{2}|\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\rangle - \sin\frac{\beta}{2}|\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\rangle) \otimes |n\rangle + \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\frac{\beta}{2}|\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\rangle + \cos\frac{\beta}{2}|\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\rangle) \otimes |n\rangle \quad (2.13)$$

$$|\psi'_{ez'}, +\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\frac{\beta}{2}|\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\rangle - \sin\frac{\beta}{2}|\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\rangle) \otimes |n\rangle + \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\frac{\beta}{2}|\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\rangle + \cos\frac{\beta}{2}|\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\rangle) \otimes |n\rangle \quad (2.14)$$

$$|\psi'_{ez'}, -\rangle = -\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\frac{\beta}{2}|\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\rangle - \sin\frac{\beta}{2}|\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\rangle) \otimes |n\rangle + \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\frac{\beta}{2}|\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\rangle + \cos\frac{\beta}{2}|\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\rangle) \otimes |n\rangle \quad (2.15)$$

## 2.4 Transitions

Notre système constitué par un noyau de  $^{57}\text{Fe}$  soumis à l'interaction combinée des champs statiques et un champ dépendant du temps a généré 6 sous niveaux nucléaires dans l'état excité et deux sous niveaux fondamentaux. En effet, il y a eu résonance seulement dans les sous niveaux excités caractérisés par  $m_I = \pm\frac{1}{2}$ ; de plus l'émission spontanée ne change pas le nombre du rayonnement extérieur; les autres sous niveaux étant hors résonance. Le tableau 2.1 montre les transitions possibles, leurs intensités relatives et leurs dépendances angulaires.

Les transitions possibles et les intensités relatives sont montrées dans le tableau 2.2.

Tableau 2.1: Les 12 transitions des sous niveaux excités vers les sous niveaux de l'état fondamental avec les règles de sélections correspondantes pour  $\Delta m$

Transition	Règles de sélection
$E_e, \frac{3}{2} \rightarrow E_f, \frac{1}{2}$	$\Delta m = 1$
$\lambda'_1 \rightarrow E_f, \frac{1}{2}$	$\Delta m = 0$
$\lambda'_1 \rightarrow E_f, \frac{-1}{2}$	$\Delta m = 1$
$\lambda'_2 \rightarrow E_f, \frac{1}{2}$	$\Delta m = 0$
$\lambda'_2 \rightarrow E_f, \frac{-1}{2}$	$\Delta m = 1$
$\lambda_1 \rightarrow E_f, \frac{1}{2}$	$\Delta m = -1$
$\lambda_1 \rightarrow E_f, \frac{-1}{2}$	$\Delta m = 0$
$\lambda_2 \rightarrow E_f, \frac{1}{2}$	$\Delta m = -1$
$\lambda_2 \rightarrow E_f, \frac{-1}{2}$	$\Delta m = 0$
$E_e, \frac{-3}{2} \rightarrow E_f, \frac{-1}{2}$	$\Delta m = -1$
$E_e, \frac{3}{2} \rightarrow E_f, \frac{-1}{2}$	$\Delta m = 2$
$E_e, \frac{-3}{2} \rightarrow E_f, \frac{1}{2}$	$\Delta m = -2$

## 2.5 Intensités relatives

Les règles de sélection sur les sous niveaux  $\Delta m = 0, \pm 1$  et du fait que l'émission spontanée ne change pas le nombre de photons du rayonnement extérieur nous permettent de conclure que seules 8 transitions sont possibles. Leurs intensités sont montrées dans le tableau 2.2 [Odeurs, 1995].

Tableau 2.2: Les intensités relatives de chaque transition et leur dépendance angulaire

Transition	Intensité relative	Dépendance angulaire	Intensité relative totale
$E_e, \frac{3}{2} \rightarrow E_f, \frac{1}{2}$	3	$1 + \cos^2\beta$	$3(1 + \cos^2\beta)$
$E_e, \frac{-3}{2} \rightarrow E_f, \frac{-1}{2}$	3	$1 + \cos^2\beta$	$3(1 + \cos^2\beta)$
$\lambda'_1 \rightarrow E_f, \frac{1}{2}$	2	$\sin^2\beta$	$4\sin^2\beta$
$\lambda'_1 \rightarrow E_f, \frac{-1}{2}$	1	$1 + \cos^2\beta$	$(1 + \cos^2\beta)$
$\lambda'_2 \rightarrow E_f, \frac{1}{2}$	2	$2\sin^2\beta$	$4\sin^2\beta$
$\lambda'_2 \rightarrow E_f, \frac{-1}{2}$	1	$1 + \cos^2\beta$	$(1 + \cos^2\beta)$
$\lambda_1 \rightarrow E_f, \frac{-1}{2}$	2	$2\sin^2\beta$	$4\sin^2\beta$
$\lambda_1 \rightarrow E_f, \frac{1}{2}$	1	$1 + \cos^2\beta$	$1 + \cos^2\beta$
$\lambda_2 \rightarrow E_f, \frac{-1}{2}$	2	$2\sin^2\beta$	$4\sin^2\beta$
$\lambda_2 \rightarrow E_f, \frac{1}{2}$	1	$1 + \cos^2\beta$	$1 + \cos^2\beta$
$E_e, \frac{3}{2} \rightarrow E_f, \frac{-1}{2}$	0	0	0
$E_e, \frac{-3}{2} \rightarrow E_f, \frac{1}{2}$	0	0	0

## 2.6 Forme de distribution

Le sous espace de deux dimensions engendré par  $|\phi_1\rangle$  et  $|\phi_2\rangle$  est noté  $\varepsilon_n$ . On peut aussi considérer  $\varepsilon_n$  à  $\varepsilon_{n-1}$ , de  $\varepsilon_{n-1}$  à  $\varepsilon_{n-2}$ , etc (voir figure 1.2).

Nous supposons que tous les sous niveaux excités ne sont pas couplés avec le champ quantifié (seuls les sous niveaux excités caractérisés par  $m_I = \frac{1}{2}$  et  $m_I = \frac{-1}{2}$  sont couplés avec le rayonnement quantifié). En considérant la résonance dans l'état excité, nous supposons qu'il n'y a pas de couplage avec un photon rf dans l'état fondamental.

Maintenant, calculons la transition énergétique entre l'état fondamental et l'état excité.

Par les règles de sélection  $\Delta m = 0, \pm 1$ , on voit qu'il y a des transitions qui sont possibles pour l'émission spontanée lorsque le noyau se désexcite des sous niveaux excités vers les états fondamentaux.

Pour ce fait, on doit considérer l'opérateur dipolaire magnétique qui n'agit pas sur les photons du rayonnement extérieur. Dans ce cas le nombre des photons du rayonnement extérieur ne change pas.

Dans le sous espace  $\varepsilon_n$ , les transitions possibles sont (voir tableau 2.1):

$$\lambda_1 - E_{f, \frac{-1}{2}} = E_{N,0} - \frac{1}{4}eV_{zz}Q + \hbar\omega n + g\sqrt{n} - E_{f, \frac{-1}{2}} \quad (2.16)$$

$$\lambda_1 - E_{f, \frac{1}{2}} = E_{N,0} - \frac{1}{4}eV_{zz}Q + \hbar\omega n + g\sqrt{n} - E_{f, \frac{1}{2}} \quad (2.17)$$

$$\lambda_2 - E_{f, \frac{-1}{2}} = E_{N,0} - \frac{1}{4}eV_{zz}Q + \hbar\omega n - g\sqrt{n} - E_{f, \frac{-1}{2}} \quad (2.18)$$

$$\lambda_2 - E_{f, \frac{1}{2}} = E_{N,0} - \frac{1}{4}eV_{zz}Q + \hbar\omega n - g\sqrt{n} - E_{f, \frac{1}{2}} \quad (2.19)$$

Dans le sous espace  $\varepsilon_{n+1}$ , les transitions possibles sont (voir tableau 2.1):

$$\lambda'_1 - E_{f, \frac{-1}{2}} = E_{N,0} - \frac{1}{4}eV_{zz}Q + \hbar\omega(n+1) + g\sqrt{(n+1)} - E_{f, \frac{-1}{2}} \quad (2.20)$$

$$\lambda'_1 - E_{f, \frac{1}{2}} = E_{N,0} - \frac{1}{4}eV_{zz}Q + \hbar\omega(n+1) + g\sqrt{(n+1)} - E_{f, \frac{1}{2}} \quad (2.21)$$

$$\lambda'_2 - E_{f, \frac{-1}{2}} = E_{N,0} - \frac{1}{4}eV_{zz}Q + \hbar\omega(n+1) - g\sqrt{(n+1)} - E_{f, \frac{-1}{2}} \quad (2.22)$$

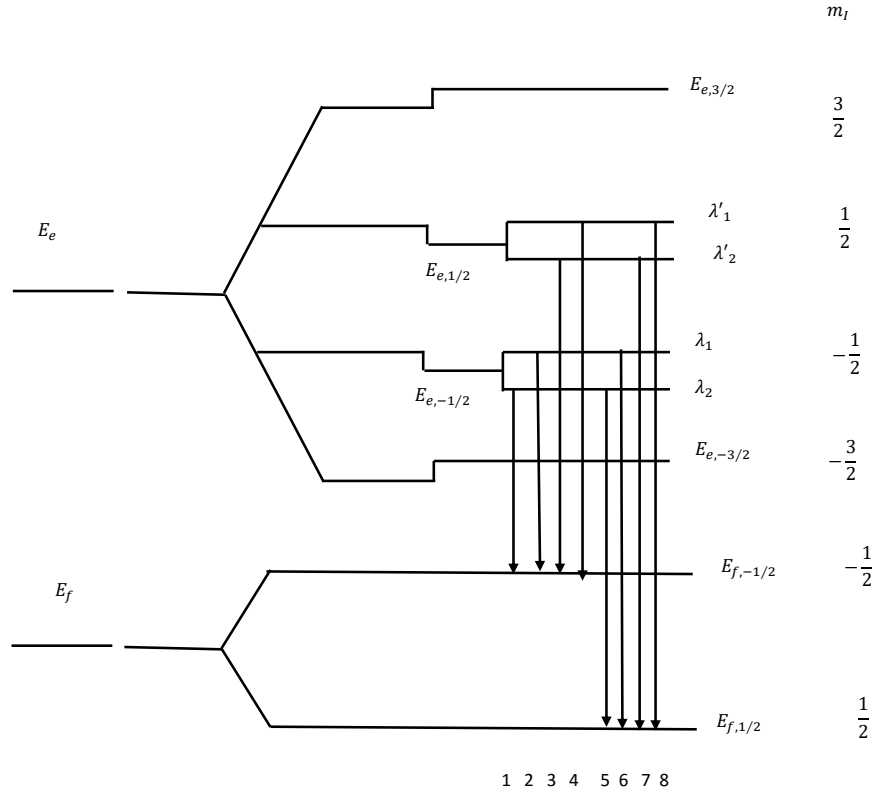


Figure 2.1: Les huit transitions possibles lors de l'émission spontanée des sous niveaux résonnants vers les sous niveaux de l'état fondamental.

$$\lambda'_2 - E_{f,\frac{1}{2}} = E_{N,0} - \frac{1}{4}eV_{zz}Q + \hbar\omega(n+1) - g\sqrt{(n+1)} - E_{f,\frac{1}{2}} \quad (2.23)$$

Les états finals sont les sous niveaux de l'état fondamental. En supposant qu'il n'y a pas eu résonance dans les sous niveaux fondamentaux, huit rayons  $\gamma$  différents sont possibles pour l'émission spontanée comme le montre la figure 2.1.

## 2.7 Emission spontanée

Dans cette section, nous cherchons la forme de la distribution des probabilités de transition. Nous allons traiter une des huit transitions possibles (figure 2.1), les autres transitions peuvent être cherchées de la même manière. Puisque l'émission spontanée ne change pas le nombre de photons du rayonnement extérieur couplant les niveaux hyperfins, le hamiltonien lié à l'émission spontanée prend cette forme:

$$H_{esp} = \frac{i}{c} \vec{\mu} \cdot \sum_{\vec{k},s} \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0 V}} \vec{u}_{\vec{k},s} \left( a_{\vec{k},s}^- e^{\vec{k} \cdot \vec{r}} - a_{\vec{k},s}^+ e^{-\vec{k} \cdot \vec{r}} \right) \quad (2.24)$$

Au niveau du noyau, le facteur exponentiel tend vers un et l'expression (2.24) devient:

$$H_{esp} = \frac{i}{c} \vec{\mu} \cdot \sum_{\vec{k},s} \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0 V}} \vec{u}_{\vec{k},s} \left( a_{\vec{k},s} - a_{\vec{k},s}^+ \right) \quad (2.25)$$

Nous considérons deux sous niveaux  $|\psi_2\rangle = |\frac{3}{2}, \frac{-1}{2}\rangle$  et  $|\psi_1\rangle = |\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}\rangle$  du noyau de  $^{57}\text{Fe}$  se désexcitant de  $|\psi_2\rangle$  vers  $|\psi_1\rangle$  par émission spontanée. Les énergies associées à ces sous niveaux sont (voir (1.10) et (1.15)):

$$E_1 = 0 \text{ eV} + 0,9375 \cdot 10^{-46} \text{ eV} \quad (2.26)$$

$$E_2 = 14,4 \cdot 10^3 \text{ eV} - 0,5364 \cdot 10^{-45} \text{ eV} - 0,5364 \cdot 10^{-46} \text{ eV} \quad (2.27)$$

avec

$$E_2 - E_1 = \hbar\omega_N$$

où  $\omega_N$  est la fréquence de Bohr nucléaire.

Ici on peut prendre d'autres sous niveaux pourvu que les règles de sélection soient vérifiées et qu'il y ait résonance. Introduisons les opérateurs définis par:

$$b_1^+ b_1 = \left| \frac{1}{2}, \frac{-1}{2} \right\rangle \left\langle \frac{1}{2}, \frac{-1}{2} \right| \quad (2.28)$$

qui annule le sous niveau fondamental et crée le même sous niveau;

$$b_2^+ b_2 = \left| \frac{3}{2}, \frac{-1}{2} \right\rangle \left\langle \frac{3}{2}, \frac{-1}{2} \right| \quad (2.29)$$

qui annule le sous niveau excité et crée le même sous niveau;

$$b_2^+ b_1 = \left| \frac{3}{2}, \frac{-1}{2} \right\rangle \left\langle \frac{1}{2}, \frac{-1}{2} \right| \quad (2.30)$$

qui annule le sous niveau fondamental et crée le sous niveau excité et

$$b_1^+ b_2 = \left| \frac{1}{2}, \frac{-1}{2} \right\rangle \left\langle \frac{3}{2}, \frac{-1}{2} \right| \quad (2.31)$$

qui annule le sous niveau excité et crée le sous niveau fondamental.

Les relations (1.3),(1.17) et (2.25) permettent d'écrire le hamiltonien total  $H$  comme suit:

$$H = H_N + H_f + H_{esp}; \quad (2.32)$$

$$H_N = E_1 b_1^+ b_1 + E_2 b_2^+ b_2 \quad (2.33)$$

La relation (2.33) est connue sous le nom de la décomposition spectrale de  $H_N$ .

Introduisons la constante  $g_{\vec{k},s} = \frac{i}{c} \vec{\mu} \cdot \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0 V}} \vec{u}_{\vec{k},s}$ ; on a:

$$H_{esp} = \sum_{\vec{k},s} g_{\vec{k},s} \left( a_{\vec{k},s} b_2^+ b_1 - a_{\vec{k},s}^+ b_1^+ b_2 \right); \quad (2.34)$$

$H_0 = H_N + H_f$ : le hamiltonien non perturbé;  $H_{esp}$ : la perturbation.

Résolvons l'équation de Schrödinger:

$$(H_0 + H_{esp}) |\phi(t)\rangle = i\hbar \frac{d|\phi(t)\rangle}{dt}. \quad (2.35)$$

Il est nécessaire d'introduire un autre vecteur défini par :

$$|\phi_I(t)\rangle = e^{i\frac{H_0 t}{\hbar}} |\phi(t)\rangle; \quad (2.36)$$

Cette représentation est connue sous le nom de la «représentation d'interaction». L'équation (2.35) est donc explicitement:

$$i\hbar \frac{d|\phi_I(t)\rangle}{dt} = H_{esp}^I(t) |\phi_I(t)\rangle \quad (2.37)$$

avec

$$H_{esp}^I(t) = e^{i\frac{H_0 t}{\hbar}} H_{esp} e^{-i\frac{H_0 t}{\hbar}} \quad (2.38)$$

Du fait que tous les opérateurs commutent, on peut montrer que :

$$H_{esp}^I = \sum_{\vec{k},s} \left( g_{\vec{k},s} a_{\vec{k},s} b_2^+ b_1 e^{-i\omega_{\vec{k}} t} e^{i\frac{(E_2-E_1)t}{\hbar}} - g_{\vec{k},s}^+ a_{\vec{k},s}^+ b_1^+ b_2 e^{i\omega_{\vec{k}} t} e^{-i\frac{(E_2-E_1)t}{\hbar}} \right) \quad (2.39)$$

Introduisons la pulsation de Bohr nucléaire  $\omega_N$  :

$$\omega_N = \frac{E_2 - E_1}{\hbar} \quad (2.40)$$

$$H_{esp}^I = \sum_{\vec{k},s} \left( g_{\vec{k},s} a_{\vec{k},s} b_2^+ b_1 e^{-i\omega_{\vec{k}} t} e^{i(\omega_{\vec{k}} - \omega_N)t} - g_{\vec{k},s}^+ a_{\vec{k},s}^+ b_1^+ b_2 e^{i\omega_{\vec{k}} t} e^{-i(\omega_{\vec{k}} - \omega_N)t} \right) \quad (2.41)$$

Pour résoudre l'équation (2.37), on intègre formellement de 0 à  $t$ .

$$|\phi_I(t)\rangle = |\phi_I(0)\rangle + \frac{1}{i\hbar} \int_0^t H_{esp}^I(\tau) \phi_I(\tau) d\tau; \quad (2.42)$$

où  $|\phi_I(0)\rangle$  est l'état du système à l'instant  $t=0$ .

On voit que  $|\phi_I(0)\rangle = |\phi(0)\rangle$ .

En remplaçant  $|\phi_I(t)\rangle$  par  $|\phi_I(0)\rangle$ , l'on a l'approximation de l'ordre un. On pourrait passer à l'approximation à des ordres supérieurs mais restons à l'ordre un pour notre cas afin de simplifier les calculs.

Parmi les trois processus fondamentaux (émission spontanée ; émission stimulée, absorption), nous nous intéressons à l'émission spontanée.

Supposons qu'initialement le système nucléaire soit dans l'état excité sans photon, on a:

$$|\phi_I(0)\rangle = |\psi_2\rangle \otimes |\{0\}\rangle ; \quad (2.43)$$

où  $|\{0\}\rangle$  est le vide du champ avec tous les modes. La solution est donc explicitement

$$|\phi_I(t)\rangle = |\psi_2\rangle \otimes |\{0\}\rangle + \frac{1}{i\hbar} \int_0^t H_{esp}^I(\tau) |\psi_2\rangle \otimes |\{0\}\rangle d\tau. \quad (2.44)$$

Avec la forme de  $H_{esp}^I(t)$ , le second terme est explicitement à partir de (2.41):

$$\frac{1}{i\hbar} \int_0^t \sum_{\vec{k}} \sum_s (g_{\vec{k},s} a_{\vec{k},s} b_2^+ b_1 e^{-i(\omega_{\vec{k}} - \omega_N)\tau} - g_{\vec{k},s} a_{\vec{k},s}^+ b_1^+ b_2 e^{i(\omega_{\vec{k}} - \omega_N)\tau}) |\psi_2\rangle \otimes |\{0\}\rangle d\tau. \quad (2.45)$$

On a alors:

$$|\phi_I(t)\rangle = |\psi_2\rangle \otimes |\{0\}\rangle + \frac{1}{i\hbar} \int_0^t \sum_{\vec{k},s} (g_{\vec{k},s} a_{\vec{k},s} b_2^+ b_1 e^{-i(\omega_{\vec{k}} - \omega_N)\tau} - \quad (2.46)$$

$$g_{\vec{k},s} a_{\vec{k},s}^+ b_1^+ b_2 e^{i(\omega_{\vec{k}} - \omega_N)\tau}) |\psi_2\rangle \otimes |\{0\}\rangle d\tau$$

Le premier terme dans l'intégrale de la relation (2.46) lié à l'absorption d'un photon, est à négliger puisque son action sur le vecteur  $|\psi_2\rangle \otimes |\{0\}\rangle$  est nulle.

Alors

$$|\phi_I(t)\rangle = |\psi_2\rangle \otimes |\{0\}\rangle - \frac{1}{i\hbar} \int_0^t \sum_{\vec{k},s} g_{\vec{k},s} a_{\vec{k},s}^+ b_1^+ b_2 e^{i(\omega_{\vec{k}} - \omega_N)\tau} |\psi_2\rangle \otimes |\{0\}\rangle d\tau ; \quad (2.47)$$

$$|\phi_I(t)\rangle = |\psi_2\rangle \otimes |\{0\}\rangle - \frac{1}{i\hbar} \int_0^t \sum_{\vec{k},s} g_{\vec{k},s} e^{i(\omega_{\vec{k}} - \omega_N)\tau} |\psi_1\rangle \otimes |\dots 1_{\vec{k},s} \dots\rangle d\tau ; \quad (2.48)$$

car  $b_1^+ b_2 |\psi_2\rangle = |\psi_1\rangle$  et  $a_{\vec{k},s} |0\rangle = |\dots 1_{\vec{k},s} \dots\rangle$

Après integration de (2.48) on obtient:

$$|\phi_I(t)\rangle = |\psi_2\rangle \otimes |\{0\}\rangle + \frac{1}{\hbar} \sum_{\vec{k},s} g_{\vec{k},s} \left[ \frac{1 - e^{i(\omega_{\vec{k}} - \omega_N)t}}{\omega_{\vec{k}} - \omega_N} \right] |\psi_1\rangle \otimes |\dots, 1_{\vec{k},s}, \dots\rangle \quad (2.49)$$

Cette équation est expliquée comme suit: l'état du système est décrit comme une superposition linéaire de l'état excité nucléaire, zéro photon et les états où le noyau se trouve dans l'état fondamental avec un photon de mode  $(\vec{k}, s)$ .

Pour étudier l'émission spontanée, considérons le volume  $V=L^3$ . La probabilité de trouver le système dans un état où le noyau est repéré par  $|\psi_1\rangle$  et le photon par  $(\vec{k}, s)$  est :

$$\frac{1}{\hbar^2} |g_{\vec{k},s}|^2 \left| \frac{1 - e^{i(\omega_{\vec{k}} - \omega_N)t}}{\omega_{\vec{k}} - \omega_N} \right|^2 \quad (2.50)$$

La probabilité totale de trouver le système nucléaire dans l'état  $|\psi_1\rangle$  et le photon dans un état  $(\vec{k}, s)$  quelconque est obtenue en sommant sur tous les vecteurs  $\vec{k}$  et  $s$  :

$$P_{sp}(t) = \frac{1}{\hbar^2} \sum_{\vec{k},s} |g_{\vec{k},s}|^2 \left| \frac{1 - e^{i(\omega_{\vec{k}} - \omega_N)t}}{\omega_{\vec{k}} - \omega_N} \right|^2 \quad (2.51)$$

où  $P_{sp}$  est la probabilité de transition par émission spontanée.

La probabilité par unité de temps  $W_{sp}(t)$  est alors [Loudon, 2000]:

$$W_{sp}(t) = \frac{dP_{sp}(t)}{dt} = 2 \sum_{\vec{k},s} \frac{1}{\hbar^2} |g_{\vec{k},s}|^2 \frac{\sin(\omega_{\vec{k}} - \omega_N)t}{\omega_{\vec{k}} - \omega_N} \quad (2.52)$$

Ici nous avons utilisé les indices  $sp$  sur  $W_{sp}$  pour signifier qu'il s'agit de la probabilité de transition par émission spontanée.

L'analyse détaillée de la fonction  $\frac{\sin(\omega_{\vec{k}} - \omega_N)t}{\omega_{\vec{k}} - \omega_N}$  montre que cette fonction présente un pic prononcé avec le maximum pour  $\omega_{\vec{k}} = \omega_N$ .

Dû au facteur  $\frac{\sin(\omega_{\vec{k}} - \omega_N)t}{\omega_{\vec{k}} - \omega_N} = \pi \delta(\omega_{\vec{k}} - \omega_N)$  (pour  $t$  très grand) [Loudon, 2000] et au fait que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sin(\omega_{\vec{k}} - \omega_N)t}{\omega_{\vec{k}} - \omega_N} = \pi \delta(\omega_{\vec{k}} - \omega_N)$$

(2.52) devient alors:

$$W_{sp}(t) = \frac{2\pi}{\hbar^2} \sum_{\vec{k},s} |g_{\vec{k},s}|^2 \delta(\omega_{\vec{k}} - \omega_N) \quad (2.53)$$

Cette expression est un cas particulier de la règle de Fermi (permettant de calculer la probabilité de transition par unité de temps à partir d'un état propre d'un système quantique vers un continuum d'états propres par perturbation), il faut noter qu'il y a la conservation d'énergie dans cette expression.  $\delta(\omega_{\vec{k}} - \omega_N)$  n'a un sens que sous le signe d'une intégrale [Loudon, 2000].

Nous devons alors convertir  $\sum_{\vec{k}}$  en une intégrale  $\frac{1}{L^3} \sum_{\vec{k}} \rightarrow \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint d^3\vec{k}$  [Loudon, 2000].

Le coefficient de l'émission spontanée se réécrit:

$$W_{sp} = \frac{2\pi}{\hbar^2} \frac{L^3}{(2\pi)^3} \sum_s \iiint |g_{\vec{k},s}|^2 \delta(\omega_{\vec{k}} - \omega_N) d^3\vec{k} \quad (2.54)$$

où

$$d^3 \vec{k} = k^2 \sin\theta dk d\theta d\phi$$

$$W_{sp} = \frac{2\pi}{\hbar^2} \frac{L^3}{(2\pi)^3} \sum_s \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left| \frac{\gamma_e}{2c} \sqrt{\frac{\hbar\omega_{\vec{k}}}{2\varepsilon_0 V}} \right|^2 \delta(\omega_{\vec{k}} - \omega_N) k^2 \sin\theta dk d\theta d\phi ; \quad (2.55)$$

Sachant que le vecteur d'onde  $\vec{k}$  est doublement polarisé, la relation (2.57) devient:

$$W_{sp} = \frac{1}{4\pi} \frac{L^3}{\hbar^2} \int_0^\infty \left| \frac{\gamma_e}{c} \sqrt{\frac{\hbar\omega_{\vec{k}}}{\varepsilon_0 V}} \right|^2 \delta(\omega_{\vec{k}} - \omega_N) k^2 dk ; \quad (2.56)$$

$$\text{avec } k = \frac{\omega_{\vec{k}}}{c} ;$$

$$W_{sp} = \frac{1}{4\pi c^3} \frac{L^3}{\hbar^2} \int_0^\infty \left| \frac{\gamma_e}{c} \sqrt{\frac{\hbar\omega_{\vec{k}}}{\varepsilon_0 V}} \right|^2 \delta(\omega_{\vec{k}} - \omega_N) \omega_{\vec{k}}^2 d\omega_{\vec{k}} ; \quad (2.57)$$

$$W_{sp} = \frac{1}{4\pi\hbar} \frac{\gamma_e^2}{c^5 \varepsilon_0} \omega_N^3. \quad (2.58)$$

Cette dernière expression correspond au coefficient d'émission spontanée. Elle correspond à la probabilité de transition du noyau du sous niveau excité vers un sous niveau inférieur en émettant un photon de fréquence angulaire  $\omega_N$  (fréquence de Bohr pour les sous niveaux concernés) par unité de temps.

Nous venons d'étudier l'émission spontanée pour une transition particulière. Ce raisonnement est applicable pour les autres sept transitions. Dans la section suivante, nous allons utiliser la méthode de Wigner-Weisskopf pour calculer la forme du spectre d'émission spontanée vu dans la section 2.7.

## 2.8 Amortissement et largeur naturelle

### 2.8.1 Introduction

Dans cette section, nous allons chercher la probabilité de transition d'un noyau de  $^{57}\text{Fe}$  se trouvant dans un sous niveau excité vers un sous niveau fondamental. Nous allons tenir compte du coefficient d'amortissement. Comme dans la section précédente, notre système est constitué par un noyau de  $^{57}\text{Fe}$  soumis à l'interaction combinée des champs statiques (champ magnétique et gradient de champ électrique statique) et un champ magnétique dépendant du temps.

## 2.8.2 Probabilité de transition

Reprenons l'équation (2.35) qui s'écrit explicitement dans le cas de deux niveaux nucléaires où l'énergie du vide du rayonnement est égale à zéro:

$$(E_1 b_1^+ b_1 + E_2 b_2^+ b_2 + \sum_{\vec{k},s} \hbar \omega_{\vec{k}} a_{\vec{k},s}^+ a_{\vec{k},s} + \sum_{\vec{k},s} [g_{\vec{k},s} (a_{\vec{k},s} b_2^+ b_1 - a_{\vec{k},s}^+ b_1^+ b_2)]) |\phi(t)\rangle = i\hbar \frac{d}{dt} |\phi(t)\rangle \quad (2.59)$$

Pour trouver la probabilité de transition, choisissons les conditions initiales de sorte que nous étudions encore l'émission spontanée. Considérons alors qu'à l'instant  $t = 0$  le noyau se trouve dans le sous niveau excité  $|\psi_2\rangle \otimes |\{0\}\rangle$  sans photons.

Cherchons la solution sous la forme suivante:

$$|\phi(t)\rangle = c(t) |\psi_2\rangle \otimes |\{0\}\rangle e^{-\frac{iE_2}{\hbar}t} + \sum_{\vec{k};s} c_{\vec{k},s}^{\rightarrow}(t) e^{-i(\omega_{\vec{k}} + \frac{E_1}{\hbar})t} |\psi_1\rangle \otimes |0, \dots, 1_{\vec{k},s}, \dots\rangle \quad (2.60)$$

En substituant (2.60) dans (2.59) on trouve:

$$\begin{aligned} & (E_1 b_1^+ b_1 + E_2 b_2^+ b_2 + \sum_{\vec{k},s} \hbar \omega_{\vec{k}} a_{\vec{k},s}^+ a_{\vec{k},s} + \sum_{\vec{k},s} [g_{\vec{k},s} (a_{\vec{k},s} b_2^+ b_1 - a_{\vec{k},s}^+ b_1^+ b_2)]) \\ & (c(t) |\psi_2\rangle \otimes |\{0\}\rangle e^{-\frac{iE_2}{\hbar}t} + \sum_{\vec{k},s} c_{\vec{k},s}^{\rightarrow}(t) e^{-i(\omega_{\vec{k}} + \frac{E_1}{\hbar})t} |\psi_1\rangle \otimes |0, \dots, 1_{\vec{k},s}, \dots\rangle) \\ & = i\hbar \frac{d}{dt} (c(t) |\psi_2\rangle \otimes |\{0\}\rangle e^{-\frac{iE_2}{\hbar}t} + \sum_{\vec{k},s} c_{\vec{k},s}^{\rightarrow}(t) e^{-i(\omega_{\vec{k}} + \frac{E_1}{\hbar})t} |\psi_1\rangle \otimes |0, \dots, 1_{\vec{k},s}, \dots\rangle) \end{aligned} \quad (2.61)$$

Le premier membre de l'expression de (2.61) est équivalent à

$$\begin{aligned} & E_1 \sum_{\vec{k},s} c_{\vec{k},s}^{\rightarrow}(t) e^{-i(\omega_{\vec{k}} + \frac{E_1}{\hbar})t} |\psi_1\rangle \otimes |0, \dots, 1_{\vec{k},s}, \dots\rangle + E_2 c(t) |\psi_2\rangle \otimes |\{0\}\rangle e^{-\frac{iE_2}{\hbar}t} \\ & + \sum_{\vec{k},s} \hbar \omega_{\vec{k}} c_{\vec{k},s}^{\rightarrow}(t) e^{-i(\omega_{\vec{k}} + \frac{E_1}{\hbar})t} |\psi_1\rangle \otimes |0, \dots, 1_{\vec{k},s}, \dots\rangle + \\ & - \sum_{\vec{k};s} g_{\vec{k},s} c(t) |\psi_1\rangle \otimes |0, \dots, 1_{\vec{k},s}, \dots\rangle e^{-\frac{iE_2}{\hbar}t} + \sum_{\vec{k},s} g_{\vec{k},s} \sum_{\vec{k};s} c_{\vec{k},s}^{\rightarrow} e^{-i(\omega_{\vec{k}} + \frac{E_1}{\hbar})t} \\ & |\psi_2\rangle \otimes |\{0\}\rangle \end{aligned} \quad (2.62)$$

Le second membre de l'expression (2.61) est équivalent à:

$$\begin{aligned} & i\hbar \frac{d}{dt} \left[ c(t) - \frac{iE_2}{\hbar} c(t) \right] |\psi_2(t)\rangle \otimes |\{0\}\rangle e^{-\frac{iE_2}{\hbar}t} + \\ & \sum_{\vec{k};s} \left[ \frac{d}{dt} c_{\vec{k},s}^{\rightarrow}(t) - i \left( \omega_{\vec{k}} + \frac{E_1}{\hbar} \right) c_{\vec{k},s}^{\rightarrow}(t) \right] |\psi_1\rangle \otimes |0, \dots, 1_{\vec{k},s}, \dots\rangle e^{-i(\omega_{\vec{k}} + \frac{E_1}{\hbar})t} \end{aligned} \quad (2.63)$$

En combinant (2.62) et (2.63), (2.61) devient:

$$\begin{aligned}
 & i\hbar \left[ \frac{d}{dt} c(t) + c(t) \frac{-iE_2}{\hbar} \right] |\psi_2(t) \rangle \otimes | \{0\} \rangle + \\
 & \sum_{\vec{k};s} \left[ \frac{d}{dt} c_{\vec{k},s}(t) - i \left( \omega_{\vec{k}} + \frac{E_1}{\hbar} \right) c_{\vec{k},s}(t) \right] |\psi_1 \rangle \otimes | 0, \dots, 1_{\vec{k},s}, \dots \rangle e^{-i(\omega_{\vec{k}} + \frac{E_1}{\hbar})t} \\
 & = E_1 \sum_{\vec{k},s} c_{\vec{k},s}(t) e^{-i(\omega_{\vec{k}} + \frac{E_1}{\hbar})t} |\psi_1 \rangle \otimes | 0, \dots, 1_{\vec{k},s}, \dots \rangle + E_2 c(t) |\psi_2 \rangle \otimes | \{0\} \rangle e^{-\frac{iE_2}{\hbar}t} \\
 & + \sum_{\vec{k},s} \hbar \omega_{\vec{k}} c_{\vec{k},s}(t) e^{-i(\omega_{\vec{k}} + \frac{E_1}{\hbar})t} |\psi_1 \rangle \otimes | 0, \dots, 1_{\vec{k},s}, \dots \rangle \\
 & - \sum_{\vec{k};s} g_{\vec{k},s} c(t) |\psi_1 \rangle \otimes | 0, \dots, 1_{\vec{k},s}, \dots \rangle e^{-\frac{iE_2}{\hbar}t} + \sum_{\vec{k},s} g_{\vec{k},s} \sum_{\vec{k};s} c_{\vec{k},s} e^{-i(\omega_{\vec{k}} + \frac{E_1}{\hbar})t} \\
 & |\psi_2 \rangle \otimes | \{0\} \rangle
 \end{aligned} \tag{2.64}$$

En projetant l'expression (2.64) sur le vecteur  $|\psi_2(t) \rangle \otimes | \{0\} \rangle$ , on a l'équation différentielle suivante:

$$i\hbar \left[ \frac{dc(t)}{dt} - \frac{iE_2}{\hbar} c(t) \right] e^{-\frac{iE_2}{\hbar}t} = \sum_{\vec{k},s} g_{\vec{k},s} e^{-i(\omega_{\vec{k}} + \frac{E_1}{\hbar})t} g_{\vec{k},s} + E_2 c(t) e^{-\frac{iE_2}{\hbar}t} \tag{2.65}$$

qui donne

$$\frac{d}{dt} c(t) = \frac{1}{i\hbar} \sum_{\vec{k},s} g_{\vec{k},s} e^{i(\omega_N - \omega_{\vec{k}})t} c_{\vec{k},s}(t); \tag{2.66}$$

En projetant l'expression (2.64) sur le vecteur  $|\psi_1 \rangle \otimes | 0, \dots, 1_{\vec{k},s}, \dots \rangle$ , on a l'équation différentielle suivante:

$$\begin{aligned}
 & i\hbar \left[ \frac{dc_{\vec{k},s}(t)}{dt} - i \left( \omega_{\vec{k}} + \frac{E_1}{\hbar} \right) c_{\vec{k},s}(t) \right] e^{-i(\omega_{\vec{k}} + \frac{E_1}{\hbar})t} = -g_{\vec{k},s} c(t) e^{-\frac{iE_2}{\hbar}t} + (\hbar \omega_{\vec{k}} + E_1) c_{\vec{k},s} \\
 & e^{-i(\omega_{\vec{k}} + \frac{E_1}{\hbar})t}
 \end{aligned} \tag{2.67}$$

qui vaut

$$\frac{d}{dt} c_{\vec{k},s}(t) = \frac{-1}{i\hbar} g_{\vec{k},s} e^{-i(\omega_N - \omega_{\vec{k}})t} c(t). \tag{2.68}$$

avec  $\omega_N = \frac{E_2 - E_1}{\hbar}$

La solution des équations (2.66) et (2.68) nous donnera la fonction suivant laquelle le système global évolue.

Posons:

$$c(t) = e^{-\gamma t} \tag{2.69}$$

car nous savons que la probabilité pour que le système reste dans  $|\psi_2 \rangle \otimes | \{0\} \rangle$  décroît suivant la loi exponentielle (pour un grand nombre de noyaux).

Ceci constitue le modèle de Wigner–Weisskopf. Alors intégrons (2.68) , on trouve:

$$c_{\vec{k},s}^{\rightarrow}(t) = \frac{1}{\hbar} g_{\vec{k},s}^{\rightarrow} \frac{e^{i(\omega_{\vec{k}} - \omega_N)t - \gamma t} - 1}{\omega_{\vec{k}} - \omega_N + i\gamma} \quad (2.70)$$

La probabilité pour que le système global reste dans  $|\psi_1 \rangle \otimes |0, \dots, 1_{\vec{k},s}, \dots \rangle$  est alors égale au carré du module du coefficient correspondant:

$$|c_{\vec{k},s}^{\rightarrow}|^2 = \frac{|g_{\vec{k},s}^{\rightarrow}|^2}{\hbar^2} \left| \frac{e^{i(\omega_{\vec{k}} - \omega_N)t - \gamma t} - 1}{\omega_{\vec{k}} - \omega_N + i\gamma} \right|^2 \quad (2.71)$$

En considérant t très grand, on peut négliger le terme exponentiel  $e^{i(\omega_{\vec{k}} - \omega_N)t - \gamma t}$  et on trouve:

$$|c_{\vec{k},s}^{\rightarrow}(\omega_{\vec{k}})|^2 = \frac{|g_{\vec{k},s}^{\rightarrow}|^2}{\hbar^2} \frac{1}{(\omega_{\vec{k}} - \omega_N)^2 + \gamma^2} \quad (2.72)$$

Cette distribution est une lorentzienne qui est de la forme suivante:

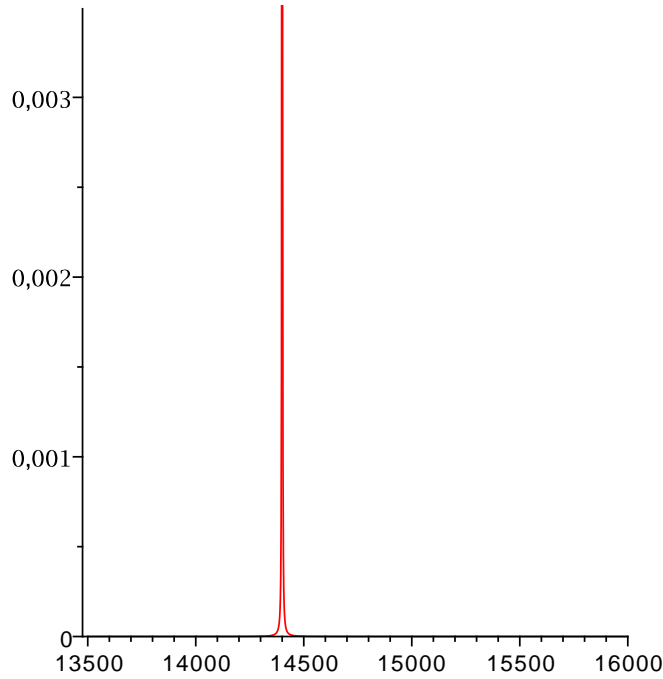


Figure 2.2: La probabilité de transition par émission spontanée d'un sous niveau excité vers un sous niveau fondamental; l'axe des abscisses représente les énergies en électrons-volts et celui des ordonnées la probabilité de transition.

Introduisons la largeur à mi-hauteur  $\Gamma$ :

$$\Gamma = 2\gamma; \quad (2.73)$$

$$\left| c_{\vec{k},s}(\omega_{\vec{k}}) \right|^2 = \frac{|g_{\vec{k},s}|^2}{\hbar^2} \frac{1}{(\omega_{\vec{k}} - \omega_N)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} \quad (2.74)$$

Les relations (2.69) et (2.70) dans (2.66) donnent une fonction de la forme:

$$\gamma = \sum_{\vec{k},s} \frac{|g_{\vec{k},s}|^2}{i\hbar^2} \frac{1 - e^{i(\omega_N - \omega_{\vec{k}})t + i\gamma t}}{(\omega_N - \omega_{\vec{k}}) - i\gamma} \quad (2.75)$$

Pour  $t$  grand on a la formule suivante [Loudon, 2000]

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1 - e^{-i\omega t}}{\omega} = P \frac{1}{\omega} + i\pi\delta(\omega); \quad (2.76)$$

où P est la valeur principale de l'intégrale:

$$P \int_{\omega_1}^{\omega_2} f(\omega) \frac{1}{\omega} d\omega = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left( \int_{-\omega}^{-\varepsilon} \frac{f(\omega)}{\omega} d\omega + \int_{+\varepsilon}^{\omega} \frac{f(\omega)}{\omega} d\omega \right). \quad (2.77)$$

En utilisant la formule (2.76), on a alors négligé  $\gamma$  devant  $\omega_N$  ce qui est toujours le cas dans la pratique:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1 - e^{-i(\omega_N - \omega_{\vec{k}})t}}{\omega_{\vec{k}} - \omega_N} = P \frac{1}{\omega_N - \omega_{\vec{k}}} + i\pi\delta(\omega_N - \omega_{\vec{k}}) \quad (2.78)$$

de façon que  $\gamma$  puisse s'écrire;

$$\gamma = \frac{\pi}{\hbar^2} \sum_{\vec{k},s} |g_{\vec{k},s}|^2 \delta(\omega_{\vec{k}} - \omega_N) + iP \sum_{\vec{k},s} \frac{1}{\hbar^2} \frac{|g_{\vec{k},s}|^2}{\omega_{\vec{k}} - \omega_N}. \quad (2.79)$$

Cette expression est le facteur d'amortissement qui est lié au temps de demi vie d'un noyau de  $^{57}\text{Fe}$  dans un sous niveau excité. Ce qui veut dire qu'après ce temps, il est dans un sous niveau inférieur. Ce facteur contient  $\Gamma$  qui est la largeur naturelle du niveau excité comme le montre la relation (2.74).

## 2.9 Discussion des résultats

Dans ce travail nous avons étudié le noyau de  $^{57}\text{Fe}$  incorporé dans un solide interagissant avec un champ magnétique et un gradient de champ électrique statique. Cela nous a permis d'étudier l'émission sans recul. Nous nous sommes intéressés sur le niveau fondamental de spin  $I = \frac{1}{2}$  et le premier niveau excité de spin  $I = \frac{3}{2}$ . Lors de l'interaction combinée d'un noyau avec un champ magnétique et un gradient de champ électrique statique, on a trouvé qu'il y a eu une levée de dégénérescence dans le niveau fondamental qui était doublement dégénéré avant l'interaction combinée.

Dans le niveau excité aussi, il y a une levée de dégénérescence lors de l'interaction combinée tout en sachant que, avant l'introduction de l'interaction, le niveau était 4 fois dégénéré.

Nous avons appliqué en plus un champ de photons extérieur de telle sorte qu'il y ait résonance dans les sous niveaux excités caractérisés par  $m_I = \frac{1}{2}$  et  $m_I = -\frac{1}{2}$ . L'étude de la résonance dans ces sous niveaux excités nous a permis de trouver qu'il y a eu une levée de dégénérescence dans chacun de ces deux sous niveaux. En effet chacun d'eux est doublement dégénéré en absence du champs quantifié. L'étude de l'émission spontanée nous a permis de trouver qu'il y a huit transitions possibles lorsqu'il n'y a pas eu de résonance dans le niveau fondamental et dans deux sous niveaux caractérisés par  $m_I = \frac{3}{2}$  et  $m_I = -\frac{3}{2}$ . A chaque transition correspond une distribution de Lorentz (figure 2.2); alors pour les huit transitions, nous avons huit distributions lorentziennes. Les intensités

correspondant à ces transitions sont données dans le tableau 2.2.

L'analyse détaillée du coefficient de la probabilité de trouver le noyau dans un état quelconque par unité de temps montre que cette fonction présente un pic prononcé lorsque la fréquence nucléaire est très proche de la fréquence du rayonnement rf.

Les relations (2.71) et (2.72) montrent que la distribution de fréquence  $\omega_{\vec{k}}$  des photons émis par un ensemble de noyaux excités est décrite par une distribution de Lorentz centrée sur la fréquence angulaire nucléaire et ayant une largeur à mi hauteur égale à  $2\gamma$ .

Donc à ces huit transitions possibles correspondent huit distribution de Lorentz qu'on peut déterminer avec précision lorsqu'on aura des logiciels plus performants que maple 13 et gnuplot qui présentent des limites dans la précision.

## CONCLUSION GENERALE

Nous avons constaté que ce domaine d'étude est très vaste. L'approche que nous avons utilisée est générale et peut être appliquée à n'importe quelle direction des champs électromagnétiques statiques extérieurs et du champ dépendant du temps, bien que les calculs risquent d'être plus compliqués et certainement plus longs. Nous avons travaillé sur le cas des noyaux de  $^{57}Fe$  soumis à l'interaction combinée des champs statiques et un champ dépendant du temps, nous avons étudié une résonance dans deux sous niveaux excités caractérisés par  $m_I = \frac{\pm 1}{2}$  en utilisant une approche totalement quantique.

Les champs électromagnétiques statiques modifient les propriétés physiques et chimiques des noyaux. L'émission spontanée est un phénomène qui apparaît naturellement pourvu que la différence énergétique entre un sous niveau de l'état excité et un sous niveau de l'état fondamental concernés devient très proche de l'énergie de rayonnement  $\gamma$  susceptible d'être produit par émission spontanée. Les résultats trouvés montrent que notre approche est plus générale par rapport à l'approche semi-classique.

D'autres chercheurs peuvent faire une étude similaire sur d'autres isotopes. Ils peuvent aussi travailler sur le  $^{57}Fe$  en considérant une résonance noyau-rayonnement quantifié dans l'état fondamental. Lorsqu'il y a eu résonance dans l'état fondamental et dans l'état excité, cette approche peut aider à avoir une information sur les propriétés physico-chimiques du matériau.

# BIBLIOGRAPHIE

- [Abragam et Wertheim, 1965] ABRAGAM, A. et WERTHEIM, G. (1965). L'effet mössbauer et ses applications à l'étude des champs internes. *Physics Today*, 18(2):60.
- [Blais, 2014] BLAIS, A. (2014). *Mécanique quantique II PHQ-430*. UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE.
- [Cohen-Tannoudji *et al.*, ] COHEN-TANNOUDJI, C., DUPORT-ROC, J. et ARYBERG, G. Atom-photon interactions wiley, new york, 1992. *Multiphoton Ionization of Atoms*.
- [Cotton, 1960] COTTON, E. (1960). Émission et absorption de rayonnement gamma sans recul du noyau émetteur emprisonné dans un réseau cristallin (effet mössbauer). *J. Phys. Radium*, 21(5):265–287.
- [Danon, 1968] DANON, J. (1968). Lectures on the mössbauer effect gordon and breach.
- [El Hafid, 2013] EL HAFID, M. E. H. (2013). *Cristallogénèse exploratoire, structure cristalline et propriétés physiques des deux nouveaux composés dans le système PbO-Fe<sub>2</sub>O<sub>3</sub>-P<sub>2</sub>O<sub>5</sub>*. Thèse de doctorat, Bordeaux 1.
- [Ferrari, 2008] FERRARI, M. (2008). *Aspects fondamentaux de la Résonance Quadripolaire Nucléaire de l'azote-14 par impulsion de champ radiofréquence–Vérifications Expérimentales*. Thèse de doctorat, PhD thesis, University Henri Poincaré-Nancy I, France.
- [Frauenfelder, 1962] FRAUENFELDER, H. (1962). The mössbauer effect: A review, with a collection of reprints.
- [Gravereau, 2011] GRAVEREAU, P. (2011). *Introduction à la pratique de la diffraction des rayons X par les poudres*. Thèse de doctorat, Sciences Chimiques.
- [Greenwood et Gibb, 1971] GREENWOOD, N. et GIBB, T. (1971). Mössbauer spectroscopy chapman and hall. *Ltd. London*.
- [Gruverman et Seidel, 2012] GRUVERMAN, I. J. et SEIDEL, C. W. (2012). *Mössbauer Effect Methodology: Volume 8 Proceedings of the Eighth Symposium on Mössbauer Effect Methodology New York City, January 28, 1973*. Springer Science & Business Media.

- [Hobert, 1981] HOBERT, H. (1981). Mössbauer spectroscopy: Von a. vértés, l. korecz, k. burger; budapest, akadémiai kiadó, 1979.
- [Janot, 1976] JANOT, C. (1976). Effet mossbauer et applications à la physique du solide. *Pure and Applied Chemistry*, 48(1):53–64.
- [Loudon, 2000] LOUDON, R. (2000). *The quantum theory of light*. OUP Oxford.
- [Massaq, 1991] MASSAQ, M. (1991). *Moments magnétiques nucléaires mesurés par résonance magnétique nucléaire sur noyaux orientés*. Thèse de doctorat, Lyon 1.
- [Odeurs, 1995] ODEURS, J. (1995). Mössbauer-nmr double resonance: A completely quantized quasi-static approach. *Hyperfine Interactions*, 96(1):177–194.
- [Odeurs et Hoy, 1998] ODEURS, J. et HOY, G. R. (1998). Mössbauer-zeeman spectroscopy using nuclear ground states dressed with rf photons. *Journal of Physics: Condensed Matter*, 10(42):9507.
- [Odeurs et Hoy, 1999] ODEURS, J. et HOY, G. R. (1999). Nuclear ground states dressed with rf photons in mössbauer–zeeman  $^{57}\text{Fe}$  spectroscopy. *Hyperfine interactions*, 120(1-8):175–179.
- [Odeurs et Hoy, 2000] ODEURS, J. et HOY, G. R. (2000). Gamma-nmr double resonance: A dressed state approach. *Laser and Particle Beams*, 18(1):129–134.
- [P.B. Fabritchnyi, 2012] P.B. FABRITCHNYI, K. P. (2012). Spectrometrie mössbauer et son application á la caracterisation des materiaux.
- [Pierre, 2022] PIERRE, I. (2022). Mössbauer effet, encyclopædia universalis [en ligne], consulté le 8 juin 2022. <https://www.universalis.fr/encyclopedie/effet-mossbauer/>.
- [SAGHIR, 2013] SAGHIR, A. (2013). *Contribution à la caractérisation des structures rayonnantes. Application aux études en champ proche de rayonnement électromagnétique*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Toulouse (INP Toulouse).
- [Slichter, 2013] SLICHTER, C. P. (2013). *Principles of magnetic resonance*, volume 1. Springer Science & Business Media.
- [Surugue, 1942] SURUGUE, J. (1942). Les rayonnements  $\gamma$  et les niveaux d'excitation nucléaires du dépôt actif de l'actinon. *J. phys. radium*, 3(4):71–77.
- [Ziegler et Biersack, 1985] ZIEGLER, J. F. et BIERSACK, J. P. (1985). *The stopping and range of ions in matter*. Springer.